БАКАЛАВРИАТ

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ

УЧЕБНИК

КНОРУС

Б А К А Л А В Р И А Т

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ

Под редакцией **В.М. Гончаренко** и **В.Ю. Попова**

Рекомендовано ФГБОУ ВПО
«Государственный университет управления»
в качестве **учебника** для студентов вузов,
обучающихся по направлениям подготовки «Экономика»
и «Прикладная математика и информатика»
(квалификация (степень) «бакалавр»)

Регистрационный номер рецензии № 133 от 09.04.2012 ФГАУ «ФИРО»

Второе издание, стереотипное

КНОРУС • МОСКВА • 2015

KnorusMedia
электронные версии книг

УДК 33/.336(075.8)
ББК 65.290я73
М54

Рецензенты:
А.А. Курушин, генеральный директор ООО «Инвестиционная компания "Центр развития фондовых технологий"», канд. экон. наук,
С.В. Мхитарян, проф. кафедры маркетинга и коммерции МЭСИ, д-р экон. наук,
В.А. Попов, доц. кафедры «Прикладная математика» Финансового университета при Правительстве РФ, канд. физ.-мат. наук,
И.А. Соловьев, заведующий кафедрой высшей математики и физики ФГОУ ВПО «Государственный университет по землеустройству», д-р физ.-мат. наук, проф.

Авторы:
И.А. Александрова, В.М. Гончаренко, И.Е. Денежкина, В.В. Киселев, Д.С. Набатова, В.Ю. Попов, И.Г. Шандра, А.Б. Шаповал

Методы оптимальных решений в экономике и финансах : учебник /
М54 коллектив авторов ; под ред. В.М. Гончаренко, В.Ю. Попова. — 2-е изд., стер. — М. : КНОРУС, 2015. — 400 с. — (Бакалавриат).

ISBN 978-5-406-03941-0

Излагаются основные методы оптимизации, которые применяются при решении прикладных экономических задач. Последовательно рассмотрены линейные модели в экономике, основы линейного программирования и теории двойственности, их применение при решении различных типов транспортных задач; математические методы решения задач нелинейного программирования и их применение в теории производства и потребления, методы решения задач многокритериальной оптимизации и динамического программирования, основы теории игр и ее применение при решении задач пространственной экономики. Особое внимание уделено численным методам, необходимым для исследования полученных математических моделей.

Соответствует действующему Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования нового поколения.

Для студентов, обучающихся по направлениям «Экономика», «Прикладная математика и информатика» и другим направлениям подготовки бакалавров, а также для магистрантов, аспирантов, слушателей послевузовского образования и преподавателей.

УДК 33/.336(075.8)
ББК 65.290я73

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ

Сертификат соответствия № РОСС RU. АЕ51. Н 16509 от 18.06.2013.

Изд. № 7823. Формат 60×90/16. Гарнитура «NewtonC».
Усл. печ. л. 25,0. Уч.-изд. л. 12,35.

ООО «Издательство «КноРус».
117218, г. Москва, ул. Кедрова, д. 14, корп. 2.
Тел.: 8-495-741-46-28.
E-mail: office@knorus.ru http://www.knorus.ru

Отпечатано в ООО «Эль Гранде».
111020, г. Москва, ул. Боровая, д. 3, стр. 4.

ISBN 978-5-406-03941-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью решения многих практических задач является получение конкретного результата в виде числа или набора чисел. Это возможно, если задача сформулирована на языке математики. Крупнейшие ученые посвящали свои труды математическому описанию явлений и его исследованию. Позже этот процесс был назван математическим моделированием. При появлении новых моделей требовалось разрабатывать новые методы решения соответствующих математических задач. Часто решение задачи в общем виде было невозможно, поэтому разрабатывались методы, позволяющие найти конкретное решение, применимое на практике. Многие из этих методов были названы именами своих великих создателей — Эйлера, Ньютона, Гаусса.

Первые математические модели в экономике были созданы Ф. Кене («Экономическая таблица», 1758 г.), А. Смитом (классическая макроэкономическая модель), Д. Риккардо (модель международной торговли) и носили описательный характер. В XIX веке математическому моделированию рыночной экономики посвятили свои работы В. Парето, Ф. Эджвот, О. Курно, Л. Вальрас и др. В XX веке возникли новые возможности для моделирования, обусловленные появлением и развитием вычислительной техники и соответствующих разделов прикладной математики. Многие работы, удостоенные Нобелевской премии в области экономических наук, связаны с использованием математических моделей (Д. Хикс, Р. Солоу, В. Леонтьев, П. Самуэльсон). Перед моделями ставится задача уже не только описания и выявления закономерностей изучаемого объекта, но и предсказания его поведения при изменении некоторых параметров, а также принятия решений о дальнейших действиях. Традиционная опора только на интуицию и опыт отдельных людей при принятии экономических решений становится практически неприемлемой в силу невозможности оценить всю совокупность существенных факторов. В модели все они оцениваются количественно, что делает прогноз или оценку более обоснованными. Использование математических моделей в экономике позволяет формально описать наиболее существенные связи между переменными, определяющими явление или процесс. Количество этих переменных и связей и детальность их описания определяется как желаемой степенью адекватности модели, так и возможностями разработчика и пользователя. Поэтому любая математическая модель упрощенно описывает процесс, т.е. является неполной. Так, в простейшей модели спроса считается, что величина спроса на товар зависит от цены и уровня доходов потребителя. Но кроме этого спрос могут определять такие факторы, как традиции региона, мода, реклама и др. Примерами экономических математических моделей являются модели фирмы, экономического роста, рекламы, модели равновесия на товарных, факторных и финансовых рынках и многие другие.

Итак, *модель* — это упрощенное описание (или непосредственное создание) некоторого подобия исследуемого объекта, выявляющего только существенные для поставленной задачи черты. Если это описание производится на формальном языке математики, то модель является математической. Облик модели определяется целью ее создания. Эти цели могут быть следующие:

1) непосредственное использование модели (например, игрушки, манекена, модели самолета);

2) описание объекта — выявление закономерностей, статистика, прогнозирование, идентификация и т.д.;

3) управление объектом — получение требуемых характеристик на выходе модели путем подачи нужных сигналов на ее вход;

4) создание (проектирование) объекта;

5) принятие решений.

Конец XX века характеризуется бурным развитием вычислительной техники, что вызывает активную разработку соответствующих численных методов. В настоящее время численные методы (численный анализ) являются одним из важнейших разделов математики, без изучения которого образование современного специалиста является неполным.

Кроме того, применение математического моделирования в одной области позволяет использовать достижения математики, полученные в другой области науки. Поэтому, если при создании модели получаются уравнения, для которых уже разработаны методы решения, можно их использовать, абстрагируясь от смысла модели. Это свойство математических моделей является очень удобным. Уже накоплен большой опыт решения задач в области, например, технических наук, где разработано и отлажено соответствующее математическое обеспечение. И все это богатство может быть использовано при решении экономических задач, описываемых усложняющимися математическими моделями. Следует отметить, что математическое моделирование — это не только введение переменных и написание математических соотношений. Это достаточно сложный процесс, возможно, многократно повторяющийся, требующий учета множества факторов, относящихся не только к самой модели. Примерная схема математического моделирования приведена на рис. 1.

Классическим средством изучения математических моделей и исследования на этой основе реальных процессов и явлений служат аналитические методы, позволяющие получить точные решения в виде математических формул. Они позволяют решить задачу в общем виде и получить полную информацию о поведении объекта. Однако класс задач, для которых они могут быть использованы, весьма ограничен. Во-первых, далеко не всегда полученная математическая модель содержит функции, удовлетворяющие требованиям непрерывности, достаточной гладкости и т.п., без выполнения которых аналитического решения может не получиться. Во-вторых, не все задачи имеют решение. Например, вычисление длины дуги кривой с помощью определенного интеграла часто сводится к необходимости вычисления «неберущегося» интеграла. В-третьих, не все исходные данные могут быть представлены в виде аналитического выражения. Кроме того, при решении практических задач далеко не всегда необходимо искать общее решение или все возможные решения. Во всех таких случаях применяются численные методы. Наука, изучающая численные методы, называется *численным анализом* или *вычислительной математикой*.

Рис. 1. Этапы математического моделирования

Численные методы в отличие от аналитических позволяют получить не общее, а частное решение задачи либо решить задачу не в бесконечномерном, а в некотором конечномерном пространстве. При этом необходимо выполнить достаточно большое количество арифметических и логических операций, используя большие массивы данных. Получив решение, требуется оценить, насколько оно адекватно поставленной задаче, какова область его применимости. Все это выполняется с помощью математического обеспечения, разрабатываемого для компьютеров. Изучение численных методов необходимо современному специалисту как для разработки новых алгоритмов, так и для выбора из множества существующих наиболее подходящего.

Данная книга написана на основании многолетнего опыта преподавания дисциплины «Методы оптимальных решений» студентам экономических направлений подготовки бакалавров, а также дисциплин «Исследование операций», «Методы оптимизации» и «Численные методы» студентам, обучающимся по направлению «Прикладная математика и информатика» Финансового университета при Правительстве РФ.

Книга, с одной стороны, позволяет получить базовые знания по методам оптимизации, применяемым в экономике и финансах, а с другой, дает необходимые навыки для решения практических задач, реально возникающих в экономике.

Главы 1, 6 (параграф 6.9), 10, 14 — И.Е. Денежкина.

Главы 2, 8 и 9 — И.Г. Шандра.

Глава 3 (параграфы 3.1—3.6) — И.А. Александрова.

Главы 3 (параграфы 3.7—3.9), 4, 5 (параграфы 5.1, 5.2) — В.М. Гончаренко.

Главы 5 (параграф 5.3), 6 (параграфы 6.1—6.8) — В.Ю. Попов.

Главы 7, 11 и 12 — В.В. Киселев.

Глава 13 (параграфы 13.1—13.4) — Д.С. Набатова.

Глава 13 (параграфы 13.5—13.6) — А.Б. Шаповал.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Элементы машинной арифметики

Выполнение арифметических операций с использованием вычислительной техники — от мощных компьютеров до простейших калькуляторов — несколько отличается от привычных действий. Главное отличие арифметики «машинной» от «классической» заключается в том, что любое техническое устройство имеет дело лишь с конечным набором цифр и знаков. Каждое число может быть представлено последовательностью цифр, длина которой определяется длиной ячейки памяти устройства. Даже если эта последовательность очень длинная, все равно она конечная. При выполнении нескольких операций можно и не заметить никаких отличий. Но применение численных методов, которые мы будем рассматривать, требует огромного числа арифметических операций. Поэтому необходимо понимать, к чему приводит ограничение на количество участвующих в расчетах цифр.

Любое число в устройстве может быть представлено лишь конечной десятичной дробью. Но есть числа, например иррациональные, которые имеют вид бесконечной дроби. Даже результат простейшей операции — деления единицы на три — порождает бесконечную дробь. Следовательно, не все числа можно представить точно, т.е. нельзя выполнять действия в полном классе вещественных чисел. Непредставимы очень большие или очень маленькие числа.

При выполнении арифметических операций неизбежно возникают ошибки, называемые ошибками округления. Они возникают из-за того, что результат операции не может быть полностью помещен в ячейку памяти.

1.1.1. Представление чисел в памяти вычислительного устройства

Когда мы набираем число для ввода в компьютер, мы обычно используем привычную для нас десятичную систему счисления. Именно в таком виде число появляется на экране или печатается на принтере. Это так называемая внешняя форма представления числа.

В памяти компьютера число хранится в другой форме, которая называется внутренней формой представления числа. Чаще всего это двоичная или 16-ричная система счисления.

Напомним, что любое число в p-ичной системе счисления имеет вид последовательно записанных цифр: $A_p = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0,\ b_1 \dots b_m$ — и вычисляется по формуле

$$A_p = a_n \cdot p_n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0 \cdot 1 + b_1 \cdot p^{-1} + \dots + b_m \cdot p^{-m}.$$

Число p называется *основанием системы счисления*. Одно и то же число имеет разный вид в разных системах счисления, и наоборот, один и тот же вид числа в разных системах подразумевает разное числовое значение. Например:

$$12{,}34_{10} = 1 \cdot 10 + 2 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}01 = 12{,}34;$$
$$12{,}34_{16} = 1 \cdot 16 + 2 + 3 \cdot 0{,}0625 + 4 \cdot 0{,}00390625 = 18{,}203125.$$

Нижний индекс у числа указывает основание системы счисления, в которой оно записано.

Использование двоичной системы счисления для внутренней формы представления числа в компьютере определяется тем, что двоичная единица (*бит*) — это минимально возможная единица информации. Для представления числа используются два знака — 0 и 1. Число при этом получается очень длинным. Например, десятичное число $256 = 2^8$ в двоичной форме представляется девятизначным числом 100 000 000. Каждые 4 двоичные цифры могут быть записаны одной 16-ричной ($256_{10} = 100_{16}$), число получается в 4 раза короче. Поэтому более наглядной является 16-ричная система счисления.

Важным является не только выбор системы счисления, но и расположение числа в ячейке памяти.

Обычно число разрядов в ячейке фиксировано. Для экономических расчетов и делопроизводства используется 32-битовая ячейка памяти (имеющая 32 двоичных разряда). Число в нее можно записать по-разному.

Первый способ предполагает, что под дробную часть числа отводится строго определенное число разрядов. В этом случае говорят, что число представлено *с фиксированной точкой* (*запятой*). Все числа, представимые в таком виде, составляют множество $P(\beta, t, f)$, где β — основание системы счисления, t — количество соответствующих разрядов в числе; f — количество цифр в дробной части. Например, $P(10, 4, 1)$ — это все десятичные трехзначные числа с одним знаком после запятой: –999,9; –999,8; ...; 000,0; 000,1; ... 999,9. Этих чисел 19 999. Любое число $x \in (-1000;\ 1000)$ может быть представлено ближайшим к нему числом из этой системы, но с некоторой ошибкой (*погрешностью*). Чаще всего таким способом пользуются для записи целых чисел.

Замечание 1.1. Самым большим целым числом, которое можно записать в 32-битовую ячейку памяти, является $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$. Попытка записать в память большее число приведет к ошибке.

Второй способ записи чисел является более распространенным и называется представлением числа в форме *с плавающей точкой* (*запятой*).

Любое десятичное число можно записать в виде $A = f \cdot 10e$, где f — правильная десятичная дробь, первая цифра которой после запятой не ноль ($f \in [0{,}1;\ 1]$), называемая *мантиссой* числа, e — целое число, называемое *порядком* числа. То есть пара (f, e) полностью определяет число. Например, $234{,}567 = 0{,}234567 \cdot 10^3$; $0{,}0000897 = 0{,}897 \cdot 10^{-4}$. Если основание системы счисления другое, то оно и будет возводиться в степень, равную порядку числа.

Определение 1.1. ***Значащими цифрами приближенного числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.***

Представление числа в форме с плавающей точкой включает только значащие цифры.

Все числа, представимые с плавающей точкой, могут быть заданы в виде множества $F(\beta, t, L, V)$, где β — основание системы счисления; t — количество соответствующих разрядов в мантиссе числа; L, V — наибольшее и наименьшее значение порядка.

Итак, число записывается в ячейку памяти в виде последовательности 32 двоичных цифр. Нумерация разрядов производится справа налево. Самый левый, 32-й разряд всегда определяет знак числа. Остальные разряды имеют разный смысл в зависимости от того, в какой форме представляется число.

Число с фиксированной точкой (целое число):

32	31	1
знак числа	число	

Число с плавающей точкой:

32	31	25	24	1
знак числа	порядок числа		мантисса	

Замечание 1.2. Таким образом, одна и та же последовательность знаков может быть прочитана по-разному. Отметим, что в калькуляторах

распознавание формы числа производится автоматически. При программировании на некоторых алгоритмических языках необходимо явно указывать форму представления данных.

Замечание 1.3. В стандартном компьютере используется система чисел $F(16, 6, -64, 63)$, т.е. 16-ричные числа с 6 знаками в мантиссе. Самое маленькое по модулю число, представимое в такой системе, $16^{-65} \approx \approx 5{,}4 \cdot 10^{-79}$, а самое большое по модулю число $(1 - 16^{-64})16^{63} \approx 7{,}2 \cdot 10^{75}$.

1.1.2. Процесс округления

Чтобы число поместилось в ячейку памяти, оно должно иметь фиксированную длину. Замена числа ближайшим к нему числом с меньшим количеством цифр называется *округлением*.

Необходимость округления может возникнуть сразу же при переводе числа из десятичной системы в двоичную. Результат арифметической операции также может дать большее число цифр, чем в операндах. Например, перемножив два двузначных числа, можно получить четырехзначное.

Существует два способа округления.

Первый состоит в отбрасывании всех «лишних» цифр, он называется *«округление с усечением»*. Все участвующие в расчете числа в этом случае будут чуть меньше исходных (взяты *с недостатком*), т.е. ошибка будет всегда одного знака. При большом количестве операций она будет только возрастать (*накапливаться*).

При втором способе, который называется *симметричным округлением* (или *округлением по Брадису*), анализируется первая из отбрасываемых цифр. Если она меньше 5, то оставшиеся цифры не изменяются. Если она больше или равна 5 и среди отбрасываемых цифр есть ненулевые, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица. Если отбрасывается только цифра 5 (остальные отбрасываемые цифры — нулевые), то последняя из оставшихся цифр не меняется, если она четная, и увеличивается на единицу, если нечетная.

Пример 1.1. $e = 2{,}718281828459045\ldots$. При округлении его до n знаков после запятой получим:

n	Округление с усечением	Симметричное округление
6	2,718281	2,718282
5	2,71828	2,71828
2	2,71	2,72
0	2	3

Замечание 1.4. Несмотря на очевидные преимущества симметричного округления, во многих вычислительных устройствах используется округление с усечением, так как оно проще, следовательно, дешевле.

Описанные особенности приводят к тому, что в машинной арифметике привычные законы вычислений, такие как коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность, не всегда соблюдаются.

Пример 1.2. Пусть требуется перемножить 300 чисел, первые 150 из которых имеют значение 0,1, остальные равны 10. Если упорядочить их по возрастанию значений и затем перемножить, то результат будет равен 0. Если последовательно перемножать, начиная с наибольшего, то результат не будет получен, так как будет превышено наибольшее представимое в компьютере значение. Если же эти значения чередуются, то результат будет равен 1.

1.1.3. Погрешности вычислений

Пусть x — точное значение числа, а x^* — приближенное.

Определение 1.2. ***Абсолютной погрешностью*** *приближения x^* называют величину*

$$\Delta x^* = |x^* - x|.$$

Так как точное значение обычно неизвестно, абсолютную погрешность можно только оценить. Если известно наибольшее возможное значение абсолютной погрешности, то можно утверждать, что точное значение лежит в интервале $x \in (x^* - \Delta x^*, x^* + \Delta x^*)$.

Определение 1.3. ***Относительной погрешностью*** *приближения x^* называют величину*

$$\delta x^* = \frac{|x^* - x|}{|x^*|} = \frac{\Delta x^*}{|x^*|}.$$

Величину относительной погрешности часто выражают в процентах. При известной величине относительной погрешности считают, что точное значение $x \in \left(x^*(1-\delta x^*), x^*(1+\delta x^*)\right)$.

Определение 1.4. *Первые n значащих цифр числа называются* ***верными****, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, соответствующего n-й значащей цифре. Цифры, стоящие за последней верной, называют* ***сомнительными****.*

Вычислить значение с точностью $\varepsilon = 10^{-n}$ означает, что значащая цифра, стоящая в n-м разряде после запятой, должна быть верной.

Если абсолютная погрешность числа не указана, то принято считать, что она равна половине единицы последнего указанного разряда.

Пример 1.3. Если $\pi = 3{,}14$, то $\Delta\pi = 0{,}005$; если $\pi = 3{,}14159$, то $\Delta\pi = 0{,}000005$.

При выполнении арифметических операций количество значащих цифр в числе, как правило, увеличивается, например: $2{,}33 + 0{,}011 = 2{,}341$; $0{,}35 \cdot 0{,}35 = 0{,}1225$.

Выполнение любой арифметической операции в вычислительном устройстве — это сложный многошаговый алгоритм. Например, чтобы сложить два числа с плавающей точкой, необходимо выполнить следующую последовательность действий.

Пример 1.4. Вычислить $a = b + c$, $b = 0{,}0823456$, $c = 210{,}112283$ в арифметике с шестью десятичными разрядами:

1) перенос операндов в специальные ячейки увеличенной длины (регистры): $b = 0{,}823456 \cdot 10^{-1}$, $c = 0{,}210112283 \cdot 10^3$;

2) выравнивание порядков операндов (выбор большего порядка и приведение к нему обоих чисел): $b = 0{,}0000823456 \cdot 10^3$;

3) сложение мантисс (поразрядно): $a = 0{,}21019462886 \cdot 10^3$;

4) перенос результата из регистра в обычную ячейку памяти, сохраняя 6 знаков в мантиссе, округлив, например, симметрично: $a = 0{,}210195 \cdot 10^3$.

Даже этот простой пример показывает, что операции с разномасштабными числами (с существенно разными порядками) приводит к ошибке. Если разность порядков превышает количество используемых разрядов, операция становится невозможной.

Приведем правило вычисления погрешностей арифметических операций по погрешностям операндов.

Пусть известны приближенные значения чисел x^* и y^* и их абсолютные погрешности. Тогда $x = z^* \pm \Delta x^*$, $y = y^* \pm \Delta y^*$.

Найдем погрешность их суммы $z = x + y$:

$$\Delta z^* = |z - z^*| = |x - x^* + y - y^*| \le |x - x^*| + |y - y^*| = \Delta x^* + \Delta y^*.$$

Аналогично для разности $z = x - y$:

$$\Delta z^* = \Delta x^* + \Delta y^*.$$

Итак, при сложении и вычитании чисел их абсолютные погрешности складываются.

Для относительных погрешностей справедлива следующая формула:

$$\delta(x^* \pm y^*) = \frac{\Delta(x^* + y^*)}{|x^* \pm y^*|} = \frac{\Delta x^* + \Delta y^*}{|x^* \pm y^*|} = \frac{x^*}{|x^* \pm y^*|}\delta x^* + \frac{y^*}{|x^* \pm y^*|}\delta y^*.$$

Для произведения $z = x \cdot y$:

$$\Delta z^* = \Delta x^* \cdot y^* + \Delta y^* \cdot x^*;$$

$$\delta z^* = \frac{\Delta z^*}{|z^*|} = \frac{\Delta x^* \cdot y + \Delta y^* \cdot x}{x^* y^*} = \delta x^* + \delta y^*.$$

Для частного $z = \frac{x}{y}$:

$$\Delta z^* = \frac{\Delta x^* \cdot y^* - \Delta y^* \cdot x^*}{(y^*)^2} \le \frac{\Delta x^* \cdot y^* + \Delta y^* \cdot x^*}{(y^*)^2},;$$

$$\delta z^* = \frac{\Delta z^*}{|z^*|} = \frac{\Delta x^* \cdot y^* + \Delta y^* \cdot x^*}{(y^*)^2} \cdot \frac{y^*}{x^*} = \delta x^* + \delta y^*.$$

Таким образом, относительная погрешность произведения и частного не превосходит суммы относительных погрешностей операндов.

Замечание 1.5. При вычитании близких по величине чисел происходит потеря значащих цифр, так как разность этих чисел близка к нулю, поэтому относительная погрешность разности существенно больше относительных погрешностей операндов. Например, 1,2345 – 1,2344 = 0,0001. В операндах пять значащих цифр, а в результате — всего одна.

1.1.4. Параметры машинной арифметики

Множество чисел, в котором производятся расчеты, определяется, как уже отмечено, основанием используемой системы счисления β и количеством разрядов t в мантиссе числа, представленного в форме с плавающей точкой.

При выполнении расчетов часто бывает необходимо задать требуемую точность расчета либо оценить точность полученного результата. Эта точность будет зависеть от указанных параметров, часто называемых *параметрами машинной арифметики*. Но важно не только количество чисел. Важной характеристикой является плотность расположения чисел на числовой оси, так называемая *мера дискретности* системы. Например, при использовании 6-разрядной десятичной арифметики с плавающей точкой мы каждое число представляем шестью знаками в мантиссе. Так, следующим после числа $0{,}100000 \cdot 10^6 = 100\,000$ будет число 100 001. Мы не сможем прибавить к нему правильную дробь. Если расчеты ведутся в этом числовом диапазоне, нельзя задавать точность, например, 10^{-3} — она никогда не будет достигнута.

В качестве меры дискретности числовой системы принимают величину, называемую *машинным эпсилоном*.

Определение 1.5. ***Машинный эпсилон*** *— это наименьшее положительное число* ε_M *такое, что* $1 + \varepsilon_M > 1$.

Можно сказать, что ε_M — это расстояние между единицей и следующим представленным в системе числом. При использовании численных методов часто возникает необходимость сравнения действительных чисел по величине либо их сравнения с нулем. Точного равенства при вычислениях с плавающей точкой добиться, как правило, невозможно. Можно считать, что два действительных числа x и y равны, если $\frac{|x-y|}{|x|} < \sqrt{\varepsilon_M}$. В качестве нулевой величины для различных чисел должны выбираться разные значения. Для конкретного значения x нулем можно считать любое число из интервала $(-\varepsilon_M \cdot |x|, +\varepsilon_M \cdot |x|)$.

Замечание 1.6. Основные параметры машинной арифметики связаны соотношением $\varepsilon_M = \beta^{1-t}$.

Итак, при вычислениях с ограниченной разрядностью ошибки неизбежны. Но можно и нужно их контролировать и стремиться по возможности уменьшить их влияние на результат. Это достигается путем выбора алгоритма, изменения порядка вычислений, а также соблюдением достаточно простых правил. Приведем некоторые из них.

1. Избегать вычитания близких по величине чисел.
2. Избегать деления больших по модулю чисел на малые.
3. Стараться не использовать в расчетах числа существенно разных порядков, масштабировать данные.
4. Сложение длинной последовательности чисел всегда начинать с малых по модулю членов (например, суммировать члены ряда, начиная с последних).
5. Стремиться уменьшить общее число арифметических операций.

6. Выбирать методы, имеющие оценку ошибки, либо проводить оценку ошибки после вычислений.

7. Не сравнивать на равенство действительные числа.

1.2. Решение систем линейных уравнений

Моделирование различных процессов в экономике часто приводит к необходимости решения систем линейных алгебраических уравнений. В общем случае эта задача имеет вид: для заданной $n \times n$ матрицы A и вектора $b \in R^n$ найти вектор $x \in R^n$ такой, что

$$Ax = b. \tag{1.1}$$

Пусть количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. В противном случае требуется дополнительное исследование, известное читателю из курса линейной алгебры.

Известно, что эта задача имеет единственное решение, если определитель матрицы A отличен от нуля. В этом случае систему можно решить либо с помощью обратной матрицы по формуле

$$x = A^{-1} \cdot b, \tag{1.2}$$

либо методом Гаусса. Решение практических задач, особенно с использованием вычислительной техники, бывает сопряжено с некоторыми проблемами, затрудняющими применение указанных методов. При большом количестве уравнений ошибки округления становятся преобладающими. В случае когда определитель системы не равен нулю, но очень мал, решение получить сложно. Кроме того, задача может быть *плохо обусловленной*. Это понятие мы рассмотрим далее.

На практике используют два класса методов решения систем линейных алгебраических уравнений:

1) *прямые методы*, позволяющие получить точное (без учета ошибок округления) решение, при выполнении конечного числа операций. К прямым методам относится метод Гаусса и его модификации и т.п.;

2) *итерационные методы* (*методы последовательных приближений*), основанные на циклическом повторении некоторых операций (*итераций*), позволяющие получить приближенное решение, вообще говоря, с любой заданной точностью. К итерационным методам относится метод простой итерации, метод Зейделя и др.

Рассмотрим некоторые методы, наиболее часто применяемые при решении практических задач.

1.2.1. Метод Гаусса

Метод Гаусса, хорошо известный из курса линейной алгебры, состоит в равносильных преобразованиях системы, приводящих к последовательному исключению неизвестных. При этом расширенная матрица системы

$$\overline{A}=(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

приводится к треугольному виду:

$$\overline{A^*}=(A^*|\,b^*)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a^*_{12} & \dots & a^*_{1n} & b^*_1 \\ 0 & 1 & \dots & a^*_{2n} & b^*_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b^*_n \end{array}\right).$$

Вместо системы (1.1) получается система

$$A^*x=b^*. \tag{1.3}$$

Процесс приведения системы (1.1) к виду (1.3) носит название *прямой ход метода Гаусса*[1]. Напомним, что для приведения матрицы A к верхнетреугольному виду с единицами на главной диагонали необходимо выполнить следующие действия:

1) разделить все элементы первой строки (ее называют *ведущей* строкой) на первый (*ведущий*) элемент;

2) каждую следующую i-ю строку ($i=2, \dots, n$) складывать с *ведущей*, умноженной на $(-a_{i1})$. В результате в первом столбце первый элемент равен 1, а остальные 0;

3) исключить из рассмотрения первую строку и первый столбец и повторить п. 1 и 2.

Прямой ход завершен, когда все строки исчерпаны.

Обратный ход состоит в вычислении неизвестных, начиная с последнего.

Пример 1.5. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 5x_1+x_3=11; \\ 2x_1+6x_2-2x_3=8; \\ -3x_1+2x_2+10x_3=6. \end{cases}$

[1] Гаусс Карл Фридрих (30.4. 1777, Брауншвейг — 23.2.1855, Геттинген) — великий немецкий математик, внесший фундаментальный вклад также в астрономию и геодезию.

Будем производить указанные действия над расширенной матрицей системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 6 & -2 & 8 \\ -3 & 2 & 10 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0{,}2 & 2{,}2 \\ 0 & 6 & -2{,}4 & 3{,}6 \\ 0 & 2 & 10{,}6 & 12{,}6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0{,}2 & 2{,}2 \\ 0 & 1 & -0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Прямой ход выполнен, матрица имеет верхний треугольный вид с единичной главной диагональю. Обратный ход:

$$x_3 = 1;\ x_2 = 0{,}6 + 0{,}4x_3 = 1;\ x_1 = 2{,}2 - 0{,}2x_3 = 2.$$

Ответ: $x = (2;\ 1;\ 1)$.

Для оценки точности полученного решения x^* вычислим вектор $r = Ax^* - b$. Его называют вектором *невязок*. Норма этого вектора $\|r\|$ и является мерой точности полученного решения. Если $\|r\| = 0$, решение точное (как в приведенном примере).

Теоретически при невырожденной матрице A метод Гаусса всегда приводит к единственному точному решению. Практически же формальное применение этого алгоритма может не дать требуемого результата.

Если на каком-то шаге ведущим элементом окажется ноль, процесс остановится. Если ведущий элемент окажется малым по абсолютной величине, то погрешности вычислений будут большими.

Пример 1.6. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 0{,}0001x + y = 1; \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Точным ее решением будет: $x = 1{,}00010$; $y = 0{,}99990$. Решим ее в десятичной арифметике с тремя значащими цифрами. Умножим первое уравнение на $-10\,000$ и сложим со вторым. Получим

$$\begin{cases} -x - 10000y = -10000; \\ -10000y = -10000. \end{cases}$$

Решением является $x = 0$; $y = 1$. Напомним, что мы имеем право использовать только три значащие цифры. Полученное решение нельзя признать верным ни при какой заданной точности. Часто такую ситуацию называют *вычислительной катастрофой*.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} y+0{,}0001x=1; \\ y+x=2. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое, получим

$$\begin{cases} y+0{,}0001x=1; \\ x=1. \end{cases}$$

Решением этой системы будет: $x = 1$; $y = 1$. Это решение в заданных условиях является вполне приемлемым.

Таким образом, малые ведущие элементы использовать нельзя. Для преодоления этой проблемы применяют метод Гаусса *с выбором ведущего элемента* (*метод Гаусса — Жордана*). На каждом шаге в качестве ведущего элемента выбирается наибольший по модулю. Если выбор производится среди всех элементов матрицы, то говорят о *полном выборе ведущего элемента*. В этом случае на каждом шаге приходится выбирать наибольший элемент в достаточно большом числовом массиве, что приводит к увеличению времени расчета. Более экономным является *частичный выбор* ведущего элемента, когда определяется наибольший по модулю элемент лишь в текущем столбце.

Пример 1.7. Решить систему уравнений методом Гаусса с полным выбором ведущего элемента:

$$\begin{cases} -3x_1+2{,}099x_2+6x_3=3{,}901; \\ 10x_1-7x_2=7; \\ 5x_1-x_2+5x_3=6. \end{cases}$$

Ведущим элементом является число 10, стоящее во второй строке. Для удобства поменяем 1-ю и 2-ю строки местами и выполним действия в соответствии с алгоритмом. В полученной матрице, исключив из рассмотрения первую строку, определим ведущий элемент. Это число 2,5, стоящее в 3-й строке. Вновь поменяем местами строки и завершим прямой ход:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{10} & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2{,}099 & 6 & 3{,}901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}7 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & -0{,}01 & 6 & 6{,}001 \\ 0 & \boxed{2{,}5} & 5 & 2{,}5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}7 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Выполнив обратный ход, получим ответ.

Ответ: $x = (0; -1; 1)$.

Замечание 1.7. Перестановка строк с ведущим элементом не является необходимой и выполняется здесь лишь для наглядности.

Замечание 1.8. При решении системы линейных алгебраических уравнений порядка n методом Гаусса необходимо выполнить примерно n^3 арифметических операций. Если в матрице системы много нулевых элементов (она является разреженной), то применяют различные модификации метода Гаусса, требующие существенно меньшего числа операций. Например, для систем с трехдиагональной матрицей применяют метод прогонки [1].

1.2.2. Итерационные методы

При большом числе уравнений (более 50) и в ряде других случаев прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений становятся трудно реализуемыми с помощью вычислительной техники как из-за сложности проведения операций над матрицами большой размерности, так и по причине лавинообразного нарастания ошибок. Альтернативой прямым методам являются *итерационные методы*. Суть таких методов состоит в построении последовательности $\{x^k\}$ приближенных решений системы, сходящейся к точному решению.

Первым элементом x^0 такой последовательности является *начальное приближение*. Последовательность, построенная с помощью итерационных методов, является последовательностью векторов ($x \in R^n$). Напомним некоторые определения.

Определение 1.6. *Последовательность $\{x^k\}$ сходится к значению x^*, если*

$$\lim_{k\to\infty}\left\| x^k - x^* \right\| = 0.$$

В качестве нормы вектора может быть выбрана любая из принятых норм:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

где p — натуральное число или $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ (предельный случай $p \to \infty$).

При реализации любого итерационного метода важным является не только факт сходимости полученной последовательности, но и скорость сходимости.

Определение 1.7. *Скоростью сходимости последовательности называют величину*

$$\nu = \frac{\|x^k - x^*\|}{\|x^{k+1} - x^*\|}.$$

Для прямых методов $\nu = \infty$ (решение получается за одну итерацию).

Определение 1.8. *Последовательность* $\{x^k\}$ *сходится к значению* x^* ***с порядком p****, если существуют число* $p \geq 1$ *и число* $c > 0$ *такие, что, начиная с некоторого номера* $K\ \forall k > K$,

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq c\|x^k - x^*\|^p.$$

В частности, если $p = 1$, $c < 1$, то сходимость называется *линейной*. Это скорость сходимости геометрической прогрессии. При $p = 2$ сходимость последовательности *квадратичная*, при $p = 3$ *кубичная* и т.д. Чем выше порядок, тем выше скорость сходимости. Например, квадратичная сходимость означает, что на каждой итерации удваивается число верных значащих цифр в решении.

Отметим, что вопрос о скорости сходимости не менее важен, чем собственно вопрос о сходимости.

Метод *простой итерации* для системы уравнений вида (1.1) заключается в следующем.

Пусть все диагональные элементы матрицы A не равны нулю ($a_{ii} \neq 0$ $\forall i = 1, \ldots, n$). Поделим каждое из уравнений на его диагональный элемент и разрешим его относительно неизвестной, стоящей на главной диагонали. Получим систему

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \ldots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \dfrac{b_1}{a_{11}}; \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \ldots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \dfrac{b_2}{a_{22}}; \\ \ldots \\ x_n = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \ldots - \dfrac{a_{1nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1} + \dfrac{b_n}{a_{nn}}. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Или, введя новые обозначения,

$$x = Cx + \tilde{b}. \qquad (1.5)$$

Матрица C имеет нулевую главную диагональ.

Выберем некоторое начальное значение x^0 и для $k = 1, 2, \ldots$ будем выполнять следующие действия, которые и называются уточнением решения методом простой итерации:

$$x^k = Cx^{k-1} + \tilde{b}. \qquad (1.6)$$

В результате получим последовательность значений $\{x^0, x^1, \ldots\}$.

Начальное приближение x^0 может выбираться произвольно или из соображений, связанных со смыслом задачи, на основе решения более простой задачи и т.д. Часто в качестве начального приближения выбирают нулевой вектор или, что то же самое, вектор $\tilde{b}$.

При реализации любого итерационного метода необходимо ответить на три вопроса:

1. Сходится ли построенный итерационный процесс?
2. Какова скорость сходимости?
3. Если мы выполнили n итераций, какова погрешность полученного решения x^n?

На вопрос о том, будет ли последовательность (1.6) сходиться к решению, отвечает следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 1.1 (о достаточном условии сходимости метода простой итерации). *Для того чтобы последовательность, реализуемая методом простой итерации* (1.6), *сходилась к единственному решению системы* (1.1) *из любого начального приближения* x_0, *достаточно, чтобы какая-либо норма матрицы C была меньше единицы, т.е.* $\|C\| < 1$.

Аналогично норме вектора может быть использована одна из норм матриц:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{1/p},$$

где p — натуральное число, а также нормы $\|A\| = \max\limits_{j=1,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ или $\|A\| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Норма вектора в этом случае должна быть согласована с нормой матрицы.

Можно также пользоваться следующей теоремой.

Теорема 1.2 (о необходимом и достаточном условии сходимости метода простой итерации). *Чтобы последовательность, реализуемая методом простой итерации* (1.6), *сходилась к единственному решению системы* (1.1) *из любого начального приближения* x^0, *необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы С были по модулю меньше единицы.*

Проверить условия теоремы 1.2 сложнее, чем условия теоремы 1.1. Приведем наиболее простое условие, обеспечивающее сходимость метода простой итерации.

Лемма 1.1. *Если для матрицы А системы* (1.1) *выполнено условие преобладания диагональных элементов, т.е.* $\forall i |a_{ii}| >> \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$, *то метод простой итерации сходится.*

Нетрудно убедиться, что при выполнении этого утверждения выполняются условия теоремы 1.1.

Отметим, что система вида (1.6) может быть получена также любым путем, отличным от приведенного. Матрица C может и не иметь нулевой главной диагонали. Важно, чтобы преобразования системы от вида (1.1) к виду (1.6) были равносильными, а также чтобы выполнялись условия сходимости метода.

Вопрос о скорости сходимости и погрешности метода может быть решен на основе следующей теоремы, которую мы также приведем без доказательства.

Теорема 1.3 (о погрешности приближений метода простой итерации). *Если для метода простой итерации выполнены условия теоремы 2.1, то справедливо соотношение*

$$\|x^k - x^*\| \le \frac{\|C\|}{1-\|C\|}\|x^k - x^{k-1}\|. \tag{1.7}$$

Таким образом, сходимость метода линейная со скоростью $v = \dfrac{\|C\|}{1-\|C\|}$. Чем меньше величина $\|C\|$, тем выше скорость. Следует избегать ситуации, когда $\|C\|$ «почти единица», в этом случае, хотя условия сходимости формально выполнены, метод неприменим из-за слишком малой скорости сходимости.

Любой итерационный процесс порождает бесконечную последовательность приближений. При решении реальной задачи его следует остановить на каком-то шаге и полученное приближение принять в качестве решения. Самым простым условием окончания процесса является условие совпадения двух последовательных приближений с заданной точностью ε, т.е.

$$\left\|x^k - x^{k-1}\right\| < \varepsilon. \tag{1.8}$$

Более надежным условием с учетом (1.7) является

$$\left\|x^k - x^{k-1}\right\| < \frac{\|C\|}{1-\|C\|}\varepsilon. \tag{1.9}$$

Эти оценки являются *апостериорными*, т.е. мы выполняем k итераций, а затем оцениваем результат.

Теорема 1.3 позволяет провести и априорную оценку погрешности, которая позволяет до начала процесса оценить количество итераций, необходимых для достижения заданной точности. Перепишем соотношение (1.7) и добавим условие достижения заданной точности ε:

$$\left\|x^k - x^*\right\| \le \frac{\|C\|^{k+1}}{1-\|C\|}\left\|x^0\right\| < \varepsilon. \tag{1.10}$$

Последнее неравенство позволяет оценить k.

Пример 1.8. Найти решение системы методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 0{,}01$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14; \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12; \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

Переставим строки для обеспечения диагонального преобладания и приведем систему к виду (1.6):

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12; \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13; \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 + 1{,}2; \\ x_2 = -0{,}2x_1 - 0{,}1x_3 + 1{,}3; \\ x_3 = -0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 + 1{,}4; \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}3 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}.$$

Условие сходимости метода выполнено, так как $\|C\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,3} \sum\limits_{j=1}^{3} |c_{ij}| =$

$= \max\{0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4\} = 0{,}4 < 1.$

Выберем в качестве начального вектор $\bar{b}$. Оценим необходимое количество итераций, применив соотношение (1.10).

$$\frac{0,4^{k+1}}{0,6}1,4 < 0,01 \Rightarrow k+1 > \frac{2+\lg 7-\lg 3}{1-\lg 4} \approx 5,95.$$

Таким образом, заданная точность гарантированно достигается за 5 итераций. Вычисления приведены в таблице:

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\lVert x^k - x^{k-1}\rVert$
0	1,2	1,3	1,4	
1	0,9300	0,9200	0,9000	0,5000
2	1,0180	1,0240	1,0300	0,1300
3	0,9946	0,9934	0,9916	0,0384
4	1,0015	1,0020	1,0024	0,0180
5	0,9996	0,9995	0,9993	0,0027

Здесь на последнем шаге выполнены условие (1.9), и (1.10).

Сходящийся итерационный процесс может быть получен различными путями.

Пример 1.9. Найти решение системы с точностью $\varepsilon = 0,01$:

$$\begin{cases} 1,32x + 1,2y = 1,26; \\ 1,02x + 0,15y = 0,585. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, а затем преобразуем к удобному для итераций виду:

$$\begin{cases} 1,32x + 1,2y = 1,26; \\ 1,02x + 0,15y = 0,585, \end{cases} \quad \begin{cases} 0,3x + 1,05y = 0,675; \\ 1,02x + 0,15y = 0,585, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -0,02x - 0,15y + 0,585; \\ y = -0,3x - 0,05y + 0,675. \end{cases}$$

Матрица C имеет ненулевую главную диагональ. $\lVert C\rVert_\infty = 0,3$. Процесс вычисления приведен в таблице.

k	x^k	y^k	$\lVert x^k - x^{k-1}\rVert$
0	0,5850	0,6850	
1	0,47205	0,46575	0,2090
2	0,50569	0,48509	0,0335
3	0,50212	0,49904	0,0140
4	0,50010	0,49941	0,0020
5	0,50009	0,499999	0,0006

Модификацией метода простой итерации, сходящейся более быстро, является *метод Зейделя*. При вычислении следующей компоненты вектора x^k используют все вычисленные к этому моменту значения. Вместо процесса (1.6) получим следующую процедуру:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = c_{11}x_1^k + c_{12}x_2^k + \ldots + c_{1n}x_n^k; \\ x_2^{k+1} = c_{21}x_1^{k+1} + c_{22}x_2^k + \ldots + c_{2n}x_n^k; \\ \ldots \\ x_n^{k+1} = c_{n1}x_1^{k+1} + c_{n2}x_2^{k+1} + \ldots + c_{nn-1}x_{n-1}^{k+1} + c_{nn}x_n^k. \end{cases} \tag{1.11}$$

Пример 1.10. Найти решение системы примера 1.5 с точностью $\varepsilon = 0{,}01$. Используем уже полученную выше систему. Процесс вычисления по методу Зейделя приведен в таблице.

Достаточные условия сходимости метода Зейделя такие же, как и у метода простой итерации. Однако можно привести примеры, когда при невыполнении этих условий один из методов сходится, а другой нет. Так, метод Зейделя *всегда* сходится, если матрица A в системе (1.1) симметричная, положительно определенная. Напомним, что систему (1.1) с невырожденной матрицей A можно симметризо-

k	x^k	y^k	$\lVert x^k - x^{k-1} \rVert$
0	0,58500	0,685000	
1	0,47205	0,499635	0,1750
2	0,50061	0,499830	0,0290
3	0,50001	0,500000	0,0006

вать, домножив ее слева на матрицу A^T.

Достоинством сходящихся итерационных процессов является их *самоисправляемость*. Наличие вычислительных ошибок на каком-то шаге не влияет на результат, так как это неточное значение можно считать новым начальным приближением.

1.2.3. Обусловленность задач линейной алгебры

Система (1.1) с невырожденной матрицей теоретически всегда имеет единственное решение. На практике же определитель матрицы может быть хотя и не равен нулю, но очень мал. В этом случае возникают трудности при выполнении расчетов, падает точность и т.д. На точность и скорость расчетов влияют и другие факторы. Совокупность этих факторов характеризует *обусловленность* задачи.

Определение 1.9. *Задача называется* ***плохо обусловленной****, если малые изменения в ее условиях приводят к большим изменениям результата.*

Пример 1.11. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 11x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 1; \\ 12x_1 + 11x_2 - 13x_3 = 1; \\ 14x_1 + 13x_2 - 66x_3 = 1. \end{cases}$$

Точным ее решением является вектор $x = (1;\ 1;\ 0)^T$. Изменим вектор b на вектор $(1{,}001;\ 0{,}999;\ 1{,}001)^T$. Каждая компонента изменилась на 0,1%. Решим полученную систему любым методом. Точным решением будет $x = (-0{,}683;\ 0{,}813;\ 0{,}006)^T$. Результат изменился на 175%. Таким образом, требования к точности исходных данных в таких задачах резко повышаются.

Пример 1.12. Рассмотрим систему $\begin{cases} 0{,}780x + 0{,}563y = 0{,}217; \\ 0{,}913x + 0{,}659y = 0{,}254. \end{cases}$

Пусть известны два ее приближенных решения:

$$(x^1, y^1) = (0{,}341;\ -0{,}087)$$

и

$$(x^2, y^2) = (0{,}999;\ -1{,}001)$$

и необходимо выбрать то, которое ближе к точному. Вычислим невязку. В первом случае получим $r^1 = (10^{-6};\ 0)$, во втором $r^2 = (-0{,}0013;\ 0{,}0015)$. Точным же решением является $(x, y) = (1;\ -1)$, так что второе решение более приемлемо. Таким образом, при плохой обусловленности теряются привычные оценки точности.

Часто явление плохой обусловленности связано, как уже отмечено, с «почти вырожденной» матрицей системы. Так, в примере 1.8 определитель системы равен 10^{-6}. Однако в примере 1.7 определитель равен -19, а система все же плохо обусловлена.

Обусловленность системы характеризуется величиной, которая так и называется — *число обусловленности матрицы* и обозначается $\operatorname{cond} A$ или греческой буквой κ (каппа).

Определение 1.10. ***Числом обусловленности*** *матрицы A называется*

$$condA = \kappa = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|. \tag{1.12}$$

Чем это число больше, тем хуже обусловленность. Для систем линейных алгебраических уравнений $\kappa > 1000$ означает плохую обусловленность. Так, в примере 1.7 $\kappa = 5096{,}1$; в примере 1.8 $\kappa = 2{,}19 \cdot 10^6$.

В ряде норм эту величину можно вычислить как отношение наибольшего и наименьшего по модулю собственных значений матрицы:

$$\operatorname{cond} A = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}. \tag{1.13}$$

Приведем еще один пример плохо обусловленной системы.

Пример 1.13. В системе (1.1) $A = \begin{pmatrix} 4{,}1 & 2{,}8 \\ 9{,}7 & 6{,}6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4{,}1 \\ 9{,}7 \end{pmatrix}$.

Решением является вектор $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Если в качестве вектора b взять $\begin{pmatrix} 4{,}11 \\ 9{,}70 \end{pmatrix}$, решением будет $x = \begin{pmatrix} 0{,}34 \\ 0{,}97 \end{pmatrix}$. Определитель этой системы равен $-0{,}1$, а $\operatorname{cond} A = 1142{,}9$.

Итак, при решении плохо обусловленной задачи можно столкнуться с различными вычислительными проблемами.

Отметим, что если для решения плохо обусловленной задачи не подходит какой-либо метод, то, скорее всего, и другие стандартные методы не приведут к успеху. Часто для решения таких задач применяют специальные методы или стараются преобразовать задачу в целях повышения числа обусловленности.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Укажите основные особенности расчетов с использованием вычислительной техники.
2. Каковы причины возникновения ошибок округления? Опишите процесс и способы округления чисел.
3. Почему операция вычитания близких по величине чисел является нежелательной при численных расчетах?
4. Чем отличаются внутренняя и внешняя формы представления чисел в компьютере?
5. Опишите представление числа с фиксированной и плавающей точкой.
6. Что такое абсолютная и относительная погрешность вычисления?

7. Стороны прямоугольника равны 5,5 м и 7,7 м. Измерения проводились с точностью до 0,1 м. Какова абсолютная погрешность вычисления периметра прямоугольника?
8. Стороны прямоугольного параллелепипеда равны 5,5 см, 1,4 см и 7,7 см. Измерения проводились с точностью до 0,1 см. Каковы абсолютная и относительная погрешности вычисления объема параллелепипеда?
9. Найдите абсолютную и относительную погрешности представления чисел $\sqrt{7}$ и $\sqrt{700}$, заданных с двумя и четырьмя цифрами после десятичной точки.
10. Найдите абсолютную и относительную погрешности представления чисел $\sqrt{3}$ и $\sqrt{300}$, заданных с тремя и пятью цифрами после десятичной точки.
11. Определите погрешность вычисления выражения $x = \sqrt{\dfrac{a-b}{c^3}}$, если $a = 0{,}23$; $b = 1{,}14$; $c = 1{,}775$.
12. Определите погрешность вычисления определителей $D_1 = \begin{vmatrix} 17{,}9 & 10{,}7 \\ 10{,}4 & 6{,}3 \end{vmatrix}$ и $D_2 = \begin{vmatrix} 1{,}9 & 1{,}7 \\ 1{,}4 & 1{,}3 \end{vmatrix}$.
13. Что такое «машинный эпсилон»? Как его определить? Для чего он используется?
14. Какие задачи называются плохо обусловленными? Как проявляется плохая обусловленность в задачах линейной алгебры?
15. Чем вызвано использование выбора ведущего элемента при применении метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений?
16. Будет ли приведенная система уравнений хорошо обусловленной?
$$\begin{cases} x + 0{,}99y = 0{,}99; \\ 0{,}99x + 0{,}98y = 1{,}97. \end{cases}$$
Ответ обоснуйте.
17. Найдите число обусловленности матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 101 & 11 \\ 1 & 1 & 1{,}01 \end{pmatrix}$.
18. Для системы уравнений $Ax = b$ постройте процесс, сходящийся к точному решению по методу Зейделя. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 10 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$,

$b = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$. Покажите, что он сходится. Решите систему. Вычислите невязку.

19. Для системы уравнений $Ax = b$ постройте процесс, сходящийся к точному решению по методу простой итерации:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что он сходится. Решите систему. Вычислите невязку.

20. Решите систему уравнений $Ax = b$ методом Гаусса с полным выбором ведущего элемента:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2{,}099 & 6 \\ 10 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3{,}901 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

21. Приведите систему

$$\begin{cases} 0{,}31x + 2{,}32y - 0{,}12z = 3{,}6; \\ -0{,}18x + 0{,}25y + 04{,}65z = 2{,}2; \\ 4{,}51x - 0{,}18y + 0{,}033z = -1{,}7. \end{cases}$$

к виду, обеспечивающему сходимость метода итераций. Решите систему методом итераций и методом Зейделя с точностью 0,001. Решите систему методом Зейделя с точностью 0,001, предварительно проведя симметризацию системы. Сравните необходимое число итераций для всех случаев.

22. Законы спроса и предложения описываются системой

$$\begin{cases} 8{,}03p + 3{,}01x = 1{,}4; \\ 16{,}14p + 6{,}05x = 2{,}8. \end{cases}$$

Найдите точку рыночного равновесия.

23. При введении налога в $k\%$ ($k = 10$) свободный член второго уравнения системы задачи № 22 стал равен $2{,}8\left(1 + \frac{k}{100}\right)$. Найдите новую точку равновесия. Объясните результат.

24. Функционирование экономической системы описывается математической моделью:

$$p = A^T p + v,\ A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}001 & 0{,}03 \\ 0{,}006 & 0{,}25 & 0{,}0203 \\ 0{,}00211 & 0{,}0048 & 0{,}012 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ 39 \end{pmatrix},$$

где A — матрица прямых затрат; p — вектор цен; x — вектор валового выпуска; V — вектор добавленной стоимости; $v_i = \dfrac{V_i}{x_i}$ — норма добавленной стоимости.

Найдите равновесную цену, решив уравнение

$$(E - A^T)p = v$$

методом Гаусса с выбором ведущего элемента. Вычислите невязку.

25. Пусть в задаче № 24 в первой отрасли норма добавленной стоимости увеличилась на 11%. На сколько процентов изменилась равновесная цена по каждой продукции? Объясните результат. Вычислите определитель и число обусловленности матрицы системы.

ГЛАВА 2

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

2.1. Собственные векторы и собственные значения неотрицательных матриц

2.1.1. Собственные значения и собственные векторы матрицы

Определение 2.1. *Число λ называется **собственным значением** (**числом**) $(n \times n)$-матрицы A, если существует ненулевой n-мерный вектор-столбец x, такой, что*

$$Ax = \lambda x; \tag{2.1}$$

*при этом вектор x называется **собственным вектором** матрицы A, соответствующим собственному значению λ.*

Для того чтобы число λ было собственным значением матрицы A, необходимо и достаточно, чтобы оно было решением *характеристического уравнения*

$$|A - \lambda E| = 0, \tag{2.2}$$

где E — единичная $(n \times n)$-матрица.

Замечание 2.1. Так как характеристическое уравнение представляет собой алгебраическое уравнение n-й степени, то матрица A может иметь не более n действительных собственных значений.

Замечание 2.2. Собственные числа матрицы A и транспонированной матрицы A^T совпадают.

Замечание 2.3. Если x — собственный вектор матрицы A, то любой коллинеарный ему вектор (т.е. вектор вида αx, $\alpha \neq 0$) также является собственным вектором матрицы A, причем оба вектора соответствуют одному и тому же собственному значению.

2.1.2. Число и вектор Фробениуса

Собственные векторы и собственные значения неотрицательных матриц являются важными характеристиками функционирования экономических систем. Особое место среди неотрицательных матриц занимают *неразложимые матрицы*.

Определение 2.2. *Матрица A называется **неотрицательной** (**положительной**) и обозначается $A \geq 0$ ($A > 0$), если все ее элементы неотрицательны (положительны).*

Определение 2.3. *Неотрицательная квадратная ($n \times n$)-матрица A называется **разложимой**, если одновременной перестановкой строк и столбцов ее можно привести к виду*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где 0 — нуль-матрица; а A_1 и A_2 — квадратные матрицы размеров $r \times r$ и $(n-r) \times (n-r)$ соответственно; в противном случае матрица называется **неразложимой.**

Замечание 2.4. Любая положительная матрица неразложима.

Замечание 2.5. С экономической точки зрения разложимость матрицы говорит о том, что в рамках данной экономической системы существует некоторая автономная подсистема. Так, если элемент a_{ij} матрицы A показывает, какое количество продукции i-й отрасли используется в j-й отрасли, то разложимость матрицы A говорит о том, что существует группа отраслей, не использующих продукцию остальных отраслей. Неразложимость матрицы A показывает, что любая отрасль хотя бы косвенным образом использует продукцию всех отраслей.

Замечание 2.6. Квадратная матрица A размера 2×2 разложима тогда и только тогда, когда либо $a_{12} = 0$, либо $a_{21} = 0$.

Действительно, если $a_{21} = 0$, то матрица A уже приведена к виду (2.3). Если же $a_{12} = 0$, то, меняя местами первую и вторую строку, а затем первый и второй столбец (т.е. перенумеровав индексы), мы приведем матрицу к виду (2.3).

Замечание 2.7. Из разложимости матрицы A в общем случае не следует разложимость матрицы A^2. Так, например, матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — неразложима, а $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — разложима.

Теорема 2.1 (Фробениуса — Перрона). *Неотрицательная матрица A имеет такое собственное значение $\lambda_A \geq 0$, что $\lambda_A \geq |\lambda|$ для любого собственного значения λ матрицы A. Кроме того, существует неотрицательный собственный вектор x_A, соответствующий собственному числу λ_A. Причем, если A неразложима, то $\lambda_A > 0$ и существует $x_A > 0$.*

Определение 2.4. *Собственное значение λ_A неотрицательной матрицы A называется* Фробениусовым числом (числом Фробениуса), *а собственный вектор $x_A \geq 0$ —* ***Фробениусовым вектором (вектором Фробениуса)*** *матрицы A.*

Пример 2.1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Данная матрица неразложима. У нее существуют два собственных значения: число Фробениуса $\lambda_A = 4$ с собственным вектором $x_A = (2;\ 1)t$ (он является вектором Фробениуса при $t > 0$) и собственное значение $\lambda_2 = -1$, ему соответствует собственный вектор $x = t\,(-2;\ 1)$ $(t \neq 0)$. Очевидно, что $\lambda_A > (\lambda_2)$.

Пример 2.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Данная матрица разложима. У нее существуют два собственных значения: $\lambda_A = 3$ — Фробениусово число, ему соответствует собственный вектор ($x_A \geq 0$ при $t > 0$), и собственное значение $\lambda_2 = 1$ с собственным вектором $x = t\,(-1;\ 1)$ $(t \neq 0)$.

Замечание 2.8. Так как собственные значения матриц A и A^T совпадают, то числа Фробениуса данных матриц равны.

Пусть p_A — вектор Фробениуса матрицы A^T, тогда

$$A^T p_A = \lambda_A p_A.$$

Транспонируя это равенство, мы получим (напомним, что в следующем равенстве $(p_A)^T$ рассматривается как вектор-строка)

$$p_A^T A = \lambda_A p_A^T.$$

Поэтому весьма естественно говорить о векторах p_A^T и x_A как соответственно о левом и правом векторах Фробениуса матрицы A.

Следствие 2.1. *Если матрица $A \geq 0$ неразложима, то кроме вектора x_A (определенного с точностью до положительного множителя) у нее нет других неотрицательных собственных векторов.*

В самом деле, пусть существует вектор $y \geq 0$ такой, что $Ay = \lambda y$.

Тогда, умножив это равенство слева на $(p_A)^T$, получим

$$\lambda_A \left(p_A^T \cdot y\right) = \lambda \left(p_A^T \cdot y\right). \qquad (2.4)$$

Так как $p_A^T > 0$, то $p_A^T \cdot y > 0$. Следовательно $\lambda = \lambda_A$. То есть все неотрицательные собственные векторы будут соответствовать λ_A. Более того, в силу Теоремы Фробениуса — Перрона $y > 0$. Предположим, что векторы x_A и y линейно независимы. Так как эти векторы определены с точностью до положительного множителя, то мы можем считать, что первая координата у них равна 1. Тогда вектор $x_A - y$ будет собственным вектором матрицы A, соответствующим λ_A, но первая координата будет равна нулю, что противоречит Теореме Фробениуса — Перрона для неразложимой матрицы, следовательно, x_A и y линейно зависимы, т.е. $x_A = ty$ $(t > 0)$.

Следствие 2.2. *Если $A \geq B > 0$, то $\lambda_A \geq \lambda_B$.*

Следствие 2.3. *Пусть $A \geq 0$, тогда $(\lambda_A)^k$ является число Фробениуса A^k.*

Следствие 2.4. *Если λ_A — число Фробениуса матрицы $A \geq 0$, то $\alpha\lambda_A + \beta$ есть число Фробениуса матрицы $\alpha A + \beta E$, $(\alpha, \beta > 0)$.*

2.1.3. Свойства чисел Фробениуса

Обозначим через r вектор, координата r_i которого есть сумма элементов i-й строчки матрицы A, а через m — вектор, координата m_i которого есть сумма элементов i-го столбца матрицы A. Очевидно, что:

$$\text{а) } r = Ae; \text{ б) } m = e^T A, \tag{2.5}$$

где $e = (1, \dots, 1)$.

Пусть $m = \min m_i$; $M = \max m_i$; $r = \min r_i$; $R = \max r_i$. Тогда имеет место теорема 2.2.

Теорема 2.2. *Число Фробениуса λ_A неотрицательной матрицы A удовлетворяет условиям:*

$$\text{а) } R_1 \leq \lambda_A \leq R_2; \text{ б) } M_1 \leq \lambda_A \leq M_2. \tag{2.6}$$

Причем, если матрица A неразложима, то все неравенства строгие, за исключением случая, когда $R_1 = R_2$ или $M_1 = M_2$.

Доказательство. Пусть x — вектор Фробениуса, сумма координат которого равна 1, т.е. $e^T x = 1$ (такой вектор мы можем всегда выбрать, так как если сумма координат x равна $t > 0$, то вектор Фробениуса $y = \frac{1}{t}x$ будет иметь сумму координат, равную 1). Для x мы имеем

$$Ax = \lambda_A x.$$

Умножив это равенство слева на e^T и учитывая (2.5 б), получим

$$m^T x = \lambda_A e^T x.$$

Так как $e^T x = 1$, то $\lambda_A = m^T x = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n$.

Отсюда вытекает, что

$$M_1(x_1 + \ldots + x_n) \le \lambda_A \le M_2(x_1 + \ldots + x_n). \tag{2.7}$$

Причем, если матрица неразложима, то все $x_i > 0$ и в (2.7) оба неравенства строгие (за исключением случая $M_1 = M_2$). Учитывая, что сумма координат вектора x равна 1, из (2.7) получаем (2.6, а). Соотношения (2.6, б) получаются путем аналогичных рассуждений для матрицы A^T.

Следствие 2.5. *Если все суммы элементов строк (столбцов) неотрицательной матрицы A равны одному и тому же числу λ (т.е. $R_1 = R_2 = \lambda$ или $M_1 = M_2 = \lambda$), то число Фробениуса λ_A равно λ.*

Пример 2.3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\lambda_A = 6$, так как суммы элементов каждого столбца равны 6, и $\lambda_B = 3$, так как суммы элементов любой строки равны 3.

2.2. Модель международной торговли

2.2.1. Статическая модель

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из n стран. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — *вектор национальных доходов*, где x_i — национальный доход i-й страны. Обозначим через $A = (a_{ij})$ *структурную матрицу торговли*. Элемент a_{ij} матрицы A показывает, какую часть национального дохода j-я страна тратит на закупку товаров у i-й страны.

В результате торговли i-я страна получит доход

$$I_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n,\ i = 1,2, \ldots, n, \tag{2.8}$$

или в матричном виде

$$I = Ax, \tag{2.9}$$

где $I = (I_1, \ldots, I_n)$ — вектор доходов от торговли.

В данной модели мы будем предполагать, что национальные доходы всех стран полностью тратятся на потребление. Данное условие может быть записано следующим образом:

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} = 1 \tag{2.10}$$

или в матричной форме

$$e^T A = e^T, \tag{2.11}$$

где $e = (1, \ldots, 1)$.

Замечание 2.9. Соотношение (2.10) показывает, что все суммы элементов столбцов матрицы A равны 1. Следовательно, число Фробениуса λ_A матрицы A равно 1. Поэтому из (2.11) вытекает, что положительный вектор e является левым вектором Фробениуса структурной матрицы торговли A.

Естественно возникает вопрос, возможна ли в рамках данной экономической системы взаимовыгодная торговля, т.е., существует ли такой вектор x, при котором

$$Ax \geq x. \tag{2.12}$$

Это соотношение показывает, что все страны либо получили прибыль, либо по крайней мере не имеют убытков. Покажем, что в (2.12) возможен лишь только знак соотношения.

Действительно, предположим противное: что в неравенствах (2.12), рассмотренных покоординатно, имеется хотя бы одно строгое неравенство. Тогда, умножив (2.12) слева на e^T, получим

$$e^T Ax > e^T x.$$

Учитывая (2.11), находим

$$e^T x > e^T x.$$

Мы пришли к противоречию. Следовательно,

$$Ax = x. \tag{2.13}$$

С экономической точки зрения данный результат вполне очевиден, так как если были бы страны, имеющие прибыль, то в силу замкнутости данной экономической системы должны быть и страны, имеющие убытки.

Замечание 2.10. Уравнение (2.13) носит название *уравнения обмена*. Так как число Фробениуса матрицы A равно единице, то из (2.13) вытекает, что неотрицательное решение x уравнения обмена (2.13) является правым вектором Фробениуса матрицы A. Следовательно, для любой модели международной торговли существует решение уравнения (2.13) (*равновесный вектор*), причем, если матрица A неразложима, то $x > 0$.

Замечание 2.11. Принимая во внимание, что вектор Фробениуса x_A определен с точностью до знака, точнее говорить о *равновесном распределении* национальных доходов. Если структурная матрица торговли A неразложима, то равновесное распределение национальных доходов определено однозначно.

Замечание 2.12. Модель международной торговли является частным случаем более общей модели, называемой *линейной моделью обмена*. Эта модель описывается матричным уравнением (2.13). В этой модели в общем случае не требуется выполнения условий (2.10) для матрицы A (*структурной матрицы обмена*). То есть число Фробениуса матрица A необязательно равно единице. Однако наложение естественного условия $x > 0$ приводит к тому, что по необходимости x является вектором Фробениуса и число Фробениуса $\lambda_A = 1$.

Пример 2.4. Пусть структурная матрица торговли имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Определим равновесное распределение национальных доходов. Уравнение (2.13) в данном случае равносильно системе:

$$\begin{cases} 0,7x_1 + 0,6x_2 = x_1; \\ 0,2x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3 = x_2; \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,6x_3 = x_3. \end{cases}$$

Решив ее, находим, что $x_1 : x_2 : x_3 = 2 : 1 : 1$, т.е. $x_A = k(2; 1; 1)$, $k > 0$.

2.2.2. Динамическая модель и устойчивость

Предположим, что национальный доход $x(k + 1)$ в период $k + 1$ равен доходу от продажи в предыдущем периоде, т.е.

$$x(k+1) = I(k). \qquad (2.14)$$

С учетом (2.9) последнее условие принимает вид

$$x(k+1) = Ax(k). \qquad (2.15)$$

Если $x(0)$ — первоначальный вектор национального дохода, то из (2.13) следует, что в период k вектором национального дохода будет

$$x(k) = A^k x(0). \tag{2.16}$$

Определение 2.5. *Неразложимая A матрица называется* ***устойчивой****, если при любом векторе x существует предел последовательности $A^k x$ при $k \to \infty$ $(k \in N)$.*

Примером неприводимой матрицы, не являющейся устойчивой, может служить матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы матрица была устойчивой, необходимо и достаточно число Фробениуса $\lambda_A > |\lambda|$ для любого собственного значения λ матрицы A.

Замечание 2.13. Так как число Фробениуса структурной матрицы торговли A равно единице, то для устойчивости A необходимо и достаточно, чтобы все остальные собственные значения по модулю были меньше единицы.

Замечание 2.14. Из (2.15) вытекает, что если $x(0) = x_A$, то

$$x(k) = x_A, \tag{2.17}$$

т.е. в результате торговли доходы стран останутся без изменения. Если $x(0) \neq x_A$ и матрица A устойчива, то $\lim\limits_{k\to\infty} x(k) = \lim\limits_{k\to\infty}(A)^k x(0) = x^*$.

Переходя к пределу в (2.15), получаем

$$Ax^* = x^*.$$

Таким образом, предельное состояние x^* также является вектором Фробениуса матрицы A. Следовательно, вектор Фробениуса x_A определяет не только равновесное, но и предельное состояние системы.

2.3. Модель Леонтьева межотраслевого баланса

2.3.1. Уравнение межотраслевого баланса

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из n отраслей, каждая из которых производит однородный продукт. Пусть x_i — объем продукции, выпускаемый i-й отраслью за некоторый промежуток времени; x_{ij} — объем продукции i-й отрасли, расходуемый j-й отраслью в процессе производства; y_i — объем продукции i-й отрасли, предназначенный для конечного потребления (т.е. используемый в непроизводственной сфере).

Указанные величины связаны следующим ***уравнением баланса***:

$$x_i = x_{i1} + \ldots + x_{in} + y_i, \ (i = 1, \ldots, n). \tag{2.18}$$

Мы будем исходить из аксиомы ***линейности производства***, предполагающей, что величины

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \tag{2.19}$$

называемые ***коэффициентами прямых затрат***, остаются неизменными в рассматриваемый промежуток времени. Из (2.19) вытекает, что коэффициент a_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли затрачивается на производство единицы продукции j-й отрасли.

Таким образом,

$$x_{ij} = a_{ij}x_j, \ (i, j = 1, \ldots, n). \tag{2.20}$$

С учетом (2.19) уравнения баланса могут быть записаны в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1; \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2; \\ \ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases} \tag{2.21}$$

Если введем вектор валового выпуска $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$, вектор конечного потребления $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)^T$, матрицу прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

то система уравнения (2.21) может быть записана в матричной форме:

$$x = Ax + y. \tag{2.23}$$

Матричное уравнение (2.23) называется ***уравнением Леонтьева***.

Основную задачу межотраслевого баланса можно сформулировать следующим образом: зная матрицу прямых затрат A и объемы конечного потребления y, найти объемы валового выпуска x.

2.3.2. Модель Леонтьева и линейная модель обмена

В вырожденном случае, когда $y = 0$, уравнение Леонтьева (2.23) совпадает с уравнением обмена (2.13). С другой стороны, уравнение Леонтьева для экономической системы из n отраслей можно записать как уравнение обмена для экономической системы из $(n + 1)$ отраслей. Действительно, введем в рассмотрение $(n + 1)$-ю отрасль (*отрасль потребления*) с объемом производства, равным 1. Будем считать, что на единицу выпускаемой продукции эта отрасль использует продукции остальных отраслей в объемах соответственно $y_1, \ldots y_n$ и свою собственную продукцию в объеме, равном 1, при этом другие отрасли продукцию $(n + 1)$-й отрасли не используют. Другими словами, матрица прямых затрат такой экономической системы имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & y_2 \\ & & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & y_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2.24)$$

или в блочно-матричной форме

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.25)$$

Тогда уравнение Леонтьева (2.23), как нетрудно проверить, равносильно следующему уравнению обмена:

$$\begin{pmatrix} A & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.26)$$

2.4. Продуктивность модели Леонтьева

Определение 2.6. *Неотрицательная матрица A называется* ***продуктивной****, если для любого неотрицательного вектора y существует неотрицательное решение x уравнения* (2.23). *При этом модель Леонтьева, соответствующая матрице прямых затрат A, также называется* ***продуктивной.***

Уравнение (2.23) можно записать в следующем виде:

$$(E - A)x = y. \qquad (2.27)$$

Если матрица обратима $(E - A)$, то из (2.27) можно найти x:

$$x = (E - A)^{-1} y. \qquad (2.28)$$

Отсюда следует, что если

$$(E - A)^{-1} \geq 0, \qquad (2.29)$$

то $x \geq 0$ для любого $y \geq 0$, т.е. матрица A продуктивна. Оказывается, что условие (2.29) является не только достаточным продуктивности, но и необходимым. Имеет место теорема 2.3.

Теорема 2.3 (первый критерий продуктивности). *Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)$ неотрицательно обратима.*

Доказательство. Достаточность следует непосредственно из (2.29). Докажем необходимость. Пусть матрица A продуктивна. Тогда существуют неотрицательные решения уравнений:

$$(E - A)x = e_1;$$

$$\dots$$

$$(E - A)x = e_n,$$

где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— единичные векторы.

Обозначим эти решения соответственно через

$$s^1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ \dots \\ s_{1n} \end{pmatrix}, \dots, s^n = \begin{pmatrix} s_{n1} \\ s_{n2} \\ \dots \\ s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда неотрицательная матрица

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ & & \dots & \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

является обратной к $(E - A)$. Теорема доказана.

Определение 2.7. *Матрица $S = (E - A)^{-1}$ называется **матрицей полных затрат**.*

Пример 2.5. Исследовать на продуктивность матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем $E - A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}7 \\ -0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{60}{7} & 10 \\ \frac{50}{7} & 10 \end{pmatrix} \geq 0.$

Таким образом, матрица продуктивна.

Исследуем связь между продуктивностью матрицы и ее числом Фробениуса.

Лемма 2.1. *Если существует решение уравнения Леонтьева* (2.23) *для $y > 0$, то*

$$\lambda_A < 1. \tag{2.30}$$

Доказательство. Пусть $y > 0$, тогда, очевидно, $x > 0$. Умножим равенство (2.23) слева на левый вектор Фробениуса p_A^T, :

$$\lambda_A(p_A^T \cdot x) + (p_A^T \cdot y) = p_A^T \cdot x,$$

или

$$(1 - \lambda_A)(p_A^T \cdot x) = (p_A^T \cdot y).$$

Так как $p_A \geq 0$; $y > 0$, $x > 0$, то $(p_A^T \cdot x) > 0$ и $(p_A^T \cdot y) > 0$. Поэтому из последнего равенства вытекает, что $\lambda_A < 1$. Лемма доказана.

Теорема 2.4 (второй критерий продуктивности). *Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше единицы.*

Доказательство. Пусть матрица A продуктивна. Тогда существует неотрицательное решение уравнения Леонтьева для любого $y \geq 0$. Выберем $y > 0$. Тогда на основании леммы 2.1 имеем $\lambda_A < 1$.

Обратно, пусть A имеет число Фробениуса $\lambda_A < 1$. Покажем, что она продуктивна. Зададим $y \geq 0$ и покажем, что уравнение (2.23) имеет решение $x \geq 0$. Рассмотрим неотрицательную матрицу $\tilde{A}$, задаваемую соотношением (2.25). Умножая эту матрицу слева на $(n + 1)$-мерный вектор $\tilde{p}^T$, где $\tilde{p}^T = (0; \ldots ; 0; 1)$, легко убедиться, что $\tilde{p}^T \tilde{A} = \tilde{p}^T$.

Следовательно, одним из собственных значений матрицы $\tilde{A}$ является $\lambda = 1$.

Пусть вектор

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

является собственным вектором матрицы $\tilde{A}$: $\tilde{A}\tilde{x} = \lambda\tilde{x}$. В силу определения матрицы $\tilde{A}$ это равносильно тому, что

$$\begin{pmatrix} A & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

или

$$\begin{cases} Ax + y x_{n+1} = \lambda x; \\ x_{n+1} = \lambda\, x_{n+1}. \end{cases} \tag{2.32}$$

Если $\lambda \neq 1$, то из (2.32) следует, что $x_{n+1} = 0$, в силу чего (2.32) принимает вид

$$Ax = \lambda x.$$

Следовательно, λ — собственное значение матрицы A, причем, согласно предположению, $|\lambda| < 1$. Таким образом, $\lambda_{\tilde{A}} = 1$ является положительным и максимальным по модулю собственным значением неотрицательной матрицы $\tilde{A}$, а значит, является числом Фробениуса. По теореме Фробениуса — Перрона, у матрицы $\tilde{A}$ существует неотрицательный собственный вектор $x_{\tilde{A}} = (x, x_{n+1})$, соответствующий $\lambda_{\tilde{A}} = 1$. Его можно найти, положив в (2.32) $\lambda = 1$. Учитывая, что в этом случае второе уравнение системы выполняется тождественно, получаем

$$Ax + y x_{n+1} = x. \tag{2.33}$$

Очевидно, что в уравнении (2.33) $x_{n+1} \neq 0$, так как в противном случае следовало бы, что $Ax = x$. А это противоречит тому, что число Фробениуса $\lambda_A < 1$. Поэтому мы можем считать, что $x_{n+1} = 1$ (очевидно, что вектор $\dfrac{\tilde{x}}{x_{n+1}}$ также является вектором Фробениуса). Равенство (2.33), в силу того что $x_{n+1} = 1$, принимает вид

$$Ax + y = x. \tag{2.34}$$

Причем, так как $\bar{x} = (x, x_{n+1}) \geq 0$, то $x \geq 0$. Следовательно, матрица A продуктивна. Теорема доказана.

Следствие 2.6. *Если существует решение уравнения Леонтьева* (2.23) *для* $y > 0$, *то матрица* A *продуктивна.*

Справедливость этого утверждения вытекает из леммы 2.1 на основании теоремы 2.4.

Следствие 2.7. *Если сумма любого столбца матрицы (любой строки) меньше единицы, то матрица продуктивна.*

Доказательство. Если сумма любого столбца матрицы (любой строки) меньше единицы, то число Фробениуса матрицы меньше единицы. Следовательно, матрица продуктивна.

Замечание 2.15. С экономической точки зрения сумму элементов столбца матрицы A можно трактовать как суммарные затраты отрасли на выпуск единицы продукции. Если эти затраты меньше единицы, то отрасль рентабельна. Таким образом, следствие 2.7 утверждает, что если все отрасли рентабельны, то матрица A продуктивна.

Пример 2.6. Исследовать на продуктивность матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как обе суммы элементов столбцов матрицы меньше единицы, то матрица A продуктивна.

2.5. Модель равновесных цен

Рассмотрим теперь балансовую модель, двойственную к модели Леонтьева, так называемую ***модель равновесных цен***. Пусть, как и прежде, A — матрица прямых затрат, x — вектор валового выпуска. Обозначим через $p = (p_1, ..., p_n) > 0$ вектор цен (где p_i — цена единицы продукции i-й отрасли), тогда, например, первая отрасль получит доход, равный $p_1 x_1$. Часть своего дохода эта отрасль потратит на закупку продукции у других отраслей. Так, для выпуска единицы продукции ей необходима продукция первой отрасли в объеме a_{11}, второй отрасли в объеме a_{21}, n-й отрасли в объеме a_{n1}. На покупку этой продукции ею будет затрачена сумма, равная $a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + ... + a_{n1} p_n$. Следовательно, для выпуска продукции в объеме x_1 первой отрасли необходимо потратить на закупку продукции других отраслей сумму, равную $x_1(a_{11}p_1+a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n)$. Оставшуюся часть дохода, называемую *добавленной стоимостью*, мы обозначим через V_1 (эта часть дохода идет на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции). Таким образом, имеется следующее равенство:

$$x_1p_1 = x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n) + V_1.$$

Разделив это равенство на x_1, получаем

$$p_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n + v_1,$$

где $v_1 = V_1/x_1$ — *норма добавленной стоимости* (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции). Подобным же образом получаем для остальных отраслей:

$$p_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{n2}p_n + v_2;$$

$$\ldots$$

$$p_n = a_{1n}p_n + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{nn}p_n + v_n.$$

Найденные равенства, как нетрудно видеть, могут быть записаны в матричной форме следующим образом:

$$p = A^T p + v, \qquad (2.35)$$

где $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — вектор норм добавленной стоимости.

Как мы видим, полученные уравнения очень похожи на уравнения модели Леонтьева, с той лишь разницей, что x заменен на p, y — на v, A — на A^T.

Модель равновесных цен позволяет при известных величинах норм добавленной стоимости прогнозировать цены на продукцию отраслей, а также изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в одной из отраслей.

Замечание 2.16. Если умножить уравнение Леонтьева (2.34) слева на вектор равновесных цен p^T, то с учетом (2.35) получим

$$p^T x = v^T x + p^y y. \qquad (2.36)$$

В левой части этого равенства находится суммарная стоимость, выпускаемой отраслями продукции. В правой части первое слагаемое представляет собой суммарную добавленную стоимость всех отраслей, а второе слагаемое — стоимость конечного спроса.

Пример 2.7. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из трех условных отраслей — топливно-энергетической промышленности и сельского хозяйства. Пусть

$$A^T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

— транспонированная матрица прямых затрат, $v = (4,\ 10,\ 4)$ — вектор норм добавленной стоимости. Определим равновесные цены. Для этого, как и в модели Леонтьева, воспользуемся формулой

$$p = S^T v,$$

где $S^T = \left((E - A)^{-1}\right)^T$ — транспонированная матрица полных затрат.

После необходимых вычислений имеем

$$S^T = \frac{1}{0,444}\begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $p = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение и приведите пример разложимой (неразложимой) неотрицательной матрицы.
2. Может ли быть неразложимой положительная матрица? Дайте экономическую интерпретацию разложимости (неразложимости) матрицы.
3. Сформулируйте теорему Фробениуса — Перрона.
4. Дайте определение числа Фробениуса неотрицательной матрицы.
5. Найдите число и вектор Фробениуса матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Найдите число и вектор Фробениуса матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 0 & 10 & 5 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
7. Найдите число и вектор Фробениуса матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 10 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Рассматривается двухотраслевая модель экономики, заданная балансовой таблицей

Отрасли производства	Производственное потребление		Конечное потребление
	Отрасль I	Отрасль II	
I	3	7	4
II	6	5	4

Найдите валовой выпуск x каждой отрасли, структурную матрицу Леонтьева и матрицу полных затрат.

9. Дайте определение правого и левого вектора Фробениуса неотрицательной матрицы.
10. Чему равно число Фробениуса структурной матрицы торговли?
11. Найдите равновесный вектор для модели международной торговли со структурной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

12. Запишите уравнение Леонтьева межотраслевого баланса и объясните экономический смысл входящих в него слагаемых.
13. Какая матрица называется продуктивной?
14. Какая связь между продуктивностью матрицы и ее числом Фробениуса? Является ли продуктивной матрица $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$?
15. Дайте определение матрицы полных затрат. Каким образом эта матрица связана с продуктивностью модели Леонтьева?
16. Какая связь между рентабельностью отраслей и продуктивностью модели Леонтьева?
17. Запишите модель, двойственную к модели Леонтьева, и дайте ее экономическую трактовку.
18. Какая связь между продуктивностью модели Леонтьева и продуктивностью модели равновесных цен?
19. Дайте экономическую трактовку слагаемых, входящих в равенство (2.36).

ГЛАВА 3

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В этой главе рассматриваются методы решения задач линейного программирования. Для данного класса задач существует алгоритм, приводящий к точному решению задачи. Начнем мы с описания постановки общей задачи оптимизации.

3.1. Постановка задачи оптимизации

3.1.1. Общая задача оптимизации

Пусть M — некоторое множество, точка $X \in M$, $f(X)$ — функция на M. Тогда задача

$$f(X) \to \max(\min), X \in M,$$

называется *задачей оптимизации*. При этом отметим, что мы не оговаривали природу множества M, поэтому можно говорить об общей постановке задачи оптимизации. Множество M называется *допустимым множеством*, а функция $f(X)$ — *целевой функцией*. Точку $X_{\max}(X_{\min})$, в которой достигается оптимальное значение, называют *оптимальным решением*, а множество всех оптимальных точек X^* — *оптимальным множеством*.

Замечание 3.1. В дальнейшем для обозначения точек (векторов) пространства R^n будем использовать как прописные буквы X, Y, ..., так как это удобно для матричной записи условий и решений возникающих задач, так и использованные в предыдущих главах обозначения x, y, ...

В большинстве случаев множество M является подмножеством n-мерного пространства R^n, т.е. $M \subset R^n$, а его точка задается своими координатами $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$. При этом целевая функция $f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ является некоторой функцией в R^n. Если допустимое множество M задается системой неравенств

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, \\ \quad \ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $g_1, g_2, ..., g_m$ — некоторые функции в R^n, то задача оптимизации называется *задачей математического программирования*.

В дальнейшем будем рассматривать в основном задачи оптимизации экономического содержания, поэтому в число ограничений будут входить естественные *тривиальные ограничения* вида $x_i \geq 0$. Остальные *ограничения типа неравенств* $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0$ будем называть *нетривиальными*. Заметим также, что условие типа $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$ сводится к предыдущему умножением на -1, а *условие типа равенств* $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ можно представить как систему:

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0; \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0; \\ -g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0. \end{cases}$$

Таким образом, запись системы ограничений в виде (3.1) охватывает все основные случаи. Кроме этого, задачи оптимизации $f(x) \to \max$ и $f(x) \to \min$ также сводятся друг к другу умножением на -1, поэтому в дальнейшем мы будем при общей постановке задачи рассматривать одну из них.

3.1.2. Задача линейного программирования

Если функции $f, g_1, g_2, ..., g_m$ линейны, то задача оптимизации называется *задачей линейного программирования* (ЛП) и имеет вид

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0 \to \max;$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

Задачу ЛП часто удобно записывать в матричном виде — введем строку $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$, столбец $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ (индекс обозначает транспонирование), $(m \times n)$-матрицу $A = (a_{ij})$ и столбец $B = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$. Тогда задача ЛП может быть записана в виде

$$f = CX + c_0 \to \max;$$
$$\begin{cases} AX \le B; \\ X \ge 0. \end{cases}$$

3.2. Примеры задач линейного программирования

Рассмотрим теперь примеры экономических задач, сводящихся к задачам линейного программирования.

Пример 3.1 (задача о банке). Пусть собственные средства банка в сумме с депозитами составляют P млн руб. Часть этих средств, но не менее Q млн руб. должна быть размещена в кредитах, а вложения в ценные бумаги должны составлять не менее $r\%$ средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах. Если c_1 — доходность кредитов, c_2 — доходность ценных бумаг (как правило, $c_1 > c_2$), то каково должно быть размещение средств, чтобы прибыль банка была максимальной?

Замечание 3.2. Отметим, что кредиты являются неликвидными активами банка, так как при необходимости быстро обратить кредиты в деньги без существенных потерь невозможно. Ценные же бумаги можно в любой момент продать без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные и неликвидные активы, и ограничения примера являются вполне естественными.

Решение. Пусть x_1 — средства, размещенные в кредитах, x_2 — средства, вложенные в ценные бумаги. Тогда прибыль банка выражается формулой $f = c_1x_1 + c_2x_2$. Записывая условия на средства банка, размещения в кредитах и ликвидное ограничение, получим следующую задачу оптимизации — систему линейных ограничений:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le P; \\ x_1 \ge Q; \\ x_2 \ge 0{,}01r(x_1 + x_2); \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Пример 3.2 (задача об оптимальном портфеле ценных бумаг). Пусть на фондовом рынке имеются (рисковые) ценные бумаги $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Известны доходность (return) каждой из них $r(X_i) = r_i$, где $i = 1, \ldots, k$, а риски (risk) выражаются числами $\sigma(X_i) = \sigma_i$. Определить оптимальные доли x_i вложений (веса) в активы, которые приведут к максимальному ожидаемому доходу r, если:

- риск полученного портфеля не превышает заданного максимального уровня риска $\sigma_{\max}$;
- короткие продажи (покупка активов в долг) запрещены;
- все средства должны быть инвестированы.

Замечание 3.3. Как правило, инвесторы на фондовом рынке инвестируют средства в несколько активов, формируя ***портфель активов***. Его ожидаемая доходность определяется средневзвешенной доходностью входящих активов $r = \sum_{i=1}^{k} x_i r_i$, где $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$, а риск портфеля σ задается как средневзвешенный риск его активов $\sigma = \sum_{i=1}^{k} x_i \sigma_i$.

Решение. В силу замечания ограничения задачи могут быть записано в виде $\sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i \le \sigma_{\max}$ (ограничение по риску), $0 \le x_i \le 1$ (запрещение коротких продаж), причем $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, поскольку средства должны быть полностью инвестированы. Целевая функция задачи имеет вид $f = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i$. Таким образом, математическая модель задачи записывается в виде

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i \to \max;$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} x_i \sigma_i \le \sigma_{\max}; \\ 0 \le x_i \le 1, \ i = 1, 2, \ldots, k; \\ \sum_{i=1}^{k} x_i = 1. \end{cases}$$

Пример 3.3 (задача о диете). Пусть имеется m видов продуктов $P_1, P_2, \ldots, P_m$, содержащих питательные вещества $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, причем известно, что в 1 кг продукта P_i содержится a_{ij} единиц (например, мг) вещества Q_j. Известны суточные потребности q_j организма в веществе Q_j и стоимость p_i 1 кг продукта P_i. Найти необходимое количество x_i каждого из продуктов P_i, обеспечивающих необходимое количество веществ Q_j, $j = 1, ..., n$, при минимальных затратах на продукты.

Решение. Все данные задачи удобно представить в виде матрицы

$$\begin{array}{|c|cccc|c|} x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & p_1 \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & p_m \\ \hline & q_1 & q_2 & \cdots & q_n & \end{array},$$

где в первом столбце записано необходимое количество каждого из продуктов, в последнем — стоимости 1 кг каждого из них, а в последней строке — нормы питательных веществ. Тогда условие получения необходимого количества j-го питательного вещества может быть записано в виде

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + ... + a_{mj}x_m \geq q_j, j = 1, ..., n,$$

а общая стоимость купленных продуктов равна $f = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_mx_m$. Получаем следующую задачу линейного программирования

$$f = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_mx_m \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq q_1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq q_2; \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq q_n; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_m \geq 0. \end{cases}$$

Пример 3.4 (транспортная задача). Пусть имеется m поставщиков $A_1, A_2, ..., A_m$ и n потребителей $B_1, B_2, ..., B_n$ некоторого груза. Для каждого поставщика и потребителя заданы запасы $a_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$, и соответственно объем потребления $b_j \geq 0$, $j = 1, ..., n$. Также известна стоимость перевозки единицы груза $c_{ij} \geq 0$ от i-го поставщика к j-му потребителю. Требуется найти объемы перевозок x_{ij} от i-го поставщика к j-му потребителю, при которых общая стоимость перевозок минимальна.

Решение. Общая стоимость перевозок определяется суммой $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. Таким образом, транспортная задача может быть записана в виде задачи ЛП

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, \dots, m; \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Первая часть нетривиальных ограничений означает, что все потребности удовлетворены, вторая часть — что весь груз вывезен от поставщиков.

Пример 3.5 (задача об использовании ресурсов). Для выпуска n видов продукции $P_1, P_2, \dots, P_n$ предприятие использует m видов ресурсов $R_1, R_2, \dots, R_m$. Известны $A = (a_{ij})$ — матрица норм расхода сырья, где a_{ij} — количество ресурса R_i, необходимого для производства единицы продукта P_j, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — вектор доходов от реализации единицы продуктов $P_1, P_2, \dots, P_n$, $B = (b_1, b_2, \dots b_n)^T$ — запасы ресурсов. Найти план производства, максимизирующий доход предприятия от реализации выпускаемой продукции.

Решение. Если $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — план производства, то доход предприятия от его реализации равен $f = CX$, а ограничение по ресурсам может быть записано в виде $AX \leq B$. Таким образом, получаем задачу оптимизации

$$f = CX \to \max;$$

$$\begin{cases} AX \leq B; \\ X \geq 0. \end{cases}$$

3.3. Каноническая и стандартная формы задачи линейного программирования

Рассмотренные выше примеры показывают, что нетривиальные ограничения задачи ЛП могут быть заданы как набором неравенств (задачи о диете, о банке), так и в виде уравнений (транспортная задача). В первом случае говорят о *стандартной задаче* ЛП, а в последнем — о *канонической задаче* ЛП. В зависимости от метода решения задачу иногда требуется привести к канонической или стандартной форме.

Если имеется стандартная задача ЛП, то для приведения ее к канонической достаточно для *каждого* из неравенств системы нетривиальных ограничений

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ...+ a_nx_n + b \geq 0$$

ввести новую *балансовую* (*дополнительную*) переменную и заменить неравенство на эквивалентное ему уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + ...+ a_nx_n + b = x_{n+1}$, где x_{n+1} — балансовая переменная, и неравенство $x_{n+1} \geq 0$.

Пример 3.6. Привести к канонической форме задачу линейного программирования

$$z = 4x_1 + 2x_2 - 13x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + x_3 - x_4 \leq 9; \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 + x_5 = 10; \\ 12x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \geq 11; \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

Решение. Перепишем входящие в систему нетривиальные неравенства в виде

$$-x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 + 9 \geq 0,$$
$$12x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 - 11 \geq 0$$

и введем балансовые переменные $x_6 \geq 0$, $x_7 \geq 0$ по правилу:

$$-x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 + 9 = x_6,$$
$$12x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 - 11 = x_7.$$

Тогда исходная задача переписывается в канонической форме:

$$z = 4x_1 + 2x_2 - 13x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 9; \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 + x_5 = 10; \\ 12x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 - x_7 = 11; \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 7. \end{cases}$$

Для приведения канонической задачи ЛП к стандартной необходимо:

- выделить в системе уравнений базисные и свободные переменные;
- выразить базисные переменные через свободные;
- исключить базисные переменные из целевой функции и нетривиальных ограничений и преобразовать каждое из последних в неравенство.

Пример 3.7. Привести к стандартной форме задачу ЛП

$$z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим систему нетривиальных ограничений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

и выделим методом Гаусса базисные и свободные переменные:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Итак, получаем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 2; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$

из которой выражаем базисные неизвестные x_1, x_2:

$$\begin{cases} 2 - x_3 - x_4 = x_1 \ge 0; \\ 1 - 2x_3 + x_4 = x_2 \ge 0 \end{cases}$$

и исключаем их из целевой функции

$$z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 =$$
$$= 2(2 - x_3 - x_4) + (1 - 2x_3 + x_4) + 3x_3 + x_4 = -x_3 + 5.$$

Получим стандартную задачу, равносильную исходной:

$$z = -x_3 + 5 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_3 + x_4 \le 2; \\ 2x_3 - x_4 \le 1; \\ x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

3.4. О структуре допустимых множеств задач ЛП

Целью данного параграфа является изучение структуры множеств $M \subset R^n$, заданных системой ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \quad\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \tag{3.2}$$

Определение 3.1. *Множество $M \subset R^n$ называется **выпуклым**, если для любых двух точек $X \in M$ и $Y \in M$ отрезок XY целиком принадлежит M, т.е. для любых точек X, $Y \in M$, $t \in [0,1]$, точка $(1-t)X + tY \in M$.*

Если найдется пара точек множества M, для которых это условие не выполняется, то множество M выпуклым не является.

Как известно из аналитической геометрии, множество точек R^n, удовлетворяющих условию $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ (при условии $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \ne 0$), является *гиперплоскостью*. При этом множество точек, удовлетворяющих условию $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$, называется *полупространством* в R^n.

Лемма 3.1. *Любое полупространство является выпуклым множеством.*

Доказательство. Пусть точки $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ принадлежат полупространству, т.е.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$$

и

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n \le b,$$

а $t \in [0,1]$. Домножая первое из неравенств на $(1-t) \ge 0$, а другое на $t \ge 0$ и складывая, получим

$$a_1\big((1-t)x_1 + ty_1\big) + a_2\big((1-t)x_2 + ty_2\big) + \ldots + a_n\big((1-t)x_n + ty_n\big) \le b,$$

т.е. точка $X_t = \big((1-t)x_1 + ty_1, (1-t)x_2 + ty_2, \ldots, (1-t)x_n + ty_n\big)$ отрезка XY для любого $t \in [0,1]$ также является точкой полупространства. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пересечение любого конечного числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.*

Доказательство. Пусть $M_1, \ldots, M_k$ — выпуклые множества и $M = M_1 \cap \ldots \cap M_k$. Тогда если точки X, $Y \in M$, то X, $Y \in M_i$ для каждого $i = 1, \ldots, k$. В силу выпуклости M_i отрезок $XY \subset M_i$ при $i = 1, \ldots, k$, а следовательно, $XY \subset M$. Теорема доказана.

В силу леммы и теоремы заключаем, что множество M, заданное системой ограничений, является выпуклым. Геометрически оно представляет собой пересечение $M = \bigcap_{i=1}^{m} \Pi_i$ полупространств $\Pi_i = \{X \in R^n \mid a_{i1}x_1 + +a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i\}$, $i = 1, \ldots, m$, и называется *выпуклой многогранной областью*. Если M — ограниченное множество, то выпуклая многогранная область называется *выпуклым многогранником*, гранями которого в общем случае являются части гиперплоскостей $\pi_i = \{X \in R^n \mid a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i\}$, которые в свою очередь являются выпуклыми многогранниками меньшей размерности.

Определение 3.2. *Угловыми точками множества M являются точки, которые не могут быть внутренними точками какого-либо отрезка, целиком принадлежащего этому множеству, т.е. точки, которые нельзя представить в виде $(1 - t)X + tY$, где X, $Y \in M$, $t \in (0,1)$.*

Чтобы понять, какую роль в описании выпуклых многогранников и в геометрии задач ЛП играют угловые точки, дадим следующее определение.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_l$ — набор точек в R^n.

Определение 3.3. *Точка X называется **выпуклой линейной комбинацией** точек $X_1, X_2, \ldots, X_l$, если ее можно представить в виде*

$$X = s_1X_1 + s_2X_2 + \ldots + s_lX_l,$$

где $s_i \ge 0$ при $i = 1, \ldots, l$ и $s_1 + s_2 + \ldots + s_l = 1$.

Теорема 3.2. *Выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по размерности пространства R^n.

Пусть $n = 1$. В пространстве R^1 возможны только два выпуклых многогранника — это точка и отрезок, для которых утверждение теоремы, очевидно, выполнено.

Предположим, что теорема доказана для всех пространств R^k с $k \le n - 1$. Докажем ее для выпуклого многогранника $M \subset R^n$, заданного системой ограничений (3.2). Пусть точка $X \in M$. Тогда возможны два случая: либо X является граничной точкой M, т.е. принадлежит одной из гиперплоскостей π_i, либо является внутренней точкой M.

Если X является граничной точкой, то, как было указано выше, ее можно считать точкой многогранника (а следовательно, и пространства) меньшей размерности и по предположению индукции для нее теорема доказана.

Если X является внутренней точкой M, то через нее можно провести произвольную прямую, пересекающую границу многогранника в точках X_1 и X_2. При этом точка X представима в виде $X = (1 - t)X_1 + tX_2$, $t \in (0,1)$. По предположению индукции, X_1 и X_2 могут быть представлены как выпуклые линейные комбинации угловых точек соответствующих граней: $X_1 = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + ... + \alpha_k P_k$, $X_2 = \beta_1 Q_1 + \beta_2 Q_2 + ... + \beta_l Q_l$, где $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, $\sum_{j=1}^{l} \beta_j = 1$.

Тогда

$$X = (1 - t)(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + ... + \alpha_k P_k) + t(\beta_1 Q_1 + \beta_2 Q_2 + ... + \beta_l Q_l) =$$
$$= (1 - t)\alpha_1 P_1 + ... + (1 - t)\alpha_k P_k + t\beta_1 Q_1 + ... + t\beta_l Q_l.$$

При этом очевидно, что $(1 - t)\alpha_i \geq 0$, $t\beta_j \geq 0$ и $(1 - t)\alpha_1 + ... + (1 - t)\alpha_k + t\beta_1 + ... + t\beta_l = (1 - t)(\alpha_1 + \alpha_2 ... + \alpha_k) + t(\beta_1 + \beta_2 ... + \beta_l) = 1$.

Таким образом, точка X в обоих случаях является выпуклой линейной комбинацией угловых точек выпуклого многогранника. Теорема доказана.

3.5. Геометрия задачи линейного программирования

Как было показано выше, система ограничений (3.2) задачи ЛП определяет выпуклую многогранную область $M \subset R^n$, а сама задача сводится к нахождению экстремума линейной функции $f(X) = CX^T + c_0$ на M.

Будем говорить, что целевая функция задачи ЛП ограничена, если в задаче на максимум $f(X)$ ограничена сверху, а в задаче на минимум — снизу.

Далее мы рассматриваем задачи $f(X) \to \max$. Как следует из утверждений, доказанных далее, в случае ограниченности целевой функции оптимальное решение задачи ЛП достигается в угловых точках области M.

Теорема 3.3. *Если в задаче ЛП целевая функция ограничена, а допустимое множество M имеет хотя бы одну угловую точку, то найдется угловая точка множества, в которой $f(X)$ достигает оптимального значения.*

Доказательство. Предположим, что множество M ограничено, т.е. является выпуклым многогранником, а оптимальное решение задачи достигается в точке X_0: $f(X_0) \geq f(X)$ для любой точки $X \subset M$. Если X_0 — угловая точка, то теорема доказана.

Предположим, что точка X_0 не является угловой. Согласно теореме 3.2, если $X_1, X_2, ..., X_l$ — угловые точки M, то точка X представима в виде выпуклой линейной комбинации: $X_0 = s_1X_1 + s_2X_2 + ... + s_lX_l$, где $s_i \geq 0$ при $i = 1, ..., l$, и $\sum_{i=1}^{l} s_i = 1$. Пусть в точке X_p функция $f(X)$ принимает наибольшее значение среди $f(X_1)$, $f(X_2)$, ..., $f(X_l)$: $f(X_p) = \max\{f(X_1), f(X_2), \ldots, f(X_l)\}$. Тогда

$$f(X_0) = f\left(\sum_{i=1}^{l} s_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{l} s_i f(X_i) \leq \sum_{i=1}^{l} s_i f(X_p) = f(X_p)\sum_{i=1}^{l} s_i = f(X_p).$$

Получаем, что $f(X_p) \geq f(X_0) \geq f(X)$ для любой точки $X \subset M$, т.е. угловая точка X_p также является оптимальным решением исходной задачи. Теорема доказана.

Теорема 3.4. *Если в задаче ЛП целевая функция $f(X)$ принимает оптимальное значение более чем в одной угловой точке, то $f(X)$ достигает оптимального значения в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.*

Доказательство. Предположим, что оптимальное решение задачи ЛП достигается в угловых точках X_1, X_2, ..., X_l: $f_{\max} = f(X_1) = f(X_2) = ... = f(X_l)$ и точка X является их выпуклой линейной комбинацией: $X = s_1X_1 + s_2X_2 + ... + s_lX_l$, где $s_i \geq 0$ при $i = 1, ..., l$, и $\sum_{i=1}^{l} s_i = 1$. Тогда

$$f(X) = f\left(\sum_{i=1}^{l} s_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{l} s_i f_{\max} = f_{\max}\sum_{i=1}^{l} s_i = f_{\max}.$$

Теорема доказана.

3.6. Графический метод решения задач ЛП

Если задача ЛП задана в стандартной форме в R^2:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ \quad\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m, \end{cases}$$

то допустимой областью является выпуклая многоугольная область. Тогда для решения задачи используют графический метод, который состоит в следующем.

1. Строится допустимое множество X, заданное системой ограничений как пересечение полуплоскостей, определяемых каждым из входящих в эту систему неравенств. Если X — пустое множество, то задача решений не имеет.

2. Если X — непустое множество, то рассматриваются *линии уровня* целевой функции $f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$. Они определяются как прямые вида $c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 = C$, где C — некоторая постоянная. Для любого значения C эти прямые имеют общий вектор нормали $n = (c_1, c_2)$, определяющий направление роста функции f.

Смещая линии уровня в направлении вектора n, находим *первую* точку $X_{\min}$ пересечения такой линии с множеством X. Тогда $f_{\min} = f(X_{\min})$ является минимальным значением функции f на X.

Аналогично, продолжая смещать линии уровня в направлении вектора n, находим $X_{\max}$ — *последнюю* точку пересечения линии уровня с множеством X. Тогда $f_{\max} = f(X_{\max})$ — максимальное значение функции f на X. Если при перемещении линии уровня в направлении $\bar{n}$ последняя имеет пересечения с X при сколь угодно большом значении константы, то $f_{\max} = +\infty$. Если же, наоборот, линии уровня имеют пересечения с X при сколь угодно большом по модулю отрицательном значении постоянной, то $f_{\min} = -\infty$.

Пример 3.8. Решить графически задачу линейного программирования

$$f = 3x_1 + x_2 - 10 \to \max(\min);$$

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 \ge 29; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 25; \\ 4x_1 - x_2 \le 15; \\ \bar{x} \ge 0. \end{cases}$$

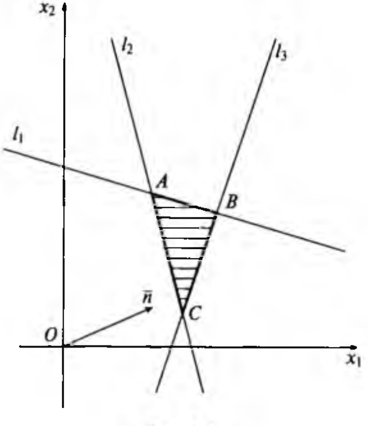


Рис. 3.1

Решение. Построим допустимую область X (рис. 3.1), т.е. множество на плоскости, определяемое системой

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 \ge 29; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 25; \\ 4x_1 - x_2 \le 15; \\ \bar{x} \ge 0. \end{cases}$$

Для этого построим сначала прямые $l_1 : 7x_1 + x_2 = 29$, $l_2 : 3x_1 + 2x_2 = 25$ и $l_3 : 4x_1 - x_2 = 15$ на плоскости (x_1, x_2), а затем найдем их точки пересечения. Точку пересечения прямых l_1, l_2 находим как решение системы уравнений

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 = 29; \\ 3x_1 + 2x_2 = 25, \end{cases}$$

т.е. $l_1 \cap l_2 = A(3;\ 8)$. Аналогично находим, что $l_2 \cap l_3 = B(5;\ 5)$, $l_1 \cap l_3 = C(4;\ 1)$.

Каждая из прямых разбивает плоскость на две полуплоскости, а каждое неравенство, входящее в систему ограничений, задает одну из полуплоскостей. Для того чтобы установить, какая из полуплоскостей определяется неравенством, необходимо взять произвольную («пробную») точку, не лежащую на прямой, и проверить, удовлетворяет ли она соответствующему неравенству. Если неравенство выполнено, то неравенство определяет полуплоскость, содержащую «пробную» точку, а если неравенство не выполняется, то его решением является другая полуплоскость. Решением системы неравенств будет пересечение соответствующих плоскостей. В нашем случае это треугольник ABC. Построив вектор нормали $n = (3;\ 1)$ и перпендикулярные ему линии уровня, убеждаемся, что $f_{\min} = f(C) = 3 \cdot 4 + 1 - 10 = 3$, $f_{\max} = f(B) = 3 \cdot 5 + 5 - 10 = 10$.

Графический метод применяется для решения задач, заданных не только в R^2, но и в пространствах большей размерности. Это возможно в случае, если задачу можно свести к задаче на плоскости.

Пример 3.9. Решить задачу линейного программирования

$$f = -x_1 + x_2 + 4 \to \min\ (\max);$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 2; \\ \bar{x} \ge 0 \end{cases}$$

графическим методом.

Решение. Формально задача является, вообще говоря, задачей линейного программирования в пространстве R^4. Но ее можно свести к задаче на плоскости R^2, приведя к стандартной форме, как это было сделано в примере 3.7. Выразим базисные неизвестные x_3, x_4 из ограничений

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 + x_2 \ge 0; \\ x_4 = 2 + 2x_1 - x_2 \ge 0 \end{cases}$$

и получаем задачу в стандартной форме

$$f = -x_1 + x_2 + 4 \to \min\ (\max);$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3; \\ 2x_1 - x_2 \ge -2; \\ \bar{x} \ge 0. \end{cases}$$

Построив на плоскости (рис. 3.2) прямые $l_2 : x_1 - x_2 = 3$, $l_1 : 2x_1 - x_2 = -2$, находим допустимое множество с угловыми точками $O(0;\ 0)$, $A(0;\ 2)$ и $B(3;\ 1)$. Вектор нормали имеет координаты $n = (-1;\ 1)$, и, как легко видеть, луч BC с началом в точке B является линией уровня функции z и определяет множество, на котором z достигает минимального значения. Так как направляющим вектором луча BC является вектор $\bar{m} = (1,\ 1) \ge 0$, то $X_{\min} = B + t \cdot \bar{m} = (3,\ 0) + t(1,\ 1) = (3 + t,\ t)$, $t \ge 0$, и $f_{\min} = f(B) = 1$. Кроме этого, так как при движении вдоль вектора $\bar{n}$ каждая линия уровня пересекается с допустимым множеством, то $f_{\max} = \infty$. Для окончательного ответа находим $x_3 = 0$, $x_4 = 8 + t$.

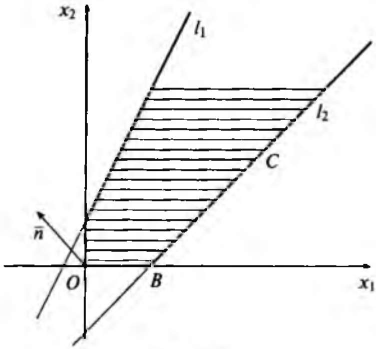


Рис. 3.2

Ответ. $f_{\min} = f(X_{\min}) = 1$ при $X_{\min} = (3 + t, t, 0{,}8 + t)$, $t \ge 0$, $f_{\max} = \infty$.

3.7. Симплекс-метод

Рассмотрим произвольную задачу ЛП, заданную в канонической форме вида

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0 \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Предположим, что с помощью эквивалентных преобразований системы нетривиальных ограничений и подстановки выражений для соответствующих переменных в целевую функцию f задача (3.3) приведена к виду (возможность такого приведения обсуждается в п. 3.8)

$$f = -\gamma_{r+1}x_{r+1} - \gamma_{r+2}x_{r+2} - \ldots - \gamma_n x_n + \gamma_0 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \alpha_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1; \\ x_2 + \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \alpha_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2; \\ \ldots \\ x_r + \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \alpha_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{r,n}x_n = \beta_r; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

где $\beta_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, r$.

Отметим, что после преобразований коэффициенты системы ограничений и целевой функции отличны от исходной задачи (3.3), поэтому в задаче (3.4) для них использованы другие обозначения.

Таким образом, исходными предпосылками для последующего изложения и обоснования общего алгоритма решения задачи ЛП (симплекс-метода) являются следующие условия:

- задача приведена к каноническому виду;
- выделены базисные и свободные неизвестные;
- базисное решение $X = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, 0, \ldots, 0) \ge 0$;
- базисные переменные исключены из целевой функции.

Далее задачу (3.4) удобно формулировать в виде симплекс-таблицы. Для ее заполнения в записи $f(X)$ все слагаемые, содержащие переменные $x_{r+1}, \ldots, x_n$, перенесем в левую часть:

$$f + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \gamma_{r+2}x_{r+2} + \ldots + \gamma_n x_n = \gamma_0.$$

Коэффициенты $\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \ldots, \gamma_n$ называются ***оценками*** исходной задачи ЛП. На основании значений оценок делается вывод об оптимальности допустимых решений задачи. Запишем данные задачи в виде таблицы:

x_1	β_1	1	0	…	0	…	0	$\alpha_{1,r+1}$	…	α_{1j}	…	α_{1n}
x_2	β_2	0	1	…	0	…	0	$\alpha_{2,r+1}$	…	α_{2j}	…	α_{2n}
		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_k	β_k	0	0	…	1	…	0	$\alpha_{k,r+1}$	…	α_{kj}	…	α_{kn}
		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_r	β_r	0	0	…	0	…	1	$\alpha_{r,r+1}$	…	α_{rj}	…	α_{rn}
f	γ_0	0	0	…	0	…	0	γ_{r+1}	…	γ_j	…	γ_n

Отметим также, что в силу исходных предположений базисное решение $X_1 = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r, 0,0, ..., 0) \geq 0$, при этом $f(X_1) = \gamma_0$. Таким образом, в первых двух столбцах симплекс-таблицы содежится информация о базисных переменных, их значениях, а также о значении целевой функции на полученном допустимом решении.

Итак, из симплекс-таблицы заключаем, что возможны три основных случая:

1. *Все оценки неотрицательны*: $\gamma_j \geq 0$, $j = r + 1, r + 2, ..., n$. Тогда для любого допустимого решения системы ограничений $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$

$$f = \gamma_0 - \underbrace{(\gamma_{r+1}x_{r+1} + \gamma_{r+2}x_{r+2} + \ldots + \gamma_n x_n)}_{\geq 0} \leq \gamma_0.$$

Поэтому X_1 является оптимальным решением задачи, $X_{\max} = X_1 = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r, 0,0, ..., 0)$ и $f_{\max} = f(X_{\max}) = \gamma_0$.

2. *Среди оценок $\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \ldots, \gamma_n$ имеется отрицательная $\gamma_j < 0$ для некоторого j, а все элементы j-го столбца неположительны*: $\alpha_{ij} \leq 0$, $i = 1, ..., r$. Покажем, что в этом случае $f \to +\infty$.

Действительно, полагая все свободные переменные, кроме одной из них, например x_j, равными 0, получим, что базисные переменные

$$x_i = \beta_i - \underbrace{\alpha_{ij}x_j}_{\leq 0} \geq \beta_i \geq 0, \; i = 1, ..., r.$$

Таким образом, с одной стороны, набор

$$X = (\beta_1 - \alpha_{1j}x_j, \beta_2 - \alpha_{2j}x_j, ..., \beta_r - \alpha_{rj}x_j, 0, ..., 0, x_j, 0, ..., 0)$$

является допустимым решением исходной системы ограничений при любом $x_j \geq 0$, а с другой — при $x_j \to +\infty$

$$f = \gamma_0 - \underbrace{\gamma_j x_j}_{<0} \to +\infty.$$

3. *Среди оценок $\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \ldots, \gamma_n$ имеется отрицательная $\gamma_j < 0$ для некоторого j, а в соответствующем столбце есть положительный элемент* $\alpha_{ij} > 0$. Покажем, что в этом случае найдется допустимое решение X_2, такое, что $f(X_2) \geq f(X_1)$.

Как и в п. 2, полагаем все свободные переменные, кроме x_j, равными 0. Тогда, чтобы решение

$$X = \left(\beta_1 - \alpha_{1j}x_j, \beta_2 - \alpha_{2j}x_j, \ldots, \beta_r - \alpha_{rj}x_j, 0, \ldots 0, x_j, 0, \ldots, 0\right)$$

было допустимым, необходимо, чтобы $\beta_i - \alpha_{ij}x_j \geq 0$ для $i = 1, ..., r$. Для всех неположительных α_{ij} это условие, очевидно, выполняется для любого $x_j \geq 0$. Если же $\alpha_{ij} > 0$, то неравенство $\beta_i - \alpha_{ij}x_j \geq 0$ равносильно $x_j \leq \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$. Теперь для каждого положительного элемента α_{ij} j-го столбца рассмотрим отношение $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$ и выберем среди них минимальное: пусть $\rho = \min\limits_{\alpha_{ij}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \frac{\beta_k}{\alpha_{kj}}$ и $x_j = \rho$. Тогда в силу выбора ρ очевидно $\beta_i - \alpha_{ij}x_j = \beta_i - \alpha_{ij}\rho \geq 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$, и X является допустимым решением системы. Положив $X_2 = X$, получим

$$f(X_2) = \gamma_0 - \underbrace{\gamma_j}_{\leq 0}\rho \geq f(X_1).$$

Таким образом, мы получили обоснование следующего общего алгоритма решения задачи ЛП симплекс-методом (рассматривается задача на *максимум*).

Пусть система ограничений приведена к каноническому виду, в ней выделен допустимый базис (все правые части — неотрицательные числа), из целевой функции исключены базисные переменные и все слагаемые, кроме константы, перенесены в левую часть. Записав все данные в симплекс-таблицу, получим следующие результаты.

1. Если в последней строке *нет отрицательных оценок, то оптимальное решение достигнуто*.

2. Если в оценочной строке *есть хотя бы одна отрицательная оценка, то решение может быть улучшено*. Для этого выбирается разрешающий столбец (пусть он имеет номер j), содержащий отрицательную оценку, а в качестве разрешающего выбирается положительный элемент $a_{ij} > 0$, дающий минимум отношения элемента свободного столбца b_i к a_{ij}: $a_{ij} = \min\limits_{a_{ij}>0}\left\{\frac{b_i}{a_{ij}}\right\}$.

3. Если в симплекс-таблице *имеется отрицательная оценка, а в соответствующем столбце нет положительных элементов*, то исходная задача не имеет решения, т.е. $z_{\max} = +\infty$.

4. Если оптимальное решение найдено, но при этом у одной (или нескольких) свободной переменной оценка равна 0, то задача имеет альтернативное решение, для получения которого следует сделать шаг симплекс-метода, выбрав разрешающий элемент (по общему правилу) в свободном столбце с нулевой оценкой. При этом множество оптимальных решений в общем случае совпадает с выпуклой оболочкой всех альтернативных решений.

В случае когда рассматривается задача на *минимум*, то оптимальное решение достигнуто, если в последней строке *нет положительных оценок*.

Если в оценочной строке есть *хотя бы одна положительная оценка*, то решение может быть улучшено в соответствии с п. 2. Если же в симплекс-таблице имеется *положительная* оценка, а в соответствующем столбце нет положительных элементов, то исходная задача не имеет решения, т.е. $z_{min} = -\infty$.

Замечание 3.4. Возможна ситуация, когда в заключительной симплекс-таблице в столбце свободной переменной, содержащем нулевую оценку, все элементы отрицательны. Это соответствует случаю, когда оптимальное множество неограниченно и не является выпуклой оболочкой угловых точек (например, луч).

Отметим также, что симплекс-алгоритм имеет естественную геометрическую интерпретацию (см. пример 3.10). Переход от одной симплекс-таблицы к другой соответствует переходу от одной вершины выпуклого многогранника, заданного системой ограничений (3.4), к соседней так, что значение целевой функции по крайней мере не ухудшится. В примере 3.10 задача ЛП решается симплекс-методом и параллельно рассматривается геометрическая интерпретация шагов симплекс-метода.

Пример 3.10. Решить задачу линейного программирования

$$f = 3x_1 + 3x_2 + 21 \to \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 + x_5 = 7; \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

симплексным методом.

Решение. Задача приведена к каноническому виду, допустимый базис уже выделен (переменные x_3, x_4, x_5) и из целевой функции исключены базисные переменные. Поэтому переписываем функцию f в виде $f - 3x_1 - 3x_2 = 21$ и формируем симплекс-таблицу:

Базис	β_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	1	–2	1	1	0	0
x_4	3	1	–1	0	1	0
x_5	7	1	1	0	0	1
f	21	–3	–3	0	0	0

Из таблицы видно, что соответствующим базисным решением будет: $X_1 = (0,0,1,3,7)$ и $f(X) = 21$.

С другой стороны, исходная задача может быть приведена к стандартной форме:

$$f = 3x_1 + 3x_2 + 21 \to \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 1; \\ x_1 - x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \le 7; \\ x \ge 0. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Как видно из рис. 3.3, допустимой областью задачи (3.5) является пятиугольник $OABCD$ с угловыми точками $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(2, 5)$, $C(5, 2)$, $D(3, 0)$. Базисному решению X_1 соответствует угловая точка $O(0,0)$ допустимой области задачи (3.5) и $f(O) = 21$.

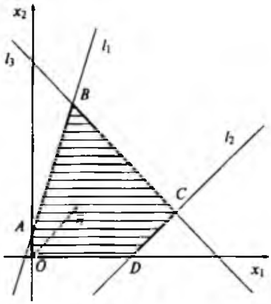


Рис. 3.3

В последней строке полученной симплекс-таблицы есть отрицательные элементы, поэтому решение может быть улучшено. Вводим в базис переменную x_2, а так как $\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{7}{1}\right\} = 1$, выводим из базиса переменную x_3:

Базис	β_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	1	−2	1	1	0	0
x_4	4	−1	0	1	1	0
x_5	6	3	0	−1	0	1
f	24	−9	0	3	0	0

Получаем новое базисное решение $X_2 = (0,1,0,4,6)$ и $f(X_2) = 24$. Как легко видеть, на рис. 3.3 решению X_2 соответствует точка $A(0, 1)$ и $f(A) = 24 > f(O)$.

Так как в строке оценок есть единственный отрицательный элемент, а выбор разрешающего элемента однозначен, то выводим из базиса переменную x_5 и вводим в базис переменную x_1. Делим разрешающую строку на 3 и делаем шаг симплекс-метода:

Базис	β_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	5	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
x_4	6	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
x_1	2	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
f	42	0	0	0	0	3

В строке оценок последней таблицы нет отрицательных элементов, поэтому оптимальным решением является базисное решение $X_1^* = (2,5,0,6,0)$ и $f_{max} = f(X_1^*) = 42$. На рисунке 3.3 оптимальному решению X_1^* отвечает оптимальное решение $B(2, 5)$ задачи (3.5) с $f(B) = 42$.

Заметим, что в столбце свободной переменной x_3 есть нулевая оценка, а значит, имеется альтернативное решение. Для того чтобы его найти, выбираем по общему правилу разрешающий элемент в этом столбце: так как $\min\left\{\frac{5}{\frac{1}{3}}, \frac{6}{\frac{2}{3}}\right\} = \frac{6}{\frac{2}{3}}$, умножаем вторую строку на $\frac{3}{2}$ и делаем шаг симплекс-метода (вводим в базис x_3 и выводим из базиса переменную x_4):

Базис	β_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	9	0	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	5	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f	42	0	0	0	0	3

Альтернативным оптимальным решением является $X_2^* = (5,2,9,0,0)$, которой соответствует оптимальная точка $C(5,2)$ задачи (3.5) (см. рис. 3.3).

Заметим, что других альтернатив нет, так как, вводя в базис переменную x_4, мы вновь получаем альтернативное решение X_1^*.

Итак, оптимальным множеством исходной задачи является отрезок, соединяющий точки X_1^* и X_2^* (оптимальным множеством задачи (3.5) является отрезок BC):

$$X^* = (1-t)X_1^* + tX_2^* = (1 - t)(2,5,0,6,0) + t(5,2,9,0,0) =$$
$$= (2 + 3t, 5 - 3t, 9t, 6 - 6t, 0),$$

где $t \in [0,1]$.

Ответ. $f_{max} = 42$ при $X^* = (2 + 3t, 5 - 3t, 9t, 6 - 6t, 0)$, $t \in [0, 1]$.

Легко видеть, что шаг симплекс-метода во многом сходен с итерацией метода Гаусса. Отличие состоит в том, что разрешающий элемент выбирается не произвольно, а согласно вышеизложенным правилам, которые гарантируют, что вновь полученная таблица имеет допустимый вид.

Аналогия с методом Гаусса позволяет интерпретировать шаг симплекс-метода как умножение расширенной матрицы нетривиальных ограничений слева на подходящую матрицу. Поскольку вид системы линейных уравнений однозначно определяется выбором базисных переменных, то такая матрица также находится однозначно (при условии единичных коэффициентов при базисных переменных). Ясно, что такой матрицей является матрица $P^{-1}_{\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}}$, где $P_{\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}}$ — матрица столбцов, соответствующих переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ в *исходной задаче* (3.3), и значения базисных переменных $X_{\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})^T$ на очередном шаге симплекс-метода могут быть найдены по формуле

$$X_{\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}} = P^{-1}_{\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}} b. \tag{3.6}$$

При этом вектор строки оценок $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ пересчитывается из вектора коэффициентов целевой функции $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ исходной задачи по формуле

$$\gamma = c_{\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}} P^{-1}_{\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}} A - c,$$

где $c_{\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}} = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$, а значение целевой функции

$$\gamma_0 = c_{\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}} P^{-1}_{\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}} b + c_0,$$

Пример 3.11. Легко убедиться, что в задаче примера 3.10 вектор $X_{\{2,4,5\}} = (x_2, x_4, x_5)$ базисных переменных промежуточного решения $X = (0,1,0,4,6)$ может быть найден по формуле (3.6):

$$P^{-1}_{\{2,4,5\}} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = X_{\{2,4,5\}},$$

а строка оценок

$$c_{\{2,4,5\}} P^{-1}_{\{2,4,5\}} A - c = (3,0,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

$$-(3,3,0,0,0) = (-9,0,3,0,0).$$

Значения базисных переменных оптимальных решений $X_1^* = (2,5,0,6,0)$ и $X_2^* = (5,2,9,0,0)$ находятся аналогично:

$$P^{-1}_{\{1,2,4\}} b = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = X^*_{\{1,2,4\}};$$

$$P^{-1}_{\{1,2,3\}}b=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\\9\end{pmatrix}=X^{*}_{\{1,2,3\}}.$$

Строка оценок для оптимального решения

$$c_{\{1,2,4\}}P^{-1}_{\{1,2,4\}}A-c=(3,3,0)\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-$$

$$-(3,3,0,0,0)=(0,0,0,0,3),$$

а оптимальное значение

$$\gamma_0=c_{\{1,2,4\}}P^{-1}_{\{1,2,4\}}b-c_0=(3,3,0)\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}+21=42.$$

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы, которая потребуется нам в следующей главе.

Теорема 3.5. *Вектор значений* $X_{*}=(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_m})^T$ *базисных переменных* $x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_m}$ *оптимального решения задачи ЛП* (3.3) (*т.е. заключительной симплекс-таблицы этой задачи*) *может быть найден по формуле*

$$X_{*}=P_{*}^{-1}b,$$

где P_{*} — матрица столбцов, соответствующих этим переменным в **исходной задаче**.

Строка оценок заключительной симплекс-таблицы находится по формуле

$$\gamma=c_{*}P_{*}^{-1}A-c, \tag{3.7}$$

где $c_* = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$ а оптимальное значение функции

$$f(X^*) = c_* P_*^{-1} b + c_0.$$

Так как строка оценок в заключительной симплекс-таблице неотрицательна ($\gamma \geq 0$), то из (3.7) получаем следующее следствие.

Следствие 3.1. *Для базисных переменных* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ *оптимального решения задачи ЛП имеет место неравенство*

$$c_* P_*^{-1} A \geq c.$$

3.8. Метод искусственного базиса

Начальным этапом решения задачи симплекс-методом является приведение ее к допустимому виду и формирование симплекс-таблицы. В том числе это означает, что в системе нетривиальных ограничений должен быть выделен допустимый базис. Заметим, что в исходной задаче это может быть сделано не всегда.

Для исследования возможности и непосредственного выделения допустимого базиса существуют несколько алгоритмов. В некоторых случаях для решения исходной задачи можно использовать метод Гаусса, принимая во внимание, что свободный столбец на каждом шаге должен быть неотрицательным.

Пример 3.12. Решить задачу линейного программирования

$$z = 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 10 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2; \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

симплексным методом.

Решение. Для выделения базиса используем метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 7 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 7 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & -8 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, система нетривиальных ограничений задачи (3.8) эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 3; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Выражая базисные неизвестные, получим

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 - 2x_4; \\ x_2 = 1 - 2x_3 + x_4 \end{cases}$$

и, подставляя в функцию z, получаем $z = -3x_3 - x_4 - 2$. Таким образом, задача (3.8) эквивалентна следующей:

$$z = -3x_3 - x_4 - 2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 3; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Переписываем z в виде $z + 3x_3 + x_4 = -2$ и формируем исходную симплекс-таблицу. Решение задачи представлено в виде последовательности симплекс-таблиц:

Базис	β_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	3	1	0	1	2
x_2	1	0	1	2	−1
z	−2	0	0	3	1

;

Базис	β_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x_3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
z	$-\frac{7}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$

;

Базис	β_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_4	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1
x_3	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0
z	−6	−1	−1	0	0

.

В последней строке нет положительных элементов, поэтому оптимальное решение найдено. Таковым является базисное решение $X^* = (0,0,1,1)$ и $z_{\min} = z(X^*) = -6$.

Ответ: $z_{\min} = z(X^*) = z(0,0,1,1) = -6$.

В общем случае для выделения допустимого базиса можно решить вспомогательную задачу, которая ставится следующим образом.

Пусть исходная система нетривиальных ограничений задана в общем виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где $b_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Выполнения последнего условия всегда можно добиться, умножив уравнения на -1. Введем в систему новые (искусственные) переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m, \end{cases}$$

так что новая система имеет допустимое базисное решение $(0,0, \ldots, 0; b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathrm{R}^{n+m}$.

Замечание 3.5. Здесь мы ограничиваемся случаем, когда в системе отсутствуют выделенные базисные переменные. Если же базис выделен лишь частично, то искусственные перменные вводятся лишь в уравнения, которые не содержат базисных переменных.

Рассмотрим вспомогательную целевую функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ и решим симплекс-методом задачу

$$\begin{cases} F = y_1 + y_2 + \ldots + y_m \to \min; \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m. \end{cases}$$

Если последняя задача имеет решение, то возможны два случая:

1. Если $\min F > 0$, то система ограничений не имеет допустимого базиса и задача не имеет решений.

2. Если $\min F = 0$, то система ограничений имеет неотрицательное базисное решение. Чтобы получить систему ограничений, эквивалентную исходной, но с выделенным допустимым базисом, необходимо, чтобы в заключительной симплекс-таблице все искусственные переменные были свободными.

Пример 3.13. Рассмотрим задачу из примера 3.12:

$$\begin{cases} z = 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 10 \to \min; \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2; \\ x \geq 0 \end{cases}$$

и выделим допустимый базис с помощью вспомогательной задачи:

$$\begin{cases} F = y_1 + y_2 \to \min; \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 + y_1 = 6; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + y_2 = 2. \end{cases}$$

В системе выделен допустимый (искусственный) базис y_1, y_2, поэтому выражаем из уравнений базисные переменные

$$\begin{cases} y_1 = 6 - x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_4; \\ y_2 = 2 - x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

и подставляем в выражение для F: $F = y_1 + y_2 = 8 - 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 2x_4$. Переписываем это равенство в виде $F + 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 8$ и формируем симплекс-таблицу:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
y_1	6	1	3	7	–1	1	0
y_2	2	1	–1	–1	3	0	1
F	8	2	2	6	2	0	0

Выводим из базиса переменную y_2 и вводим в базис x_1. Получим

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
y_1	4	0	4	8	–4	1	–1
x_1	2	1	–1	–1	3	0	1
F	4	0	4	8	–4	0	–2

Далее выводим из базиса переменную y_1 и вводим в базис x_2:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
x_2	1	0	1	2	–1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_1	3	1	0	1	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
F	0	0	1	0	0	–1	–1

Данная симплекс-таблица — заключительная, искусственные переменные y_1, y_2 стали свободными; опуская последнюю строку и столбцы, им соответствующие, получаем систему ограничений с выделенным допустимым базисным решением

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 3, \end{cases}$$

которая равносильна исходной системе ограничений и совпадает с системой (3.9), полученной (другим способом) в примере 3.12.

Пример 3.14. Решить задачу

$$z = x_1 + 3x_2 + 8 \to \min;$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 19; \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 33; \\ x \geq 0 \end{cases}$$

симплекс-методом.

Решение. В данной задаче допустимый базис выделен лишь частично (переменные x_3, x_5), поэтому ограничимся лишь введением одной искусственной переменной y (см. замечание 3.5). Решим следующую задачу:

$$\begin{cases} F = y \to \min; \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + y = 19; \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 33. \end{cases}$$

Так как $F = y = 19 - x_1 - 3x_2 + x_4$, то $F + x_1 + 3x_2 - x_4 = 19$. Аналогично из $z = x_1 + 3x_2 + 10$ получаем, что $z - x_1 - 3x_2 = 10$.

Решая задачу для функции F, внесем в таблицу строку для функции z, одновременно преобразуя и ее. Получим:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
x_3	1	−1	1	1	0	0	0
y	19	1	3	0	−1	0	1
x_5	33	3	1	0	0	1	0
z	8	−1	−3	0	0	0	0
F	19	1	3	0	−1	0	0

Далее следуют симплекс-преобразования:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
x_2	1	–1	1	1	0	0	0
y	16	4	0	–3	–1	0	1
x_5	32	4	0	–1	0	1	0
z	11	–4	0	3	0	0	0
F	16	4	0	–3	–1	0	0

Выводим из базиса переменную y и вводим в базис x_1.

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
x_2	5	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
x_1	4	1	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
x_5	16	0	0	2	1	1	–1
z	27	0	0	0	–1	0	1
F	0	0	0	0	0	0	–1

Вспомогательная задача $F \to \min$ решена, и искусственная переменная y — свободная. Поэтому опускаем последнюю строку и столбец и получаем симплекс-таблицу для исходной задачи с выделенным допустимым базисом:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	5	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
x_1	4	1	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
x_5	16	0	0	2	1	1
z	27	0	0	0	–1	0

Более того, данная симплекс-таблица — заключительная, поэтому решением задачи является $X_1 = (4,5,0,0,16)$. В свободном столбце переменной x_3 — нулевая оценка, поэтому имеется альтернативное решение. Выводя из базиса переменную x_5 и вводя x_3:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	3	0	1	0	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$
x_1	10	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
x_3	8	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	27	0	0	0	-1	0

,

получаем альтернативное решение $X_2 = (10,3,8,0,0)$. Общее решение задачи:

$$X^* = (1-t)X_1 + tX_2 = (1-t)(4,5,0,0,16) + t(10,3,8,0,0) = (4+6t,\ 5-2t,\ 8t,\ 0,\ 16-16t),\ t \in [0,\ 1].$$

Ответ. $z_{\min} = 27$ при $X^* = (4 + 6t,\ 5 - 2t,\ 8t,\ 0,\ 16 - 16t),\ t \in [0,\ 1]$.

Пример 3.14. Решить задачу

$$z = x_1 + 2x_2 + 9 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 1; \\ -x_1 + x_2 - x_5 = 3; \\ x \geq 0 \end{cases}$$

симплекс-методом.

Решение. Так как переменная x_4 может рассматриваться как базисная, то введем искусственные переменные y_1, y_2 и решим следующую задачу:

$$\begin{cases} F = y_1 + y_2 \to \min; \\ x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 2; \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 1; \\ -x_1 + x_2 - x_5 + y_2 = 3; \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда $F = y_1 + y_2 = 5 - 2x_2 + x_3 + x_5$, т.е. $F + 2x_2 - x_3 - x_5 = 5$. Аналогично $z - x_1 - 2x_2 = 9$, и решаем задачу для функции F, включив при этом в таблицу строку для функции z:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
y_1	2	1	1	–1	0	0	1	0
x_5	1	1	4	0	1	0	0	0
y_2	3	–1	1	0	0	–1	0	1
z	9	–1	–2	0	0	0	0	0
F	5	0	2	–1	0	–1	0	0

Вводим в базис x_2 и выводим из базиса x_5:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
y_1	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	–1	$-\frac{1}{4}$	0	1	0
x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0
y_2	$\frac{11}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	–1	0	1
z	$\frac{19}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
F	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	–1	$-\frac{1}{2}$	–1	0	0

Все элементы строки оценок задачи $F \to \min$ отрицательны, поэтому симплекс-таблица — заключительная, но так как $\min F = \frac{9}{2} > 0$, то исходная задача не имеет ни одного допустимого базиса и, соответственно, не имеет решений.

3.9. Теорема о конечности симплекс-алгоритма

Как было установлено в п. 3.7, в результате решения задачи линейного программирования (при условии существования допустимого базиса) мы либо приходим к выводу, что $f_{\max(\min)} = \pm\infty$, либо находим оптимальное решение задачи. Симплекс-алгоритм предполагает, что к тому или другому результату мы приходим за некоторое число шагов. При этом возникают естественные вопросы: всегда ли этот процесс конечен и всегда ли возможно решить задачу, если мы начинаем с любого допустимого базиса?

Так как каждый шаг симлекс-метода состоит в замене одного базиса другим, а число возможных базисов для системы ограничений (конечной) любой задачи линейного программирования конечно, то бесконечность процесса решения задачи предполагает образование цепочек, при которых мы (за конечное число шагов) возвращаемся к ранее уже полученному значению целевой функции. Теоретически такое возможно, если в результате нескольких шагов целевая функция не изменилась, а мы вернулись к ранее уже найденному базису. Такая ситуация называется *зацикливанием*. В литературе имеется несколько примеров зацикливания (см. например, [13]), построенных искусственно. Причем последнего легко избежать, изменяя выбор разрешающих элементов.

В общем же случае, если задача линейного программирования разрешима, то ответ на поставленный в начале параграфа вопрос сформулирован в следующей теореме.

Теорема 3.6 (о конечности симплекс-алгоритма). *Если задача линейного программирования разрешима, то существует базисное оптимальное решение, которое всегда может быть получено за конечное число шагов с помощью симплекс-алгоритма, причем в качестве исходного можно взять любой допустимый базис.*

Теорема также подразумевает, что симплекс-метод является универсальным методом решения задач линейного программирования. При его применении за конечное число шагов (при подходящем выборе разрешающих элементов) мы либо находим оптимальное решение задачи, либо устанавливаем, что $f_{max(min)} = \pm\infty$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Приведите общую постановку задачи оптимизации. Дайте определение допустимого множества и целевой функции задачи оптимизации.
2. Дайте определение оптимального решения и оптимального множества задачи оптимизации. Приведите примеры.
3. Приведите общую постановку задачи математического программирования. Что называют тривиальными и нетривиальными ограничениями задачи математического программирования?
4. Приведите общую постановку задачи ЛП. Приведите примеры (текстовую формулировку и математическую постановку) задач линейного программирования на минимум (задача о диете,

транспортная задача) и на максимум (задача об использовании ресурсов, задача о банке).

5. Составьте математическую модель следующей задачи линейного программирования. Содержание витаминов А и С в яблоках и апельсинах указано в таблице. Известно, что 1 кг яблок стоит 60 руб., а 1 кг апельсинов стоит 75 руб. Сколько кг яблок и апельсинов должен потреблять человек в сутки, чтобы получить не менее 73 мг витамина С и не менее 2 мг витамина А при минимальных затратах на яблоки и апельсины?

	A (мг/кг)	C (мг/кг)
Яблоки	2	73
Апельсины	23	91

7. Какова математическая постановка задачи об использовании ресурсов? Что называют матрицей норм расхода сырья?
8. Что называется канонической и стандартной формой задач ЛП?
9. Приведите пример задачи ЛП, заданной в стандартной форме, и приведите ее к канонической форме.
10. Найти каноническую форму задачи ЛП:

$$\begin{cases} z = -2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_5 \to \max; \\ x_1 + x_3 - x_4 - x_5 \geq 15; \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_5 \leq 10; \\ 2x_1 + 5x_2 - 42x_3 + 6x_4 \geq 34; \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

11. Привести задачу ЛП к стандартному виду:

$$\begin{cases} z = 3x_2 + x_4 \to \max; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -3; \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2; \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

12. Приведите пример задачи ЛП, заданной в канонической форме, и приведите ее к стандартной форме.
13. Приведите пример задачи ЛП, форма которой не является ни канонической, ни стандартной. Приведите эту задачу к канонической форме. Приведите эту задачу к стандартной форме.
14. Дайте определение выпуклого множества в пространстве R^n. Докажите, что пересечение выпуклых множеств выпукло.

15. Дайте определение угловой точки выпуклого множества M. Что называется выпуклой линейной комбинацией точек X_1, X_2, ..., X_m?
16. Докажите, что выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин.
17. Каков геометрический смысл задачи линейного программирования в пространстве R^n? Какова роль угловых точек? Сформулируйте и докажите теорему о достижимости оптимального решения в угловой точке.
18. Допустимое множество некоторой задачи линейного программирования является выпуклой линейной оболочкой точек $X_1 = (1; 0; 1)$, $X_2 = (1; 5; 0)$, $X_3 = (0; 5; 1)$. Найдите для этой задачи минимальное значение целевой функции $f = 2x + y - 2z + 2$.
19. Сформулируйте и докажите теорему о достижимости оптимального решения на выпуклой линейной комбинации оптимальных угловых точек.
20. В чем состоит графический метод решения задачи ЛП в случае двух переменных? Какие еще случаи допускают графическое решение? Приведите примеры.
21. Решите графическим способом задачи ЛП:

$$\text{а) } \begin{cases} f = 3y - 2x \to \min\ (\max); \\ 3x + 3y \geq 18; \\ 5x - y \leq 24; \\ 2x + 4y \leq -12; \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} f = 2x + y \to \min\ (\max); \\ 5x + 2y \geq 45; \\ 8x - 5y \leq 31; \\ 3x - 7y \leq -55; \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$$

22. Решите задачу ЛП графическим способом:

$$\begin{cases} f = x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 7 \to \max\ (\min); \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 15; \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 3; \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

23. Каковы основные предпосылки для применения симплекс-метода для решения задачи ЛП?
24. Изложите алгоритм решения задачи линейного программирования симплекс-методом.
25. Обоснуйте алгоритм решения задачи линейного программирования симплекс-методом.

26. Решите задачу ЛП симплекс-методом:

$$\begin{cases} f = -5x_4 - 7x_5 - 1 \to \min; \\ x_1 + x_4 + x_5 = 2; \\ x_2 - x_4 + x_5 = 7; \\ x_3 + x_4 - x_5 = 17; \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

27. В каком случае по симплекс-таблице задачи линейного программирования можно сказать: а) задача не имеет решений; б) допустимое решение может быть улучшено. Приведите примеры.
28. В каком случае по симплекс-таблице задачи линейного программирования можно сказать: а) допустимое решение оптимально; б) есть альтернативное решение. Приведите примеры.
29. Как найти допустимый базис в задаче линейного программирования? Изложите алгоритм метода искусственного базиса. Приведите пример.
30. Решите задачи ЛП методом искусственного базиса:

$$\text{а)} \begin{cases} z = 2 - 4x_5 - 2x_4 \to \min; \\ x_1 + x_4 + x_5 = 8; \\ -x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 58; \\ -x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 32; \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} z = 2x_4 + 10x_5 - 4 \to \max; \\ -x_1 - x_4 - x_5 = -2; \\ x_1 + x_2 + 2x_5 = 15; \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 33; \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

31. Всегда ли можно найти допустимый базис в задаче линейного программирования? Приведите примеры.
32. Сформулируйте теорему о конечности симплекс-метода.

ГЛАВА 4

ВЗАИМНО ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

4.1. Постановка взаимно-двойственных задач

В предыдущей главе были рассмотрены основные методы решения задач ЛП. Оказывается, с каждой задачей ЛП можно связать *двойственную* задачу, так что совместное решение этих задач может упростить решение одной из них.

Заметим, что понятие двойственной задачи имеет естественную экономическую интерпретацию. Рассмотрим пример, из которого понятно, как при решении экономических задач могут естественно возникать двойственные задачи. В параграфе 3.2 рассматривалась *задача об использовании ресурсов*

$$f = C^T X \to \max;$$
$$\begin{cases} AX \le B; \\ X \ge 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Здесь $A = (a_{ij})$ — матрица норм расхода ресурсов $R_1, R_2, \ldots, R_m$ для производства продуктов $P_1, P_2, \ldots, P_m$; $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ — вектор прибыли от реализации единицы каждого из этих продуктов; $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ — запасы ресурсов; $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — соответствующий производственный план. Ясно, что альтернативой производства продукции может служить продажа самих ресурсов по ценам $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)^T$. При этом выручка должна быть не меньше прибыли, полученной при продаже продукции, что равносильно выполнению условия $p^T A \ge C^T$ (или $A^T p \ge C$). При этом покупатель ресурсов заинтересован заплатить за ресурсы наименьшую стоимость $p^T B = B^T p$. Таким образом, имеем задачу

$$g = B^T p \to \min;$$
$$\begin{cases} A^T p \ge C; \\ p \ge 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Замечание 4.1. Цены на ресурсы $p_1, p_2, \ldots, p_m$ нередко называют «двойственными», «теневыми» или оценками ресурсов (см. далее параграф 4.5). Они получаются как решение задачи (4.2) и могут отличаться от соответствующих внешних цен, определяемых рынком.

Задачи (4.1) и (4.2) называются *взаимно двойственными*. Связь между ними выражается следующими свойствами:

1. Если задача (4.1) имеет размеры $m \times n$, то задача (4.2) имеет размеры $n \times m$. При этом матрица нетривиальных ограничений двойственной задачи получается из соответствующей матрицы исходной задачи транспонированием.

2. Правые части нетривиальных ограничений двойственной задачи являются коэффициентами целевой функции исходной задачи, и наоборот, коэффициенты целевой функции двойственной задачи совпадают с правыми частями ограничений исходной задачи.

3. Если исходная задача является задачей на максимум, то двойственная ей задача будет задачей на минимум. При этом в задаче (4.1) все нетривиальные ограничения суть неравенства типа «$\le$», а в задаче (4.2) все неравенства записываются со знаком «$\ge$».

4.2. Основные теоремы о двойственных задачах

4.2.1. Основная теорема двойственности

Рассмотрим теперь общую ситуацию, когда задана пара *симметричных* двойственных задач:

Задача I	Задача II
$f(X) = C^T X \to \max;$ $\begin{cases} AX \le B; \\ X \ge 0 \end{cases}$	$g(Y) = B^T Y \to \min;$ $\begin{cases} A^T Y \ge C; \\ Y \ge 0 \end{cases}$

Как мы увидим из последующих утверждений, связи между этими задачами гораздо глубже, чем описанные в предыдущем параграфе. Они изложены в следующих утверждениях.

Теорема 4.1 (***основное неравенство для двойственных задач***). *Для всех допустимых решений X, Y пары двойственных задач имеет место неравенство $f(X) \le g(Y)$.*

Доказательство. Транспонируя обе части неравенства $AX \le B$, получаем $X^T A^T \le B^T$. Домножая теперь на матрицу Y справа, получим, что $X^T A^T Y \le B^T Y$, т.е. $X^T A^T Y \le g(Y)$. Аналогично, домножая условие $A^T Y \le C$ на X^T слева, получим $X^T A^T Y \ge X^T C$. Таким образом, с учетом того, что $X^TC = C^TX = f(X)$, имеем $X^TA^TY \geq f(X)$. Получаем, что для любой пары X, Y допустимых решений двойственных задач $f(X) \leq X^TA^TY \leq g(Y)$. Теорема доказана.

Следствие 4.1 (***достаточный признак оптимальности***). *Если для каких-либо допустимых решений X^*, Y^* пары двойственных задач имеет место равенство $f(X^*) = g(Y^*)$, то X^*, Y^* — оптимальные решения задач I и II.*

Действительно, в силу теоремы 4.1 для любого допустимого решения X задачи I имеет место неравенство $f(X) \leq g(Y^*)$, т.е. $f(X) \leq f(X^*)$. Таким образом, $f\max = f(X^*)$. Аналогично для любого допустимого решения Y задачи II выполняется неравенство $f(X^*) \leq g(Y)$, или $g(Y^*) \leq g(Y)$, т.е. $g_{\min} = g(Y^*)$.

Заметим также, что если задача I имеет хотя бы одно допустимое решение, то в силу основного неравенства задача II ограничена снизу. И наоборот, если допустимое множество задачи II не пусто, то задача I ограничена сверху. Отсюда вытекает следствие 4.2.

Следствие 4.2. *Если для одной из задач I, II целевая функция не ограничена, т.е. $f_{\max} = +\infty$ или $g_{\min} = -\infty$, то двойственная ей задача не имеет ни одного допустимого решения.*

Теорема 4.2 (***первая теорема двойственности***). *Если исходная задача имеет оптимальное решение, то и двойственная ей имеет оптимальное решение. При этом оптимальные значения обеих целевых функций равны, т.е. $f_{\max} = g_{\min}$.*

Доказательство. Приведем задачу I к каноническому виду и решим симплекс-методом. Это возможно в силу того, что исходная задача имеет оптимальное решение. Тогда, согласно теореме 3.5, значения базисных переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ оптимального решения могут быть найдены по формуле $X_* = P_*^{-1}B$, где $X_* = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$, а P_* — матрица столбцов, соответствующих этим переменным в исходной задаче.

Оказывается, оптимальное решение задачи II находится по формуле

$$Y^{*T} = c_* P_*^{-1}, \tag{4.3}$$

где $c_* = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$.

Действительно, так как по следствию 3.1, $c_* P_*^{-1} A \geq C^T$, то

$$Y^{*T} A \geq C^T, \tag{4.4}$$

или

$$A^T Y^* \geq C.$$

Таким образом, Y^* удовлетворят нетривиальным ограничениям задачи II. Отбрасывая в (4.4) столбцы матрицы A, соответствующие свободным переменным, заключаем, что $Y^* \geq 0$. Таким образом, решение Y^* допустимо.

Кроме этого,

$$g(Y^*) = B^T Y^* = Y^{*T} B = c_* P_*^{-1} B = c_* X_* = f(X^*).$$

Таким образом, по достаточному признаку оптимальности, $Y^{*T} = c_* P_*^{-1}$ является оптимальным решением задачи II, и $g(Y^*) = f(X^*)$.

Таким образом, мы также доказали следующую теорему.

Теорема 4.3. *Если известны базисные переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ оптимального решения задачи I, то оптимальное решение задачи II может быть найдено по формуле $Y^{*T} = c_* P_*^{-1}$, где $c_* = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$ — коэффициенты при переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ в целевой функции задачи I.*

4.2.2. Теорема равновесия

Более глубокая связь между оптимальными решениями задач I и II может быть установлена с помощью теоремы равновесия (второй теоремы двойственности).

Теорема 4.4 (***вторая теорема двойственности***). *Оптимальные решения $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T$ и $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)^T$ пары двойственных задач связаны между собой равенствами*

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) \cdot x_j^* = 0, \ j = 1, \ldots, n; \\ \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) \cdot y_i^* = 0, \ i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Доказательство. Для любого допустимого решения задачи I $AX^* - B \leq 0$. Поэтому, домножая на Y^{*T} слева, получим

$$Y^{*T}AX^* - Y^{*T}B \leq 0.$$

Аналогично для Y^{*T} получаем, что $A^T Y^* - C \geq 0$, или $Y^{*T}A - C^T \geq 0$. Домножая на X^* справа, имеем, что $Y^{*T}AX^* - C^T X^* \geq 0$.

Поскольку для оптимальных решений задач I и II, согласно первой теореме двойственности, имеет место равенство $Y^{*T}B = C^T X^*$, то левые части обоих неравенств равны и $Y^{*T}AX - Y^{*T}B = 0$, $Y^{*T}AX^* - C^T X^* = 0$.

Вынося общие множители в обоих равенствах, получим

$$Y^{*T}(AX^* - B) = 0, \ (Y^{*T}A - C^T)X^* = 0.$$

Расписывая первое из полученных уравнений покоординатно, имеем

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right)}_{\le 0} = 0.$$

Каждое из слагаемых, входящих в данную сумму, неположительно. Поэтому так как их сумма равна 0, то и каждое из слагаемых равно 0, т.е. получаем, что

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) \cdot y_i^* = 0,\ i = 1, \dots, m.$$

Расписывая покоординатно второе уравнение, получаем, что

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right)}_{\ge 0} \cdot x_j^* = 0.$$

Аналогично из неотрицательности каждого из слагаемых последней суммы заключаем, что

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) \cdot x_j^* = 0,\ j = 1, \dots, n.$$

Теорема равновесия доказана.

Если задачи I и II привести к канонической форме, то их системы ограничений приоретают следующий вид.

Задача I'	Задача II'
$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max;$ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_{n+m} \ge 0 \end{cases}$	$g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min;$ $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m - y_{m+1} = c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m - y_{m+2} = c_2; \\ \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}y_m - y_{m+n} = c_n; \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_{m+n} \ge 0 \end{cases}$

Отсюда видно, что между переменными задач I' и II' можно установить естественное соответствие, а именно: набор коэффициентов

$$a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$$

при переменной x_j в уравнениях задачи I' совпадает с коэффициентами выражения балансовой переменной

$$y_{m+j} = a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m - c_j \qquad (4.5)$$

через основные переменные задачи II'. Аналогично набор коэффициентов

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{im}$$

при переменной y_i в уравнениях задачи II' совпадает (с точностью до знака) с выражениями дополнительной переменной

$$x_{n+i} = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \tag{4.6}$$

через основные переменные задачи I'. Таким образом, получаем следующее следствие.

Следствие 4.3. *Между основными и балансовыми переменными задач I' и II' имеется естественное соответствие*:

$$\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n & & & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+i} & \cdots & x_{n+m} \\
\updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & & & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots & \updownarrow \\
y_{m+1} & y_{m+2} & \cdots & y_{m+j} & \cdots & y_{m+n} & & & y_1 & y_2 & \cdots & y_i & \cdots & y_m
\end{array}$$

При этом основным переменным одной из задач соответствуют дополнительные переменные другой задачи.

Следствие 4.3 позволяет сформулировать теорему равновесия в следующей форме.

Следствие 4.4. *Оптимальные решения*

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*, \ldots, x_{n+m}^*)^T$$

и

$$Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*, y_{m+1}^*, \ldots, y_{m+n}^*)^T$$

задач I' *и* II' *связаны между собой равенствами*

$$\begin{cases} x_j^* \cdot y_{m+j}^* = 0, \ j = 1, \ldots, n; \\ x_{i+n}^* \cdot y_i^* = 0, \ i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Таким образом, произведение переменных оптимальных решений задач I' *и* II', *входящих в установленные следствием 4.3 соответствия, равно нулю.*

Пример 4.1. Решить задачу

$$\begin{cases} f = 22x_1 + 91x_2 - 37x_3 + 19 \to \min; \\ -10x_1 + 7x_2 + 3x_3 \ge 1; \\ 8x_1 + 2x_2 - 10x_3 \ge 22; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

с помощью теоремы равновесия.

Решение. Легко видеть, что задача, двойственная к исходной, имеет вид

$$\begin{cases} g(Y) = y_1 + 22y_2 + 19 \to \max; \\ -10y_1 + 8y_2 \le 22; \\ 7y_1 + 2y_2 \le 91; \\ 3y_1 - 10y_2 \le -37; \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решим ее графическим способом. Строим на плоскости (y_1, y_2) прямые $l_1 : -10y_1 + 8y_2 = 22$; $l_2 : 7y_1 + 2y_2 = 91$; $l_3 : 3y_1 - 10y_2 = -37$ и убеждаемся, что нетривиальные ограничения определяют треугольник ABC, угловыми точками которого являются $A(9, 14)$, $B(11, 7)$ и $C(1, 4)$.

Вектор нормали $\boldsymbol{n}$ имеет координаты $\boldsymbol{n} = (1, 22)$. Поэтому очевидно максимальное значение функции $g(Y)$ достигается в точке $A(9, 14)$ и $Y^* = (9, 14)$, $g_{\max} = g(9, 14) = 336$.

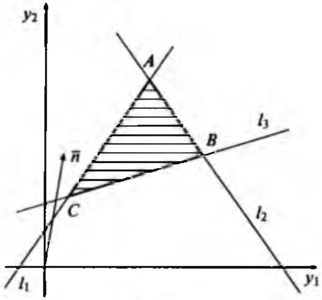


Рис. 4.1

Запишем теперь теорему равновесия для данной пары двойственных задач:

$$\begin{cases} (-10y_1^* + 8y_2^* - 22) \cdot x_1^* = 0; \\ (7y_1^* + 2y_2^* - 91) \cdot x_2^* = 0; \\ (3y_1^* - 10y_2^* + 37) \cdot x_3^* = 0; \\ (-10x_1^* + 7x_2^* + 3x_3^* - 1) \cdot y_1^* = 0; \\ (8x_1^* + 2x_2^* - 10x_3^* - 22) \cdot y_2^* = 0. \end{cases}$$

С учетом того что $Y^* = (9, 14)$ (т.е. $y_1^* \ne 0, y_2^* \ne 0$) и $A = l_1 \cap l_2$, $A \notin l_3$ (т.е. $-10y_1^* + 8y_2^* - 22 = 0$; $7y_1^* + 2y_2^* - 91 = 0$; $3y_1^* - 10y_2^* + 37 \ne 0$, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой), выполнение первых двух уравнений очевидно, третье сводится к условию $x_3^* = 0$ и система сводится к виду

$$\begin{cases} x_3^* = 0; \\ -10x_1^* + 7x_2^* + 3x_3^* - 1 = 0; \\ 8x_1^* + 2x_2^* - 10x_3^* - 22 = 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_3^* = 0; \\ -10x_1^* + 7x_2^* - 1 = 0; \\ 8x_1^* + 2x_2^* - 22 = 0, \end{cases}$$

решениями которой является точка $X^* = (2, 3, 0)$. Заметим, что $f(X^*) = 22 \cdot 2 + 91 \cdot 3 - 37 \cdot 0 + 19 = 336 = g(Y^*)$, как и должно быть по первой теореме двойственности.

4.3. Общая постановка двойственных задач и их решение

В параграфе 4.2 мы рассматривали *симметричные* двойственные задачи, когда все нетривиальные ограничения двойственных задач — типа неравенств, а все переменные неотрицательные. Оказывается, постановку двойственных задач можно обобщить на другие случаи.

4.3.1. Несимметричные двойственные задачи

Несимметричными двойственными задачами называется пара задач:

Задача M	Задача N
$f(X) = C^T X \to \max;$ $\begin{cases} AX = B; \\ X \ge 0 \end{cases}$	$g(Y) = B^T Y \to \min;$ $A^T Y \ge C$

Таким образом, задача M содержит только нетривиальные ограничения типа равенств, а задача N не содержит тривиальных ограничений. Легко видеть, что такая постановка задач вполне согласуется со случаем, рассмотренным в параграфе 4.1. Действительно, запишем равенство $AX = B$ в виде системы неравенств

$$\begin{cases} AX \le B; \\ AX \ge B, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} AX \le B; \\ -AX \le -B. \end{cases}$$

Введем $(2m \times n)$-матрицу $\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$ и столбец $\bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ -B \end{pmatrix}$ и получим, что последняя система равносильна условию $\bar{A}X \le \bar{B}$. Тогда задача M может быть записана в виде

$$f(X)=C^T X \to \max;$$
$$\begin{cases} \tilde{A}X \le \tilde{B}; \\ X \ge 0, \end{cases}$$

а двойственная к ней (в соответствии с правилами параграфа 4.2) в виде

$$g(Y)=\tilde{B}^T \tilde{Y} \to \min;$$
$$\begin{cases} \tilde{A}^T \tilde{Y} \ge C; \\ \tilde{Y} \ge 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

где $\tilde{Y}$ — $2m$-вектор.

Представим $\tilde{Y}$ в виде

$$\tilde{Y}=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},$$

где Y_1, Y_2 — неотрицательные m-вектора.

Тогда нетривиальные ограничения $\left(A^T \mid -A^T\right)\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \ge C$ и целевую функцию $g(Y)=\left(B^T \mid -B^T\right)\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ задачи (4.7) можно переписать в виде

$$A^T Y_1 - A^T Y_2 \ge C;$$
$$g(Y)=B^T Y_1 - B^T Y_2,$$

или

$$A^T (Y_1 - Y_2) \ge C;$$
$$g(Y)=B^T (Y_1 - Y_2),$$

т.е.

$$A^T Y \ge C;$$
$$g(Y)=B^T Y,$$

где $Y=Y_1-Y_2$ — произвольный m-вектор.

Мы получили ограничения задачи N, и таким образом, постановка двойственных задач M и N полностью согласуется с данной в параграфе 4.2.

4.3.2. Общая постановка двойственных задач

Общая постановка двойственных задач имеет вид:

Задача $\tilde{I}$	Задача $\tilde{II}$
$f(X)=C^T X+c_0 \to \max;$ $\begin{cases} AX \le B; \\ \bar{X} \ge 0 \end{cases}$	$g(Y)=B^T Y \to \min;$ $\begin{cases} A^T Y \ge C; \\ \bar{Y} \ge 0 \end{cases}$

,

где $A = (a_{ij})$ — $(m \times n)$-матрица; $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$; $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)^T$; $B = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$; $C = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$ — векторы-столбцы соответствующей размерности; векторы $\bar{X}=(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k})^T$, $\bar{Y}=(y_{j_1}, y_{j_2}, ..., y_{j_l})^T$ с индексами $1 \le i_1 \le i_2 \le ... \le i_k \le n$, $1 \le j_1 \le j_2 \le ... \le j_k \le m$ — части векторов X, Y (т.е. тривиальные ограничения налагаются лишь на часть координат векторов X, Y).

Нетривиальные ограничения в обеих задачах могут быть как типа неравенств (со знаком «$\le$» или «$\ge$»), так и типа уравнений.

Чтобы понять связь между этими задачами, построим расширенные матрицы обеих задач:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \le & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \ge & b_m \\ \hline \ge & \sim & \dots & \ge & & \\ \hline c_1 & c_2 & \dots & c_n & & c_0 \end{array}\right]_{\to \max}$$

и

$$\tilde{A}' = \left[\begin{array}{cccc|c|c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & \ge & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & = & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & \ge & c_n \\ \hline \ge & \sim & \dots & \ge & & \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_m & & c_0 \end{array}\right]_{\to \min}.$$

Таким образом, к правилам 1—3 построения взаимно-двойственных задач параграфа 4.1 добавляется условие, что нетривиальному ограничению типа равенства одной из задач соответствует условие отсутствия ограничения на соответствующую переменную другой задачи.

Замечание 4.2. Аналогично параграфу 4.3.1 легко можно показать, что общая постановка задач $\tilde{I}$ и $\tilde{II}$ согласуется с данной в параграфе 4.1 постановкой симметричных задач.

Пример 4.2. Для задачи

$$\begin{cases} z = 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 10x_4 + x_5 + 14 \to \min; \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_5 \le 37; \\ -4x_1 - 7x_2 + 4x_4 - 9x_5 \ge -28; \\ 2x_1 + 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 48; \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 0, x_3 \le 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

составить двойственную.

Решение. Заметим сразу, что $x_1 \ge 1$ будем считать нетривиальным ограничением, поэтому задачу можно переписать в виде

$$\begin{cases} z = 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 10x_4 + x_5 + 14 \to \min; \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_5 \le 37; \\ -4x_1 - 7x_2 + 4x_4 - 9x_5 \ge -28; \\ 2x_1 + 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 48; \\ x_1 \ge 1; \\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0,\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу полученной задачи:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & -2 & 7 & 0 & -1 & \le & 37 \\ -4 & -7 & 0 & 4 & -9 & \ge & -28 \\ 2 & 0 & 6 & -4 & 1 & = & 48 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ge & 1 \\ \hline \sim & \ge & \le & \ge & \sim & & \\ \hline 4 & -5 & 8 & -10 & 1 & & 14 \end{array}\right]_{\to \min}$$

Составляем расширенную матрицу двойственной задачи согласно общим правилам и получаем

$$\tilde{A}' = \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & -4 & 2 & 1 & = & 4 \\ -2 & -7 & 0 & 0 & \le & -5 \\ 7 & 0 & 6 & 0 & \ge & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & \le & -10 \\ -1 & -9 & 1 & 0 & = & 1 \\ \hline \le & \ge & \sim & \ge & & \\ \hline 37 & -28 & 48 & 1 & & 14 \end{array}\right]_{\to \max}$$

Двойственная задача имеет вид

$$\begin{cases} T = 37y_1 - 28y_2 + 48y_3 + y_4 + 14 \to \max; \\ y_1 - 4y_2 + 2y_3 + y_4 = 4; \\ -2y_1 - 7y_2 \le -5,\ 7y_1 + 6y_3 \ge 8; \\ 4y_2 - 4y_3 \le -10; \\ -y_1 - 9y_2 - y_3 = 1; \\ y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0,\ y_4 \ge 0. \end{cases}$$

В соответсвии с замечанием 4.1 сформулируем теперь основную теорему двойственности для задач вида $\tilde{\text{I}}$ и $\tilde{\text{II}}$.

Теорема 4.5 ***(основная теорема двойственности).*** *Если задача $\tilde{I}$ имеет решение, то и задача $\widetilde{II}$ также имеет решение, причем $f_{\max} = g_{\min}$.*

4.4. Решение двойственных задач с помощью симплекс-метода

В этом параграфе мы изучим, как теорема 4.3 применяется для решения двойственных задач.

Пример 4.3. Для задачи

$$f = 23x_1 + 40x_2 + 60x_3 + 2x_4 - x_5 - 18 \to \max;$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 + 11x_3 + x_4 + x_5 = 57; \\ 2x - 6x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 9; \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

построить двойственную, решить исходную задачу симплекс-методом и найти оптимальное решение двойственной задачи.

Решение. Составим задачу, двойственную к данной. Образуем расширенную матрицу

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c|c} 4 & 10 & 11 & 1 & 1 & = & 57 \\ 2 & -6 & -1 & 1 & -1 & = & 9 \\ \hline \ge & \ge & \ge & \ge & \ge & & \\ \hline 23 & 40 & 60 & 2 & -1 & & -18 \end{array}\right]_{\to\max}$$

и преобразуем ее по общему правилу:

$$\bar{A}' = \left[\begin{array}{cc|c|c} 4 & 2 & \geq & 23 \\ 10 & -6 & \geq & 40 \\ 11 & -1 & \geq & 60 \\ 1 & 1 & \geq & 2 \\ 1 & -1 & \geq & -1 \\ \hline \sim & \sim & & \\ \hline 57 & 9 & & -18 \end{array}\right]_{\to \min}$$

Двойственная задача имеет вид

$$g = 57y_1 + 9y_2 - 18 \to \min$$

при условиях

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 \geq 23; \\ 10y_1 - 6y_2 \geq 40; \\ 11y_1 - y_2 \geq 60; \\ y_1 + y_2 \geq 2; \\ y_1 - y_2 \geq -1. \end{cases}$$

Решим исходную задачу симплекс-методом. В задаче не выделен допустимый базис, поэтому для его нахождения можно использовать метод искусственного базиса или выделить его непосредственно из нетривиальных ограничений: сложим уравнения, а затем вычтем из первого второе. Получим систему

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 66; \\ 2x_1 + 16x_2 + 12x_3 + 2x_5 = 48, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 33; \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 + x_5 = 24, \end{cases}$$

с выделенным базисом x_4, x_5. Выражаем базисные переменные x_4, x_5 и подставляем полученные выражения в формулу для f. Получим задачу

$$f = 18x_1 + 44x_2 + 56x_3 + 24 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 33; \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 + x_5 = 24; \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5. \end{cases} \tag{4.8}$$

Перепишем целевую функцию в виде

$$f - 18x_1 - 44x_2 - 56x_3 = 24$$

и имеем симплекс-таблицу

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	33	3	2	5	1	0
x_5	24	1	8	6	0	1
z	24	−18	−44	−56	0	0

Решение задачи представлено в виде последовательности симплекс-таблиц:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	13	$\frac{13}{6}$	$-\frac{14}{3}$	0	1	$-\frac{5}{6}$
x_3	24	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$
z	24	$-\frac{26}{3}$	$\frac{92}{3}$	0	0	$\frac{28}{3}$

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	6	1	$-\frac{28}{13}$	0	$\frac{6}{13}$	$-\frac{5}{13}$
x_3	3	0	$\frac{22}{3}$	1	$-\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$
z	300	0	12	0	4	6

Так как в строке оценок нет отрицательных элементов, то полученная симплекс-таблица — заключительная и оптимальное решение задачи: $X^* = (6,0,3,0,0)$ и $f_{\max} = f(X^*) = 300$.

Базисными переменными оптимального решения являются x_1, x_3, поэтому из *исходной задачи* находим $P_* = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ и $c_* = (23,\ 60)$. Таким образом, оптимальным решением двойственной задачи будет

$$Y^* = (23,60)\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \left(\frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

причем $g_{\min} = g(Y^*) = 57 \cdot \frac{11}{2} + 9 \cdot \frac{1}{2} - 18 = 300 = f_{\max}$.

Следствие 4.5. *Если в задаче линейного программирования выделен допустимый базис и базисные переменные исключены из целевой функции, то оптимальным решением двойственной задачи являются элементы строки оценок последней симплекс-таблицы при базисных переменных исходной симплекс-таблицы.*

Пример 4.4. Для задачи (4.8) двойственной задачей будет

$$T = 33y_1 + 24y_2 + 24 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \geq 18; \\ 2y_1 + 8y_2 \geq 44; \\ 5y_1 + 6y_2 \geq 56; \\ y_1 \geq 0; \\ y_2 \geq 0, \end{cases}$$

и общая формула теоремы 4.3 дает

$$Y^* = (18{,}56)\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = (4{,}6),\ T(Y^*) = 33 \cdot 4 + 24 \cdot 6 + 24 = 300.$$

С другой стороны, оптимальное решение $Y^* = (4, 6)$ легко находится из строки оценок последней симплекс-таблицы как коэффициенты при базисных переменных x_4, x_5 исходной.

4.5. Двойственный симплекс-метод

Глубокая связь между двойственными задачами проявляется также при попытке одновременного решения взаимно-двойственных задач симплекс-методом. При решении одной из задач с помощью симплекс-метода применение соответствующих преобразований к двойственной задаче называется *двойственным симплекс-методом*.

Двойственный симплекс-метод, как и обычный симплекс-метод, используется для решения задач линейного программирования. Но в отличие от обычного симплекс-метода его можно применять и в случае, если свободные члены системы нетривиальных ограничений являются отрицательными числами (при решении задачи симплексным методом эти числа предполагаются неотрицательными).

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Присоединим к системе ограничений целевую функцию z, исключив из нее базисные переменные и записав ее в виде уравнения

$$z + \Delta_{m+1}x_{m+1} + ... + \Delta_nx_n = \Delta_0.$$

Напомним, что коэффициенты Δ_j, $j = 1, ..., n$ называются *оценками* соответствующих переменных x_j.

Заметим, что среди чисел b_i могут быть отрицательные. В этом случае, хотя точка $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ является решением системы нетривиальных ограничений, она не является планом исходной задачи, так как среди ее координат имеются отрицательные числа.

Определение 4.1. *Решение $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ системы нетривиальных ограничений называется **псевдопланом (псевдорешением)** задачи линейного программирования, если $\Delta_j \geq 0, j = 1, ..., n$.*

Основными предпосылками для решения задачи линейного программирования двойственным симплекс-методом являются следующие две теоремы, которые доказываются аналогично соответствующим результатам параграфа 3.7.

Теорема 4.6. *Если в псевдоплане $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ есть хотя бы одно отрицательное число $b_i < 0$ такое, что все $a_{ij} \geq 0$ при $i = 1, ..., m$, то задача не имеет решений.*

Теорема 4.7. *Если в псевдоплане $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ имеются отрицательные числа $b_i < 0$ такие, что для любого из них существуют числа $a_{ij} < 0$, то можно перейти к новому псевдоплану, при котором значение целевой функции задачи не уменьшится.*

Сформулированные теоремы дают основание для построения алгоритма двойственного симплекс-метода.

Пусть $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ — псевдоплан исходной задачи. На основе условия задачи составляем симплекс-таблицу, в которой элементы свободного столбца могут быть отрицательными числами:

Базис	b_i	x_1	x_2	...	x_l	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n
x_1	b_1	1	0	...	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	a_{1n}
x_2	b_2	0	1	...	0	...	0	$a_{2,m+1}$	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_l	b_l	0	0	...	1	...	0	$a_{l,m+1}$	...	$a_{l,n}$
...	...	...	...	...	...	...	0	...	...	...
x_m	b_m	0	0	...	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{mn}
z	Δ_0	0	0	0	0	0	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n

1. Проверяем псевдоплан на оптимальность. Если $b_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$, то, так как по предположению все $\Delta_j \geq 0$, псевдоплан $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ будет оптимальным решением исходной задачи. Если же в столбце свободных членов имеются отрицательные числа, то либо устанавливаем неразрешимость задачи (на основании теоремы 4.6), либо переходим к новому псевдоплану.

2. Выбираем разрешающую строку как содержащую наибольшее по абсолютной величине отрицательное число в столбце свободных членов (пусть это строка со свободным членом b_l). Для выбора разрешающего столбца находим минимум модуля отношения элементов строки оценок к *отрицательным* элементам l-й строки, т.е. находим $\min(-\Delta_j/a_{lj})$, где $a_{lr} < 0$. Пусть это минимальное значение принимается при $j = r$, тогда в базис вводят переменную x_r, а число a_{lr} является разрешающим элементом. Переход к новой симплекс-таблице производят по обычным правилам симплексного метода.

3. Находим новый псевдоплан и переходим к пункту 1.

Пример 4.5. Найти максимальное значение функции $z = x_1 + x_2 + 2x_3$ при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8; \\ x_1 - x_2 \geq 4; \\ x_1 + 2x_2 \geq 6; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем исходную задачу линейного программирования в канонической форме, введя балансовые переменные x_4, x_5, а затем перепишем ее так, чтобы коэффициенты при базисных переменных были равны 1:

$$z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8; \\ x_1 - x_2 - x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 6; \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 5, \end{cases}$$

т.е.

$$z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8; \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -4; \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -6; \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

Исключив из целевой функции x_3, получаем следующую симплекс-таблицу:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	8	1	1	1	0	0
x_4	–4	–1	1	0	1	0
x_5	–6	–1	–2	0	0	1
z	16	1	1	0	0	0

Так как в столбце свободных членов имеются два отрицательных числа – 4 и –6, а в последней строке нет отрицательных чисел, то в соответствии с алгоритмом двойственного симплекс-метода переходим к новой симплекс-таблице. Заметим, что в данном случае это можно сделать, так как в строках, содержащих отрицательные свободные члены (– 4 и –6) есть отрицательные числа. Поскольку наибольшее по модулю отрицательное число в столбце свободных членов есть –6, то исключаем из базиса переменную x_5. Чтобы определить разрешающий столбец, находим $\min\left\{-\frac{1}{-1}, -\frac{1}{-2}\right\} = \frac{1}{2}$. Минимальное отношение элементов строки оценок к отрицательным числам разрешающей строки (с противоположным знаком) дает столбец x_2. Умножаем третью строку на $-\frac{1}{2}$ и переходим к новой симплекс-таблице

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	5	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$
x_4	–7	$-\frac{3}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$
x_2	3	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$
z	13	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$

Аналогично, так как в свободном столбце последней таблицы есть отрицательное число –7, рассмотрим элементы второй строки. Среди этих чисел есть одно отрицательное $-\frac{3}{2}$. Если бы такое число отсутствовало, то исходная задача была бы неразрешима. Выбор разрешающего элемента здесь однозначен, умножаем вторую строку на $-\frac{2}{3}$ и переходим к новой симплекс-таблице

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	$\frac{8}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	$\frac{14}{3}$	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	$\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
z	13	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Таким образом, в последней строке и в столбце свободных членов нет отрицательных элементов, поэтому план $X^* = \left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$ является оптимальным и $z_{\max} = z(X^*) = \frac{32}{3}$.

Изучим теперь более подробно связь между применениями симлекс-метода и двойственного симплекс-метода для решения пары двойственных задач.

Пример 4.5. Рассмотрим пару двойственных задач:

$$f = -70x_1 + 22x_2 + 23x_3 + 16 \to \max;$$
$$\begin{cases} 7x_1 - 25x_2 - 3x_3 \le 4; \\ -9x_1 + 42x_2 + 3x_3 \le 21; \\ -5x_1 + 32x_2 + x_3 \le 3; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

и

$$g = 4y_1 + 21y_2 + 3y_3 + 16 \to \min;$$
$$\begin{cases} 7y_1 - 9y_2 - 5y_3 \ge -70; \\ -25y_1 + 42y_2 + 32y_3 \ge 22; \\ -3y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 23; \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Приведем обе задачи к каноническому виду, в задаче (4.10) будем рассматривать функцию $g = -T$:

$$f = -70x_1 + 22x_2 + 23x_3 + 16 \to \max; \quad T = -4y_1 - 21y_2 - 3y_3 - 16 \to \max;$$
$$\begin{cases} 7x_1 - 25x_2 - 3x_3 + x_4 = 4; \\ -9x_1 + 42x_2 + 3x_3 + x_5 = 21; \\ -5x_1 + 32x_2 + x_3 + x_6 = 3; \\ x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} -7y_1 + 9y_2 + 5y_3 + y_4 = 70; \\ 25y_1 - 42y_2 - 32y_3 + y_5 = -22; \\ 3y_1 - 3y_2 - y_3 + y_6 = -23; \\ y_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 6. \end{cases}$$

Установим естественное соответствие между переменными:

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_4 & x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{array} \tag{4.11}$$

и будем записывать таблицы для обеих задач рядом:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Базис	c_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_4	4	7	−25	−3	1	0	0	y_4	70	−7	9	5	1	0	0
x_5	21	−9	42	3	0	1	0	y_5	−22	25	−42	−32	0	1	0
x_6	3	−5	32	$\boxed{1}$	0	0	1	y_6	−23	3	−3	$\boxed{-1}$	0	0	1
f	16	70	−22	−23	0	0	0	T	−16	4	21	3	0	0	0

Выбирая разрешающие переменные указанным образом, заметим, что при последовательном выполнении шагов обычного и двойственного симплекс-методов сохраняется соответствие (4.11) между переменными и их значениями (см. следствие 4.5):

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Базис	c_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_4	13	−8	71	0	1	0	3	y_4	−45	8	$\boxed{6}$	0	1	0	5
x_5	12	$\boxed{6}$	−54	0	0	1	−3	y_5	714	−71	54	0	0	1	−32
x_6	3	−5	32	1	0	0	1	y_3	23	−3	3	1	0	0	−1
f	85	−45	714	0	0	0	23	T	−85	13	12	0	0	0	3

Заключительные симплекс-таблицы обеих задач имеют вид:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Базис	c_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_4	29	0	−1	0	1	$\frac{4}{3}$	−1	y_2	$\frac{15}{2}$	$-\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{5}{6}$
x_5	2	1	−9	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	y_5	309	1	0	0	9	1	13
x_6	13	0	−13	1	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{3}{2}$	y_3	$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
f	175	0	309	0	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{1}{2}$	T	−175	29	0	0	2	0	13

Таким образом, задачи (4.9) и (4.10) решены: $X^* = (0, 2, 13)$, $Y^* = \left(0, \frac{15}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $f_{\max} = g_{\min} = 175$. При этом оптимальное решение каждой из задач — (4.9), (4.10) — можно получить, используя соответствие (4.11) и строку оценок заключительной симплекс-таблицы двойственной к ней задачи.

4.6. Экономический анализ и двойственность

Основной целью данного параграфа является экономическая интерпретация результатов о парах двойственных задач, полученных в предыдущих параграфах, на примере задачи об использовании ресурсов.

Предположим теперь, что задачи I' и II' представляют собой приведенные к каноническому виду модели задачи об использовании ресурсов и двойственной к ней (см. пример 3.5). Тогда ясно, что:

- переменная x_{n+i}, согласно выражению (4.6), выражает остаток (неиспользованное количество) i-го ресурса. Если $x^*_{n+i} \neq 0$, то i-й ресурс использован не полностью, и его называют *недефицитным*. Согласно следствию 4.4, недефицитному ресурсу соответствует *нулевая* двойственная цена: $y^*_i = 0$. Если же $x^*_{n+i} = 0$, то ресурс использован полностью и его называют *дефицитным*;

- в силу (4.5) переменная y_{m+j} выражает разницу между затратами на ресурсы при производстве j-го продукта и ценой последнего. Если $y^*_{m+j} \neq 0$, то производство j-го продукта *нерентабельно* и, согласно следствию 4.4, $x^*_j = 0$. Заметим, однако, что рентабельность производства продукта здесь понимается в том смысле, что его цена в точности равна стоимости используемых при его производстве ресурсов.

Сформулированная далее теорема позволяет понять роль, которую играют численные значения компоненты y^*_i оптимального решения двойственной задачи. Для этого рассмотрим оптимальное значение f^* целевой функции задачи об использовании ресурсов как функцию запасов ресурсов: $f^*_{\max} = f(b_1, b_2, ..., b_m)$.

Теорема 4.8 (***третья теорема двойственности***). *Значения переменных y^*_i, $i = 1, ..., n$ в оптимальном решении двойственной задачи являются оценками влияния свободных членов системы нетривиальных ограничений исходной задачи на оптимальное значение ее целевой функции, т.е.*

$$y^*_i = \frac{\partial f^*_{\max}}{\partial b_i},\ i = 1, ..., m. \tag{4.12}$$

Доказательство. Заметим, что по основной теореме двойственности

$$f^*_{\max} = g^*_{\min} = b_1 y^*_1 + b_2 y^*_2 + \ldots + b_m y^*_m.$$

Предположим, что изменение запаса b_i на (малую) величину Δb_i таково, что оптимальное решение двойственной задачи не меняется, и рассмотрим $g^*_{\min}$ как функцию запасов $g^*_{\min} = g^*(b_1, b_2, ..., b_m)$. Тогда изменение значения целевой функции задачи II

$$\Delta g^* = g^*(b_1, \ldots, b_i + \Delta b_i, \ldots, b_m) - g^*(b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_m) =$$
$$= \left(b_1 y^*_1 + \ldots + (b_i + \Delta b_i) y^*_i + \ldots + b_m y^*_m\right) - (b_1 y^*_1 + \ldots + b_i y^*_i + \ldots + b_m y^*_m) = \Delta b_i y^*_i,$$

и

$$\Delta f^*_{\max} = \Delta g^* = \Delta b_i y^*_i,$$

и

$$y^*_i = \frac{\Delta f^*_{\max}}{\Delta b_i}. \tag{4.13}$$

Предельный переход $\lim\limits_{\Delta b_i \to 0} \dfrac{\Delta f^*_{\max}}{\Delta b_i} = \dfrac{\partial f^*_{\max}}{\partial b_i} = y^*_i$ доказывает утверждение теоремы.

Условие (4.13) показывает, что оптимальный доход является *линейной* функцией изменения запасов i-го ресурса, причем коэффициентом пропорциональности является его двойственная цена. Естественно, что с увеличением двойственной цены ресурса его *ценность* возрастает. Так, при $y_i^* = 0$ (т.е. при недефицитности ресурса) изменение запасов i-го ресурса не меняет оптимальный доход. И наоборот, при больших значениях y_i^*, как следует из (4.13), небольшому увеличению его запаса Δb_i соответствует значительное увеличение оптимального дохода.

Как было указано в доказательстве теоремы 4.8, двойственные цены y_i^* могут оставаться неизменными при изменениях запасов ресурсов. В следующем примере мы покажем, как находятся границы этих изменений, а также изучим вопрос о целесообразности введения в план производства новых видов продукции по цене c_j.

Пример 4.6. Компания выпускает три типа изделий A, B и C, используя ресурсы четырех видов. Нормы затрат и запасы ресурсов, а также цены изделий указаны в таблице.

Виды ресурсов	Нормы расхода ресурсов			Запасы ресурсов
	A	B	C	
1	1	2	1	18
2	2	1	1	16
3	3	2	1	24
4	0	1	1	12
Цены изделий	2	4	3	

Найдем оптимальный план производства. Математическая модель задачи имеет вид

$$f = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 16; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 24; \\ x_2 + x_3 \le 12; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Приводим задачу к каноническому виду

$$f = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 18; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 16; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 24; \\ x_2 + x_3 + x_7 = 12; \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 7 \end{cases} \tag{4.14}$$

и решаем симлекс-методом. Первая и заключительная симплекс-таблицы задачи имеют вид

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	18	1	2	1	1	0	0	0
x_5	16	2	1	1	0	1	0	0
x_6	24	3	2	1	0	0	1	0
x_7	12	0	1	1	0	0	0	1
f	0	–2	–3	–4	0	0	0	0

;

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	2	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
x_2	4	0	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
x_3	8	0	0	1	–1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_6	2	0	0	0	–1	–1	1	1
f	44	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$

.

Решением задачи (4.14) является вектор $X^* = (2, 4, 8, 0, 0, 2, 0)$, причем $f(X) = 44$. В силу естетственного соответствия между переменными двойственных задач:

$$\begin{array}{ccccccc} x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{array}$$

решением двойственной задачи является $Y^* = \left(1, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0\right)$. Таким образом, наиболее дефицитным является сырье A с двойственной ценой $y_1 = 1$, менее ценным — ресурс B с оценкой $y_2 = \frac{1}{2}$, а сырье C является бездефицитным с $y_2 = 0$.

Теперь найдем возможные изменения ресурсов $\Delta B = (\Delta b_1, \Delta b_2, \ldots, \Delta b_m)$, при которых решение двойственной задачи остается неизменным. Для сохранения двойственных цен они должны удовлетворять условию

$$P^{-1} \cdot (B + \Delta B) \geq 0, \tag{4.15}$$

где P — матрица столбцов, соответствующих базисным переменным оптимального решения в исходной задаче.

Итак, в нашем примере

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ b_3 + \Delta b_3 \\ b_4 + \Delta b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 18 + \Delta b_1 \\ 16 + \Delta b_2 \\ 24 + \Delta b_3 \\ 12 + \Delta b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \Delta b_2/2 - \Delta b_4/2 \\ 4 + \Delta b_1 - \Delta b_2/2 + \Delta b_4/2 \\ 8 - \Delta b_1 + \Delta b_2/2 + 3\Delta b_4/2 \\ 2 - \Delta b_1 - \Delta b_2 + \Delta b_3 + \Delta b_4 \end{pmatrix}.$$

Условие (4.15) записывается в виде

$$\begin{cases} 2 + \Delta b_2/2 - \Delta b_4/2 \geq 0; \\ 4 + \Delta b_1 - \Delta b_2/2 + \Delta b_4/2 \geq 0; \\ 8 - \Delta b_1 + \Delta b_2/2 + 3\Delta b_4/2 \geq 0; \\ 2 - \Delta b_1 - \Delta b_2 + \Delta b_3 + \Delta b_4 \geq 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

Систему неравенств (4.11) можно использовать следующим образом: если меняются запасы только одного из ресурсов, то можно найти его изменения, при которых двойственные цены остаются неизменными. Так, если предположить, что $\Delta b_2 = \Delta b_3 = \Delta b_4 = 0$, то из (4.16) получим, что $-4 \le \Delta b_1 \le \le 2$. Таким образом, при запасах первого ресурса $b_1 \in (14; 20)$, $b_2 = 16$, $b_3 = 24$, $b_4 = 12$ получаем, что $y_1^* = 1$. Аналогично при $\Delta b_1 = \Delta b_3 = \Delta b_4 = 0$ имеем, что $-4 \le \Delta b_2 \le 2$ и $b_2 \in (12; 18)$. При $\Delta b_1 = \Delta b_2 = \Delta b_4 = 0 - \Delta b_3 \ge -2$ и $b_3 \in (22; +\infty)$. При $\Delta b_2 = \Delta b_3 = \Delta b_4 = 0$ получаем, что $-\frac{16}{3} \le \Delta b_4 \le 2$ и $b_4 \in \left(\frac{20}{3}, 14\right)$. Итак, при изменении запасов только одного из ресурсов решение двойственной задачи $Y^* = \left(1, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0\right)$ остается неизменным при $b_1 \in (14;\ 20)$, $b_2 \in (12; 18)$, $b_3 \in (22; +\infty)$ и $b_4 \in \left(\frac{20}{3}, 14\right)$.

Если меняются запасы нескольких ресурсов одновременно, то для сохранения двойственных цен необходимо, чтобы эти изменения удовлетворяли системе (4.16). Так, если $\Delta b_1 = \Delta b_2 = \Delta b_3 = \Delta b_4 = 8$, то все ограничения системы выполняются, решением двойственной задачи является $Y^* = \left(1, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0\right)$, и $\Delta f^*_{\max} = \sum_{i=1}^{m} \Delta b_i y_i^* = $ $= 1 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 8 = 24$.

Предположим теперь, что мы рассматриваем возможность введения дополнительного вида продукции с нормами расхода сырья $a_{14} = 3$, $a_{24} = 1$, $a_{34} = 1$, $a_{44} = 0$ и стоимостью реализации $c_4 = 4$. Вычисляя затраты на ресурсы:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i4} y_i^* = 3 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{3}{2} = 7/2,$$

убеждаемся, что $\sum_{i=1}^{m} a_{i4} y_i^* = 7/2 < c_4 = 4$ и введение нового вида продукции рентабельно.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Как определяется пара симметричных взаимно-двойственных задач ЛП?
2. Постановка взаимно-двойственных задач. Поясните (можно на примере) экономическую суть понятия двойственности.
3. Составьте двойственную задачу для заданной задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} f = 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 3 \to \max; \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 \ge 8; \\ x_1 + x_2 + 10x_3 \le 3; \\ \quad x_1 \ge 0, \;\; x_3 \le 0. \end{cases}$$

4. Сформулируйте и докажите основное неравенство для взаимно-двойственных задач ЛП.
5. Сформулируйте и докажите достаточный признак оптимальности.
6. Если целевая функция задачи ЛП не ограничена, что можно сказать о решениях двойственной задачи?
7. Сформулируйте и докажите основную теорему двойственности для симметричных задач. Какой критерий оптимальности решения вытекает из этой теоремы?
8. Сформулируйте и докажите теорему равновесия для двойственных задач.
9. Найти решение задачи ЛП, используя теорему равновесия:

$$\begin{cases} f = -21y_1 + 114y_2 - 15y_3 \to \min; \\ -10y_1 + 6y_2 + 4y_3 \ge -24; \\ 3y_1 + 6y_2 - 9y_3 \ge 15; \\ y_1 \ge 0, \; y_2 \ge 0, \; y_3 \ge 0. \end{cases}$$

10. Какие двойственные задачи линейного программирования называются несимметричными? Как осуществляется сведение несимметричной пары задач к симметричной?
11. Для задачи

$$\begin{cases} f = -3x_4 - 6x_5 + 2 \to \min; \\ \;\; x_1 + x_4 + x_5 = 6; \\ x_2 - x_4 + x_5 = 10; \\ x_3 + x_4 - x_5 = 18; \\ x_i \ge 0, \, i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

составить двойственную задачу, решить исходную задачу симплекс-методом и найти решение двойственной задачи.
12. Для задачи

$$\begin{cases} z = 52x_1 + 72x_2 + 61x_3 + x_4 + x_5 + 8 \to \max; \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 22; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_5 = 40; \\ x_i \ge 0, \; i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

составить двойственную задачу, решить исходную задачу симплекс-методом и найти решение двойственной задачи.

13. Какова общая постановка взаимно-двойственных задач? Сформулируйте основную теорему о взаимно-двойственных задачах.
14. Каковы предпосылки применения двойственного симплекс-метода для решения задач ЛП?
15. Сформулируйте алгоритм двойственного симплекс-метода решения задач ЛП.
16. Двойственным симплекс-методом решить задачу ЛП:

$$\begin{cases} z = -x_1 - 10x_2 + 10 \to \max; \\ -2x_1 - 2x_2 + x_5 = -1; \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2; \\ -4x_1 + 2x_2 + x_4 = -1. \end{cases}$$

17. Задачу

$$\begin{cases} f = -106x_1 + 610x_2 + 23x_3 + 41 \to \max; \\ 8x_1 - 47x_2 - 2x_3 \le 1; \\ -9x_1 + 52x_2 + 2x_3 \le 4; \\ -5x_1 + 30x_2 + x_3 \le 1; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

и двойственную к ней

$$\begin{cases} g = y_1 + 4y_2 + y_3 + 41 \to \min; \\ 8y_1 - 9y_2 - 5y_3 \ge -106; \\ -47y_1 + 52y_2 + 30y_3 \ge 610; \\ -2y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 23; \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

решить одновременно симплекс-методом (для f) и двойственным симплекс-методом (для g).

18. Как определяются дефицитные и недефицитные ресурсы из оптимального решения задачи об использовании ресурсов? Что можно сказать о соответсвующих двойственных ценах?
19. Какова роль компонент оптимального решения двойственной задачи об использовании ресурсов для оценок изменения оптимального значения целевой функции?

ГЛАВА 5

ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

5.1. Постановка задачи. Графический метод решения

Основным отличием постановки задачи целочисленного программирования от задачи линейного программирования является то, что значения переменных, составляющих оптимальное решение задачи целочисленного программирования, должны быть *целыми* неотрицательными числами.

Итак, требуется найти оптимальное решение задачи

$$z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+c_0\to\max;$$
$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,\ldots,m;\\ x_j\ge 0,\ x_j\in Z,\ j=1,\ldots,n.\end{cases}\tag{5.1}$$

При малом числе переменных задача (5.1) может быть решена графически. Поясним графический метод решения задач целочисленного программирования на примере следующей задачи.

Пример 5.1. Решить задачу целочисленного программирования с целевой функцией $z=x+2y+1\to\max$ и ограничениями

$$\begin{cases}y-x\le 4;\\ y+x\le 7;\\ x\ge 0,\ y\ge 0;\ x,\ y\in Z.\end{cases}$$

Решение. Строим область на плоскости (x, y), определяемую системой ограничений, игнорируя пока условие целочисленности x и y. Получаем четырехугольник $OABC$ (рис. 5.1) с угловыми точками $O(0, 0)$, $A(0, 4)$, $B\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$ и $C(7, 0)$; при этом все решения системы ограничений задачи суть точки с целочисленными координатами на границе и внутри этого четырехугольника.

Чтобы найти точку, в которой функция z достигает максимума, как и при решении графическим методом, строим вектор нормали $n = (4, 8)$ (или сонаправленный ему вектор $m = (1, 2)$. Перемещая линию уровня в направлении вектора m и рассматривая в качестве возможных решений лишь точки с целочисленными координатами, убеждаемся, что максимум z достигается в точке $D(2, 5)$ и $z_{max} = z(D) = 52$.

Ответ. $z_{max} = z(D) = 52$.

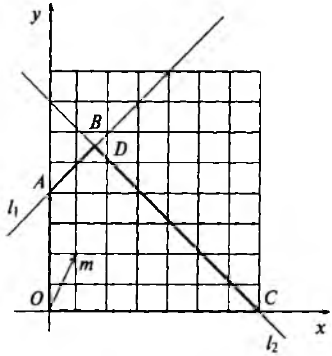


Рис. 5.1

Заметим, что соответствующим решением задачи линейного программирования без условия целочисленности будет точка $B\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$ и $z(B) = 54$.

Ясно, что решение задач целочисленного программирования графическим способом возможно не всегда. В общем случае существует несколько методов решения данных задач, наиболее распространенным из которых является метод сечений (метод Гомори).

5.2. Метод Гомори

Решение задачи целочисленного программирования методом Гомори начинают с определения симплексным методом оптимального плана исходной задачи без учета целочисленности переменных. Если среди его компонент нет дробных чисел, то найденный план является оптимальным планом задачи целочисленного программирования.

Если же в оптимальном плане задачи переменная x_k по условию целочисленная принимает дробное значение, то к системе ограничений добавляют неравенство

$$\sum_{j=1}^{n}\{\bar{a}_{ij}\}x_j \geq \{\bar{b}_i\}, \tag{5.2}$$

где $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a, а числа $\bar{a}_{ij}, \bar{b}_i$ взяты из последней симплекс таблицы из строки, содержащей переменную x_k как базисную.

Если же дробные значения принимают несколько переменных, то дополнительное неравенство определяется числом с наибольшей дробной частью. Затем, используя двойственный симплекс-метод (см. параграф 4.4), находят решение исходной задачи.

Замечание 5.1. Под дробной частью некоторого числа a понимается наименьшее неотрицательное число такое, что разность a и b есть целое, например $\{1{,}75\} = 0{,}75$; $\{-3{,}35\} = 0{,}65$.

Если в найденном плане задачи переменные опять принимают дробные значения, то снова добавляют одно дополнительное ограничение и процесс вычислений повторяют. Проводя конечное число итераций, либо получают оптимальный план задачи целочисленного программирования, либо устанавливают ее неразрешимость.

Решим теперь задачу примера методом Гомори.

Пример 5.2. Решить методом Гомори задачу

$$z = 4x_1 + 8x_2 + 4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 + x_2 \le 7; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 \in \mathrm{Z}. \end{cases}$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду

$$z = 4x_1 + 8x_2 + 4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_4 = 7; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 \in Z \end{cases}$$

и решим задачу симплекс-методом (игнорируя условие целочисленности). Последовательность шагов симплекс-метода представлена в виде симплекс-таблиц:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	4	–1	1	1	0
x_4	7	1	1	0	1
z	4	–4	–8	0	0

;

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	4	–1	1	1	0
x_4	3	2	0	–1	1
z	36	–12	0	8	0

;

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	$\frac{11}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	4	0	0	2	6

Итак, план $X = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}, 0, 0\right)$ является оптимальным для исходной задачи без учета условия целочисленности, но так как обе компоненты x_1 и x_2 являются дробными, то X не является оптимальным решением исходной задачи. Далее, так как дробные части равны между собой, то дополнительное ограничение составляется для одной из них (например, для переменной x_2). Выписывая соответствующую строку (первую) из последней симплекс-таблицы, получаем

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{11}{2}$$

и добавляем в соответствии с (5.2) к системе ограничений неравенство

$$\{1\}x_2 + \left\{\frac{1}{2}\right\}x_3 + \left\{\frac{1}{2}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{11}{2}\right\},$$

т.е.

$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2},$$

или окончательно $x_3 + x_4 \geq 1$.

Вводим балансовую переменную x_5, переписываем последнее условие в виде $x_3 + x_4 - x_5 = 1$, т.е.

$$-x_3 - x_4 + x_5 = -1,$$

и добавляем его к заключительной симплекс-таблице. Получаем

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	$\frac{11}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_5	-1	0	0	-1	-1	1
z	54	0	0	2	6	0

Поскольку в свободном столбце имеется отрицательный элемент, то для решения задачи применяем двойственный симплекс-метод. Чтобы определить разрешающий столбец, находим $\min\left\{-\frac{2}{-1},-\frac{6}{-1}\right\}=2$, т.е. минимальное отношение дает столбец переменной x_3. Умножаем третью строку на -1 и делаем шаг симплекс-метода. Получим:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	$\frac{11}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_5	1	0	0	1	1	-1
z	54	0	0	2	6	0

;

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	5	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$
x_1	2	1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$
x_3	1	0	0	1	1	-1
z	52	0	0	0	4	2

.

Получаем заключительную симплекс-таблицу, из которой, опуская балансовые переменные x_3, x_4, x_5, заключаем, что исходная задача целочисленного программирования имеет оптимальный план $X^* = (5, 2)$. При этом значение целевой функции равно $z_{max} = 52$.

Дадим теперь геометрическую интерпретацию введения дополнительного ограничения $x_3 + x_4 \geq 1$. Допустимая область при отсутствии условия целочисленности была построена в примере 5.1. Теперь из условий задачи

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_4 = 7 \end{cases}$$

выразим переменные x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_3 = 4 + x_1 - x_2; \\ x_4 = 7 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

и подставим в неравенство. Получим

$$x_3 + x_4 = 11 - 2x_2 \geq 1, \text{ т.е. } x_2 \leq 5.$$

Полуплоскость, заданная последним условием $x_2 \le 5$ (прямая l_3 на рисунке задает границу этой полуплоскости $x_2 = 5$), отсекает от четырехугольника $OABC$ треугольник BDE, не содержащий целочисленных решений (рис. 5.2).

Максимальное значение функции z следует искать в области, ограниченной многоугольником $OAEDC$.

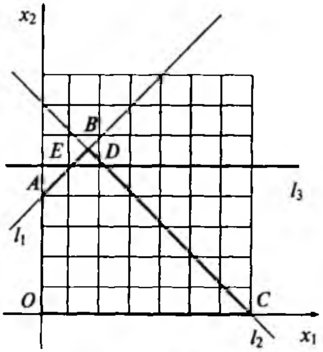


Рис. 5.2

Геометрическая интерпретация метода Гомори объясняет его другое название — метод сечений.

Пример 5.3. Методом Гомори решить задачу целочисленного программирования

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3; \\ x_1 + 3x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

Решение. Запишем задачу в каноническом виде

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 19/3; \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10; \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 4;\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases} \tag{5.3}$$

Замечание 5.2. В задаче (5.3) условие целочисленности наложено только на часть переменных, входящих в условие задачи. Такие задачи называются *частично-целочисленными*. Метод Гомори, очевидно, обобщается на случай частично-целочисленных задач, и дополнительные ограничения вводятся до тех пор, пока все переменные, на которые наложено условие целочисленности, не будут таковыми.

Решение задачи (5.3) можно представить в виде последовательности симплекс-таблиц:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	$\frac{19}{3}$	2	1	1	0
x_4	10	1	3	0	1
z	0	–2	–4	0	0

,

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	3	$\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$
x_2	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$
z	$\frac{40}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\frac{9}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_2	$\frac{41}{15}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
z	$\frac{40}{3}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$

Таким образом, $X = \left(\frac{9}{5}, \frac{41}{15}, 0, 0\right)$ — решение исходной задачи без учета условия целочисленности. Заметим, что $\left\{\frac{9}{5}\right\} = \frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \left\{\frac{41}{15}\right\} = \frac{11}{15}$, а поэтому дополнительное ограничение (5.2) выписывается для базисной переменной x_1. Последнее имеет вид

$$\{1\}x_1 + \left\{\frac{3}{5}\right\}x_3 + \left\{-\frac{1}{5}\right\}x_4 \ge \left\{\frac{9}{5}\right\},$$

т.е.

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \ge \frac{4}{5},$$

или окончательно

$$3x_3 + 4x_4 \ge 4.$$

Вводим балансовую переменную x_5 и получаем

$$-3x_3 - 4x_4 + x_5 = -4.$$

Включим в последнюю симплекс-таблицу дополнительное ограничение:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\frac{9}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
x_2	$\frac{41}{15}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
x_5	–4	0	0	–3	–4	1
z	$\frac{218}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	0

Так как в третьей строке $\min\left\{-\frac{2/5}{-3}, -\frac{6/5}{-4}\right\} = \frac{2}{15}$, то выводим из базиса x_5 и вводим в базис x_3. Поделив третью строку на -3 и сделав шаг симплекс-метода, получим:

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_2	3	0	1	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$
x_3	$\frac{4}{3}$	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$
z	14	0	0	0	$\frac{26}{15}$	$\frac{2}{15}$

Базисное решение из заключительной симплекс-таблицы $X = \left(1, 3, \frac{4}{3}, 0, 0\right)$, а решением исходной задачи является $X^* = (1,3)$, $z_{\max} = z(X^*) = 14$.

5.3. Метод ветвей и границ

Ясно, что в общем случае для решения задач целочисленного программирования достаточно найти оптимальное значение целевой функции среди всех (целочисленных) элементов множества допустимых решений M. Однако при решении прикладных экономических задач такая процедура может быть практически нереализуема за обозримое время из-за очень большого числа этих элементов.

Более эффективным является комбинаторный подход к решению этой задачи, позволяющий отбрасывать достаточно большие подмножества заведомо неоптимальных элементов M. Эта идея положена в основу алгоритмов, которые традиционно принято относить к методу ветвей и границ.

Впервые метод ветвей и границ был предложен Лендом и Дойгом [43] в 1960 г. для решения общей задачи целочисленного линейного программирования. Интерес к этому методу и фактически его «второе рождение» связано с работой Литтла, Мурти, Суини и Кэрела [44] в 1963 г.

Метод ветвей и границ состоит в следующем. Множество допустимых решений некоторым способом разбивается на подмножества, каждое из которых в свою очередь тем же способом снова разбивается на подмножества. При этом на каждом шаге метода элементы разбиения подвергаются проверке для выяснения, содержит данное подмножество оптимальное решение или нет. Процесс продолжается до тех пор, пока не получено оптимальное целочисленное решение исходной задачи.

Метод ветвей и границ решения задачи (5.1) основан на предположении, что оптимальный нецелочисленный план соответствующей задачи

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 \to \max;$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, \ldots, m; \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{5.4}$$

дает значение целевой функции большее, чем всякий последующий план перехода.

Пусть переменная x_i^0 в оптимальном плане задачи (5.4) — дробное число. Тогда в оптимальном плане задачи (5.1) ее значение будет либо не больше ближайшего меньшего целого числа $[x_i^0]$, либо не меньше ближайшего большего целого числа $[x_i^0]+1$, где квадратные скобки $[x_i^0]$ обозначают целую часть числа x_i^0. Определяя эти числа, находим (например, симплексным методом) решение двух задач линейного программирования:

Задача 1	Задача 2
$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 \to \max;$ $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, \ldots, m; \\ x_i \leq [x_i^0]; \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n \end{cases}$	$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 \to \max;$ $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \ldots, m; \\ x_i \geq [x_i^0] + 1; \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n \end{cases}$

Возможны четыре случая при решении этой пары задач.

1. Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план. Тогда этот план и значение целевой функции на нем дают решение исходной задачи.

2. Одна из задач неразрешима, а другая имеет нецелочисленный оптимальный план. Тогда рассматриваем вторую задачу, в ее оптимальном плане выбираем одну из дробных компонент и снова строим две задачи.

3. Обе задачи разрешимы. Одна из задач имеет оптимальный целочисленный план, а в оптимальном плане другой задачи есть дробные числа. Тогда вычисляем значения целевых функций на этих планах и сравниваем их между собой. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно ее значению на плане с дробными компонентами, то данный целочисленный план является оптимальным для исходной задачи.

4. Обе задачи разрешимы, и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда рассматриваем ту из задач, для которой значение целевой функции является наибольшим. И снова строим две задачи.

Таким образом, мы приходим к следующему алгоритму решения задач целочисленного программирования методом ветвей и границ.

Алгоритм метода ветвей и границ

1. Находим решение задачи ЛП без учета условия целочисленности.
2. Составляем дополнительные ограничения на дробную компоненту плана.
3. Находим решение двух задач с ограничениями на компоненту.
4. Строим в случае необходимости дополнительные ограничения, согласно возможным четырем случаям получаем оптимальный целочисленный план либо устанавливаем неразрешимость задачи.

Пример 5.4. Решить задачу целочисленного программирования

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9; \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3; \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

Решение. Оптимальным решением задачи без учета целочисленности (найдите самостоятельно симплексным методом!) является точка

$$X_0 = (3{,}6;\ 0{,}6;\ 0;\ 0;\ 4{,}8)$$
$$\text{и } z(X_0) = 7{,}4.$$

Полагаем $x_1^0 = 3{,}6$, тогда $[x_1^0] = 3$. Согласно алгоритму, получаем следующую пару задач:

Задача 1	Задача 2
$z = 2x_1 + x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9; \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3; \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 5; \\ x_1 \le 3 \end{cases}$	$z = 2x_1 + x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9; \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3; \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 5; \\ x_1 \ge 4 \end{cases}$

Задача 2 неразрешима (проверьте!), а задача 1 имеет оптимальное решение $X_1 = (3;\ 1;\ 2;\ 3;\ 3)$, $z(X_1) = 7$ (найдите самостоятельно!). Таким образом, оптимальное решение исходной задачи целочисленного программирования имеет вид $X^*_{\max} = (3; 1; 2; 3; 3)$, $z^*_{\max} = 7$.

Пример 5.5. Решить задачу целочисленного программирования

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35; \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36; \\ x_{1,2} \ge 0,\ x_{1,2} \in Z. \end{cases} \tag{5.5}$$

Решение. Найдем графическим методом оптимальное решение исходной задачи без учета условия целочисленности (задача ЛП0). Допустимой областью задачи ЛП0 является четырехугольник $OABC$ (рис. 5.3) с угловыми точками $O(0,0)$, $A(0,4)$, $B\left(\frac{63}{17}, \frac{40}{17}\right)$ и $C(7,0)$ и $z_{\max} = z(B) = z\left(3\frac{12}{17}, 2\frac{6}{17}\right) = 14\frac{8}{17}$.

Далее согласно алгоритму метода ветвей и границ выберем произвольным образом одну из дробных переменных оптимального решения задачи ЛП0, например $x_1 = 3\frac{12}{17}$. Вертикальную полосу $3 < x_1 < 4$ исключаем из рассмотрения, так как в ней нет допустимых целочисленных решений. Таким образом, задача ЛП0 распадется на две подзадачи ЛП1 и ЛП2:

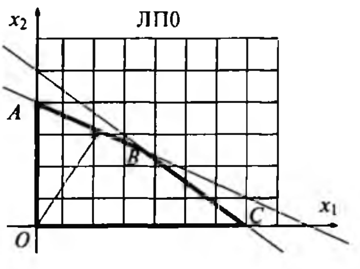


Рис. 5.3

ЛП1	ЛП2
$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35; \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36; \\ x_{1,2} \ge 0,\ x_1 \le 3 \end{cases}$	$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35; \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36; \\ x_{1,2} \ge 0,\ x_1 \ge 4 \end{cases}$

Решая задачу ЛП1 графическим методом (рис. 5.4), убеждаемся, что допустимым множеством является четырехугольник *OADE*, где $D\left(3, 2\frac{2}{3}\right)$ и $E(3,\ 0)$, при этом $z_{\max} = z(D) = z\left(3, 2\frac{2}{3}\right) = 14.$

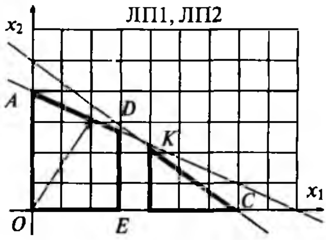


Рис. 5.4

Решение задачи ЛП1 не является целочисленным, поэтому разобьем задачу ЛП1 на две (ЛП3 и ЛП4), наложив дополнительные ограничения теперь уже на переменную x_2. Так как $x_2 = 2\frac{2}{3}$ и $[x_2] = 2$, то:

ЛП 3	ЛП 4
$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35; \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36; \\ x_{1,2} \ge 0; \\ x_1 \le 3,\ x_2 \le 2 \end{cases}$	$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35; \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36; \\ x_{1,2} \ge 0; \\ x_1 \le 3,\ x_2 \ge 3 \end{cases}$

Решая задачу ЛП3, допустимой областью которой является прямоугольник *OFHE*, получаем, что $z_{\max} = z(H) = z(3,2) = 12$ (рис. 5.5).

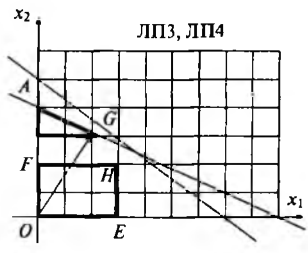


Рис. 5.5

Это решение удовлетворяет условию целочисленности, и следовательно, может являться решением исходной задачи. На данном этапе полученное решение будет являться *нижней оценкой*, а ***рекорд*** *— наилучшее из всех найденных решений исходной задачи* — равен этой нижней оценке.

При дальнейшем исследовании задачи рекорд может стать оптимальным решением задачи (5.5) или будет улучшен.

Теперь находим решение задачи ЛП4: $z_{\max} = z(G) = z\left(2\frac{1}{4}, 3\right) = 13{,}5.$ Условие целочисленности не выполнено. Значит, необходимо рассмотреть еще 2 подзадачи — ЛП5, ЛП6 (сформулируйте и проиллюстрируйте их графически!). Убеждаемся в том, что задача ЛП6 не имеет решений, а решением задачи ЛП5 будет $z_{\max} = z(2, 3) = 13$.

Получаем, что значение z больше, чем в рекорде. Поэтому решение ЛП5 порождает изменение рекорда: $z = 13$ в точке (2, 3).

Вернемся к задаче ЛП2:

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35; \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36; \\ x_{1,2} \ge 0,\ x_1 \ge 4. \end{cases}$$

Решая задачу графически (см. рис. 5.4), убеждаемся, $z_{\max} = z(K) = z\left(4, 2\frac{1}{7}\right) = \frac{101}{7}$, т.е. решение задачи ЛП2 не является целочисленным. Поэтому разобьем ее на две подзадачи ЛП7 и ЛП8; причем с учетом того, что $[x_2] = 2$ в точке K, имеем:

ЛП7	ЛП8
$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35; \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36; \\ x_{1,2} \ge 0; \\ x_1 \ge 4,\ x_2 \le 2 \end{cases}$	$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35; \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36; \\ x_{1,2} \ge 0; \\ x_1 \ge 4,\ x_2 \ge 3 \end{cases}$

Задача ЛП7 решений не имеет, а решением задачи ЛП8 (проверьте!) является точка (4, 2), при этом $z(4, 2) = 14$ — нижняя оценка. Решение удовлетворяет условию целочисленности, и значение целевой функции $z = 14$ больше рекорда.

Схема решения задачи (5.5) представлена на рис. 5.6.

Итак, мы полностью исследовали все подзадачи, и решением исходной задачи (5.5) являтется последнее значение рекорда:

$$X^*_{\max} = (4, 2), \quad z^*_{\max} = 14.$$

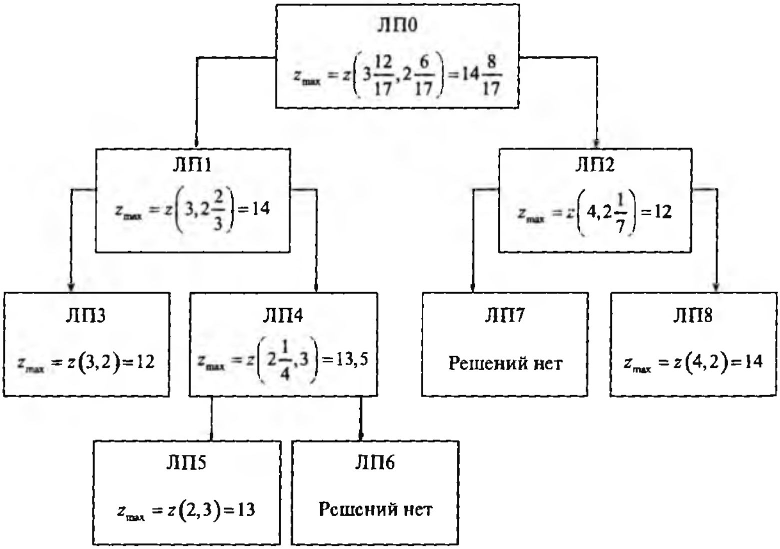


Рис. 5.6

Замечание 5.1. Вместо x_1 в качестве переменной ветвления в задаче ЛП0 можно было выбрать переменную x_2. При выборе подзадач также можно было сначала решить задачу ЛП2 вместо ЛП1. И вообще говоря, при дальнейшем исследовании порядок рассмотрения подзадач (по мере их возникновения) решающего значения не имеет.

Замечание 5.2. Последовательность решения подзадач: ЛП1, ЛП3, ЛП4, ЛП5, ЛП6, ЛП2, ЛП7, ЛП8 — является наихудшей. Если начать рассмотрение подзадач с задачи ЛП2, то сразу бы возникло наибольшее из всех возможных значений $z = 14$ (при целочисленном программировании большего значения z достичь нельзя, так как без учета целочисленности $z_{\max} = 14\frac{8}{17}$), и далее рассматривать задачу ЛП1 и все ее подзадачи не имело бы смысла.

Из замечания 5.2 можно усмотреть основной недостаток метода ветвей и границ: сложно выбирать следующую подзадачу для наиболее эффективного исследования, а также — по какой переменной ее исследовать.

Замечание 5.3. Алгоритм метода ветвей и границ применим для решения задач частично-целочисленного линейного программирования, когда условие целочисленности накладывается не на все переменные, а лишь на часть из них.

В заключение отметим, что название метода связано с графической интерпретацией алгоритма решения: строится многоуровневое дерево, ветви которого ведут к рекорду и его улучшениям. При этом часть ветвей остаются «оборванными», потому что их развитие оказалось нецелесообразным (см. рис. 5.6).

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте постановку задачи целочисленного программирования в области $D \subset R^n$.
2. Как меняется допустимое множество задачи ЛП в R^2 (R^n) при добавлении условий целочисленности всех переменных?
3. Сформулируйте алгоритм решения задачи целочисленного программирования в R^2 графическим методом.
4. Сформулируйте алгоритм Гомори решения задач целочисленного программирования.
5. Каковы предпосылки введения дополнительного ограничения в методе Гомори? Какова его геометрическая интерпретация?
6. Какова роль двойственного симплекс-метода при решении задач целочисенного методом Гомори?
7. Сформулируйте алгоритм метода ветвей и границ.
8. Какие задачи называются частично-целочисленными? Применимы ли метод Гомори и метод ветвей и границ для их решения?
9. Задачу

$$\begin{cases} z = x_1 + 5x_2 + 3 \to \max; \\ -x_1 + x_2 \le 2; \\ x_1 + x_2 \le 7; \\ x_1, x_2 \ge 0,\ x_1,\ x_2 \in Z \end{cases}$$

решить графическим методом, методом Гомори и дать геометрическую интерпретацию введения дополнительного ограничения.

10. Решить задачу методом ветвей и границ:

$$\begin{cases} z = 4x_1 + 5x_2 + 11 \to \max; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 10; \\ x_1 + 4x_2 \le 11; \\ 3x_1 + 3x_2 \le 13; \\ x_1, x_2 \ge 0,\ x_1,\ x_2 \in Z. \end{cases}$$

ГЛАВА 6

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Транспортная задача является задачей линейного программирования, в которой требуется найти оптимальный план перевозки некоторого груза от конечного числа поставщиков (с заданными запасами) к конечному числу потребителей (с заданными потребностями), причем стоимость перевозки единицы груза для каждой пары «поставщик — потребитель» известна. Таким образом, оптимальный план должен определять *минимальную* общую стоимость перевозок, не превышая запасы каждого из поставщиков и покрывая потребности каждого из потребителей.

6.1. Постановка задачи

Математическую постановку задачи можно представить следующим образом.

Имеется m поставщиков $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и n потребителей $B_1, B_2, \ldots, B_n$ некоторого груза. Для каждого поставщика и потребителя заданы запасы $a_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ и соответственно объем потребления $b_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$. Также известна стоимость перевозки единицы груза $c_{ij} \geq 0$ от i-го поставщика к j-му потребителю. Требуется найти объемы всех перевозок x_{ij}, где $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, от i-го поставщика к j-му потребителю, при которых общая стоимость перевозок минимальна. Таким образом, требуется найти минимум функции

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{6.1}$$

при условиях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = 1, \ldots, n; \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = 1, \ldots, m; \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Первая часть нетривиальных ограничений означает, что все потребности удовлетворены, вторая часть — то, что весь груз вывезен от поставщиков. Любой набор $x_{ij}(i = 1, ..., m, j = 1, ..., n)$ решений системы ограничений (6.2) образует $(m \times n)$-матрицу X, которую в дальнейшем будем называть ***матрицей перевозок*** транспортной задачи.

Замечание 6.1. Оказывается, при целочисленных объемах производства и потребления транспортная задача гарантированно обладает целочисленным оптимальным планом (см. далее теорему 6.4). Это обстоятельство было впервые экспериментально подмечено Данцигом при применении симплекс-метода для решения данной задачи. Поэтому формально можно включить транспортную задачу в класс задач целочисленного линейного программирования, используя при этом для ее решения аппарат регулярного линейного программирования.

Определение 6.1. *Любое неотрицательное решение задачи* (6.1)—(6.2), *определяемое матрицей X, называется* ***планом*** *транспортной задачи.*

Определение 6.2. *План X^*, при котором целевая функция* (6.1) *принимает минимальное значение, называется* ***оптимальным планом*** *транспортной задачи.*

Общее количество товара у поставщиков равно $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а общая потребность в товаре в пунктах назначения есть $\sum_{j=1}^{n} b_j$.

Определение 6.3. *Транспортная задача называется* ***задачей с правильным балансом****, а ее модель —* ***закрытой****, если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, то такая задача называется* ***задачей с неправильным балансом****, а ее модель —* ***открытой****.*

6.2. Структура решений транспортной задачи

В этом параграфе изложены основные выводы об условиях разрешимости и структуре решений транспортной задачи.

6.2.1. Условие разрешимости транспортной задачи

Оказывается, траспортная задача разрешима не всегда. Условие разрешимости сформулировано в следующей теореме.

Теорема 6.1. *Транспортная задача разрешима тогда и только тогда, когда суммарные запасы равны общим потребностям:*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Доказательство. Пусть $X^* = (x_{ij}^*)$ — оптимальное решение транспортной задачи. Тогда, очевидно,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* = b_j, \ j = 1, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* = a_i, \ i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Если просуммировать первые n равенств по i, а последние m равенств по j, то имеем: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* = \sum_{i=1}^{m} a_i$ и $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Поскольку левые части этих выражений равны, то равны и их правые части, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Обратно, предположим, что $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M$. Рассмотрим $(m \times n)$-матрицу $X = (x_{ij})$, где $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{M} \geq 0$. Тогда $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \dfrac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{M} = \dfrac{a_i M}{M} = a_i$ для $i = 1, \dots, m$ и $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \dfrac{b_j \sum_{i=1}^{m} a_i}{M} = \dfrac{b_j M}{M} = b_j$ для $j = 1, \dots, n$. Поэтому *допустимое множество системы ограничений транспортной задачи не пусто*. Далее, из ограничений $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ для $i = 1, \dots, m$ в силу неотрицательности x_{ij} следует ограниченность элементов матрицы $X = (x_{ij})$: $0 \leq x_{ij} \leq a_i$. Поэтому *допустимое множество является ограниченным*. Наконец, поскольку стоимости перевозок единиц груза c_{ij} ограничены сверху и снизу: $C \leq c_{ij} \leq D$, то $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C x_{ij} \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} D x_{ij}$, т.е.

$$C \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq F(X) \leq D \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}, \quad CM \leq F(X) \leq DM.$$

Таким образом, *целевая функция ограничена на допустимом множестве* и, следовательно, достигает на нем своего наименьшего значения. Теорема доказана.

Замечание 6.2. Как мы увидим далее (см. параграф 6.7), открытую модель транспортной задачи можно свести к закрытой и решить ее разработанными для закрытой модели методами.

6.2.2. Матрица ограничений транспортной задачи

Исходные данные транспортной задачи удобно представлять в виде таблицы (см. табл. 6.1).

Таблица 6.1

Поставщики	Потребители						Запасы
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	

Таблица 6.2

	B_1	B_2	B_3	
A_1	2 x_{11}	4 x_{12}	5 x_{13}	40
A_2	3 x_{21}	5 x_{22}	8 x_{23}	60
	20	30	50	100

Пример 6.1. Построить математическую модель транспортной задачи, заданной табл. 6.2.

Решение. Для данной задачи $m = 2$, $n = 3$,

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 100.$$

Таким образом, имеем задачу с правильным балансом, целевой функцией

$$F(X) = 2x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 8x_{23} \to \min$$

и системой ограничений:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 60; \\ x_{11} + x_{21} = 20; \\ x_{12} + x_{22} = 30; \\ x_{13} + x_{23} = 50; \\ x_{ij} \geq 0 \ i = 1,2; \ j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Матрица системы нетривиальных ограничений A задачи примера 6.1 имеет вид

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

А в общем случае задачи (6.1)—(6.2)

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} \\ m \\ \\ \\ \\ n \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} & \ldots & x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{matrix} \end{array}.$$

Таким образом, матрица ограничений транспортной задачи содержит $(m + n)$ строк, mn столбцов, состоит из нулей и единиц, причем в столбце, соответствующем переменной x_{ij}, есть только две единицы — в i-й и $(m + j)$-й строках.

Теорема 6.2. *Ранг матрицы системы ограничений транспортной задачи равен* $r(A) = m + n - 1$.

Доказательство. Если к последней строке матрицы прибавить $(n - 1)$ строк, начиная с $(m + 1)$-й, и вычесть первые m строк, то получится строка, состоящая из нулей. Следовательно, ранг матрицы ограничений $r(A) \le m + n - 1$.

Покажем, что найдутся $N = m + n - 1$ линейно независимых столбцов матрицы. Выберем столбцы, соответствующие переменным $x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1(n-1)}$, и убедимся, что они линейно независимы.

Матрица, составленная из таких столбцов, имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1(n-1)}
\end{pmatrix}$$

С помощью элементарных преобразований можно привести ее к единичной. Для этого строки с $(m + 1)$-й до $(m + n - 1)$-й умножим на -1 и прибавим к первой строке, тогда в ней останется только одна единица, а остальные элементы будут нулевыми. После этого первые m строк умножим на -1 и прибавим к последней строке. В результате в матрице останутся единицы только по диагонали, а последняя строка будет состоять из нулей. Следовательно, столбцы матрицы линейно независимы. Теорема доказана.

Следствие 6.1. *Число базисных и свободных переменных в системе ограничений транспортной задачи равно соответственно* $r = m + n - 1$ *и* $q - r = mn - n + 1 = (m - 1)(n - 1)$.

Сформулируем теперь фундаментальные теоремы о структуре оптимального решения транспортной задачи.

Теорема 6.3. *Оптимальное решение транспортной задачи совпадает хотя бы с одним из опорных решений, имеющих структуру:* $r = m + n - 1$ *базисных переменных и* $mn - r = (m - 1)(n - 1)$ *— свободных.*

Теорема 6.4. *Если ресурсы и потребности представлены целыми числами, то любое опорное решение транспортной задачи также будет состоять из целых чисел.*

6.3. Методы построения начального опорного плана

В основе решения транспортной задачи лежит модифицированный симплекс-метод, состоящий из трех основных этапов:

1) построения начального опорного решения;
2) оценки решения;
3) улучшения решения.

Как отмечено выше, первым этапом решения транспортной задачи является построение начального опорного плана, т.е. плана перевозок, удовлетворяющего всем ее ограничениям. Приведем несколько методов построения такого плана — метод северо-западного угла, метод минимального тарифа и метод аппроксимации Фогеля. Их сущность состоит в том, что начальный опорный план находят за не более чем $(m + n - 1)$ шагов (по числу базисных переменных), на каждом из которых в транспортной таблице заполняют одну клетку, которую называют *занятой*. Заполнение одной из клеток обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения (того, в столбце которого находится заполненная клетка), либо вывоз груза из одного из пунктов отправления (из того, в строке которого находится заполняемая клетка). Различаются эти планы по принципам выбора заполняемых клеток и в зависимости от этого могут давать планы, более или менее отличные от оптимального.

6.3.1. Метод северо-западного угла

Пример 6.2. Построить начальный опорный план методом северо-западного угла для транспортной задачи, заданной табл. 6.3.

Решение. В правом нижнем углу стоит сумма запасов (и одновременно сумма потребностей, так как модель закрытая). Заполнение таблицы начинаем с левого верхнего (северо-западного) угла таблицы. Так как потребности первого потребителя B_1 равны 70, а запасы первого поставщика A_1 равны 80, то в клетку A_1B_1 вписываем максимально возможную перевозку 70. Потребности B_1 полностью удовлетворены, поэтому первый столбец исключаем из рассмотрения, а оставшиеся запасы первого поставщика, т.е. 10, вписываем потребителю B_2 и первую строку исключаем из дальнейшего рассмотрения (табл. 6.4).

Таблица 6.3

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2	80
A_2	1	4	5	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

Таблица 6.4

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11 70	5 10	4	2	80
A_2	1	4	5	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

Так как потребности B_2 равны 60, а 10 единиц груза ему уже доставлены, то оставшиеся 50 единиц доставляются от второго поставщика A_2 (заполняем клетку A_2B_2). Столбец B_2 исключаем из рассмотрения, а оставшиеся запасы второго поставщика (120 единиц) записываем третьему потребителю (табл. 6.5).

Таблица 6.5

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11 70	5 10	4	2	80
A_2	1	4 50	5 120	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

Потребности третьего потребителя окончательно удовлетворяем за счет поставщика A_3 и вписываем в клетку A_3B_3 перевозку 60. Естественным завершением построения начального плана задачи с правильным балансом является то, что как потребности последнего потребителя B_4, так и запасы (оставшиеся) поставщика A_3 равны 90. Поэтому в клетку A_3B_4 вписываем перевозку 90. Получаем окончательную табл. 6.6 с начальным опорным планом $X = \begin{pmatrix} 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 90 \end{pmatrix}$.

Суммарная стоимость перевозок равна

$$z(X) = 70 \cdot 11 + 10 \cdot 5 + 50 \cdot 4 + 120 \cdot 5 + 60 \cdot 7 + 90 \cdot 10 = 2940.$$

Таблица 6.6

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11 70	5 10	4	2	80
A_2	1	450	5 120	9	170
A_3	9	8	7 60	10 90	150
b_j	70	60	180	90	400

Из решения видно, что метод северо-западного угла, с одной стороны, достаточно прост с точки зрения построения, а с другой стороны, не учитывает стоимость перевозок. Поэтому опорный план, построенный методом северо-западного угла, как правило, далек от оптимального.

6.3.2. Метод минимального тарифа

Пример 6.3. Построим теперь для задачи примера 6.2 (см. табл. 6.3) начальный опорный план методом минимального тарифа. Суть этого метода состоит в том, что в клетки с наименьшими тарифами помещают максимально возможные перевозки. Итак, в табл. 6.3 выбираем клетку с минимальным тарифом, т.е. клетку A_2B_1 с тарифом 1. Запасы поставщика A_2 равны 170, а потребности B_1 — 70, поэтому в клетку A_2B_1 вписываем максимально возможную перевозку 70 и потребителя B_1 исключаем из рассмотрения (табл. 6.7).

Таблица 6.7

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2	80
A_2	1 70	4	5	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

В оставшейся части таблицы выбираем минимальный тариф, т.е. клетку A_1B_4 с тарифом 2. Запасы поставщика A_1 равны 80, а потребности B_4 равны 90, поэтому в клетку A_2B_1 записываем перевозку 80 и поставщика A_1 исключаем из рассмотрения (табл. 6.8).

Таблица 6.8

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2 80	80
A_2	1 70	4	5	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

В оставшихся второй и третьей строках и втором, третьем и четвертом столбцах снова находим минимальный тариф, т.е. клетку A_2B_2 с тарифом 4. Запасы (оставшиеся) поставщика A_2 равны 100, а потребности B_2 — 60, поэтому в клетку A_2B_2 записываем максимально возможную перевозку 60 и исключаем второго потребителя из дальнейшего рассмотрения. Заметим, что у поставщика A_2 осталось 40 единиц груза, а потребности B_3 равны 180, поэтому вписываем в клетку A_2B_3 перевозку 40 (табл. 6.9).

Из оставшихся двух клеток A_3B_3 и A_3B_4 минимальный тариф 7 имеет клетка A_3B_3. Поэтому вписываем туда перевозку 140 и в клетку A_3B_4 — 10, получаем окончательную табл. 6.10 с начальным опорным планом

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 70 & 60 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & 10 \end{pmatrix}.$$

Таблица 6.9

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2 80	80
A_2	1 70	4 60	5 40	9	170
$A3$	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

Суммарная стоимость перевозок равна

$$Z(X) = 80 \cdot 2 + 70 \cdot 1 + 60 \cdot 4 + 40 \cdot 5 + 140 \cdot 7 + 10 \cdot 10 = 1750 < 2970.$$

Таблица 6.10

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2 80	80
A_2	1 70	4 60	5 40	9	170
A_3	9	8	7 140	10 10	150
b_j	70	60	180	90	400

Таким образом, начальный план, построенный с помощью метода минимального тарифа, оказался гораздо эффективнее, чем план, построенный по методу северо-западного угла.

6.3.3. Метод Фогеля

Пример 6.4. Применим теперь к задаче примера 6.2 метод аппроксимации Фогеля. Для этого найдем разность между двумя минимальными тарифами для каждой строки и столбца таблицы и запишем их в дополнительно образованные строки и столбцы (табл. 6.11). В строке A_1 минимальный тариф равен 2, а следующий за ним 4, поэтому разность между ними $4 - 2 = 2$; в строке A_2 минимальный тариф равен 1, а следующий за ним 4, поэтому разность между ними $4 - 1 = 3$; аналогично для строки A_3 разность между минимальным тарифом 7 и следующим за ним 8 равна 1. Итак, числа 2, 3 и 1 записываем в первый дополнительный столбец. Аналогично для столбцов: разности $9 - 1 = 8$; $5 - 4 = 1$ (два раза) и $9 - 2 = 7$ записываем в первую дополнительную строку.

Теперь из всех разностей выбираем *максимальную*, т.е. 8, в столбце B_1 и в клетку A_2B_1 с минимальным тарифом в этом столбце записываем максимально возможную перевозку 70, а потребителя B_1 исключаем из рассмотрения. Теперь аналогично вычисляем разности между оставшимися минимальными тарифами и заполняем вторые дополнительные столбец и строку, не учитывая тарифы в столбце B_1. Видим, что теперь максимальная разность получается в столбце B_4, и перевозку 80 записываем в клетку A_1B_4 с минимальным тарифом 2 в этом столбце. Строку A_1 при этом исключаем из рассмотрения. Как видно из таблицы, на следующем шаге вписываем перевозку 60 в клетку A_2B_2 и исключаем столбец B_2, затем — максимально возможную перевозку 40 в клетку A_2B_3 и исключаем из рассмотрения строку A_2. Теперь для вычисления дальнейших разностей остается единственная строка A_3, поэтому в качестве разностей по столбцам записываем нули. Далее в клетку A_3B_3 записываем 140, а на последнем шаге записываем перевозку 10 в клетку A_3B_4. Получаем таблицу с начальным опорным планом $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 70 & 60 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & 10 \end{pmatrix}$, который уже был получен методом минимального тарифа. Отметим, что методом Фогеля обычно получается план, близкий к оптимальному, или собственно оптимальный план.

Таблица 6.11

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	Разности по строкам					
A_1	11	5	4	2 80	80	2	2	—	—	—	—
A_2	1 70	4 60	5 40	9	170	3	1	1	4	—	—
A_3	9	8	7 140	10 10	150	1	1	1	3	3	0
b_j	70	60	180	90	400						
Разности по столбцам	8	1	1	7							
	—	1	1	7							
	—	4	2	1							
	—	—	2	1							
	—	—	0	0							
	—	—	—	0							

Замечание 6.3. В общем случае опорный план транспортной задачи состоит из $m + n - 1$ занятых клеток (по числу базисных переменных).

Такой план называется *невырожденным*. Нередко при решении транспортной задачи возникает *вырожденный* план с меньшим числом занятых клеток (когда какие-то из базисных переменных равны 0). В этом случае, как правило, выбирается свободная клетка (или несколько свободных клеток — в зависимости от вырожденности плана) с *наименьшим* тарифом, которая в дальнейшем формально считается занятой с *нулевой* перевозкой.

6.4. Метод потенциалов решения транспортной задачи

Вторым этапом решения транспортной задачи является проверка построенного плана на оптимальность и его улучшение (если он не оптимален). Эту задачу мы будем решать с помощью метода потенциалов.

6.4.1. Метод потенциалов и двойственность

Применение метода потенциалов основано на следующей теореме.

Теорема 6.5. *Если опорный план $X = (x_{ij})$ транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы поставщиков u_i, $i = 1, ..., m$, и потребителей v_j, $j = 1, ..., n$, удовлетворяющие условиям*:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0;$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0.$$

Доказательство. Используем теорему равновесия (теорема 4.4). Запишем математическую модель транспортной задачи:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \quad \left\{\begin{array}{ll|l} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = 1, \ldots, m, & u_i \\ & & ; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = 1, \ldots, n, & v_j \end{array}\right.$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$$

Составим математическую модель двойственной задачи. Обозначим через u_i, $i = 1, ..., m$, переменные (оценки), соответствующие первым m уравнениям системы ограничений, и через v_j, 1, ..., n, переменные, соответствующие последним n уравнениям. Тогда двойственная задача имеет вид

$$T(u,v)=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j\to\max,\ \ u_i+v_j\le c_{ij}\ \ i=1,\ldots,m,\ \ j=1,\ldots,n.$$

Каждое ограничение двойственной задачи содержит только две переменные, так как каждый столбец, соответствующий переменной x_{ij} системы ограничений исходной задачи имеет только две отличные от нуля (равные единице) координаты, i-ю и $(m+j)$-ю. Условий неотрицательности двойственная задача не имеет, так как все ограничения в исходной задаче — равенства. По теореме 4.4, если при подстановке в систему ограничений двойственной задачи некоторое ограничение выполняется как строгое неравенство $u_i + v_j < c_{ij}$, то соответствующая координата оптимального решения исходной задачи равна нулю, т.е. $x_{ij} = 0$. Если же оптимальным решением ограничение удовлетворяется как равенство $u_i = v_j = c_{ij}$, то соответствующая координата оптимального решения отлична от нуля, т.е. $x_{ij} > 0$. Теорема доказана.

Замечание 6.4. Теорема 6.5 допускает следующую экономическую интерпретацию. Пусть каждый из поставщиков A_j вносит за перевозку единицы груза (одному или нескольким потребителям) какую-то сумму u_i; в свою очередь каждый из потребителей B_j также вносит за перевозку единицы груза сумму v_j; допустим, что эти платежи передаются некоторому третьему лицу (перевозчику).

Предположим далее, что интересы поставщиков и потребителей не противоречат друг другу и они действуют как единая экономическая система. Пусть перевозка единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения объективно стоит c_{ij}, а поставщик A_i и потребитель B_j вместе платят за эту перевозку сумму: $u_i + v_j = \bar{c}_{ij}$, которая называется «псевдостоимостью» перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Платежи u_i и v_j не обязательно должны быть положительными: не исключено, что перевозчик сам платит либо поставщику, либо потребителю какую-то премию за перевозку.

Очевидно, что оптимальным будет такой план перевозок, при котором поставщик A_i и потребитель B_j не переплачивают перевозчику ничего сверх объективной стоимости перевозок c_{ij}, т.е. такой план, любое отступление от которого не выгодно ни поставщику, ни потребителю, так как заставит их платить за перевозку больше, чем если бы они возили грузы сами.

Таким образом, критерием оптимальности плана перевозок является выполнение двух условий: для всех занятых клеток $\tilde{c}_{ij} = c_{ij}$, а для всех свободных клеток $\tilde{c}_{ij} \le c_{ij}$.

6.4.2. Проверка планов транспортной задачи на оптимальность

Равенства $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток образуют систему с $m + n$ неизвестными u_i и v_j, а число уравнений этой системы равно $m + n - 1$ (по числу занятых клеток невырожденного опорного плана). Так как число неизвестных системы на единицу больше числа уравнений, то одну из неизвестных можно задать произвольно, а остальные найти из системы.

Неравенства $u_i + v_j \le c_{ij}$ для свободных клеток используются для проверки оптимальности опорного решения. Введем числа

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij},$$

которые называются *оценками свободных клеток*. Таким образом, согласно теореме 6.5, ***опорный план будет оптимален, если для всех свободных клеток таблицы оценки неположительные.***

Проверим теперь оптимальность планов, построенных выше.

Пример 6.5. Сначала рассмотрим начальный опорный план, построенный методом минимального тарифа и методом Фогеля.

Образуем у табл. 6.12 по одному дополнительному столбцу и строке, куда будем записывать потенциалы. Так как одну из неизвестных можно задать произвольно, то полагаем, например, $u_1 = 0$. Далее, поскольку для первой строки определен потенциал u_1, находим потенциалы v_j для ее занятых клеток по формуле $v_j = c_{1j} - u_1$. В первой строке всего одна занятая клетка A_1B_4, поэтому $v_4 = 2$. В столбце B_4, помимо уже использованной, есть еще одна занятая клетка A_3B_4, а так как тариф $c_{34} = 10$, то условие $u_3 + v_4 = c_{34}$ дает $u_3 = 8$. Далее, переходя к клетке A_3B_3, получаем: $u_3 + v_3 = c_{33}$ и $v_3 = c_{33} - u_3$, а из клетки A_2B_3 следует, что $u_2 + v_3 = c_{23}$, т.е. $u_2 = 6$. Дальнейшие вычисления будем записывать более сокращенно:

$$A_2B_1 : u_2 + v_1 = c_{21}, \text{ т.е. } 6 + v_1 = 1 \text{ и } v_1 = -5;$$

$$A_2B_2 : u_2 + v_2 = c_{22}, \text{ т. е. } 6 + v_2 = 4 \text{ и } v_2 = -2.$$

Все потенциалы найдены. Теперь находим оценки для свободных клеток:

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -16 < 0, \quad \Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -7 < 0;$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = -5 < 0, \quad \Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -1 < 0;$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -6 < 0, \quad \Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 < 0.$$

Результат записываем в табл. 6.12 (где в свободных клетках в квадратике записаны оценки). Все оценки отрицательны, поэтому план $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 70 & 60 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & 10 \end{pmatrix}$ оптимален и $z_{\min} = z(X^*) = 1750$.

Таблица 6.12

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-16}$	5 $\boxed{-7}$	4 $\boxed{-5}$	2 80	80	0
A_2	1 70	4 60	5 40	9 $\boxed{-1}$	170	6
A_3	9 $\boxed{-6}$	8 $\boxed{-2}$	7 140	10 10	150	8
b_j	70	60	180	90	400	
v_j	−5	−2	−1	2		

Пример 6.6. Теперь проверим на оптимальность план перевозок, полученный методом северо-западного угла. Ясно, что в силу большей суммарной стоимости перевозок план не оптимален, но вычисление потенциалов и оценок необходимо для того, чтобы этот начальный опорный план улучшить. Итак, в опорном плане, полученном в примере 6.2 (см. табл. 6.6), полагаем, что $u_1 = 0$, а далее находим последовательно:

$$A_1B_1 : u_1 + v_1 = c_{11},\ v_1 = 11;$$

$$A_1B_2 : u_1 + v_2 = c_{12},\ v_2 = 5;$$

$$A_2B_1 : u_2 + v_2 = c_{22},\ u_2 = -1;$$

$$A_2B_3 : u_2 + v_3 = c_{23},\ v_3 = 6;$$

$$A_3B_3 : u_3 + v_3 = c_{33},\ u_3 = 1;$$

$$A_3B_4 : u_3 + v_4 = c_{34},\ v_4 = 9.$$

Получаем также оценки для свободных клеток

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 2 > 0; \quad \Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 7 > 0; \quad \Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 9 > 0;$$

$$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -1 < 0; \quad \Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 3 > 0;$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 < 0.$$

Все результаты записываем в табл. 6.13. Как видим, среди оценок есть положительные, поэтому опорный план $X = \begin{pmatrix} 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 90 \end{pmatrix}$ не оптимален.

Таблица 6.13

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 70	5 10	4 $\boxed{2}$	2 $\boxed{7}$	80	0
A_2	1 $\boxed{9}$	4 50	5 120	9 $\boxed{-1}$	170	−1
A_3	9 $\boxed{3}$	8 $\boxed{-2}$	7 60	10 90	150	1
b_j	70	60	180	90	400	
v_j	11	5	6	9		

6.4.3. Улучшение опорного плана транспортной задачи

Чтобы улучшить допустимое решение X транспортной задачи, нам потребуется понятие цикла.

Определение 6.4. *Циклом называется последовательность клеток таблицы транспортной задачи, в которой две и только две соседние клетки расположены в одной строке или одном столбце.*

Цикл обычно изображают в виде замкнутой ломаной линии, соединяющей вершины цикла, расположенные в клетках таблицы.

Для построения нового опорного плана в таблице выбираем свободную клетку с *максимальной положительной оценкой* (клетка A_2B_1) и формируем цикл, одной из вершин которого является выбранная клетка, а остальные клетки *занятые*. Легко видеть, что это цикл, соединяющий клетки A_1B_1, A_1B_2, A_2B_2 и A_2B_1. Кроме этого, сопоставим каждой вершине цикла знак и перевозку, при этом свободной клетке сопоставляем знак «+», а для остальных клеток знаки чередуются.

Получим цикл, изображенный на рис. 6.1. Теперь сделаем перестановку по циклу, а именно: из всех вершин, отмеченных минусом, вычтем минимум из всех перевозок, означенных этим знаком, т.е. вычитаем $\Delta = \min(50, 70) = 50$, а ко всем вершинам с «+» прибавим Δ (рис. 6.2).

Рис. 6.1

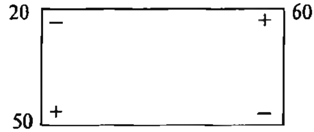


Рис. 6.2

Замечание 6.5. Если при нахождении Δ плана минимум достигается в нескольких клетках, помеченным знаком «—», то одна из клеток становится свободной, а остальные считаются занятыми с нулевыми перевозками, так чтобы число занятых клеток оставалось равным $m + n - 1$.

При этом клетка A_2B_2 становится свободной, и мы получаем новый опорный план (табл. 6.14). При этом общая стоимость перевозок равна

$$z(X) = 20 \cdot 11 + 60 \cdot 5 + 50 \cdot 1 + 120 \cdot 5 + 60 \cdot 7 + 90 \cdot 10 = 2490 < 2940.$$

Таблица 6.14

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 20	5 60	4 $\boxed{11}$	2 $\boxed{16}$	80	0
A_2	1 50	4 $\boxed{-9}$	5 120	9 $\boxed{-1}$	170	–10
A_3	9 $\boxed{-6}$	8 $\boxed{-11}$	7 60	10 90	150	–8
b_j	70	60	180	90	400	
v_j	11	5	15	18		

Полученный план лучше начального, и оценим его оптимальность с помощью метода потенциалов. Полагая $u_1 = 0$, находим остальные потенциалы (см. табл. 6.14) и оценки для свободных клеток:

$$\Delta_{13} = 11 > 0;\ \ \Delta_{14} = 16 > 0;\ \ \Delta_{22} = -9 < 0;\ \ \Delta_{24} = -1 < 0;\ \ \Delta_{31} = -6 < 0;$$

$$\Delta_{32} = -11 < 0.$$

Так как есть положительные оценки, план не оптимален.

Снова выбираем свободную клетку с максимальной положительной оценкой (клетка A_1B_4) и формируем цикл с вершиной в этой клетке.

Таковым является цикл, соединяющий клетки A_1B_4, A_3B_4, A_3B_3, A_2B_3, A_2B_1 и A_1B_1 (рис. 6.3). Вычисляем

$$\Delta = \min\{20, 120, 90\} = 20$$

и из вершин, помеченных минусом, вычтем $\Delta = 20$, а к клеткам, помеченных плюсом, прибавим 20. Получим цикл, изображенный на рис. 6.4. Клетка A_1B_4 становится свободной, и получаем новый план перевозок (табл. 6.15). При этом общая стоимость перевозок равна $F(X) = 2170 < 2490$. Оценим оптимальность полученного плана. Находим потенциалы и оценки (см. табл. 6.15). Так как план опять не оптимален, то снова выбираем свободную клетку с максимальной положительной оценкой (клетка A_2B_2) и формируем цикл с вершиной в этой клетке. Таковым является цикл, соединяющий клетки A_2B_2, A_1B_2, A_1B_4, A_3B_4, A_3B_3 и A_2B_3 (рис. 6.5). Вычисляем $\Delta = \min\{60, 70, 100\} = 60$ и сделаем перестановку по циклу с $\Delta = 60$ (рис. 6.6).

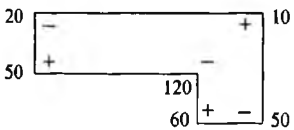


Рис. 6.3

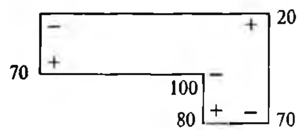


Рис. 6.4

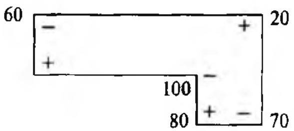


Рис. 6.5

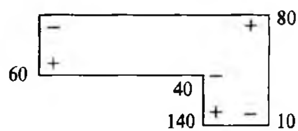


Рис. 6.6

Таблица 6.15

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-16}$	5 60	4 $\boxed{-5}$	2 20	80	0
A_2	1 70	4 $\boxed{7}$	5 100	9 $\boxed{-1}$	170	6
A_3	9 $\boxed{-6}$	8 $\boxed{2}$	7 80	10 70	150	8
b_j	70	60	180	90	400	
v_j	–5	5	–1	2		

При этом и клетка A_1B_2 становится свободной.

Имеем новый опорный план (табл. 6.16), и общая стоимость перевозок равна $z(X) = 1750 < 2170$. Заметим, что план

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 70 & 60 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & 10 \end{pmatrix}$$

был получен ранее методом минимального тарифа и методом Фогеля, а его оптимальность была уже проверена.

Таблица 6.16

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2 80	80
A_2	1 70	4 60	5 40	9	170
A_3	9	8	7 140	10 10	150
b_j	70	60	180	90	400

6.4.4. Вырожденный план

При построении начального опорного плана или при его улучшении может получиться план, у которого меньше, чем $m + n - 1$ занятых клеток. Такие планы называют *вырожденными*.

Пример 6.7. Изменим в задаче примера 6.2 тарифы и перевозки и найдем оптимальный план в задаче, заданной табл. 6.17

Таблица 6.17

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2 100	100
A_2	1	4 50	5 150	9	200
A_3	9 50	8	7 50	10 10	100
b_j	50	50	200	100	400

Методом минимального тарифа строим начальный опорный план. Клеткой с минимальным тарифом является A_1B_4, поэтому записываем в нее перевозку 100 и исключаем из рассмотрения первую строку и последний столбец. Далее в клетку A_2B_2 с тарифом 4 записываем перевозку 50 и исключаем из рассмотрения столбец B_2. С тарифом 5 имеется две свободные клетки, поэтому выбираем одну из них — A_2B_3 и записываем в нее перевозку 150 (такой выбор вполне оправдан, так как в клетку A_2B_1 можно записать лишь 50) и т.д. Получаем начальный план перевозок (см. табл. 6.17), причем

$$z(X) = 100 \cdot 2 + 50 \cdot 4 + 150 \cdot 5 + 50 \cdot 9 + 50 \cdot 7 = 1950.$$

Заметим, что в полученном плане имеется всего пять занятых клеток, что меньше числа базисных переменных (которых ровно $m + n - 1 = 6$). Поэтому построенный план является ***вырожденным***. Согласно замечанию 6.3, выбираем свободную клетку с минимальным тарифом (клетка A_1B_3), записываем в нее нулевую перевозку и считаем занятой. Вычисляем потенциалы и оценки (табл. 6.18). В клетке A_2B_1 имеем положительную оценку и строим цикл, соединяющий клетки A_2B_1, A_2B_3, A_3B_3 и A_3B_1 (рис. 6.7). Имеем $\Delta = \min(50, 150) = 50$, делаем перестановку по циклу (рис. 6.8) и получаем транспортную табл. 6.19. Вычисляем потенциалы и оценки, при этом находим, что $z(X) = 100 \cdot 2 + 50 \cdot 5 + 50 \cdot 4 + 100 \cdot 5 + 100 \cdot 7 = 1850 < 1950$, все оценки отрицательны и план $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 \\ 50 & 50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}$ оптимален.

Рис. 6.7

Рис. 6.8

Таблица 6.18

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-5}$	5 $\boxed{-2}$	4 0	2 100	100	0
A_2	5 $\boxed{2}$	4 50	5 150	9 $\boxed{-6}$	200	1
A_3	9 50	8 $\boxed{-2}$	7 50	10 $\boxed{-5}$	100	3
b_j	50	50	200	100	400	
v_j	6	3	4	2		

Таблица 6.19

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-7}$	5 $\boxed{-2}$	4 0	2 100	100	0
A_2	5 50	4 50	5 100	9 $\boxed{-6}$	200	1
A_3	9 $\boxed{-2}$	8 $\boxed{-2}$	7 100	10 $\boxed{-5}$	100	3
b_j	50	50	200	100	400	
v_j	4	3	4	2		

Замечание 6.6. В случае *вырожденного* плана возможна ситуация, когда занятая клетка с нулевой перевозкой попала в цикл и соответствует знаку «—» (при этом $\Delta = 0$). Перестановка по циклу в данном случае сводится к тому, что свободная клетка объявляется занятой с нулевой перевозкой, и наоборот, занятая клетка с нулевой перевозкой становится свободной.

6.4.5. Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

Сформулируем теперь алгоритм решения транспортной задачи с правильным балансом методом потенциалов.

1. Построим начальное опорное решение X.

2. Найдем потенциалы u_i и v_j, соответствующие данному опорному решению, решая систему уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток.

3. Вычислим оценки для свободных клеток по формулам $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Если $\Delta_{ij} \leq 0$ для всех свободных клеток, то полученное решение $X^* = X$ является оптимальным. Вычислим значение целевой функции $F(X^*)$, и решение задачи на этом заканчивается.

3. Если имеется хотя бы одна свободная клетка с положительной оценкой, то опорное решение не является оптимальным. Для улучшения плана перевозок находим клетку таблицы, которой соответствует наибольшая положительная оценка, и строим цикл, включающий данную (свободную) клетку и занятые клетки. В вершинах цикла расставим поочередно знаки «+» и «—», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой, и делаем переход по циклу на величину, равную минимуму перевозок по всем клеткам, помеченным минусом. Получаем новый опорный план и переходим к пункту 2.

Пример 6.8. Методом потенциалов найти оптимальное решение транспортной задачи, заданной табл. 6.20.

Решение. Построим начальное опорное решение методом минимального тарифа (см. табл. 6.20). Полагая $u_3 = 0$, последовательно находим потенциалы и оценки свободных клеток. Так как максимальная положительная оценка $\Delta_{14} = 2$, то для клетки (1,4) строим цикл (вершины цикла выделены в табл. 6.20 жирным шрифтом).

Таблица 6.20

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	7 $\boxed{-7}$	8 $\boxed{-8}$	1 **160**	2 $\boxed{2}$	160	–2
A_2	4 120	5 $\boxed{-1}$	9 $\boxed{-4}$	8 20	140	2
A_3	9 $\boxed{-7}$	8 50	7 **30**	10 **90**	170	0
b_j	120	50	190	110		
v_j	4	3	4	2		

Выполним сдвиг по циклу, получаем новое опорное решение (табл. 6.21), для которого опять вычисляем потенциалы и оценки.

Таблица 6.21

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	7 $\boxed{-9}$	8 $\boxed{-8}$	1 **70**	2 **90**	160	–2
A_2	4 120	5 $\boxed{1}$	9 $\boxed{-2}$	8 **20**	140	4
A_3	9 $\boxed{-9}$	8 **50**	7 **120**	10 $\boxed{-2}$	170	0
b_j	120	50	190	110		
v_j	0	2	3	4		

Для клетки (2, 2) (табл. 6.21) строим цикл и выполняем сдвиг по циклу на величину $\Delta = 20$. В получившейся табл. 6.22 все оценки отртцательны, оптимальный план

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$F(X^*) = 1 \cdot 50 + 1 \cdot 110 + 1 \cdot 120 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 140 = 1330.$$

Таблица 6.22

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	7 $\boxed{-8}$	8 $\boxed{-8}$	1 50	2 110	160	−2
A_2	4 120	5 20	9 $\boxed{-3}$	8 $\boxed{-1}$	140	3
A_3	9 $\boxed{-8}$	8 30	7 140	10 $\boxed{-2}$	170	0
b_j	120	50	190	110		
v_j	1	2	3	4		

6.4.6. Постоптимальный анализ

Зададимся теперь следующим вопросом. Пусть найдено оптимальное решение транспортной задачи. Как изменится оптимальное решение при малом изменении потребностей (или ресурсов)?

Согласно теоремам двойственности оптимальное значение целевой функции транспортной задачи совпадает с оптимальным значением двойственной задачи:

$$F^* = T^* = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j^*,$$

где u_i^* и v_j^* — потенциалы, соответствующие оптимальному решению.

По теореме 4.8 при малых изменениях Δa_i и Δb_j ресурса a_i и потребностей b_j изменение $\Delta F^*_{\min}$ оптимального значения общей стоимости перевозок удовлетворяет условию

$$\Delta F^* = \Delta a_i u_i^* + \Delta b_j v_j^*,$$

или

$$\frac{\partial F^*}{\partial a_i} = u_i^*$$

и

$$\frac{\partial F^*}{\partial b_j} = v_j^*.$$

Для закрытой модели, для сохранения условия $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, необходимо, чтобы $\Delta a_i = \Delta b_j = \Delta$,.следовательно, $\Delta F^* = \Delta(u_i^* + v_j^*)$.

Пример 6.9. Пусть в условиях примера 6.8 a_2 и b_4 увеличились на 1. Найти изменение затрат.

Решение. По формуле $\Delta F^* = \Delta(u_{i0}^* + v_{j0}^*)$ и последней таблице примера 6.8 получим $\Delta F^* = 1 \cdot (u_2^* + v_4^*) = 1 \cdot (3 + 4) = 7$. Целевая функция станет равной $F^* + \Delta F^* = 1330 + 7 = 1337$.

Пример 6.10. Пусть в условиях примера 6.9 потребности b_3 возросли на 4. Запасы какого поставщика выгодно увеличить? Найти изменение затрат.

Решение. Имеем $\Delta = 4$, $\Delta a_i = 4$. Найдем i. Вычислим изменение целевой функции для $\Delta a_1 = 4$, $\Delta a_2 = 4$, $\Delta a_3 = 4$:

$$\text{если } \Delta a_1 = 4, \text{ то } \Delta F^* = \Delta(u_1 + v_3) = 4(-2 + 3) = 4;$$
$$\text{если } \Delta a_2 = 4, \text{ то } \Delta F^* = \Delta(u_2 + v_3) = 4(3 + 3) = 24;$$
$$\text{если } \Delta a_3 = 4, \text{ то } \Delta F^* = \Delta(u_3 + v_3) = 4(0 + 3) = 12.$$

Наиболее выгодно, таким образом, увеличить запасы поставщика A_1, поскольку увеличение затрат в этом случае минимально и равно 4.

6.5. Метод дифференциальных рент

Напомним, что при определении оптимального решения транспортной задачи методом потенциалов сначала находилось какое-нибудь ее опорное решение, а затем оно последовательно улучшалось. При нахождении решения транспортной задачи методом дифференциальных рент сначала наилучшим образом распределяют между пунктами назначения часть груза (так называемое условно оптимальное распределение), а на последующих итерациях постепенно уменьшают общую величину нераспределенных поставок.

Первоначальный вариант распределения груза определяют следующим образом. В каждом из столбцов таблицы данных транспортной задачи находят минимальный тариф. Найденные числа заключают в рамки, а клетки, в которых стоят указанные числа, заполняют. В них записывают максимально возможные числа (так, чтобы не превысить потребности соответствующего пункта назначения). В результате получают некоторое распределение поставок груза в пункты назначения. Это распределение в общем случае не удовлетворяет ограничениям исходной транспортной задачи. Поэтому в результате последующих шагов следует постепенно сокращать нераспределенные поставки груза так, чтобы при этом общая стоимость перевозок оставалась минимальной. Для этого сначала определяют *избыточные и недостаточные строки*.

Определение 6.5. *Строки, соответствующие поставщикам, запасы которых полностью распределены, а потребности пунктов назначения, связанных с данными потребителями запланированными поставками, не удовлетворены, называются* ***недостаточными (отрицательными)***.

Определение 6.6. *Строки, запасы которых исчерпаны не полностью, называются* ***избыточными (положительными)***.

После того как определены избыточные и недостаточные строки, для каждого из столбцов находят разности между числом в рамке и ближайшим к нему тарифом, записанным в избыточной строке. Если число в рамке находится в положительной строке, то разность не определяют. Среди полученных чисел находят наименьшее. Это число называется *промежуточной рентой*. После определения промежуточной ренты переходят к новой таблице. Эта таблица получается из предыдущей таблицы прибавлением к соответствующим тарифам, стоящим в отрицательных строках, промежуточной ренты. Остальные элементы остаются прежними. При этом все клетки новой таблицы считают свободными. После построения новой таблицы начинают заполнение ее клеток. Теперь уже число заполняемых клеток на одну больше, чем на предыдущем этапе. Эта дополнительная клетка находится в столбце, в котором была записана промежуточная рента. Все остальные клетки находятся по одной в каждом из столбцов, и в них записаны наименьшие для данного столбца числа, заключенные в рамки. Заключены в рамки и два одинаковых числа, стоящих в столбце, в котором в предыдущей таблице была записана промежуточная рента.

Поскольку в новой таблице число заполняемых клеток больше, чем число столбцов, при заполнении клеток следует пользоваться специальным правилом, которое состоит в следующем. Выбирают некоторый столбец (строку), в котором имеется одна клетка с помещенной в ней рамкой. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данный столбец (строку). После этого берут некоторую строку (столбец), в которой имеется одна клетка с помещенной в ней рамкой. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данную строку (столбец). Продолжая так, после конечного числа шагов заполняют все клетки, в которых помещены рамки с заключенными в них числами. Если к тому же удается распределить весь груз, имеющийся в пунктах отправления, между пунктами назначения, то получают оптимальный план транспортной задачи. Если же оптимальный план не получен, то переходят к новой таблице. Для этого находят избыточные и недостаточные строки, промежуточную ренту и на основе этого строят новую таблицу. При этом могут возникнуть некоторые затруднения при определении знака строки, когда ее нераспределенный остаток равен нулю. В этом случае строку считают положительной при условии, что вторая заполненная клетка, стоящая в столбце, связанном с данной строкой еще одной заполненной клеткой, расположена в положительной строке.

После конечного числа описанных выше итераций нераспределенный остаток становится равным нулю. В результате получают оптимальный план данной транспортной задачи.

Замечание 6.7. Описанный выше метод решения транспортной задачи имеет более простую логическую схему расчетов, чем рассмотренный выше метод потенциалов. Поэтому в большинстве случаев для нахождения решения конкретных транспортных задач с использованием ЭВМ применяется метод дифференциальных рент.

Пример 6.11. Методом дифференциальных рент найти оптимальное решение транспортной задачи, заданной табл. 6.23.

Таблица 6.23

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
b_j	120	50	190	110	

Решение. Построим начальное опорное решение. В каждом из столбцов таблицы найдем минимальный тариф и заключим его в рамку. Заполним выделенные клетки, записав в них максимально возможные числа (так, чтобы не превысить потребности соответствующего пункта назначения, — табл. 6.24).

Определим *избыточные и недостаточные строки*. Строка A_1 — недостаточная, так как запасы пункта A_1 полностью использованы, а потребности B_3 и B_4 удовлетворены лишь частично. Недостаток равен

$(160-190)+(0-110)=-140$. Строки A_2 и A_3 — избыточные, так как запасы этих строк распределены не полностью. Избыток A_2 равен $140-120=$ $=+20$, избыток A_3 равен $170-50=+120$. Общая величина избытка равна общей величине недостатка (см. последний столбец табл. 6.24).

Таблица 6.24

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	
A_1	7	8	$\boxed{1}$ 160	$\boxed{2}$ 0	160	−140
A_2	$\boxed{4}$ 120	5	9	8	140	+20
A_3	9	$\boxed{2}$ 50	3	6	170	+120
b_j	120	50	190	110		
	—	—	$3-1=2$	$6-2=4$	Рента	2

Далее для каждого из столбцов найдем *разности* между *числом в рамке и ближайшим к нему тарифом, записанным в избыточной строке*. Если число в рамке находится в положительной строке, то разность не определяют. Среди полученных чисел найдем *наименьшее — промежуточную ренту*. Промежуточная рента равна $\min\{2, 4\}=2$ (см. последнюю строку табл. 6.24).

Перейдем к новой табл. 6.25. Тарифы строк A_2 и A_3 остаются без изменений, а к тарифам строки A_1 прибавим промежуточную ренту 2. Все клетки новой таблицы — свободные.

Таблица 6.25

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	
A_1	$7+2=9$	$8+2=10$	$1+2=3$ 50	$2+2=\boxed{4}$ 110	160	−20
A_2	$\boxed{4}$ 120	5	9	8	140	+20
A_3	9	$\boxed{2}$ 50	$\boxed{3}$ 120	6	170	−0
b_j	120	50	190	110		
	—	$5-2=3$	$9-3=6$	$8-4=4$	Рента	3

Заполним новую таблицу. Заметим, что теперь число заполняемых клеток на одну больше, чем на предыдущем этапе. Эта дополнительная клетка (3, 3) находится в столбце B_3, в котором была записана промежуточная рента. В этом столбце заключены в рамки два одинаковых числа, находящихся в клетках (1, 3) и (3, 3).

При заполнении используется следующий прием. Выбираем столбец (строку), в котором имеется одна клетка с помещенной в ней рамкой. Эту клетку заполняем и данный столбец (строку) исключаем из рассмотрения. После этого берем строку (столбец), в которой имеется одна клетка с помещенной в ней рамкой. Эту клетку заполняют и данную строку (столбец) исключают из рассмотрения. Таким образом, порядок заполнения новой таблицы следующий.

1. Заполняем клетку (2, 1) числом 120. Столбец B_1 исключаем из рассмотрения.

2. Заполняем клетку (3, 2) числом 50. Столбец B_2 исключаем из рассмотрения.

3. Заполняем клетку (1, 4) числом 110. Столбец B_4 исключаем из рассмотрения.

4. Заполняем клетку (1, 3) числом 160 – 110 = 50. Строку A_1 исключаем из рассмотрения.

5. Заполняем клетку (3, 1) числом 170 – 50 = 120. Строку A_3 исключаем из рассмотрения.

Определим *избыточные и недостаточные строки*. Строка A_1 — недостаточная, так как запасы пункта A_1 полностью использованы, а потребности B_3 и B_4 удовлетворены лишь частично. Недостаток равен (50 + 120 – 190) + (110 –110) = –20. Строка A_2 — избыточная, так как запас этой строки распределен не полностью. Избыток A_2 равен 140 – 120 = +20. Общая величина избытка равна общей величине недостатка. Запас строки A_3 распределен полностью. Ее считаем недостаточной с недостатком –0.

Для каждого из столбцов найдем ***разности между числом в рамке и ближайшим к нему тарифом, записанным в избыточной строке***. Если число в рамке находится в положительной строке, то разность не определяют. Среди полученных чисел найдем наименьшее — промежуточную ренту. Промежуточная рента равна min{3, 6, 4,} = 3.

Перейдем к новой табл. 6.26. Тарифы строки A_2 остаются без изменений, а к тарифам строки A_1 и A_3 прибавим промежуточную ренту 3. Все клетки новой таблицы — свободные.

Заполним новую таблицу. Число заполняемых клеток увеличилось на единицу. Порядок заполнения новой таблицы следующий.

1. Заполняем клетку (2, 1) числом 120. Столбец B_1 исключаем из рассмотрения.

2. Заполняем клетку (1, 4) числом 110. Столбец B_4 исключаем из рассмотрения.

3. Заполняем клетку (1, 3) числом 160 – 110 = 50. Строку A_1 исключаем из рассмотрения.

4. Заполняем клетку (2, 2) числом 140 – 120 = 20. Строку A_2 исключаем из рассмотрения.

5. Заполняем клетку (3, 3) числом 190 – 50 = 140. Столбец B_4 исключаем из рассмотрения.

Таблица 6.26

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	
A_1	$9 + 3 = 12$	$10 + 3 = 13$	$3 + 3 = \boxed{6}$ 50	$4 + 2 = \boxed{7}$ 110	160	0
A_2	$\boxed{4}$ 120	$\boxed{5}$ 20	9	8	140	0
A_3	$9 + 3 = 12$	$2 + 3 = \boxed{5}$ 30	$3 + 3 = \boxed{6}$ 140	$6 + 3 = 9$	170	0
b_j	120	50	190	110		

6. Заполняем клетку (3, 2) числом 50 – 20 = 30. Столбец B_2 исключаем из рассмотрения.

Нераспределенный остаток стал равным нулю. Получено оптимальное решение данной транспортной задачи $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix}$. Оптимальное значение целевой функции рассчитывается по *тарифам исходной таблицы*: $F(X^*) = 1 \cdot 50 + 2 \cdot 110 + 4 \cdot 120 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 140 = 1330$.

6.6. Открытая модель транспортной задачи

Напомним (определение 6.3), что транспортная задача $m \times n$ называется *задачей с неправильным балансом*, а ее модель — *открытой*, если $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. суммарные запасы не равны суммарным потребностям.

Согласно замечанию 6.2, открытую задачу можно свести к замкнутой и тем самым найти решение, удовлетворяющее начальным условиям задачи.

1. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивного потребителя B_{n+1} с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и нулевыми тарифами перевозок в столбце.

2. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивного поставщика A_{m+1} с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и нулевыми тарифами перевозок в строке.

Пример 6.12. Решить траспортную задачу, заданную табл. 6.27.

Таблица 6.27

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2	100
A_2	1	4	5	9	200
A_3	9	8	7	10	130
b_j	70	60	180	90	

Решение. Так как сумма запасов 100 + 200 + 130 = 430 больше суммы потребностей 70 + 60 + 180 + 90 = 400, то вводим фиктивного потребителя B_5 с нулевыми тарифами перевозок и потребностями 30 (табл. 6.28). Методом аппроксимации Фогеля построим начальный план (табл. 6.29), анализируем оптимальность плана методом потенциалов.

Получаем, что все оценки отрицательны. Поэтому полученный план

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 90 \\ 70 & 60 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}$$

(для его записи мы отбрасываем столбец фиктивного потребителя B_5) оптимален и $F(X^*) = 1580$. Как следствие неправильного баланса имеем, что от поставщика A_3 не вывезено 30 единиц груза.

Таблица 6.28

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	11	5	4	2	0	100
A_2	1	4	5	9	0	200
A_3	9	8	7	10	0	130
b_j	70	60	180	90	30	400

Таблица 6.29

u_i \ v_j	0	3	4	2	−3	a_i	Разности по строкам						
0	11	5	4 10	2 90	0	100	2	2	2	1	0	—	—
1	1 70	4 60	5 70	9	0	200	1	4	1	1	0	0	—
3	9	8	7 100	10	0 30	130	7	7	1	1	0	0	0
b_j	70	60	180	90	30	400							
Разности по столбцам	8	1	1	7	0								
	—	1	1	7	0								
	—	1	1	7	—								
	—	1	1	—	—								
	—	—	1	—	—								
	—	—	2	—	—								
	—	—	0	—	—								

6.7. Определение оптимального плана транспортных задач с дополнительными ограничениями

При решении ряда транспортных задач иногда приходится учитывать дополнительные ограничения на перевозки. Ниже перечислены варианты усложнений в постановках транспортных задач и даны указания, как их решать.

1. Если перевозки от поставщика A_i к потребителю B_j не могут быть осуществлены (*блокировка*), то для определения оптимального реше-

ния задач предполагают, что тариф перевозки единицы груза от A_i к B_j является сколь угодно большим числом M.

2. Если дополнительным условием в транспортной задаче является обеспечение перевозки от поставщика A_i к потребителю B_j ***в точности*** a_{ij} единиц груза, то в клетку A_iB_j записывают указанное число a_{ij}, а в дальнейшем эту клетку считают свободной со сколь угодно большим тарифом M.

3. Если от поставщика A_i к потребителю B_j должно быть завезено ***не менее*** a_{ij} единиц груза, то считают, что запасы пункта A_i и потребности пункта B_j полагают меньше фактических на a_{ij} единиц. После нахождения оптимального плана перевозку, стоящую в клетке A_iB_j, увеличивают на a_{ij} единиц.

4. Если от поставщика A_i к потребителю B_j требуется перевезти *не более* a_{ij} единиц груза, то вводят дополнительного потребителя $B_{n+1} = B_{ij}$, которому записывают те же тарифы, что и для B_j, за исключением тарифа в i-й строке, который считают равным сколь угодно большому числу M. Потребности пункта B_j считают равными a_{ij}, а потребности B_{ij} полагают равными $b_j - a_{ij}$.

Пример 6.13. Найти решение транспортной задачи, заданной табл. 6.30, с учетом того, что из A_2 в B_1 и из A_3 в B_4 перевозки не могут быть осуществлены, а из A_1 в B_3 должно быть завезено 60 единиц груза, а из A_3 в B_2 — не менее 50 единиц груза.

Таблица 6.30

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2	80
A_2	1	4	5	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

Решение. Так как из A_2 в B_1 и из A_3 в B_4 перевозки не могут быть осуществлены, то в клетках A_2B_1 и A_3B_4 тарифы считаем равными некоторому большому числу M. В клетку A_1B_3 помещаем перевозку 60, тариф считаем равным M и эту клетку в дальнейшем полагаем свободной. Кроме этого, запасы A_3 и потребности B_2 уменьшаем на 50 (табл. 6.31).

Найдем начальное опорное решение методом минимального тарифа. В клетку A_1B_4 помещаем максимально возможную перевозку 20, в клетку A_2B_2 — 10, A_2B_3 — 120, A_2B_4 — 40, A_3B_1 — 70 и A_3B_4 —30 (см. табл. 6.31). Находим потенциалы и оценки свободных клеток. Так как есть положительные оценки, план не оптимален. Максимальную положительную оценку $\Delta_{33} = M - 11$ получаем в клетке A_3B_3. Строим цикл, соединяющий клетки A_3B_3, A_2B_3, A_2B_4 и A_3B_4 (вершины цикла выделены жирным шрифтом) и делаем перестановку по циклу с $\Delta = \min(30, 120) = 30$. Получаем табл. 6.32 с новым планом, для которого все оценки отрицательны. Таким образом, данная таблица — заключительная, и, увеличивая перевозку в клетке A_3B_2 на 50, получим оптимальный план перевозок, удовлетворяющий всем ограничениям задачи:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 20 \\ 0 & 10 & 90 & 70 \\ 70 & 50 & 30 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$F(X^*) = 4 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 90 + 9 \cdot 70 + 9 \cdot 70 + 7 \cdot 30 = 2240$$

Таблица 6.31

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-M}$	5 $\boxed{-8}$	M 60	2 20	80	0
A_2	M $\boxed{18-2M}$	4 10	5 **120**	9 **40**	170	7
A_3	9 70	8 $\boxed{M-13}$	7 $\boxed{M-11}$	M **30**	100	$M-2$
b_j	70	10	180	90	400	
v_j	$\boxed{11-M}$	−3	−2	2		

Таблица 6.32

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-11}$	5 $\boxed{-8}$	M 60	2 20	80	0
A_2	M $7-M$	4 10	5 90	9 70	170	7
A_3	9 70	8 $\boxed{-2}$	7 30	M $\boxed{11-M}$	100	9
b_j	70	10	180	90	400	
v_j	0	−3	−2	2		

Пример 6.14. Найти решение транспортной задачи, заданной табл. 6.30, если из A_1 в B_4 перевозки запрещены, а из A_2 в B_4 должно быть завезено не менее 40 единиц груза, а из A_3 в B_3 — не более 50 единиц груза.

Решение. Поскольку из A_1 в B_4 перевозки не могут быть осуществлены, то тариф в A_1B_4 считаем равным M. Запасы A_2 и потребности B_4 уменьшаем на 40, а также вводим дополнительного потребителя B_{33} с потребностями $180 - 50 = 130$. Соответственно, в клетке A_3B_{33} стоимость перевозок считаем равной M, а потребности B_3 приравниваем к 50. Получаем табл. 6.33.

Таблица 6.33

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_{33}	a_i
A_1	11	5 0	4 50	M	4 30	80
A_2	1 70	4 60	5	9	5	130
A_3	9	8	7	10 50	M 100	150
b_j	70	60	50	50	130	

Найдем начальное опорное решение методом минимального тарифа. В клетку A_2B_1 вводим максимально возможную перевозку 70, в клетку A_2B_2 — 60, A_1B_3 — 50, A_1B_{33} — 30, A_3B_4 — 50 и A_3B_{33} — 100. Поскольку план вырожденный, клетку A_1B_2 считаем занятой с нулевой перевозкой.

Находим потенциалы и оценки (табл. 6.34). Из двух клеток с максимальной положительной оценкой $\Delta_{33} = \Delta_{32} = M - 7$ выбираем клетку A_3B_3 (так как там меньший тариф) и строим цикл, соединяющий клетки A_3B_3, A_1B_3, A_1B_{33} и A_3B_{33}. Так как $\Delta = \min(50, 100) = 50$, делаем перестановку по циклу и получаем транспортную табл. 6.35 с новым планом. Цикл, построенный в клетке с максимальной положительной оценкой $\Delta_{32} = M - 7$ (соединяющий клетки A_3B_2, A_1B_2, A_1B_{33} и A_3B_{33}) имеет знак минус в клетке с нулевой перевозкой. Это означает, что клетка A_3B_2 объявляется занятой (с нулевой перевозкой), а A_1B_2 — свободной. Для нового плана (табл. 6.36) считаем потенциалы и оценки и получаем единственную положительную оценку $\Delta_{2,33} = M - 9$ в A_2B_{33} с циклом из клеток A_2B_{33}, A_3B_{33}, A_3B_2 и A_2B_2. Так как $\Delta = \min(50, 60) = 50$, получаем транспортную табл. 6.37 с новым планом. Вычисляем новые потенциалы и убеждаемся, что все оценки отрицательны. Данная таблица — заключительная, и, увеличивая перевозку в клетке A_2B_4 на 40, а также складывая перевозки, записанные в соответствующих клетках столбцов B_3 и B_{33}, получим оптимальный план перевозок

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 80 & 0 \\ 70 & 10 & 50 & 40 \\ 0 & 50 & 50 & 50 \end{pmatrix},$$ удовлетворяющий всем ограничениям задачи,

и $z(X^*) = 4 \cdot 80 + 1 \cdot 70 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 50 + 9 \cdot 40 + 8 \cdot 50 + {}$ $+ 7 \cdot 50 + 10 \cdot 50 = 2290.$

Таблица 6.34

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_{33}	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-9}$	5 0	4 **50**	M $\boxed{14-2M}$	4 **30**	80	0
A_2	1 70	4 60	5 $\boxed{-2}$	9 $\boxed{4-M}$	5	130	−1
A_3	9 $\boxed{M-11}$	8 $\boxed{M-7}$	7 $\boxed{M-7}$	10 50	M **100**	150	$M-4$
b_j	70	60	50	50	130		
v_j	2	5	4	$14-M$	4		

Таблица 6.35

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_{33}	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-9}$	5 **0**	4 $\boxed{7-M}$	M $\boxed{14-2M}$	4 **80**	80	0
A_2	1 70	4 60	5 $\boxed{5-M}$	9 $\boxed{4-M}$	5 $\boxed{-2}$	130	−1
A_3	9 $\boxed{M-11}$	8 $\boxed{M-7}$	7 50	10 50	M **50**	150	$\boxed{M-4}$
b_j	70	60	50	50	130		
v_j	2	5	$11-M$	$14-M$	4		

Таблица 6.36

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_{33}	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-2-M}$	5 $\boxed{7-M}$	4 $\boxed{7-M}$	M $\boxed{14-M}$	4 80	80	0
A_2	1 70	4 **60**	5 $\boxed{-2}$	9 $\boxed{-4}$	5 $\boxed{M-9}$	130	$M-8$
A_3	9 $\boxed{-4}$	8 **0**	7 50	10 50	M **50**	150	$M-4$
b_j	70	60	50	50	130		
v_j	$9-M$	$12-M$	$11-M$	$14-M$	4		

Таблица 6.37

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_{33}	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-11}$	5 $\boxed{-2}$	4 $\boxed{-2}$	M $\boxed{5-M}$	4 **80**	80	0
A_2	1 **70**	4 **10**	5 $\boxed{-2}$	9 $\boxed{-3}$	5 **50**	130	1
A_3	9 $\boxed{-4}$	8 **50**	7 **50**	10 **50**	M $\boxed{9-M}$	150	5
b_j	70	60	50	50	130		
v_j	0	3	2	5	4		

6.8. Распределительные задачи

6.8.1. Перевозки неоднородного груза

Часто рассматриваются задачи о перевозках взаимозаменяемых грузов, например угля различных сортов, цемента разных марок, сортового железа и т.д. Такие задачи сводятся к ранее рассмотренным задачам перевозок однородного груза.

Пример 6.15. Рассмотрим пример расчета оптимального плана перевозок угля двух сортов (I — бурый, II — антрацит) из двух складов двум потребителям (табл. 6.38).

Таблица 6.38

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Потребители / Склады</td><td colspan="2">B_1</td><td colspan="2">B_2</td><td rowspan="2">Ресурсы a_i</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>I</td><td>II</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A_1</td><td>I</td><td colspan="2" rowspan="2">30</td><td colspan="2" rowspan="2">15</td><td>300</td></tr>
<tr><td>II</td><td>100</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A_2</td><td>I</td><td colspan="2" rowspan="2">21</td><td colspan="2" rowspan="2">24</td><td>100</td></tr>
<tr><td>II</td><td>140</td></tr>
<tr><td colspan="2">Потребности b_j</td><td>160</td><td>200</td><td>240</td><td>40</td><td></td></tr>
</table>

Решение. Задача разрешима, поскольку модель закрытая: $300 + 100 = 160 + 240$ и $100 + 140 = 200 + 40$. Пусть коэффициент взаимозаменяемости равен $\alpha = \frac{3}{2}$ (в пересчете на единицы I сорта, так как угля I сорта больше), т.е. три единицы сорта I можно заменить двумя единицами сорта II. С помощью коэффициента взаимозаменяемости α пересчитаем данные таблицы в единицы I сорта. Транспортные тарифы для II сорта получаются делением исходных транспортных тарифов на α, т.е. в клетки, соответствующие перевозкам I сорта, во II в качестве тарифа ставим сколь угодно большое число M — запрещаем перевозки, а запасы II груза умножим на α. Получим новую транспортную табл. 6.39. Решая эту задачу как обычную однородную транспортную задачу находим оптимальное решение:

Таблица 6.39

Склады		Потребители				ресурсы a_i
		B_1		B_2		
		I	II	I	II	
A_1		30	M	21	M	300
		M	20	M		150
A_2		15	M	24	M	100
		M	10	M	16	210
Потребности b_j		160	300	240	60	

$$\begin{pmatrix} 60 & 0 & 240 & 0 \\ 0 & 90 & 0 & 60 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 210 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения оптимального решения исходной задачи необходимо поделить вторую и четвертую строчки на α, получим

$$X^* = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 240 & 0 \\ 0 & 90 & 0 & 60 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.8.2. Задача об оптимальном назначении (проблема выбора)

Историческизадача об оптимальном назначении была первой задачей линейного программирования. Ее решение было впервые предложено в 1931 г. венгерским математиком Эгервари.

Рассмотрим постановку задачи. Пусть имеется q видов работ (A_1, ..., A_q) и p способов их выполнения (B_1, ..., B_p). Заданы коэффициенты эффективности выполнения k-й работы i-м способом — c_{ik}. Требуется выбрать оптимальный способ выполнения каждого вида работы, так чтобы достичь *максимальной суммарной эффективности*, при условии, что единовременно каждый способ может использоваться для выполнения только одного вида работ и каждый вид работы может быть выполнен только одним способом.

Возможны следующие экономические интерпретации такой задачи.

1. Если A_k — виды работ, а B_i — люди, способные выполнять данные виды работ. Пусть c_{ik} — производительность i-го человека при выполнении k-й работы. Задача заключается в оптимальном назначении людей на ту или иную работу для достижения максимальной суммарной производительности. При этом считается, что для выполнения одного вида работы требуется только один человек.

2. Если A_k — различные виды изделий, B_i — оборудование (например, станки), на которых производятся эти изделия, c_{ik} — производительность i-го станка при изготовлении k-го изделия. Задача заключается в оптимальном распределении станков по видам выпускаемой продукции для достижения максимальной суммарной производительности. Дополнительное условие состоит в том, что нужно исключить переналадку станков в процессе производства и изготовление изделия одного вида происходит только одним станком.

3. Пусть A_k — строительные площадки, B_i — строительные механизмы, c_{ik} — производительность i-го механизма на k-й площадке. Задача состоит в оптимальном распределении механизмов по площадкам с целью достижения максимальной суммарной производительности. Дополнительное условие состоит в том, что на каждой строительной площадке используется только один механизм и каждый механизм может обслуживать только одну площадку.

Рассмотрим математическую модель подобных задач. Пусть $p = q$. Введем $n = p^2$ целочисленных переменных $x_{ik} \geq 0$, которые могут принимать только два значения: 0 и 1. Поскольку в каждой строке и каждом столбце может находиться только одна единица, то дополнительные ограничения имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ik} = 1;$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ik} = 1.$$

Целевая функция $F(X) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} x_{ik} \to \max$. Получили транспортную задачу с единичными ресурсами и потребностями. Условие целочисленности решения выполняется автоматически.

Пример 6.16. Найти оптимальный план выполнения четырех работ на четырех станках, производительности которых заданы матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 & 3 \\ 9 & 6 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \\ 5 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем транспортную табл. 6.40. Поскольку решается задача на максимум, то начальное опорное решение найдем по правилу ***максимального элемента*** (табл. 6.41). Далее найдем оптимальное решение методом потенциалов. Окончательно получим

$$X^{*}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 6.40

	1	1	1	1
1	5	7	10	3
1	9	6	4	8
1	4	3	6	5
1	5	9	8	4

Таблица 6.41

	1	1	1	1
1	5	7	10 1	3
1	9 1	6	4	8 0
1	4	3 0	6	5 1
1	5	9 1	8 0	4

Таким образом, наиболее эффективным распределением станков является следующее: 1-ю работу выполняет 3-й станок, 2-ю работу — 1-й станок, 3-ю работу — 4-й станок, 4-ю работу — 2-й станок.

Если $p > q$, то модель является открытой и необходимо ввести $p - q$ балансовых столбцов.

6.8.3. Общая распределительная задача

Пусть имеется p различных станков, на которых может быть изготовлено любое из q изделий. Известны затраты на производство единицы k-го изделия на i-м станке — c_{ik} (руб.) и производительность i-го станка при производстве k-го изделия — λ_{ik} (шт/час). Также известны мощности станков $a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_p$ в станко-часах (или вектор ресурсов $\vec{a} = (a_1, ..., a_p)$) и плановое задание $b_1, b_2, ..., b_k, ..., b_q$ единиц (или ассортиментный вектор $\vec{b} = (b_1, ..., b_q)$).

Требуется распределить производство изделий на различных станках так, чтобы минимизировать суммарные затраты при выполнении планового задания. Исходные данные обычно записывают в виде распределительной табл. 6.42.

Таблица 6.42

План / Ресурсы	b_1	b_2	...	b_k	...	b_q
a_1	c_{11} x_{11} λ_{11}	c_{12} x_{12} λ_{12}	...	c_{1k} x_{1k} λ_{1k}	...	c_{1q} x_{1q} λ_{1q}
a_2	c_{21} x_{21} λ_{21}	c_{22} x_{22} λ_{22}	...	c_{2k} x_{2k} λ_{2k}	...	c_{2q} x_{2q} λ_{2q}
...	...	...	...	...	...	...
a_i	c_{i1} x_{i1} λ_{i1}	c_{i2} x_{i2} λ_{i2}	...	c_{ik} x_{ik} λ_{ik}	...	c_{iq} x_{iq} λ_{iq}
...	...	...	...	...	...	...
a_p	c_{p1} x_{p1} λ_{p1}	c_{p2} x_{p2} λ_{p2}	...	c_{pk} x_{pk} λ_{pk}	...	c_{pq} x_{pq} λ_{pq}

Для составления математической модели введем $n = pq$ неотрицательных переменных $x_{ik} \ge 0$, обозначающих время, в течении которого i-й станок занят изготовлением k-го изделия. Поскольку общее время работы i-го станка не превышает его временного ресурса, то $\sum_{k=1}^{q} x_{ik} \le a_i, i = \overline{1,p}$. Общее количество выпускаемых изделий k-го вида должно быть не меньше плана, следовательно, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ik} x_{ik} \ge b_k, k = \overline{1,q}$. К этим ограничениям добавляется естественное условие неотрицательности: $x_{ik} \ge 0$. Система ограничений-неравенств может быть совместной, что означает достаточность имеющихся мощностей для выполнения планового задания, и несовместной, если имеющихся мощностей недостаточно для выполнения планового задания.

Затраты на производство изделий k-го вида на i-м станке в количестве $\lambda_{ik} x_{ik}$ равны $c_{ik}\lambda_{ik}x_{ik}$, следовательно, суммарные затраты на выполнение всего планового задания будут равны $F(X) = \sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} c_{ik}\lambda_{ik}x_{ik}$.

Задача, таким образом, состоит в том, чтобы найти такие значения переменных x_{ik} (их всего pq), удовлетворяющие системе ограничений, при которых функция $F(X)$ принимает минимальное значение.

Такая математическая модель называется λ-*моделью*. В зависимости от вида λ_{ik} различают следующие типы моделей:

1) если все $\lambda_{ik} = \lambda$ одинаковы, то такая модель называется *моделью с однородными ресурсами и потребностями*;

2) если в каждой строке λ_{ik} одинаковы: $\lambda_{ik} = \lambda_i$, $i = \overline{1,p}$, то такая модель называется *моделью с однородными потребностями*;

3) если в каждом столбце λ_{ik} одинаковы: $\lambda_{ik} = \lambda_k$, $k = \overline{1,q}$, то такая модель называется *моделью с однородными ресурсами*;

4) если в λ_{ik} пропорциональны по строке, например

$$\frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} = \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{12}} = \ldots = \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{1k}} = \ldots = \frac{\lambda_{iq}}{\lambda_{1q}}, \tag{6.3}$$

то такая модель называется *моделью с пропорциональными ресурсами и потребностями*;

5) если λ_{ik} произвольны, то такая модель называется *общей λ-моделью*.

Рассмотрим процесс редукции распределительной задачи к транспортной задаче. Сначала пересчитаем все данные в одинаковые единицы (унифицируем размерность). Покажем это для случая 4), а затем перейдем к общему случаю 5). Выберем один станок в качестве «базового» и составим отношения λ_{ik} к производительности базового станка (например, в случае (6.3) это первый станок). Обозначим эти отношения через α_i и назовем их индексом i-го станка по отношению к базовому. Индекс показывает, во сколько раз производительность данного станка больше (или меньше) производительности базового станка. Из (6.3) следует, что

$$\lambda_{ik} = \alpha_i \lambda_{1k}. \tag{6.4}$$

Равенство (6.4) позволяет выразить все данные задачи в единых единицах измерения: час работы базового станка — *стандартный час* (*ст. час*).

Мощность i-го станка составляет a_i часов, но его производительность в α_i раз больше производительности базового станка, следовательно, относительная мощность

$$a_i' = a_i \alpha_i \text{ (ст. часов).} \tag{6.4}$$

Время, затрачиваемое при производстве изделий k-го вида на i-м станке равно

$$y_{ik} = x_{ik} \alpha_i \text{ (ст. часов).} \tag{6.5}$$

Плановое задание по k-му изделию равно b_k (шт.). Если бы это изделие изготовлялось на базовом станке, то

$$b_k' = \frac{b_k}{\lambda_{1k}} \text{ шт/(шт/час) = ст. час.} \tag{6.6}$$

Затраты на производство единицы k-го изделия на i-м станке равны c_{ik} (руб.). Те же затраты в расчете на 1 ст. час составляют

$$c_{ik}' = c_{ik} \lambda_{1k}. \tag{6.7}$$

Таким образом, a_i', b_k', и c_{ik}' представляют собой приведенные ресурсы, потребности и затраты. Введем их в модель:

1') $\sum\limits_{k=1}^{q} x_{ik} \le a_i, \quad \alpha_i \sum\limits_{k=1}^{q} x_{ik} \le \alpha_i a_i, \quad \sum\limits_{k=1}^{q} x_{ik}\alpha_i \le \alpha_i a_i, \quad \boxed{\sum\limits_{k=1}^{q} y_{ik} \le a_i';}$

2') $\lambda_{ik} x_{ik} = \lambda_{1k} \alpha_i x_{ik} = \lambda_{1k} y_k, \quad \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_{ik} x_{ik} \ge b_k, \quad \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_{ik} x_{ik}}{\lambda_{1k}} \ge \dfrac{b_k}{\lambda_{1k}}, \quad \sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{\lambda_{1k}}{\lambda_{1k}} y_{ik} \ge b_k',$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} y_{ik} \geq b'_k;}$$

3') $\boxed{y_{ik} \geq 0;}$

4') $F = \sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} c_{ik}\lambda_{ik}x_{ik} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} c_{ik}\alpha_i\lambda_{1k}\frac{y_{ik}}{\alpha_i} = \boxed{\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} c'_{ik}y_{ik}.}$

Необходимым и достаточным условием совместности системы 1')—3') является неравенство $\sum_{i=1}^{p} a'_i \geq \sum_{k=1}^{q} b'_k$; в противном случае план невыполним. Если $\sum_{i=1}^{p} a'_i = \sum_{k=1}^{q} b'_k$, то модель закрытая, а если $\sum_{i=1}^{p} a'_i > \sum_{k=1}^{q} b'_k$, то модель открытая. После нахождения оптимального решения Y^* по формуле (6.5) переходим к X^*.

Замечание 6.8. При решении практических задач встречаются случаи, когда не все изделия могут обрабатываться на данном станке, т.е. некоторые $\lambda_{ik} = 0$. После перехода к стандартному часу все работы оказываются взаимозаменяемыми, поэтому соответствующие клетки таблицы необходимо блокировать.

В случае общей λ-модели пропорциональности нет, поэтому индекс α_i определяют приближенно, например как средневзвешенное значение:

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\sum_{k=1}^{q}\frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{1k}}b_k}{\sum_{k=1}^{q}b_k}.$$

Пример 6.17. Найти оптимальное решение распределительной задачи, данные которой представлены в табл. 6.43.

Таблица 6.43

a_i \ b_k	2000	3000	5000
300	8 10	15 10	10 10
700	12 10	6 10	9 10

Данная задача, поскольку все λ_{ik} одинаковы, является задачей *с однородными ресурсами и потребностями*. Пересчитаем ресурсы:

$$a_1' = \alpha_1 \lambda = 300 \cdot 10 = 3000\ ;\ a_2' = \alpha_2 \lambda = 700 \cdot 10 = 7000.$$

Делить c_{ik} на 10 не имеет смысла, поскольку это не влияет на решение, и $\frac{1}{10}$ можно вынести за матрицу, как общий множитель. Запишем новую транспортную табл. 6.44 и найдем оптимальное решение методом потенциалов:

Таблица 6.44

a_i \ b_k	2000	3000	5000
3000	8 2000	15	10 1000
7000	12	6 3000	9 4000

$$X^* = \begin{pmatrix} 2000 & 0 & 1000 \\ 0 & 3000 & 4000 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.18. Найти оптимальное решение распределительной задачи, данные для которой представлены в табл. 6.45.

Таблица 6.45

a_i \ b_k	100	200	150
30	8 20	12 20	6 20
50	10 10	4 10	8 10

Решение. Пересчитаем ресурсы:

$$a_1' = \alpha_1 \lambda_1 = 30 \cdot 20 = 600,\ ;\ a_2' = \alpha_2 \lambda_2 = 50 \cdot 10 = 500.$$

В первой строке разделим c_{ik} на 20, а во второй — на 10. Запишем новую транспортную табл. 6.46 и найдем оптимальное решение методом потенциалов:

Таблица 6.46

a_i \ b_k	100	200	150	650
600	0,4 100	0,6	0,3 150	0 350
500	1	0,4 200	0,8	0 300

$$X^* = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 150 \\ 0 & 200 & 0 \end{pmatrix}.$$

Не использовано 350 и 300 приведенных единиц ресурсов, или 350/20 = 17,5 и 300/10 = 30 единиц исходных ресурсов.

Пример 6.19. Найти оптимальное решение распределительной задачи, исходные данные которой представлены в табл. 6.47.

Эта задача с пропорциональными ресурсами и потребностями, поскольку

$$\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} = \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{13}} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = 0{,}5 = \alpha_2;$$

$$\frac{\lambda_{31}}{\lambda_{11}} = \frac{\lambda_{32}}{\lambda_{12}} = \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{13}} = \frac{8}{4} = \frac{12}{6} = \frac{20}{10} = 2 = \alpha_3.$$

Пересчитаем ресурсы, потребности и затраты по формулам (6.4)—(6.7), взяв в качестве базовой первую строку. Тем самым приведем распределительную задачу к транспортной. Запишем начальную транспортную табл. 6.48. Заметив, что эта задача открытая (сумма первой строки меньше, чем сумма первого столбца), сбалансируем ее, введя балансовый четвертый столбец (табл. 6.49). Найдем оптимальное решение методом потенциалов. Выполним обратный пересчет по формуле (6.5) и получим:

$$Y^* = \left(\begin{array}{ccc:cc} 50 & 0 & 15 & 35 & :1 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & :0{,}5 \\ 0 & 12 & 0 & 108 & :2 \end{array}\right); \quad X^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 50 & 0 & 15 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 6 & 0 & 54 \end{array}\right).$$

Читателю предоставляется самостоятельно дать интерпретацию полученного результата.

Таблица 6.47

a_i \ b_k	200(:4)	72(:6)	150(:10)	α_i
100(×1)	2(×4) 4	3(×6) 6	1(×10) 10	1
120(×0,5)	4(×4) 2	3(×6) 3	2(×10) 5	0,5
60(×2)	5(×4) 8	2(×6) 12	3(×10) 20	2

Таблица 6.48

a_i \ b_k	50	12	15
100	8	18	10
60	16	18	20
120	20	12	30

Таблица 6.49

a_i \ b_k	50	12	15	203
100	8 50	18	10 15	0 35
60	16	18	20	0 60
120	20	12 12	30	0 108

6.9. Транспортная задача по критерию времени

При составлении плана перевозок часто весьма важной задачей является экономия времени, даже в ущерб стоимости перевозки. Например, при транспортировке скоропортящихся продуктов необходима их доставка в пункты назначения за минимальное время. В период уборки урожая важно как можно быстрее доставить зерно на заготовительные пункты. К подобным задачам относятся переброска сил быстрого реагирования в районы стихийного бедствия, доставка медицинских грузов и аналогичные задачи.

В этом случае ставят транспортную задачу по критерию времени, когда критерием качества организации перевозок являются не суммарные затраты, а время реализации.

Пусть имеется m поставщиков продукта A_i, $i = 1, \ldots, m$, и n потребителей B_j, $j = 1, \ldots, n$. Для каждого поставщика и потребителя заданы запасы $a_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, и соответственно объем потребления $b_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, причем соблюдается баланс предложения и спроса, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Как и в вышеописанных задачах, известна стоимость перевозки единицы груза $c_{ij} \geq 0$ от i-го поставщика к j-му потребителю.

Кроме того, известно время t_{ij} доставки груза от i-го поставщика к j-му потребителю, не зависящее от объема перевозки.

Обозначим, как и раньше, x_{ij} — объемы перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю. Эта задача также может быть компактно записана в виде табл. 6.50, содержащей все данные задачи. Дополнительно введем в каждую клетку таблицы время перевозки.

Таблица 6.50

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	t_{11} c_{11} x_{11}	...	t_{1j} c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
...	...	...	...	...	...	...
A_i	t_{i1} c_{i1} x_{i1}	...	t_{ij} c_{ij} x_{ij}	...	t_{1in} c_{in} x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
A_m	t_{m1} c_{m1} x_{m1}	...	t_{mj} c_{mj} x_{mj}	...	t_{mn} c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	...	b_j	...	b_n	

Допустимым планом перевозок является любой набор $X = (x_{ij})$, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \ldots, n; \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, \ldots, m; \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

При этом часть клеток матрицы перевозок будет занята, а часть свободна. Каждому такому плану соответствует время его реализации. Это время совпадает с самым большим значением t_{ij} среди всех занятых клеток. Теперь требуется среди всех допустимых планов перевозок X найти план, которому соответствует минимальное время $T_{\min}$. Таким образом,

$$T_{\min} = \min_{X} \max_{x_{ij} > 0} t_{ij}.$$

Эта задача не может быть решена ни одним из способов, описанных выше. Более того, решение, оптимальное с точки зрения стоимости перевозки, как правило, не является оптимальным по времени, и наоборот.

Пример 6.20. Рассмотрим план перевозок, заданный табл. 6.51. В правом верхнем углу каждой клетки указана стоимость перевозки единицы груза, а левом верхнем углу (курсивом) — время перевозки между соответствующими пунктами в часах.

Таблица 6.51

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	*3* 2	*2* 3	*12* 4 **20**	20
A_2	*2* 1 **10**	*4* 2 **20**	*6* 5 **10**	40
b_j	10	20	30	60

Легко проверить, что этот план соответствует минимальной стоимости, которая равна $Z(X) = 4 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 5 \cdot 10 = 180$. Этот план не может быть реализован быстрее, чем за 12 часов, так как

$$T = \max_{x_{ij}>0} t_{ij} = \max\{12, 2, 4, 6\} = 12.$$

Рассмотрим другой допустимый план (табл. 6.52). Теперь стоимость

$$Z(X) = 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 5 \cdot 30 = 220,$$

т.е. больше, чем в первоначальном плане. Однако время перевозки существенно меньше:

$$T = \max_{x_{ij}>0} t_{ij} = \max\{2, 2, 6\} = 6.$$

Таблица 6.52

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	*3* 2	*2* 3 **20**	*12* 4	20
A_2	*2* 1 **10**	*4* 2	*6* 5 **30**	40
b_j	10	20	30	60

Заметим, что увеличение стоимости перевозки может компенсироваться, например, сохранением качества продуктов и т.п.

Эта задача уже не является классической задачей линейного программирования, так как целевая функция не линейна. Однако метод решения такой задачи похож на уже рассмотренные.

Как всегда, решение задачи распадается на этапы нахождения начального плана, проверки плана на оптимальность, перехода к улучшенному плану, если рассматриваемый план не оптимален.

Нахождение начального плана может быть осуществлено любым описанным выше способом. Проверка плана на оптимальность и переход к улучшенному плану обычно осуществляются способом запрещенных клеток: путем циклического перехода производится перераспределение положительных перевозок таким образом, чтобы от итерации к итерации время максимальной по продолжительности положительной перевозки, по крайней мере, не увеличивалось. Признаком оптимальности плана при этом способе оптимизации является невозможность организовать следующий циклический переход.

Предложенный метод никак не связан с симплекс-методом. Поэтому здесь не вводится понятие базиса, базисной клетки. Занятых клеток может быть любое число, как больше, чем $n + m - 1$, так и меньше.

Приведем алгоритм решения транспортной задачи по критерию времени.

1. Допустимый начальный план X_0 строится любым методом.

2. Среди всех занятых клеток находим ту, в которой t_{ij} наибольшее, это и будет время перевозки, соответствующее приведенному плану: $T_{max} = \max\limits_{x_{ij}>0} t_{ij}$.

3. Все свободные клетки, в которых $t_{ij} \geq T_{max}$, вычеркиваем.

4. Теперь стоит попытаться улучшить план с точки зрения времени. Для этого будем строить так называемый разгрузочный цикл, который должен удовлетворять следующим условиям:

- вершины не должны лежать в вычеркнутых клетках;
- отрицательные вершины не должны лежать в свободных клетках и перевозки в этих клетках должны быть не меньше, чем в клетке с T_{max}, сама же клетка с T_{max} должна быть отрицательной.

5. Производим сдвиг по полученному циклу, при этом клетка с T_{max} становится свободной, таким образом время общей перевозки уменьшается.

6. Все шаги, начиная со второго, повторяются до тех пор, пока можно найти разгрузочный цикл. Если этого сделать нельзя, то найдено минимальное время перевозки и задача решена.

Возможно, что сразу освободить клетку с максимальным временем нельзя, тогда можно построить несколько разгрузочных циклов для одной и той же клетки.

Пример 6.21. Пусть дана матрица (табл. 6.53), в каждой клетке которой указано время перевозки от A_i к B_j (а не стоимость перевозки единицы груза, как в ранее рассмотренных задачах).

Таблица 6.53

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	*1*	3	7	*12*	18
A_2	*2*	*8*	*10*	8	10
A_3	*6*	*1*	*4*	*5*	12
b_j	11	9	13	7	40

Баланс соблюдается, можно составить первоначальный план. Используем метод северо-западного угла, получим табл. 6.54, в которой 6 занятых клеток. Наибольшее значение времени в них равно 10:

$$T = \max_{x_{ij}>0} t_{ij} = \max\{1, 3, 8, 10, 4, 5\} = 10 = t_{23}.$$

Таблица 6.54

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	*1* 11	3 7	7	*12*	18
A_2	*2*	*8* 2	*10* 8	*8*	10
A_3	*6*	*1*	*4* 5	*5* 7	12
b_j	11	9	13	7	40

Вычеркнем все клетки, где $t_{ij} > 10$, в нашем случае это клетка (4, 1), где $t_{ij} = 12$ (заштрихована). Нужно найти разгрузочный цикл для клетки (2, 3). Эта клетка получит знак минус. Вершины цикла со знаком плюс могут лежать как в свободных, так и в занятых клетках, а имеющие знак минус — только в занятых. Но для того чтобы освободить (разгрузить) клетку (2; 3), нужно убрать из нее 8 единиц, и те же 8 единиц убрать из других клеток, имеющих знак минус. Поэтому единственный возможный цикл показан на рис. 6.9.

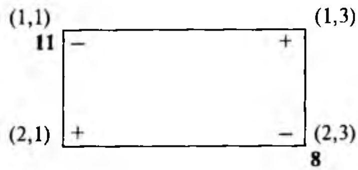


Рис. 6.9

Произведем сдвиг по циклу на 8 единиц, клетка (2, 3) освободится, новый план приведен в табл. 6.55, а наибольшее значение времени в них равно 8:

$$T = \max_{x_{ij}>0} t_{ij} = \max\{1, 3, 7, 2, 8, 4, 5\} = 8 = t_{22}.$$

Таблица 6.55

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	*1* **3**	3 **7**	7 **8**	*12*	18
A_2	*2* **8**	8 **2**	*10*	*8*	10
A_3	*6*	*1*	*4* **5**	*5* **7**	12
b_i	11	9	13	7	40

Таким образом, первоначальный план улучшен, так как время перевозки теперь равно 8.

Повторяем процедуру. Вычеркнем все клетки, где $t_{ij} \geq 8$ (заштрихованы). Найдем разгрузочный цикл для клетки (2, 2) (рис. 6.10). После сдвига по этому циклу на 2 единицы получим следующую табл. 6.56.

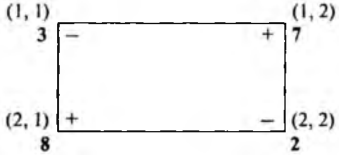


Рис. 6.10

Наибольшее время среди занятых клеток равно 7, в клетке (1, 3). Вычеркнем все клетки, где $t_{ij} \geq 7$. Построение разгрузочного цикла для ячейки (1, 3) требует, чтобы была еще хотя бы одна отрицательная ячейка с вершиной в занятой клетке. Такой цикл построить невозможно. Поэтому полученный план является оптимальным по времени, причем минимально возможное время перевозки равно 7.

Таблица 6.56

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	*1* **1**	*3* **9**	*7* **8**	*12*	18
A_2	*2* **10**	*8*	*10*	*8*	10
A_3	*6*	*1*	*4* **5**	*5* **7**	12
b_j	11	9	13	7	40

В задаче могут быть заданы и время, и стоимость. Выбор более важного критерия зависит от постановки задачи. Второй критерий может быть использован для контроля, оценки или для дополнительной оптимизации.

Пример 6.22. В трех базах находятся соответственно три, пять и два однотипных десантных судна. Для погрузки гуманитарного груза необходимо подать их в четыре пункта погрузки в количестве четыре, два, три и одно соответственно. Расстояния между базами и пунктами погрузки десанта заданы в табл. 6.57.

Известно, что средний расход топлива на единицу пути составляет 0,01 единицы топлива. Кроме того, известно, что средняя скорость перемещения судна равна 20. Это позволяет оценить время перехода из пункта базирования в пункт погрузки. Требуется составить план, минимизирующий суммарный расход топлива при перемещении судов, и план, обеспечивающий переход судов в минимальный срок.

Таблица 6.57

База	Пункт погрузки			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	400	600	800	200
A_2	400	1200	500	100
A_3	800	1000	600	400

Итак, имеются три пункта базирования (отправления), в каждом из которых находятся соответствующее число единиц десантных судов (однородных грузов). Существуют четыре пункта погрузки (назначения), в каждый из которых требуется переместить заданное число десантных судов. Число судов во всех пунктах базирования равно их суммарной потребности в пунктах погрузки. Задана стоимость (в нашем случае количество потребного топлива) и время перемещения одного десантного судна из i-го пункта базирования в j-й пункт погрузки. Все исходные данные задачи можно представить таблицей, для которой составим первоначальный план по методу северо-западного угла (табл. 6.58)

Таблица 6.58

База	Пункт погрузки				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	*20* 4 **3**	*30* 6	*40* 8	*10* 2	3
A_2	*20* 4 **1**	*60* 12 **2**	*25* 5 **2**	*5* 1	5
A_3	*40* 8	*50* 10	*30* 6 **1**	*20* 4 **1**	2
b_j	4	2	3	1	

Время выполнения этого плана равно 60, это самое большое значение времени, так что клеток, которые следует вычеркнуть, нет. Чтобы освободить ячейку (2, 2), построим разгрузочный цикл. Новый план имеет вид, заданный табл 6.59. Время перехода судов по этому плану равно 30. Вычеркнем клетки, в которых $t_{ij} \geq 30$. В полученной таблице нель-

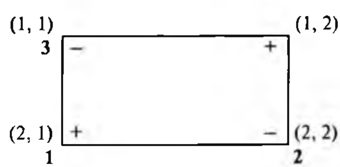


Рис. 6.11

зя построить ни одного цикла. Следовательно, получен план, оптимальный по времени, и минимально возможное время перевозки равно 30.

Таблица 6.59

База	Пункт погрузки				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	*20* 4 **1**	*30* 6 **2**	*40* 8	*10* 2	3
A_2	*20* 4 **3**	*60* 12	*25* 5 **2**	*5* 1	5
A_3	*40* 8	*50* 10	*30* 6 **1**	*20* 4 **1**	2
b_j	4	2	3	1	

Стоимость выполнения этого плана

$$Z = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 48 \text{ ед.}$$

Можно попытаться провести улучшение этого плана с точки зрения уменьшения стоимости, не увеличивая время. Такая операция называется *дооптимизацией по стоимости*. Для этого будем искать циклы, не попадающие в вычеркнутые клетки, но позволяющие использовать более дешевые перевозки. В нашем случае такой цикл существует, это цикл для клеток (2, 3), (2, 4), (3, 4) и (3, 3). Произведя сдвиг по этому циклу на 1 единицу, получим план, заданный табл. 6.60. Стоимость операции теперь равна 46 единицам, а время выполнения осталось тем же, т.е. равным 30.

Таблица 6.60

База	Пункт погрузки				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	*20* 4 **1**	*30* 6 **2**	*40* 8	*10* 2	3
A_2	*20* 4 **3**	*60* 12	*25* 5 **1**	*5* 1 **1**	5
A_3	*40* 8	*50* 10	*30* 6 **2**	*20* 4	2
b_j	4	2	3	1	

Если балансовое соотношение не соблюдено, т.е. задача является открытой, вводится фиктивный пункт отправления или пункт назначения.

Пример 6.23. Четыре сельскохозяйственных товарищества собрали урожай клубники. Им необходимо срочно доставить ягоды в пять пунктов реализации. Количество вывозимой клубники и потребности этих пунктов в центнерах, а также время перевозки в часах задано табл. 6.61.

Таблица 6.61

	Пункт реализации					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	*12*	*8*	*21*	*26*	*31*	25
A_2	*15*	*14*	*15*	*15*	*35*	50
A_3	*20*	*10*	*14*	*13*	*16*	75
A_4	*11*	*17*	*9*	*18*	*17*	45
b_j	45	55	15	65	60	

Проверим выполнение баланса. Потребности (сумма значений нижней строки таблицы) равны 240 центнерам. Суммарный урожай (сумма значений последнего столбца) 195 центнеров. То есть задача является открытой. Необходимо добавить фиктивное товарищество с запасом 45 центнеров клубники. Таким образом, в таблице появится новая пятая строка (табл. 6.62), в каждой клетке которой время перевозки будет равно нулю.

Таблица 6.62

	Пункт реализации					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	*12*	*8* **25**	*21*	*26*	*31*	25
A_2	*15* **30**	*14*	*15*	*15* **20**	*35*	50
A_3	*20*	*10* **30**	*14*	*13* **45**	*16*	75
A_4	*11* **15**	*17*	*9* **15**	*18*	*17* **15**	45
A_5	*0*	*0*	*0*	*0*	*0* **45**	45
b_j	45	55	15	65	60	

Составим первоначальный план. Используем метод, аналогичный методу минимального тарифа. В клетки с наименьшим временем будем вписывать наибольшие перевозки. Начнем с клетки (1, 2). Далее действуем по алгоритму минимального тарифа, считая тарифом время. При этом дополнительную 5-ю строку не используем, пока есть возможность. В полученной таблице $T = \max\limits_{x_{ij}>0} t_{ij} = t_{45} = 17$.

Вычеркнем все клетки, содержащие значение времени больше или равное 17. Для разгрузки клетки (4, 5) построим цикл (рис. 6.12). Сдвиг по нему на 15 единиц позволяет освободить требуемую клетку.

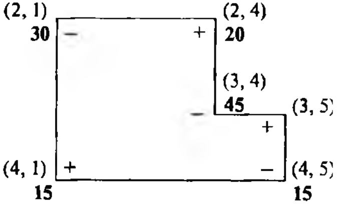


Рис. 6.12

Теперь $T = \max\limits_{x_{ij}>0} t_{ij} = t_{35} = 16$ (табл. 6.63). Новый разгрузочный цикл построить не удастся при полученной конфигурации невычеркнутых клеток.

Таблица 6.63

	Пункт реализациии					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	*12*	*8* **25**	*21*	*26*	*31*	25
A_2	*15* **15**	*14*	*15*	*15* **35**	*35*	50
A_3	*20*	*10* **30**	*14*	*13* **30**	*16* **15**	75
A_4	*11* **30**	*17*	*9* **15**	*18*	*17*	45
A_5	*0*	*0*	*0*	*0*	*0* **45**	45
b_j	45	55	15	65	60	

Итак, первое товарищество должно поставить 25 центнеров клубники во второй пункт, второе товарищество 15 центнеров в первый и 35 в четвертый пункты, третье по 30 центнеров во второй и четвертый и 15 центнеров в пятый пункты, четвертое 30 центнеров в первый и 15 в третий пункты. При этом пятый пункт потребления не дополучит 45 центнеров клубники. Вся клубника будет вывезена за 16 часов.

Отметим, что существует неединственное решение этой задачи. Если построить первоначальный план другим способом, окончательный план может оказаться другим. Но каждый из оптимальных по времени планов обеспечивает перевозку за 16 часов.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте математическую постановку транспортной задачи. Что называется ее оптимальным планом?
2. Чем отличаются открытая и закрытая транспортные задачи? Сформулируйте и докажите критерий разрешимости транспортной задачи.
3. Докажите, что ранг матрицы системы ограничений транспортной задачи равен $m + n - 1$.
4. Каковы основные методы построения начального опорного плана транспортной задачи?
5. Обоснуйте метод потенциалов с помощью теорем двойственности.
6. Решить методом потенциалов транспортную задачу, заданную таблицей

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	8	6	9	2	160
A_2	7	16	12	12	60
A_3	6	15	8	3	180
b_j	80	60	60	200	

(модель с правильным балансом).

7. Решить методом потенциалов транспортную задачу, заданную таблицей

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	13	12	3	60
A_2	2	16	4	6	125
A_3	13	4	17	16	75
b_j	100	100	50	50	

8. Найти решение транспортной задачи с таблицей, если из A_2 в B_4 перевозки запрещены, из A_1 в B_3 должно быть доставлено не менее 40 единиц груза, а из A_3 в B_1 — не более 50 единиц груза

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	12	16	11	150
A_2	8	2	4	2	140
A_3	9	15	16	7	110
b_j	75	145	120	60	

.

9. Найти решение транспортной задачи с таблицей, если из A_2 в B_1 перевозки запрещены, из A_1 в B_2 должно быть перевезено 50 ед. груза, а из A_3 в B_4 — не более 20 ед. груза.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	10	7	10	140
A_2	4	9	19	25	105
A_3	6	4	5	2	115
b_j	60	130	55	115	

.

10. В чем отличие постановки транспортной задачи по критерию времени от постановки задачи по критерию стоимости?
11. Как найти начальный план перевозок в указанной задаче?
12. Возможна ли постановка транспортной задачи одновременно по критериям времени и стоимости?
13. Если балансовое соотношение не выполняется, какой алгоритм решения вы можете предложить?
14. В таблице указаны пункты отправления с запасами однородного груза и пункты назначения с соответствующими потребностями этого груза, а также время перевозки. Определить минимальное время перевозки и найти соответствующий план.

Пункт отправления	Пункт назначения			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	*1*	*3*	*7*	20
A_2	*2*	*8*	*10*	40
A_3	*6*	*1*	*4*	40
Потребности	30	20	50	

15. В таблице указаны пункты отправления с запасами однородного груза и пункты назначения с соответствующими потребностями этого груза, а также время перевозки. Определить минимальное время перевозки и найти соответствующий план.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	*2*	*4*	*7*	*14*	28
A_2	*4*	*9*	*11*	*9*	20
A_3	*7*	*2*	*5*	*6*	22
Потребности	21	14	23	12	

16. В приведенной таблице в верхних отделениях клеток помещены удельные стоимости c_{ij} в рублях, а в нижних — время перевозок t_{ij} в часах. Составить план перевозок, при котором весь груз будет доставлен потребителям в кратчайший срок; определить для этого плана стоимость перевозок; произвести, если это возможно, дооптимизацию по критерию стоимости.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	Запасы
A_1	*9* 6	*18* 9	*16* 3	*2* 1	*3* 7	*16* 4	*11* 10	*15* 3	180
A_2	*16* 14	*5* 17	*7* 16	*20* 19	*21* 8	*2* 11	*7* 19	*14* 3	140
A_3	*36* 22	*7* 11	*10* 12	*19* 23	*3* 6	*9* 18	*17* 11	*10* 29	50
A_4	*2* 1	*12* 10	*19* 9	*16* 13	*6* 10	*12* 14	*20* 4	*8* 3	150
A_5	*15* 13	*16* 17	*3* 10	*11* 15	*6* 23	*11* 5	*18* 8	*20* 23	80
A_6	*7* 33	*3* 13	*12* 2	*6* 6	*18* 8	*5* 8	*8* 20	*20* 23	80
A_7	*21* 21	*10* 9	*16* 12	*21* 22	*16* 3	*15* 12	*11* 5	*5* 24	70
Потребности	50	80	10	40	140	110	130	150	

ГЛАВА 7

ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ И ТЕОРЕМА КУНА — ТАККЕРА

7.1. Выпуклые функции на выпуклых множествах

В этом параграфе мы напомним основные свойства выпуклых функций в пространстве R^n.

Напомним, что множество $X \subset R^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек $A \in X$ и $B \in X$ отрезок AB целиком принадлежит X, т.е. для любых точек $A, B \in X$, $t \in [0,1]$ точка $(1-t)A + tB \in X$.

Если найдется пара точек множества X, для которых это условие не выполняется, то множество выпуклым не является.

Пусть теперь точка $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ принадлежит выпуклому множеству X, а функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена на X.

Определение 7.1. *Функция f называется **выпуклой** на множестве $X \subset R^n$, если для любых точек $A, B \in X$, $t \in [0, 1]$ имеет место неравенство $f\big((1-t)A+tB\big) \leq (1-t)f(A) + tf(B)$.*

*Если для любых точек $A, B \in X$, $t \in [0, 1]$ имеет место строгое неравенство $f\big((1-t)A+tB\big) < (1-t)f(A) + tf(B)$, то функция f называется **строго выпуклой** на множестве $X \subset R^n$.*

Если же для любых $A, B \in X$, $t \in [0, 1]$ имеет место обратное неравенство

$$f\big((1-t)A+tB\big) \geq (1-t)f(A) + tf(B),$$

то функция $f(x)$ называется *вогнутой* (а в случае строгого неравенства — *строго вогнутой*).

Отметим, что функция $y = f(x)$ является выпуклой тогда и только тогда, когда функция $y = -f(x)$ — вогнутая.

Пример 7.1. Рассмотрим линейную функцию

$$l(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0$$

в пространстве R^n.

Тогда для любых его точек A, B и произвольного числа $t \in [0, 1]$ в силу линейности $l(x)$ получаем $l\big((1-t)A+tB\big) = (1-t)l(A) + tl(B)$. Поэтому линейная функция $l(x)$ является одновременно выпуклой и вогнутой в R^n.

Сформулируем критерий выпуклости (вогнутости) функции нескольких переменных.

Теорема 7.1 (необходимое и достаточное условие выпуклости). *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была выпуклой (строго выпуклой, вогнутой, строго вогнутой) на выпуклом множестве X, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух точек A, $B \in X$ функция одной переменной $\psi(t) = f\big((1-t)A+tB\big)$ была выпуклой (строго выпуклой, вогнутой, строго вогнутой).*

Приведем несколько результатов, которые используются для исследования функций нескольких переменных на выпуклость.

Теорема 7.2. *Если $X \subset R^n$ — выпуклое множество, функция $y = f(x)$ — выпуклая (вогнутая) на X, а $\psi(t)$ — возрастающая выпуклая (вогнутая) функция на множестве значений $y = f(x)$, то функция $g(x) = \psi\big(f(x)\big)$ является выпуклой (вогнутой) на X.*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ выпукла на X, а $\psi(t)$ — возрастающая выпуклая функция на множестве значений $y = f(x)$. Тогда для $\forall A$, $B \in X$, $t \in [0, 1]$ в силу возрастания $\psi(t)$ имеем

$$\psi\Big(f\big((1-t)A+tB\big)\Big) \le \psi\big((1-t)f(A)+tf(B)\big),$$

откуда

$$g\big((1-t)A+tB\big) = \psi\Big(f\big((1-t)A+tB\big)\Big) \le \psi\big((1-t)f(A)+tf(B)\big) \le$$

$$\le (1-t)\psi\big(f(A)\big)+t\psi\big(f(B)\big) = (1-t)g(A)+tg(B).$$

Таким образом, функция $y = g(x)$ выпукла. Теорема доказана.

Пример 7.2. Рассмотрим функцию $g(x) = e^{x_1+x_2+\ldots+x_n}$ в пространстве R^n. Заметим, что линейная функция $f(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ выпуклая, а функция одной переменной $\psi(t) = e^t$ является выпуклой и возрастающей для $\forall t \in R$ (действительно, $\psi'(t) = \psi''(t) = e^t > 0$). Поэтому, по теореме 7.2, функция $g(x) = e^{x_1+x_2+\ldots+x_n}$ является выпуклой.

Теорема 7.3. *Сумма любого конечного числа выпуклых (вогнутых) функций на выпуклом множестве $X \subset R^n$ является выпуклой (вогнутой) функцией на X. Если хотя бы одна из суммируемых функций является строго выпуклой (строго вогнутой), то и вся сумма будет строго выпуклой (строго вогнутой) функцией на X.*

Доказательство. Ограничимся случаем двух (выпуклых) функций $f(x)$ и $g(x)$ на X. Для каждой из них выполнено условие выпуклости: для $\forall A,\ B \in X,\ t \in [0, 1]$

$$f\big((1-t)A+tB\big)\le(1-t)f(A)+tf(B);$$

$$g\big((1-t)A+tB\big)\le(1-t)g(A)+tg(B).$$

Если $h(x) = f(x) + g(x)$, то, суммируя оба неравенства, получим $h\big((1-t)A+tB\big) \le (1-t)h(A) + th(B)$, т.е. функция $h(x)$ — выпукла. Если одна из функций строго выпукла, то при суммировании получим строгое неравенство, т.с. сумма будет строго выпуклой функцией. Теорема доказана.

Предположим теперь, что функция $y = f(x)$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка на выпуклом множестве $X \subset R^n$.

Определение 7.2. *Матрицей Гессе функции $y = f(x)$ называется матрица*

$$H(f)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right),$$

составленная из вторых частных производных функции $y = f(x)$. Определитель матрицы Гессе называется гессианом.

Замечание 7.1. *Отметим, что в силу условия непрерывности частных производных 2-го порядка матрица H является симметричной. Поэтому элементы матрицы Гессе, зависящие от точки $x \in X$, можно рассматривать как коэффициенты квадратичной формы — второго дифференциала $d^2 f = \sum\limits_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x)dx_i dx_j$ функции $y = f(x)$.*

Теорема 7.4 (достаточное условие выпуклости). *Пусть $X \subset R^n$ — выпуклое открытое множество, $y = f(x)$ — функция, имеющая в X непрерывные частные производные 2-го порядка. Тогда:*

1. *Функция $y = f(x)$ является строго выпуклой (строго вогнутой) на X, если квадратичная форма $d^2f(x)$ положительно (отрицательно) определена.*

2. *Функция $y = f(x)$ является выпуклой (вогнутой) на X, если квадратичная форма $d^2 f(x)$ неотрицательно (неположительно) определена.*

Обозначим

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = |H|.$$

Тогда в силу критерия Сильвестра достаточное условие выпуклости для строго выпуклых (вогнутых) функций можно переформулировать следующим образом.

Следствие 7.1. *При выполнении условий теоремы 7.4 функция $y = f(x)$ является строго выпуклой на X, если в каждой точке области $\Delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Функция $y = f(x)$ является строго вогнутой на X, если в каждой точке области $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, ..., $(-1)^n \Delta_n > 0$, т.е. $(-1)^i \Delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ следствие можно сформулировать в следующей форме.

Следствие 7.2. *Пусть X — выпуклое открытое множество на плоскости (x, y) и $z = f(x, y)$ имеет в X непрерывные частные производные 2-го порядка. Тогда функция $z = f(x, y)$ является строго выпуклой (вогнутой) на множестве X, если в каждой точке $(x, y) \in X$ выполняются условия*

1. $f''_{xx}(x, y) > 0 \ \left(f''_{xx}(x, y) < 0\right)$.

2. $\Delta_f(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{xy}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x, y) f''_{yy}(x, y) - \left(f''_{xy}(x, y)\right)^2 > 0.$

Пример 7.3. Рассмотрим функцию

$$f(x, y, z) = 2x^2 - 4xz + 4y^2 - 8yz + 9z^2 + 4x + 8y - 20z.$$

Эта функция дважды дифференцируема; ее частные производные: $f'_x = 4x - 4z + 4 = 0$; $f'_y = 8y - 8z + 8$; $f'_z = -4x - 8y + 18z - 20$; $f''_{xx} = 4$; $f''_{xy} = 0$; $f''_{xz} = -4$; $f''_{yy} = 8$; $f''_{yz} = -8$; $f''_{zz} = 18$.

Матрица Гессе равна $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -8 & 18 \end{pmatrix}$ и $\Delta_1 = 4 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 32 > 0$;

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -8 & 18 \end{vmatrix} = 192 > 0$. Поэтому функция является строго выпуклой.

Пример 7.4. Рассмотрим теперь *производственную функцию* Кобба — Дугласа $Q(K, L) = aK^{\beta}L^{1-\beta}$ (здесь $a > 0$, $0 < \beta < 1$), выражающую объем производства Q через объем используемого капитала K и затраты труда L. Последовательно находим:

$$Q'_K = a\beta K^{\beta-1}L^{1-\beta};\ Q'_L = a(1-\beta)K^{\beta}L^{-\beta};\ Q''_{KK} = -a\beta(1-\beta)K^{\beta-2}L^{1-\beta};$$
$$Q''_{KL} = a\beta(1-\beta)K^{\beta-1}L^{-\beta};\ Q''_{LL} = -a\beta(1-\beta)K^{\beta}L^{-\beta-1}.$$

Заметим, что

$$H(Q) = \begin{pmatrix} Q''_{KK} & Q''_{KL} \\ Q''_{KL} & Q''_{LL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\beta(1-\beta)K^{\beta-2}L^{1-\beta} & -a\beta(1-\beta)K^{\beta-1}L^{-\beta} \\ -a\beta(1-\beta)K^{\beta-1}L^{-\beta} & -a\beta(1-\beta)K^{\beta}L^{-\beta-1} \end{pmatrix}$$

и $\Delta_1 = -a\beta(1-\beta)K^{\beta-2}L^{1-\beta} < 0$; $\Delta_2 = 0$. Поэтому достаточное условие не дает ответа на вопрос о выпуклости исходной функции. С другой стороны, второй дифференциал $d^2Q = Q''_{KK}d^2K + 2Q''_{KL}dKdL + Q''_{LL}d^2L$ легко преобразуется к виду

$$d^2Q = -a\beta(1-\beta)K^{\beta-2}L^{-\beta-1}(L^2d^2K - 2KLdKdL + K^2d^2L) =$$
$$= -a\beta(1-\beta)K^{\beta-2}L^{-\beta-1}(LdK - KdL)^2,$$

т.е. является неположительно определенной квадратичной формой. Таким образом, по теореме 7.4, функция Кобба — Дугласа является вогнутой функцией.

Завершим этот параграф следующими утверждениями, которые будем использовать далее.

Теорема 7.5. *Пусть $X \subset R^n$ — выпуклое открытое множество, $y = f(x)$ — вогнутая функция на X. Тогда множество точек $D_b = \{x \in X \mid f(x) \geq b\}$ является выпуклым.*

Доказательство. Пусть точки A, $B \in X$, т.е. $f(A) \geq b$, $f(B) \geq b$. Тогда для любой точки $x = (1-t)A + tB$ отрезка, соединяющего A и B, в силу вогнутости $y = f(x)$ имеем

$$f(x) = f\left((1-t)A + tB\right) \geq (1-t)f(A) + tf(B) \geq (1-t)b + tb = b.$$

Таким образом, $f(x) \geq b$ и $x \in D_b$, т.е. множество D_b выпукло.

Теорема 7.6. *Функция $f(x)$, дифференцируемая на выпуклом множестве X, выпукла тогда и только тогда, если для любых $x \in X$ и $y \in X$ верно неравенство*

$$\left(\nabla f(x),\, y-x\right) \leq f(y) - f(x), \tag{7.1}$$

где $\nabla f(x) = \mathrm{grad} f(x) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ — градиент функции $f(x)$ в точке x.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ — выпукла. Тогда для любых $x \in X$, $y \in X$, $x \neq y$ и $\alpha \in (0, 1)$ выполнено неравенство

$$f\left(x + \alpha(y-x)\right) \leq f(x) + \alpha\left(f(y) - f(x)\right).$$

Введем $S = \dfrac{y-x}{\|y-x\|}$ и $\gamma = \alpha\|y - x\|$, где $\|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2}$. Тогда последнее неравенство можно переписать в виде:

$$\|y-x\| \frac{f(x+\gamma S) - f(x)}{\alpha\|y-x\|} \leq f(y) - f(x),$$

или

$$\|y-x\| \frac{f(x+\gamma S) - f(x)}{\gamma} \leq f(y) - f(x).$$

Переходим к пределу $\gamma \to 0$:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial S}\|y-x\| \leq f(y) - f(x).$$

А поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial S}\|y-x\| = \left(\nabla f(x), S\right)\|y-x\| = \left(\nabla f(x),\, y-x\right),$$

то получаем неравенство (7.1).

Предположим теперь, что неравенство (7.1) выполнено для любых $x, y \in X$ и определим точку $z = \alpha x + (1-\alpha)y$, $\alpha \in [0, 1]$. Поскольку $z \in X$ то $\left(\nabla f(z),\, x - z\right) \leq f(x) - f(z)$

и

$$(\nabla f(z), y-z) \le f(y)-f(z).$$

Умножим первое неравенство на α, а второе на $(1-\alpha)$, тогда при сложении, используя то, что $\alpha(x-z)+(1-\alpha)(y-z)=\alpha x+(1-\alpha)y-z=z-z=0$, получим

$$(\nabla f(z), 0)=0 \le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-f(z).$$

Переписав последнее неравенство в виде

$$f(z) \le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

и подставляя z, получим

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y),$$

т.е. функция $f(x)$ выпукла. Теорема доказана.

7.2. Экстремумы выпуклых функций

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором множестве $X \subset R^n$. Тогда точка x_0 называется *точкой локального условного максимума (минимума) функции* $y=f(x)$, если $f(x) \le f(x_0)$ (или $f(x) \ge f(x_0)$) для всех точек $x \in X$, достаточно близких к x_0.

Далее, точка x_0 называется *точкой глобального максимума (минимума) функции* $y=f(x)$ на множестве $X \subset R^n$, если $f(x) \le f(x_0)$($f(x) \ge f(x_0)$) для всех точек $x \in X$.

Точки локального условного и глобального максимума (минимума) функции $y=f(x)$ будем называть точками локального и соответственно глобального экстремума функции $y=f(x)$ на множестве $X \subset R^n$.

Ясно, что точка глобального экстремума $f(x)$ на множестве X является одновременно и точкой локального экстремума на X. Обратное, вообще говоря, не верно. Тем не менее для выпуклых (вогнутых) функций на выпуклых множествах верна следующая теорема.

Теорема 7.7 (о глобальном характере экстремума выпуклой функции). *Если x_0 — точка локального минимума (максимума) выпуклой (вогнутой) функции $y=f(x)$ на выпуклом множестве $X \subset R^n$, то x_0 — точка глобального экстремума функции $f(x)$ на X, т.е. $f(x_0)$ — наименьшее (наибольшее) значение $f(x)$ на X.*

Доказательство. Предположим, что функция $y=f(x)$ выпукла и x_0 — точка локального минимума функции $f(x)$ на X. Допустим, что x_0

не является точкой глобального минимума функции $f(x)$ на X, т.е. существует точка $A \in X$ такая, что $f(A) < f(x_0)$. Любая точка $x \neq A$ отрезка, соединяющего x_0 и A, представима в виде $x = (1 - t)x_0 + tA$, $t \in (0,1]$ и

$$f(x) = f\left((1-t)x_0 + tA\right) \leq (1-t)f(x_0) + tf(A) =$$

$$= f(x_0) + t\underbrace{\left(f(A) - f(x_0)\right)}_{<0} < f(x_0),$$

так как $t \neq 0$. Заметим, что точка x может быть сколь угодно близкой к x_0, что противоречит тому, что x_0 — точка локального минимума функции $f(x)$. Теорема доказана.

Кроме этого, для строго выпуклых функций имеет место следующая теорема.

Теорема 7.8. *Строго выпуклая (вогнутая) функция $y = f(X)$ на выпуклом множестве $X \subset R^n$ имеет не более одной точки глобального экстремума на X.*

Предположим теперь, что функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в x_0. Тогда x_0 называется *стационарной* точкой функции $y = f(x)$, если $\nabla f(x_0) = 0$. Для нахождения точек глобального экстремума выпуклых функций на выпуклых множествах используется следующая теорема.

Теорема 7.9 (о достижении выпуклой функции глобального экстремума в стационарной точке). *Пусть $y = f(x)$ — выпуклая (вогнутая функция) на выпуклом множестве $X \subset R^n$ и пусть $\nabla f(x_0) = 0$ в точке $x_0 \in X$. Тогда x_0 — точка глобального минимума (максимума) функции $f(x)$.*

Пример 7.5. Рассмотрим функцию из примера 7.3:

$$f(x, y, z) = 2x^2 - 4xz + 4y^2 - 8yz + 9z^2 + 4x + 8y - 20z$$

на множестве $X = R^3$. Так как $f'_x = 4x - 4z + 4$, $f'_y = 8y - 8z + 8$, $f'_z = -4x - 8y + 18z - 20$, то стационарная точка $x_0 = (1, 1, 2)$ находится из системы уравнений

$$\begin{cases} 4x - 4z + 4 = 0; \\ 8y - 8z + 8 = 0; \\ -4x - 8y + 18z - 20 = 0. \end{cases}$$

Поскольку функция $f(x, y, z)$ является строго выпуклой в R^3, то точка $x_0 = (1, 1, 2)$ является единственной (в силу теоремы 7.8) точкой глобального минимума (в силу теоремы 7.9) исходной функции в R^3.

Пример 7.6. Рассмотрим функцию $f = (x - 3)^2 + (y - 3)^2$ в выпуклой многогранной области $X \subset R^n$, заданной системой ограничений:

$$\begin{cases} 2x + y \le 19; \\ -5y + 3x \ge -30; \\ 5x - 4y \le 15; \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Так как $f'_x = 2(x - 3)$, $f'_y = 2(y - 3)$, то стационарной точкой функции $f(x, y)$ является точка $(3, 3) \in X$.

Заметим, что

$$f''_{xx} = 2;\ \Delta_f(x, y) = f''_{xx}(x, y) f''_{yy}(x, y) - \left(f''_{xy}(x, y)\right)^2 = 4 > 0.$$

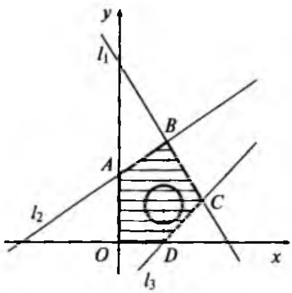


Рис. 7.1

Поэтому $f(x, y)$ — строго выпуклая функция и ее глобальный минимум в X равен $f_{\min} = f(3, 3) = 0$.

Задача допускает простую геометрическую интерпретацию (рис. 7.1). Построим сначала на плоскости (x, y) выпуклое множество, заданное системой ограничений задачи. Изобразим прямые:

$$l_1 : 2x + y = 19,\ l_2 : 3x - 5y = -30,\ l_3 : 5x - 4y = 15.$$

Легко видеть, что нетривиальные ограничения вместе с условиями $x \ge 0$, $y \ge 0$ задают пятиугольник $OABCD$ с угловыми точками $O(0, 0)$, $A(0, 6)$, $B(5, 9)$, $C(7, 5)$ и $D(3, 0)$. Далее, линиями уровня целевой функции $f(x, y)$ являются концентрические окружности $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = C$ с центром в точке $(3, 3)$ внутри многоугольника $OABCD$. Поэтому очевидно, что минимальное значение функции будет достигаться в этой точке, когда окружность «стягивается» в точку при $C = 0$.

7.3. Теорема Куна — Таккера

К сожалению, результаты параграфа 7.2 не дают способа нахождения глобального экстремума выпуклых (вогнутых) функций на выпуклом множестве в случае отсутствия стационарных точек, когда экстремум функции достигается на границе области.

Пример 7.7. Найти минимальное и максимальное значения функции $f = (x - 16)^2 + (y - 12)^2$ в области, заданной условиями (7.2) примера 7.6.

Решение. Напомним, что допустимым множеством является пятиугольник $OABCD$ с угловыми точками $O(0, 0)$, $A(0, 6)$, $B(5, 9)$, $C(7, 5)$ и $D(3, 0)$ (рис. 7.2). Ясно, что $f'_x = 2(x - 16)$, $f'_y = 2(y - 12)$. Поэтому стационарная точка $E(16, 12)$ функции f лежит, очевидно, вне многоугольника $OABCD$. Далее, линиями уровня целевой функции являются концентрические окружности $(x - 16)^2 + (y - 12)^2 = C$ с центром в точке (16, 12). Поэтому *минимальное значение функции* f достигается в точке касания K окружности соответствующего радиуса с отрезком BC, а *максимальное значение* — в точке $O(0, 0)$.

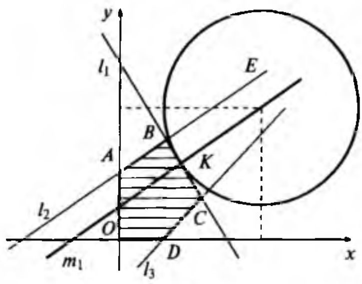


Рис. 7.2

Найдем координаты точки K как точки пересечения прямой l_1 и прямой m_1, перпендикулярной к l_1 и проходящей через точку $E(16, 12)$. Так как для прямой l_1 вектор нормали равен $n = (2, 1)$, то каноническое и общее уравнения m_1 имеют вид: $\frac{x-16}{2} = \frac{y-12}{1}$ и $x - 2y = -8$ соответственно. Точка пересечения $K = l_1 \cap m_1$ находится как решение системы

$$\begin{cases} 2x + y = 19; \\ x - 2y = -8, \end{cases}$$

т.е. $K(6, 7)$. Таким образом, решением задачи на минимум является точка $X_0 = (6, 7)$ и $f_{\min} = f(X_0) = f(6, 7) = (6 - 16)^2 + (7 - 12)^2 = 125$, а решением задачи на максимум — точка O и $f_{\max} = f(O) = f(0, 0) = (0 - 16)^2 + (0 - 12)^2 = 400$.

Рассмотрим множество

$$X = \{x | g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, m\}.$$

Напомним (см. параграф 3.1 главы 3), что задачу минимизации функции $f(x)$ на множестве X называют задачей математического программирования и записывают:

$$f(x) \to \min, \ x \in X. \tag{7.3}$$

Если функция $f(x)$ является выпуклой и множество X выпуклое, то такая задача называется задачей ***выпуклого программирования***.

Как видно из примера 7.7, в отличие от задач линейного программирования оптимальное решение задачи выпуклого программирования может достигаться не только в угловых точках границы, но и в ее внутренних точках.

Определение 7.3. *Направление $-S \neq 0$ в точке $x \in X$ называется возможным, если существует такое число $\gamma > 0$, что для всех $\beta \in [0, \gamma]$*

$$x - \beta S \in X.$$

Очевидно, если точка $x \in X$ является внутренней точкой данного множества, то любое направление является возможным. Поэтому при поиске возможного направления в точке $x \in X$ важны только те ограничения, для которых $g_i(x) = 0$; такие ограничения называются *активными*. Введем обозначение

$$I(x) = \{i | g_i(x) = 0\}.$$

Определение 7.4. *Множество Λ называется конусом, если из $x \in \Lambda$ следует $\lambda x \in \Lambda$ для всех $\lambda > 0$.*

Можно заметить, что множество возможных направлений в граничной точке $x \in X$ — выпуклый конус:

$$\Lambda^* = \{-S | (\nabla g_i, -S) \geq 0, \; i \in I(x)\},$$

иначе, если направление $-S$ является возможным, то выполнено неравенство

$$(\nabla g_i, S) \leq 0. \tag{7.4}$$

Определение 7.5. *Говорят, что множество X удовлетворяет условию регулярности Слейтера, если существует такая точка $x \in X$, что*

$$g_i(x) > 0, \; i = 1, \ldots, m.$$

Далее будем предполагать, что все функции $f(x)$ и $g_i(x)$ непрерывно дифференцируемы.

Теорема 7.10 (Фаркаша). *Пусть вектор $v \in R^n$, а матрица A имеет размерность $m \times n$. Неравенство $(v, x) \leq 0$ выполняется для всех $x \in \{x | Ax \leq 0\}$ тогда и только тогда, когда существует вектор $\alpha \geq 0$, что $v = A^T\alpha$.*

Запишем матрицу A в виде $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \cdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$.

Нетрудно видеть, что множества

$$\Lambda = \left\{x \middle| x = \sum \alpha_i a_i,\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\right\}$$

и

$$\Lambda^* = \left\{x \middle| (x, a_i) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\right\}$$

являются конусами и неравенство $(v, x) \leq 0$ будет выполнено тогда и только тогда, когда $v \in \Lambda$, а $x \in \Lambda^*$.

Продемонстрируем структуру множеств Λ и Λ^* на примере.

Пример 7.8 (рис. 7.3) Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{pmatrix}$, где $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Тогда неравенство $Ax \leq 0$ эквивалентно

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 0; \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 0. \end{cases}$$

При этом

$$A^T\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} =$$

$$= a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\alpha_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\alpha_2.$$

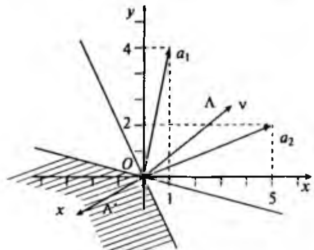


Рис. 7.3

Теорема 7.11 (Куна — Таккера). *Если функции $g_i(x)$ вогнуты, функция $f(x)$ выпукла, множество $X = \{x | g_i(x) \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ регулярно по Слейтеру, то для того чтобы точка $x \in X$ была точкой глобального минимума задачи выпуклого программирования* (7.3), *необходимо и достаточно существование таких чисел $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, что $\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \nabla g_i(x)$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i(x) = 0$.*

Замечание 7.2. Заметим, что в силу условий $\alpha_i \geq 0$, $g_i(x)$ для всех $i = 1, \ldots, m$ условие $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i(x) = 0$ эквивалентно тому, что равенство $\alpha_i g_i(x) = 0$ выполняется для всех $i = 1, \ldots, m$. В частности, отсюда следует, что $\alpha_i = 0$ для всех $i \notin I(x)$.

Доказательство.

Достаточность. Пусть существуют $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, такие что $\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \nabla g_i(x)$.

Поскольку множество X выпукло, то для любого $y \in X$ направление $-S = y - x$ является возможным в любой точке $x \in X$. Из неравенства (7.4) следует, что $(\nabla g_i(x), S) \le 0,\ i \in I(x)$. Поэтому, используя (7.1), получаем неравенство

$$f(x)-f(y) \le (\nabla f(x), x-y) = (\nabla f(x), S) =$$
$$= \left(\sum_{i \in I(x)} \alpha_i \nabla g_i(x), S \right) = \sum_{i \in I(x)} \alpha_i (\nabla g_i(x), S) \le 0.$$

А так как $\alpha_i = 0$ при $i \notin I(x)$, то $f(x) \le f(y)$ для любого $y \in X$.

Необходимость. Ранее отмечалось, что множество возможных направлений в точке $x \in X$ является конусом

$$\Lambda^* = \{-S | (\nabla g_i(x), -S) \ge 0, i \in I(x)\}.$$

Множество Λ^* не пусто, поскольку в силу условия регулярности Слейтера существует точка $z \in X$, в которой $g_i(z) > 0$, $i = 1, \ldots, m$, а так как множество X выпуклое, то направление $-S = z - x$ является возможным.

Множество направлений, в которых значение функции $f(x)$ может быть уменьшено, можно записать так:

$$G = \{-S | (-\nabla f(x), -S) > 0\}.$$

Тогда очевидно, что направления, в которых значение функции $f(x)$ не может быть уменьшено, удовлетворяют равенствам:

$$(\nabla g_i(x), -S) \ge 0, i \in I(x);\quad (\nabla f(x), -S) \ge 0$$

или

$$(\nabla g_i(x), S) \le 0, i \in I(x);\quad (\nabla f(x), S) \le 0.$$

Применим теорему Фаркаша: найдутся такие $\alpha_i \ge 0$, что $\nabla f(x) = \sum \alpha_i \nabla g_i(x)$, $i \in I(x)$. Последнее условие можно заменить следующими:

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \nabla g_i(x);\quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i(x) = 0;\quad \alpha \ge 0.$$

Полагаем $\alpha_i = 0$ при $i \notin I(x)$. Теорема доказана.

Предположим теперь, что множество $X \subset R^n$ задано системой ограничений

$$\begin{cases} g_r(x) \ge 0,\ r = 1, \ldots, k; \\ g_r(x) = 0,\ r = k+1, \ldots, m, \end{cases} \tag{7.5}$$

т.е. среди ограничений первые k условий — условия типа неравенств, а оставшиеся — условия типа равенств.

Определение 7.6. *Говорят, что система ограничений (7.5) удовлетворяет условию Слейтера, если функции $g_1, g_2, \ldots, g_m$ являются вогнутыми, и существует точка $x^* \in X$ такая, что все нелинейные функции среди $g_1, g_2, \ldots, g_m$ больше нуля в этой точке.*

Легко видеть, что условие Слейтера означает, что *функции $g_{k+1}(x)$, $g_{k+2}(x), \ldots, g_m(x)$ являются линейными.*

Пусть функция $f(x)$ вогнутая (тогда функция $-f(x)$ выпуклая). Определим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

Рассматривается задача

$$f(x) \to \max, \quad x \in X. \tag{7.6}$$

Замечание 7.3. *Функция Лагранжа определена с точностью постоянного множителя.*

Сформулируем теорему Куна — Таккера для вогнутой функции $f(x)$.

Следствие 7.3. *Пусть $X \subset R^n$ — выпуклое множество, заданное регулярной системой ограничений (7.5), функция $y = f(x)$ — вогнутая, а функции f, $g_1, g_2, \ldots, g_m$ дифференцируемы на X. Тогда для оптимальности точки $x \in X$ необходимо и достаточно существование таких чисел λ_i, $i = 1, \ldots, m$, что*

$$\nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) = 0,$$

причем $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$.

Важность условия регулярности продемонстрируем на следующем примере.

Пример 7.9. Найти максимум функции $f(x, y) = x + y$ при условии $g(x) = -x^2 - y^2 \geq 0$.

Решение. С одной стороны, ясно, что решением задачи (7.5) является точка (0, 0) и $f_{\max} = 0$. С другой стороны, условие регулярности не выполняется, так как для (нелинейной) функции $g(x) = -x^2 - y^2$ множество $-x^2 - y^2 > 0$ пусто. Функция Лагранжа $\mathcal{L} = x + y - \lambda(x^2 + y^2)$ и

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x' = 1 - 2\lambda x = 0; \\ \mathcal{L}_y' = 1 - 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

Ясно, что для оптимального решения задачи $(x, y) = (0, 0)$ *не существует* такого λ, что

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0; \\ 1 - 2\lambda y = 0, \end{cases}$$

и условия теоремы не выполняются. Данный пример показывает, что условие Слейтера является существенным в формулировке теоремы 7.11 и следствия 7.3.

7.4. Применение теоремы Куна — Таккера для решения задач оптимизации

Перейдем теперь к рассмотрению примеров применения теоремы Куна — Таккера к задачам оптимизации.

Пример 7.10. Рассмотрим задачу из примера 7.7 и проверим, что точка $x_0 = (6, 7)$ удовлетворяет условиям теоремы Куна — Таккера. Перепишем систему ограничений в виде

$$\begin{cases} -2x - y + 19 \geq 0; \\ 3x - 5y + 30 \geq 0; \\ -5x + 4y + 15 \geq 0; \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

и составим функцию Лагранжа для вогнутой функции $f = -(x - 16)^2 - (y - 12)^2$:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -(x-16)^2 - (y-12)^2 + \lambda_1(-2x - y + 19) +$$

$$+\lambda_2\left(3x - 5y + 30\right) + \lambda_3(-5x + 4y + 15) + \lambda_4 x + \lambda_5 y.$$

Теперь мы можем записать условия теоремы в виде системы:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x' = -2(x-16) - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5\lambda_3 + \lambda_4 = 0; \\ \mathcal{L}_y' = -2(y-12) - \lambda_1 - 5\lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_5 = 0; \\ \lambda_1(-2x - y + 19) = 0; \\ \lambda_2(3x - 5y + 30) = 0; \\ \lambda_3(-5x + 4y + 15) = 0; \\ \lambda_4 x = 0, \ \lambda_5 y = 0; \\ \lambda_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

Подставляя $x = 6$, $y = 7$, немедленно убеждаемся, что $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, и система сводится к условиям

$$\begin{cases} 20 - 2\lambda_1 = 0; \\ 10 - \lambda_1 = 0, \end{cases}$$

откуда имеем, что $\lambda_1 = 10 \geq 0$, т.е. для точки $x_0 = (6, 7)$ условия теоремы выполнены.

Пример 7.11. Решить задачу выпуклого программирования

$$f = 2x + 2y - z \to \max;$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 9; \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

Решение. Перепишем условие задачи в форме, необходимой для применения теоремы. Получим

$$f = 2x + 2y - z \to \max;$$

$$\begin{cases} 9 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0; \\ x + y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = 2x + 2y - z + \lambda_1(9 - x^2 - y^2 - z^2) + \lambda_2(x + y + z - 3),$$

а условия теоремы Куна—Таккера записываются в виде

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 2 - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0; \\ \mathcal{L}'_y = 2 - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0; \\ \mathcal{L}'_z = -1 - 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0; \\ \lambda_1(9 - x^2 - y^2 - z^2) = 0,\ \lambda_1 \geq 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_1 = 0$, то из первого и третьего уравнений получаем противоречивые условия $\begin{cases} 2 + \lambda_2 = 0; \\ -1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$ Поэтому $\lambda_1 \neq 0$, и находим из первых трех уравнений:

$$x = \frac{\lambda_2 + 2}{2\lambda_1};\quad y = \frac{\lambda_2 + 2}{2\lambda_1};\quad z = \frac{\lambda_2 - 1}{2\lambda_1}.$$

Подставляя эти выражения в условие связи $x + y + z - 3 = 0$, получаем, что $\lambda_2 = 2\lambda_1 - 1$ и $x = \dfrac{2\lambda_1 + 1}{2\lambda_1}$, $y = \dfrac{2\lambda_1 + 1}{2\lambda_1}$, $z = \dfrac{2\lambda_1 - 2}{2\lambda_1}$. Поскольку

$\lambda_1 \neq 0$, то $9 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$. Подставляя в последнее равенство полученные выражения для x, y, z, получим $\lambda_1 = \pm 1/2$. Так как $\lambda_1 \geq 0$, то $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 0$ и $x = 2$, $y = 2$, $z = -1$. Согласно теореме Куна — Таккера, $f_{max} = f(2, 2, -1) = 9$.

Пример 7.12. Найти объемы ресурсов K и L, при которых затраты на производство не менее 80 единиц продукции минимальны, если производственная функция Кобба — Дугласа $Q(K, L) = K^{3/4} L^{1/4}$, а цены на ресурсы $p_K = 6$, $p_L = 2$.

Решение. Поскольку целевая функция имеет вид $f(K, L) = p_K K + p_L L$, то имеем задачу

$$\begin{cases} f = 6K + 2L \to \min; \\ K^{3/4} L^{1/4} \geq 80; \\ K \geq 0, \ L \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что функция $f(K, L)$ линейна, т.е. выпукла и вогнута одновременно. Далее, функция Кобба — Дугласа является вогнутой и условие регулярности, очевидно, выполнено (достаточно проверить точку (81, 81)).

Теперь для применения теоремы Куна — Таккера достаточно записать постановку задачи в виде

$$\begin{cases} f = -6K - 2L \to \max; \\ K^{3/4} L^{1/4} - 80 \geq 0; \\ K \geq 0, \ L \geq 0. \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = -6K - 2L + \lambda_1 (K^{3/4} L^{1/4} - 80) + \lambda_2 K + \lambda_3 L.$$

Тогда условия теоремы Куна — Таккера записываются следующим образом:

$$\mathcal{L}'_K = -6 + \frac{3}{4} \lambda_1 K^{-1/4} L^{1/4} + \lambda_2 = 0;$$

$$\mathcal{L}'_L = -2 + \frac{1}{4} \lambda_1 K^{3/4} L^{-3/4} + \lambda_3 = 0;$$

$$\lambda_1 (K^{3/4} L^{1/4} - 80) = 0; \ \lambda_2 K = 0; \ \lambda_3 L = 0;$$

$$\lambda_1 \geq 0; \ \lambda_2 \geq 0; \ \lambda_3 \geq 0.$$

В силу условия $K^{3/4}L^{1/4}-80\geq 0$ получаем, что $K\neq 0$, $L\neq 0$ и, следовательно, $\lambda_2=\lambda_3=0$. Подставляя $\lambda_2=0$ в первое уравнение, имеем $\lambda_1\neq 0$.

Таким образом, мы приходим к следующей системе:

$$\begin{cases}\frac{3}{4}\lambda_1 K^{-1/4}L^{1/4}=6;\\ \frac{1}{4}\lambda_1 K^{3/4}L^{-3/4}=2;\\ K^{3/4}L^{1/4}=80\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=8K^{1/4}L^{-1/4};\\ \lambda_1=8K^{-3/4}L^{3/4};\\ K^{3/4}L^{1/4}=80\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8K^{1/4}L^{-1/4}=8K^{-3/4}L^{3/4},\\ K^{3/4}L^{1/4}=80.\end{cases}$$

Из последней системы заключаем, что $K=L=80$, причем $\lambda_1=8\geq 0$. Таким образом, все условия теоремы Куна — Таккера выполнены, и $K=L=80$ — производственный план с минимальными издержками, причем $f_{\min}=f(80, 80)=640$.

7.5. Теорема Куна — Таккера и метод возможных направлений

Метод возможных направлений учитывает ограничения в явном виде и наиболее эффективен для задач с линейными ограничениями.

Определение 7.6. *Возможное направление $-S$ называется подходящим, если $(\nabla f(x), -S)<0$, т.е. критерий оптимальности убывает в направлении S.*

Схему вычислений метода возможных направлений можно реализовать так:

1) выбирается точка $x^0\in X$;

2) определяется подходящее направление;

3) для подходящего направления длина шага $-\gamma S$ выбирается так, чтобы не выйти за границы допустимой области, осуществляется переход в точку $x^0-\gamma S$;

4) если не достигается заданная точность вычисления, то возвращаемся к шагу 2.

Пример 7.13. Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$f(x)=x_1^2+(x_2-11)^2\to\min;$$

$$g_1(x)=5-x_1-x_2\geq 0;$$

$$g_2(x) = x_1 \geq 0;$$
$$g_3(x) = x_2 \geq 0.$$

Пусть точка $x^0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ является начальной. Тогда любое направление $-S$, удовлетворяющее неравенству $\left(-S, \nabla g_1(x^0)\right) \geq 0$, является возможным, здесь $\nabla g_1(x^0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Нетрудно видеть, что в точке x^0 направление $-S = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ является подходящим. Осуществляем переход в точку $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ по данному направлению.

В точке x^1 определим множество $I(x^1) = \{1, 2\}$, ограничение $g_3(x)$ не является активным, и можно записать $g_3(x^1)\alpha_3 = 0$, $\alpha_3 = 0$.

Нетрудно видеть, что $\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix}$; $\nabla g_1(x^1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\nabla g_2(x^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и

$$\nabla f(x^1) = \alpha_1 \nabla g_1(x^1) + \alpha_2 \nabla g_2(x^1); \ \alpha_1 = \alpha_2 = 12.$$

В точке x^1 выполнены условия теоремы Куна — Таккера, и подходящих направлений не существует. Точка x^1 является оптимальной.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Докажите, что пересечение конечного числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.
2. Для векторов $a = (1, 1, 1)$, $b = (9, 8, 1)$ и $c = (7, 4, 5)$ опишите наименьший выпуклый конус, натянутый на эти вектора.
3. Приведите пример множества, для которого не выполнено условие регулярности Слейтера.
4. Приведите пример, когда возможное направление не является подходящим.
5. Сформулируйте и докажите теорему Куна — Таккера.
6. Для задачи

$$f = (x - 24)^2 + (y - 30)^2 \to \min$$

при условиях

$$x \geq 0, y \geq 0$$

и

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 34; \\ -y + 2x \geq -6; \\ x - 5y \leq 4 \end{cases}$$

найти оптимальное решение графическим методом и для полученного решения проверить выполнение условий теоремы Куна — Таккера.

7. Найдите объемы ресурсов K и L, при которых затраты на производство не менее 140 единиц продукции минимальны, если производственная функция Кобба — Дугласа $Q(K, L) = K^{2/3}L^{1/3}$, а цены на ресурсы $p_K = 12$, $p_L = 3$.
8. Решите методом возможных направлений задачу

$$\begin{cases} f(x, y) = x + 2y \to \max; \\ x + 2y \leq 5; \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$$

9. Решите задачу 5 для случая $f(x, y) \to \min$.

ГЛАВА 8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ

8.1. Предпочтения потребителей и функция полезности

Главными понятиями экономической теории потребления являются *потребитель* (*домашнее хозяйство*) и *благо* (*товар*). Предполагается, что потребитель, осуществляя свой выбор среди различных наборов благ при заданных ценах и имеющемся у него бюджете, стремится максимизировать уровень удовлетворения своих потребностей. При этом он действует рационально, полностью информирован и предпочитает текущее потребление будущему. В этой главе мы построим и проанализируем формальную теорию поведения потребителя.

8.1.1. Пространство благ и предпочтения потребителя

Пусть на рынке потребителю предлагается n благ.

Определение 8.1. *Неотрицательный вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где x_i — количество потребленного i-го блага ($i = 1, \ldots, n$) за некоторый период времени, будем называть **набором (вектором) благ**, а множество*

$$R_+^n = \{x \in R^n;\ x_i \geq 0;\ i = 1, \ldots, n\}$$

— ***пространством благ.***

Будем предполагать, что для каждого потребителя на множестве его интересов $X \subset R_+^n$ определено бинарное отношение $\succcurlyeq$, называемое ***отношением предпочтения***, позволяющее потребителю сделать выбор между любыми двумя наборами благ. Это отношение, исходя из логики сравнения благ, должно обладать следующим свойствами:

1) ***рефлективности***: $x \succcurlyeq x$;
2) ***транзитивности***: *если* $x \succcurlyeq y$ и $y \succcurlyeq z$, то $x \succcurlyeq z$;
3) ***полноты***: для $\forall x, y \in R_+^n$ $x \succcurlyeq y$ или $y \succcurlyeq x$.

Запись $x \succcurlyeq y$ означает, что набор x ***не менее предпочтителен***, чем набор y (т.е. x лучше, чем y, или x так же хорош, как y).

Если $x \succcurlyeq y$, а при этом $y \succcurlyeq x$ не имеет место, то говорят, что x ***строго предпочтительнее*** y и обозначают $x \succ y$.

Если же $x \succcurlyeq y$ и $y \succcurlyeq x$, то говорят, что x и y ***безразличны*** потребителю и обозначают $x \sim y$.

Замечание 8.1. Отношение безразличия ~ удовлетворяет условиям:

1) ***рефлективности***: $x \sim x$;
2) ***симметричности***: *если* $x \sim y$, *то* $y \sim x$;
3) ***транзитивности***: *если* $x \sim y$ *и* $y \sim z$, *то* $x \sim z$.

Таким образом, отношение безразличия является ***отношением эквивалентности*** и задает разбиение R_+^n на классы эквивалентности, называемые ***классами безразличия***.

Приведем примеры некоторых видов отношений предпочтения, естественным образом возникающих на R_+^n.

Пример 8.1. Пусть $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$ — произвольные наборы благ. Тогда отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на R_+^n можно определить одним из следующим способов:

1) $x \succcurlyeq y$, если $x_1 \ge y_1$;

2) $x \succcurlyeq y$, если $x_2 \ge y_2$;

...

n) $x \succcurlyeq y$, если $x_n \ge y_n$;

n+1) $x \succcurlyeq y$, если $\sum_{i=1}^{n} x_i \ge \sum_{i=1}^{n} y_i$;

n+2) $x \succcurlyeq y$, если $\prod_{i=1}^{n} x_i \ge \prod_{i=1}^{n} y_i$.

Предлагаем читателю самостоятельно убедится в выполнении всех аксиом для приведенных выше примеров отношений предпочтения и найти в каждом случае соответствующие отношение безразличия.

Наряду с аксиомами 1) —3) на отношения предпочтения дополнительно могут накладываются условия:

4) ***непрерывности***: если $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — две сходящиеся последовательности на R_+^n, удовлетворяющие соотношению $x_k \succcurlyeq y_k (\forall k)$, то $\lim\limits_{k \to \infty} x_k \succcurlyeq \lim\limits_{k \to \infty} y_k$;

5) ***ненасыщаемости***: $x \ge y \Rightarrow x \succcurlyeq y$ и $x > y \Rightarrow x \succ y$.

Замечание 8.2. *Непрерывность* содержательно означает, что при малом изменении векторов благ отношение предпочтения сохраняется, и равносильна тому, что множества

$$X = \{x \in R_+^n \mid x \succcurlyeq x_0\}$$

и

$$Y = \{y \in R_+^n \mid y_0 \succcurlyeq y\}$$

замкнуты для любых x_0 и y_0 из R_+^n.

Все отношения предпочтения, рассмотренные в примере 8.1, являются непрерывными. Приведем пример отношения предпочтения, не удовлетворяющего этому условию.

Пример 8.2. Определим на R_+^2 отношение предпочтения $\succcurlyeq$, называемое *лексикографическим*, следующим образом: для любых $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ из R_+^2

$$x \succcurlyeq y, \text{ если } x_1 > y_1 \text{ или } x_1 = y_1 \text{ и } x_2 \geq y_2. \tag{8.1}$$

Из (8.1), в частности, следует, что условие рефлективности $x \sim y$ равносильно условию $x = y$. Пусть теперь $a = (a_1, a_2)$ и $b = (a_1, b_2)$ — два набора благ из R_+^2 такие, что $a_2 > b_2$. В силу (8.1)

$$a \succ b. \tag{8.2}$$

Рассмотрим последовательность на R_+^2:

$$b_k = \left(a_1 + \frac{1}{k}, b_2\right).$$

Имеем

$$\lim_{k \to \infty} b_k = b \text{ и } b_k \succcurlyeq a (\forall k).$$

Но при этом вследствие (8.2)

$$a \succ \lim_{k \to \infty} b_k,$$

что свидетельствует о том, что отношение предпочтения $\succcurlyeq$ не является непрерывным.

Замечание 8.3. *Ненасыщаемость* показывает, что для потребителя большее количество блага предпочтительнее, чем меньшее. Все рассмотренные в примере 8.1 отношения предпочтения удовлетворяют этому условию. Примером отношения предпочтения, для которого не выполнено аксиома ненасыщаемости, служит отношение $\succcurlyeq$, задаваемое на R_+^n правилом

$$x \succcurlyeq y, \text{ если } \sum_{i=1}^{n} x_i \le \sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (8.3)$$

Нетрудно, проверить, что $x > y \Rightarrow y \succcurlyeq x$.

У этого отношения предпочтения существует ***точка насыщения***, т.е. точка x_0 такая, что $x_0 \succcurlyeq x$ $(\forall x \in R_+^n)$.

Ею является нулевой набор благ.

8.1.2. Функция полезности и отношение предпочтения

Отношение предпочтения, рассмотренное выше, является качественной категорией и плохо приспособлено для проведения количественных исследований. Для проведения таких исследований удобнее использовать функцию полезности — численный индикатор, позволяющий свести абстрактную операцию отношения предпочтения к отношениям между числами (больше, меньше, равно).

Определение 8.2. *Функция $U(x)$, определенная на множестве $X \subset R_+^n$, называется **функцией полезности**, соответствующей отношению предпочтения $\succcurlyeq$, если $x \succcurlyeq y$* тогда и только тогда, когда

$$U(x) \ge U(y);\ \forall x, y \in X. \qquad (8.4)$$

Замечание 8.4. В терминах функции полезности отношения безразличия и строгой предпочтительности задаются следующим образом:

$$x \sim y \Leftrightarrow U(x) = U(y);$$
$$x \succ y \Leftrightarrow U(x) > U(y).$$

Замечание 8.5. Из непрерывности предпочтения $\succcurlyeq$ следует существование непрерывной функции полезности, соответствующей этому предпочтению, а из ненасыщаемости — неубывание ее по любому из аргументов и возрастание при одновременном увеличении всех аргументов.

Обратно, любая непрерывная, неубывающая по любому аргументу и возрастающая при одновременном увеличении всех аргументов функция $U(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на $X \subset R_+^n$, задает на X (при помощи соотношений (8.4)) непрерывное ненасыщаемое отношение предпочтения $\succcurlyeq$, а следовательно, является функцией полезности.

Естественно, возникает вопрос: для всякого ли отношения предпочтения существует функция полезности? Ответ на него дает следующее утверждение, которое мы примем без доказательства.

Теорема 8.1 (Дебре). *Для любого непрерывного отношения предпочтения, определенного на R_+^n, существует функция полезности.*

Так, для отношений предпочтения, рассмотренных в примере 8.1, соответствующие функции полезности имеют следующий вид:

$$1)\ U(x_1, ..., x_n) = x_1;$$

$$2)\ U(x_1, ..., x_n) = x_2;$$

$$...$$

$$n)\ U(x_1, ..., x_n) = x_n;$$

$$n+1)\ U(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i;$$

$$n+2)\ U(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Замечание 8.6. Функция полезности для любого отношения предпочтения определена неоднозначно. Действительно, если $U(x)$ — функция полезности, соответствующая отношению предпочтения $\succcurlyeq$, а $f(U)$ — непрерывная возрастающая функция, то условие $U(x) \geq U(y)$ равносильно

$$f(U(x)) \geq f(U(y));\ \forall x, y \in R_+^n.$$

Следовательно, сложная функция $\hat{U}(x) = f(U(x))$ также будет функцией полезности, соответствующей отношению предпочтения $\succcurlyeq$. Причем для потребителя все функции полезности будут равнозначны.

Пример 8.3. Рассмотрим несколько важных типов функций полезности:

1) ***линейная функция полезности***

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0,\ (a_i > 0 \text{ при } i = 0, ..., n); \tag{8.5}$$

2) ***функция Леонтьева***

$$U(x) = \min\left\{\frac{x_1}{a_1}; ...; \frac{x_n}{a_n}\right\},\ (a_i > 0 \text{ при } i = 1, ..., n); \tag{8.6}$$

3) ***функция Кобба — Дугласа*** (*мультипликативная функция полезности*)

$$U(x) = Ax_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}\ (A, \alpha_i > 0 \text{ при } i = 1, ..., n). \tag{8.7}$$

Замечание 8.7. *Линейная функция полезности* относится к классу *функций полезности с полным взаимозамещеним благ*, а *функция Леон-*

тьева — к классу ***функций полезности с полным взаимодополнением благ.*** Содержательная часть терминов *взаимозамещения* и *взаимодополнения* благ будет раскрыта далее.

Замечание 8.8. Все приведенные выше функции полезности неотрицательны на R_+^n. И хотя условие неотрицательности не является необходимым для задания функции полезности, большинство используемых в литературе функций им обладают. Это объясняется психологическим фактором: термин полезность (т.е. приносящий пользу потребителю) ассоциируется с чем-то положительным.

8.1.3. Неоклассическая функция полезности

Определение 8.3. *Функция* $U(x_1, ..., x_n)$, *имеющая непрерывные частные производные до второго порядка включительно, называется* ***неоклассической функцией полезности****, если она удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам) для любых* $x > 0$ *из* R_+^n :

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}(x) > 0, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}(x) > 0; \tag{8.8}$$

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{\partial U}{\partial x_1}(x) = +\infty, \ldots, \lim_{x_n \to 0} \frac{\partial U}{\partial x_n}(x) = +\infty; \tag{8.9}$$

$$\lim_{x_1 \to +\infty} \frac{\partial U}{\partial x_1}(x) = 0, \ldots, \lim_{x_n \to +\infty} \frac{\partial U}{\partial x_n}(x) = 0; \tag{8.10}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(x) < 0, \ldots, \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}(x) < 0. \tag{8.11}$$

Выясним, какие из приведенных выше функций полезности являются *неоклассическими.*

1. Линейная функция полезности не является неоклассической. Действительно, из (8.5) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = a_i > 0; \tag{8.12}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = 0. \tag{8.13}$$

Для нее выполнены только условия (8.8), а (8.9)—(8.11) не имеют места.

Рассмотрим обобщение линейной функции — ***функцию полезности с полным взаимозамещением благ***:

$$U(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i^{\alpha_i} + A_0, \ \ (A_i > 0 \text{ при } i = 0, ..., n). \tag{8.14}$$

Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \alpha_i A_i x_i^{\alpha_i - 1}; \tag{8.15}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = \alpha_i(\alpha_i - 1) A_i x_i^{\alpha_i - 2}. \tag{8.16}$$

Отсюда получаем, что функция полезности с полным взаимозамещением благ будет неоклассической тогда и только, когда

$$0 < \alpha_i < 1 \ (\forall i = 1, ..., n). \tag{8.17}$$

2. *Функция Леонтьева* (8.6) не является неоклассической, так как у нее не существуют частные производные в точках, принадлежащих прямой

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n}. \tag{8.18}$$

3. В случае *функции Кобба — Дугласа* из (8.7) получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = A\alpha_i x_1^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_i - 1} \cdots x_n^{\alpha_n}; \tag{8.19}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = A\alpha_i(\alpha_i - 1) x_1^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_i - 2} \cdots x_n^{\alpha_n}. \tag{8.20}$$

Анализ этих соотношений приходит нас к выводу: для того чтобы функция Кобба — Дугласа была неоклассической, необходимо и достаточно выполнения условий (8.17).

Замечание 8.9. Равенства (8.11) называется ***первым законом Госсена***. Его часто заменяют на более сильное условие

$$x^T H x < 0$$

для

$$\forall x \in R^n, x \neq 0 \tag{8.21}$$

на матрицу Гессе вторых частных производных:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \tag{8.22}$$

и означающее ее отрицательную определенность, что в свою очередь равносильно ***строгой вогнутости*** функции полезности U.

Так, функция полезности с полным взаимозамещением благ (8.12) является строго вогнутой при выполнении условий (8.17). А для того чтобы функция Кобба — Дугласа (8.7) была строго вогнутой, необходимо и достаточно, чтобы

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 1. \tag{8.23}$$

8.2. Предельный анализ и эластичность

Одним из важных преимуществ функции полезности в исследовании потребительских предпочтений является возможность использования мощного аппарата математического анализа. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что функция полезности $U(x_1, ..., x_n)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируема. Остановимся на основных экономико-математических характеристиках функции полезности.

8.2.1. Предельная полезность и средняя полезность блага

Определение 8.4. Частная производная $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ функции полезности $U(x_1, ..., x_n)$ называется ***предельная полезностью i-го блага***, а величина

$$u_i = \frac{U}{x_i} \tag{8.24}$$

— ***средней полезностью i-го блага***.

Средняя полезность u_i показывает величину полезности на единицу приобретенного i-го блага, а *предельная полезность* $\frac{\partial U}{\partial x_i}$, как это следует из приближенного равенства

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta U}{\Delta x_i},$$

показывает приближенно (а в пределе $\Delta x_i \to 0$ точно) величину дополнительной полезности на единицу дополнительно приобретенного i-го блага.

Замечание 8.10. В терминах предельной полезности условия (8.8)—(8.11) означают, что у неоклассической функции предельная полезность $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ является положительной, убывающей по этому благу функцией, имеющей вертикальную и горизонтальную асимптоты.

Замечание 8.11. Особый интерес представляют функции, имеющие постоянной ту или иную характеристику. Очевидно, что предельная полезность $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ постоянна тогда и только тогда, когда $U(x_1, ..., x_n)$ имеет вид

$$U(x_1, ..., x_n) = a_i x_i + b(x_1, ..., x_n), \tag{8.25}$$

где a_i — константа, а функция $b(x_1, ..., x_n)$ не зависит от x_i $\left(\frac{\partial b}{\partial x_i} = 0\right)$, а класс функций полезности, у которых все предельные полезности постоянны, исчерпывается линейной функцией (8.5).

Замечание 8.12. У *функции Кобба — Дугласа* средняя полезность пропорциональна предельной. Действительно, из (8.7) имеем

$$u_i = A x_1^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_i - 1} \cdots x_n^{\alpha_n}. \tag{8.26}$$

Отсюда, принимая во внимание (8.19), получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \alpha_i u_i. \tag{8.27}$$

8.2.2. Эластичность функции полезности и однородность

Определение 8.5. *Величина*

$$\varepsilon_i(U) = \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{U} \tag{8.28}$$

***называется коэффициентом эластичности (частной эластичностью) функции $U(x_1, ..., x_n)$ по i-му аргументу**, а*

$$E(U)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(U) \tag{8.29}$$

***— коэффициентом полной эластичностью функции U**.*

Коэффициент эластичности характеризует относительное изменение функции. Он в силу приближенного равенства

$$\varepsilon_i(U)\approx\frac{\frac{\Delta U}{U}100\%}{\frac{\Delta x_i}{x_i}100\%}$$

показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция U при изменении на один процент i-го аргумента.

Замечание 8.13. Из формулы (8.28) вытекает, что *эластичность* $\varepsilon_i(U)$ функции полезности есть отношение предельной полезности к средней полезности.

Замечание 8.14. Из (8.27) следует, что у функции Кобба — Дугласа все частичные эластичности являются константами

$$\varepsilon_i(U)=\alpha_i. \tag{8.30}$$

Справедливо и обратное: если все частичные эластичности постоянны, то функция является функцией Кобба — Дугласа.

Замечание 8.15. Частичная эластичность $\varepsilon_i(U)$ постоянна тогда и только тогда, когда функция U имеет вид:

$$U(x_1, ..., x_n) = b(x_1, ..., x_n)x_i^{\varepsilon_i}, \tag{8.31}$$

где функция $b(x_1, ..., x_n)$ не зависит от x_i.

Пусть для определенности U имеет постоянную эластичность по первому аргументу, тогда из соотношений (8.31) следует, что для любого $t > 0$

$$U(tx_1, x_2, ..., x_n) = t^{\varepsilon_1}U(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{8.32}$$

В общем случае (если эластичность ε_1 — переменная величина) равенство (8.32) носит приближенный характер:

$$U(tx_1, x_2, ..., x_n)\approx t^{\varepsilon_1(u)}U(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{8.33}$$

и тем точнее, чем ближе t к единице. Применяя соотношение (8.33) к остальным аргументам, получаем, что

$$U(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \approx t^{\varepsilon_1(U)} t^{\varepsilon_2(U)} \ldots t^{\varepsilon_n(U)} U(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

или

$$U(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \approx t^{E(U)} U(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (8.34)$$

Таким образом, полная эластичность $E(U)$ характеризует отдачу от расширения масштаба потребления. При $E(U) < 1$ говорят об *убывающей отдаче*, при $E(U) > 1$ — о ***возрастающей отдаче***, а при $E(U) = 1$ — о ***постоянной отдаче***.

Рассмотрим класс функций, для которых соотношение (8.34) выполняется в виде точного равенства.

Определение 8.6. *Функция $U(x_1, \ldots, x_n)$* ***называются однородной степени*** *μ, если для любого $t > 0$*

$$U(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^{\mu} U(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (8.35)$$

Если $\mu = 1$, ***то функцию называют линейно-однородной.***

Многие используемые функции полезности являются однородными. Так, функция Леонтьева (8.6) является линейно-однородной, а функция Кобба — Дугласа (8.7) имеет степень однородности $\mu = \sum_i \alpha_i$.

Теорема 8.2. Пусть $U(x_1, \ldots, x_n)$ — однородная функция степени μ, тогда имеют место соотношения:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} x_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n} x_n = \mu U(x_1, \ldots, x_n); \qquad (8.36)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j = \mu(\mu - 1) U(x_1, \ldots, x_n). \qquad (8.37)$$

Доказательство. Продифференцируем дважды равенство (8.35) по t:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} x_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n} x_n = \mu t^{\mu-1} U; \qquad (8.38)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j = \mu(\mu - 1) t^{\mu-2} U(x_1, \ldots, x_n). \qquad (8.39)$$

Полагая в (8.38) и (8.39) $t = 1$, получаем (8.36) и (8.37).

Замечание 8.16. Равенство (8.36) носит название ***формулы Эйлера*** и является не только необходимым, но и достаточным условием, для того чтобы функция U была однородной степени μ.

Следствие 8.1. *Полная эластичность однородной функции U равна степени однородности.*

Доказательство. Разделив обе части (8.36) на U, получим

$$\varepsilon_1(U) + ... + \varepsilon_n(U) = \mu, \tag{8.40}$$

следовательно,

$$E(U) = \mu.$$

Следствие 8.2. *Пусть $U(x)$ — однородная степени μ неоклассическая функция полезности. Тогда либо*

$$\mu > 0 \text{ и } U(x) > 0; \forall x > 0, \tag{8.41}$$

либо

$$\mu < 0 \text{ и } U(x) < 0; \forall x > 0. \tag{8.42}$$

Доказательство. Из (8.36) на основании (8.8) следует, что

$$\mu U(x) > 0; \forall x > 0, \tag{8.43}$$

что равносильно (8.41) и (8.42).

Следствие 8.3. *Пусть $U(x)$ — однородная степени μ строго вогнутая неоклассическая функция полезности, тогда*

$$\mu < 1. \tag{8.44}$$

Доказательство. В случае отрицательной определенности матрицы Гессе левая часть равенства (8.37) будет отрицательной, поэтому, принимая во внимание (8.43), приходим к (8.44).

8.2.3. Поверхности безразличия и предельная норма замещения

Определение 8.7. *Множество уровня функции полезности $U(x_1, ..., x_n)$ называется* ***поверхностью безразличия*** *(в случае $n = 2$ —* ***линией безразличия****).*

Другими словами, *поверхности безразличия* — это множество в R^n_+, определяемое условием

$$U(x_1, ..., x_n) = U_0, \tag{8.45}$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n = 0. \tag{8.46}$$

Замечание 8.17. Поверхности безразличия совпадают с классами эквивалентности отношения безразличия ~ и не зависят от выбора функции полезности.

Зафиксируем в уравнении (8.45) все переменные за исключением x_i и x_j. Тем самым мы зададим неявную функцию

$$x_j = f_i(x_i). \tag{8.47}$$

С учетом фиксации переменных соотношения (8.46) примут вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j + \frac{\partial U}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}x_i} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_j}}. \tag{8.48}$$

Определение 8.8. *Величина*

$$S_{ij} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_j}} \tag{8.49}$$

*называется **предельной нормой замещения** i-го блага j-ым благом.*

Предельная норма замещения S_{ij} показывает приближенно, на сколько единиц необходимо увеличить j-е благо при уменьшении на одну единицу i-го блага, для того чтобы полезность осталась на прежнем уровне.

Так, для функции Кобба — Дугласа (8.7)

$$S_{ij} = \frac{\alpha_i x_j}{\alpha_j x_i}, \tag{8.50}$$

а для линейной функции (8.5)

$$S_{ij} = \frac{a_i}{a_j}. \tag{8.51}$$

Замечание 8.18. Пусть $U(x)$ — неоклассическая функция полезности. Непосредственной проверкой легко убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$S_{ij} > 0; \tag{8.52}$$

$$S_{ij} S_{jk} = S_{ik}; \tag{8.53}$$

$$(S_{ij})^{-1} = S_{ji}. \tag{8.54}$$

Замечание 8.19. С геометрической точки зрения, как это вытекает из (8.48), предельная норма замещения S_{ij} равна с противоположным знаком тангенсу угла наклона к графику функции $x_j = f_i(x_i)$. А следовательно, в силу (8.40) касательные к линиям безразличия неоклассической функции полезности U имеют отрицательный наклон. Более того, если U строго вогнута, то линии безразличия будут строго выпуклы.

Замечание 8.20. Предельная норма замещения инвариантна относительно выбора функции полезности U, соответствующей отношению $\succcurlyeq$. Действительно, пусть $\hat{U} = f(U)$, тогда

$$\hat{S}_{ij} = \frac{\dfrac{df}{dU} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x_i}}{\dfrac{df}{dU} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x_j}} = S_{ij}.$$

В частности, как это следует из (8.49), все функции полезности вида

$$U(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0\right), \quad (a_i > 0, \ \forall i = 0, \ldots, n), \tag{8.55}$$

т.е. получающиеся из линейной функции при помощи непрерывного монотонного преобразования имеют постоянными все предельные нормы замещения. Справедливо и обратное: если у функции полезности все предельные нормы замещения постоянны, то она имеет вид (8.55).

8.3. Оптимизационная модель потребительского выбора

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что предпочтение потребителя задано при помощи строго выпуклой неоклассической функции полезности $U(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $I > 0$ — бюджет (доход) потребителя, а $p = (p_1, \ldots, p_n) > 0$ — вектор цен (где p_i — цена единицы i-го товара).

Предполагая, что потребитель действует рационально, т.е. стремится максимизировать полезность приобретаемого набора благ $x = (x_1, ..., x_n)$, не превышая при этом свой бюджет, мы приходим к следующей задачи выпуклого программирования, называемой ***задачей потребителя***:

$$U(x_1, ..., x_n) \to \max \tag{8.56}$$

при условии

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n \le I, \tag{8.57}$$

$$x_i \ge 0,\ i = 1, ..., n. \tag{8.58}$$

Определение 8.9. *Набор благ $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$, являющийся решением задачи потребителя (8.56)—(8.58), называется* ***оптимальным набором потребления или точкой спроса****, а множество*

$$B = \{\overline{x} \in R_+^n;\ \langle x, p\rangle \le I\} \tag{8.59}$$

— ***бюджетным (допустимым) множеством***.

Теорема 8.3. *Решение задачи потребителя* (8.56)—(8.58) *существует и единственно.*

Доказательство. Так как функция $U(x_1, ..., x_n)$ непрерывна, а бюджетное множество B замкнуто и ограничено, то на основании теоремы Вейерштрасса решение существует. Докажем его единственность. Предположим противное. Пусть $M = \max\limits_{x \in B} U$ и $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$, $y^* = (y_1^*, ..., y_n^*)$ — два решения задачи (8.56)—(8.58), т.е.

$$U(x^*) = U(y^*) = M. \tag{8.60}$$

Рассмотрим набор благ

$$z = \frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}y^*.$$

Очевидно, что $z \in B$, и в силу строгой вогнутости U имеем

$$U(z) = U\left(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}y^*\right) > \frac{1}{2}U(x^*) + \frac{1}{2}U(y^*) = M.$$

А это противоречит тому, что x^* и y^* являются точками максимума. Теорема доказана.

Замечание 8.21. Оптимальный набор потребления $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ удовлетворяет условию

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = I. \tag{8.61}$$

Другими словами, потребитель потратит весь свой бюджет. Действительно, если бы потребитель потратил не весь бюджет, то оставшуюся сумму он бы мог потратить на приобретение дополнительного количества благ и тем самым увеличить полезность. Поэтому вместо бюджетного ограничения (8.57) можно, не ограничивая общности, рассматривать бюджетное ограничение (8.61). Кроме того, можно считать, что $x > 0$, т.е. что потребитель приобретает все виды товаров (в противном случае можно уменьшить размерность R_+^n).

Решение задачи потребителя сводится к нахождению точки максимума (x^*, λ^*) функции Лагранжа:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = U(x_1, \ldots, x_n) - \lambda(x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n - I). \tag{8.62}$$

На основании теоремы Куна — Такера необходимые и достаточные условия для оптимального набора потребления имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}(x^*) = \dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x^*) - \lambda^* p_1 = 0; \\ \ldots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) = \dfrac{\partial U}{\partial x_n}(x^*) - \lambda^* p_n = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*) = -(x_1^* p_1 + x_2^* p_2 + \ldots + x_n^* p_n) = 0; \\ x_i^* > 0. \end{cases} \tag{8.63}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x^*) = \lambda^* p_1; \\ \ldots \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_n}(x^*) = \lambda^* p_n; \end{cases} \tag{8.64}$$

$$x_1^* p_1 + x_2^* p_2 + \ldots + x_n^* p_n = I; \tag{8.65}$$

$$x_i^* > 0. \tag{8.66}$$

Если ввести обозначения

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial U}{\partial x_n} \right), \quad p = (p_1, \ldots, p_n), \quad x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \ldots \\ x_n^* \end{pmatrix},$$

то соотношения (8.64)—(8.66) можно записать в компактной матричной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x^*) = \lambda^* p; \tag{8.67}$$

$$px^* = I; \tag{8.68}$$

$$x^* > 0. \tag{8.69}$$

Условимся всюду в дальнейшем вектор благ x^* считать вектором-столбцом, а вектор цен p и градиент функции — вектор-строками.

Теорема 8.4. *Для того чтобы набор благ* $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ *был оптимальным набором потребителя, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям* (8.64)—(8.66) *при некотором* λ^*.

Замечание 8.22. Принимая во внимание, что предельные полезности и цены всех благ положительны, из (8.64) следует, что

$$\lambda^* > 0. \tag{8.70}$$

Если выразить λ^* из уравнений (8.64), то получим

$$\begin{cases} \lambda^* = \dfrac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x^*)}{p_1}; \\ \ldots \\ \lambda^* = \dfrac{\dfrac{\partial U}{\partial x_n}(x^*)}{p_n}. \end{cases} \tag{8.71}$$

Следовательно,

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x^*)}{p_1} = \cdots = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_n}(x^*)}{p_n}. \tag{8.72}$$

На основании этих соотношений теорема 8.4 может быть переформулирована в следующей форме.

Следствие 8.4 (второй закон Госсена). *Набор благ* $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ *является оптимальным набором потребителя тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям* (8.65), (8.66), (8.72).

Замечание 8.23. Соотношения (8.65), (8.66), (8.72) показывают, что с геометрической точки зрения нахождение оптимального набора потребителя равносильно отысканию точки, в которой поверхность безразличия касается бюджетного множества.

С экономической точки зрения равенства (8.72) означают, что в оптимальном наборе отношение предельной полезности блага к его цене одинаково для всех видов благ (и равно λ^*, это проясняет смысл вспомогательной переменной λ). Если бы (8.71) не имели места, то потребитель имел бы возможность увеличить полезность путем перераспределения бюджета в пользу блага, имеющего наибольшее отношения предельной полезности к цене.

Замечание 8.24. Пусть U — однородная функция полезности степени μ, тогда, подставляя выражения для предельных полезностей из (8.64) в формулу Эйлера (8.36), находим

$$\lambda^*(x_1^* p_1 + x_2^* p_2 + \ldots + x_n^* p_n) = \mu U(x^*).$$

Принимая во внимание (8.65), получаем

$$\lambda^* = \mu \frac{U(x^*)}{I}, \tag{8.73}$$

или в силу (8.72)

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}(x^*)}{p_1} = \cdots = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_n}(x^*)}{p_n} = \mu \frac{U(x^*)}{I}. \tag{8.74}$$

Замечание 8.25. Равенства (8.72) могут быть записаны в эквивалентной форме:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}(x^*)}{\frac{\partial U}{\partial x_j}(x^*)} = \frac{p_i}{p_j}, \tag{8.75}$$

т.е.

$$S_{ij}(x^*) = \frac{p_i}{p_j}. \tag{8.76}$$

Пример 8.4. Найти оптимальный набор потребителя с бюджетом $I = 1000$ и функцией полезности $U = 2\ln x_1 + 3\ln x_2$ при ценах $p_1 = 5$ и $p_2 = 4$.

Решение. Подставляя данные нашей задачи в (8.65), (8.66), (8.72), имеем:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 1000; \\ \dfrac{2}{5x_1} = \dfrac{3}{4x_2}; \\ x_1 > 0; \\ x_2 > 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим

$$\begin{cases} x_1^* = 80; \\ x_2^* = 150. \end{cases}$$

Следствие 8.5. *Пусть для i-го блага выполняются условия*

$$\varepsilon_i(U) = \sigma E(U), \tag{8.77}$$

где σ — некоторая постоянная,
тогда

$$p_i x_i^* = \sigma I, \tag{8.78}$$

т.е. σ — это часть бюджета, которую потребитель потратит на покупку i-го блага.

Доказательство. В силу (8.28), (8.29) соотношения (8.77) принимают вид

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_i} x_i}{U} = \sigma \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1} x_1 + \cdots + \dfrac{\partial U}{\partial x_n} x_n}{U}. \tag{8.79}$$

В силу (8.64) из (8.79) следует, что

$$\lambda^* p_i x_i^* = \sigma \lambda^* (x_1^* p_1 + x_2^* p_2 + \ldots + x_n^* p_n).$$

Сокращая на λ^* и учитывая (8.64), получаем (8.78).

Замечание 8.26. Условия следствия 8.5 выполнены, если U — однородная функция степени μ, у которой эластичность по i-му благу постоянна. В этом случае соотношения (8.78) принимают вид:

$$p_i x_i^* = \frac{\varepsilon_i}{\mu} I. \tag{8.80}$$

В частности, если U — функция полезности Кобба — Дугласа, то соотношения (8.80) имеют место для любого блага, при этом $\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ и $\varepsilon_i = \alpha_i$, следовательно,

$$p_i x_i^* = \frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} I, \ (\forall i = 1, ..., n). \qquad (8.81)$$

Пример 8.5. Найти оптимальный набор потребителя с бюджетом $I = 2000$ и функцией полезности $U = x_1^{0,5} x_2^{0,3}$ при ценах $p_1 = 2$ и $p_2 = 10$.

Решение. Имеем $\alpha_1 = 0,5$; $\alpha_2 = 0,3$, $\mu = 0,8$. Подставляя данные нашей задачи в (8.81), получаем:

$$\begin{cases} 2x_1^* = \dfrac{0,5}{0,8} \cdot 2000; \\ 10x_2^* = \dfrac{0,3}{0,8} \cdot 2000; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^* = 625; \\ x_2^* = 75. \end{cases}$$

Замечание 8.27. Соотношения (8.77) (или в развернутом виде (8.79)) инвариантны относительно преобразования вида $\widehat{U} = f(U)$. Следовательно, равенства (8.81) справедливы для всех функций полезности вида $\widehat{U} = f(U)$, где U — функция Кобба — Дугласа. Так как функция полезности из примера 8.4 может быть записана как $U = \ln(x_1^2 x_2^3)$, то нахождение оптимального набора можно получит более простым способом, применив формулы (8.81), а именно:

$$\begin{cases} 5x_1^* = \dfrac{2}{5} 1000; \\ 4x_2^* = \dfrac{3}{5} 1000; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^* = 80; \\ x_2^* = 150. \end{cases}$$

8.4. Функции спроса и их свойства

8.4.1. Функции спроса и однородность

Оптимальный набор потребителя $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ зависит от изменения цен на блага и бюджета потребителя. Другими словами, x_i^* является функцией от p_i и I, называемой ***функцией спроса на i-е благо*** и обозначаемой

$$x_i^* = D_i(p_1, ..., p_n, I) \ (\forall i = 1, ..., n). \tag{8.81}$$

Вектор $x^*(p, I)$ будем называть ***вектором спроса***. Аналогично

$$\lambda^* = \Lambda(p_1, ..., p_n, I) \ (\forall i = 1, ..., n). \tag{8.82}$$

Из формул (8.80) легко найти функции спроса для функции полезности Кобба — Дугласа:

$$x_i^*(p_1, ..., p_n, I) = \frac{\alpha_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k} \frac{I}{p_i}. \tag{8.83}$$

Из этих соотношений видно, что значение x_i^* не меняется при пропорциональном увеличении цен и бюджета. Подобное свойство имеет место и в общем случае.

Теорема 8.5. *Функции $x_i^* = D_i(p, I)$ и $\lambda^* = \Lambda(p, I)$ являются однородными функциями соответственно нулевой и минус первой степени, т.е. для любого $\forall t > 0$*

$$D_i(tp_1, ..., tp_n, tI) = D_i(p_1, ..., p_n, I), \ (\forall i = 1, ..., n); \tag{8.84}$$

$$\Lambda(tp_1, ..., tp_n, tI) = t^{-1}\Lambda(p_1, ..., p_n, I). \tag{8.85}$$

Доказательство. Пусть (x^*, λ^*) — решение системы (8.67)—(8.69), соответствующее ценам p и бюджету I. При непосредственной проверке нетрудно убедится, что при любом $t > 0$ пара $(x^*, t^{-1}\lambda^*)$ является решением этой системы, соответствующим ценам tp и бюджету tI. Это доказывает теорему 8.5.

Замечание 8.28. Уравнене (8.84) означает, что функции спроса не зависят от масштаба цен, т.е. от выбора единицы измерения.

Замечание 8.29. Соотношение (8.81) с учетом (8.84) может быть записано в виде

$$x_i^* = d_i(q_1, ..., q_n) \ (\forall i = 1, ..., n), \tag{8.86}$$

где

$$q_i = \frac{p_i}{I} \tag{8.87}$$

— относительные цены:

$$d_i(q_1, \ldots, q_n) = D_i\left(\frac{p_1}{I}, \ldots, \frac{p_n}{I}, 1\right). \tag{8.88}$$

Например, для функции полезности Кобба — Дугласа

$$x_i^*(q_1, \ldots, q_n) = \frac{\alpha_i}{q_i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k}. \tag{8.89}$$

Замечание 8.30. Уравнения (8.64), (8.65), записанные в относительных ценах, имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x^*) = l^* q_1; \\ \ldots \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_n}(x^*) = l^* q_n; \end{cases} \tag{8.90}$$

$$x_1^* q_1 + x_2^* q_2 + \ldots + x_n^* q_n = 1, \tag{8.91}$$

где

$$l^* = I\lambda^*, \tag{8.92}$$

или в матричной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x^*) = l^* q; \tag{8.93}$$

$$qx^* = 1. \tag{8.94}$$

Теорема 8.6. *Если $U(x_1, \ldots, x_n)$ — однородная степени μ функция полезности, то функции $x_i^* = d_i(q, I)$ и $l^* = l(q, I)$ также являются однородными соответственно степени -1 и $-\mu$, т.е. для любого $t > 0$*

$$d_i(tq_1, \ldots, tq_n) = t^{-1} d_i(q_1, \ldots, q_n); \tag{8.95}$$

$$l(tq_1, \ldots, tq_n) = t^{\mu} l(q_1, \ldots, q_n). \tag{8.96}$$

Доказательство. Пусть (x^*, l^*) — положительное решение системы (8.93), (8.94), соответствующее ценам q. Покажем, что для любого $t > 0$ пара $(t^{-1}x^*, t^{-\mu}l^*)$ является положительным решением этой системы, соответствующим ценам tq. Справедливость данного утверждения для уравнения (8.94) очевидна, для уравнения (8.93) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x}(t^{-1}x^*) = (t^{-\mu}I^*)(tq). \tag{8.97}$$

Так как U — однородная функция степени μ, то $\frac{\partial U}{\partial x}$ имеет степень однородности ($\mu - 1$), поэтому из (8.96) получаем

$$t^{1-\mu}\frac{\partial U}{\partial x}(x^*) = t^{1-\mu}I^*q,$$

что равносильно (8.94). Следовательно, $(t^{-1}x^*, t^{-\mu}I^*)$ является решением системы (8.93), (8.94). Теорема доказана.

Замечание 8.31. Формулы (8.95) показывают, что при одновременном увеличении в t раз относительных цен (в частности, это произойдет при уменьшении бюджета в t раз) спрос на все блага уменьшится в t раз.

Замечание 8.32. Так как функции спроса инвариантны относительно монотонного непрерывного преобразования функции полезности вида, то соотношения (8.95) справедливы для всех функции вида $f(U)$, где U — однородная функция степени μ.

8.4.2. Реакция потребителя на изменения бюджета

Соотношение (8.84) описывает реакцию потребителя при одновременном пропорциональном изменении цены и бюджета. Чтобы охарактеризовать эту реакцию в общем случае, необходимо исследовать частные производные функций спроса. Исследуем сначала влияние бюджета на потребительский спрос. Продифференцируем уравнения (8.64), (8.65) по I:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k^*}{\partial I} = \frac{\partial \lambda^*}{\partial I}\cdot p_j; \tag{8.98}$$

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial I}p_1 + \ldots + \frac{\partial x_n^*}{\partial I}p_n = 1, \tag{8.99}$$

или в матричной форме:

$$H\frac{\partial x^*}{\partial I} - p^T\frac{\partial \lambda^*}{\partial I} = 0; \tag{8.100}$$

$$p\frac{\partial x^*}{\partial I}=1, \tag{8.101}$$

где

$$\frac{\partial x^*}{\partial I}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_1^*}{\partial I}\\ \dots \\ \dfrac{\partial x_n^*}{\partial I}\end{pmatrix}.$$

Уравнения (8.100), (8.101) могут быть также записаны в блочно-матричном виде:

$$\begin{pmatrix}0 & -p\\ -p^T & H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial I}\\ \dfrac{\partial x^*}{\partial I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}. \tag{8.102}$$

Замечание 8.33. Так как матрица Гессе H отрицательно определена и поэтому невырождена, то невырождена и матрица

$$\widehat{H}=\begin{pmatrix}0 & -p\\ -p^T & H\end{pmatrix}. \tag{8.103}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что обратной к ней является матрица

$$\widehat{H}^{-1}=\begin{pmatrix}h & h\cdot pH^{-1}\\ h\cdot H^{-1}p^T & h\cdot(H^{-1}p^T)(pH^{-1})+H^{-1}\end{pmatrix}, \tag{8.104}$$

где

$$h=-(pH^{-1}p^T)^{-1}. \tag{8.105}$$

Решая матричное уравнение (8.102), находим

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial I}\\ \dfrac{\partial x^*}{\partial I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h & h\cdot pH^{-1}\\ h\cdot H^{-1}p^T & h\cdot(H^{-1}p^T)(pH^{-1})+H^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}. \tag{8.106}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\lambda^*}{\partial I} = -h; \qquad (8.107)$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial I} = -h \cdot H^{-1} p^T. \qquad (8.108)$$

Замечание 8.34. В силу отрицательной определенности матрицы Гессе из (8.105) вытекает, что

$$h > 0. \qquad (8.109)$$

Принимая это во внимание, из (8.107) получаем

$$\frac{\partial\lambda^*}{\partial I} < 0. \qquad (8.110)$$

Определение 8.10. *Благо называется* ***ценным***, *если при увеличении бюджета спрос на него увеличивается, т.е.*

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0. \qquad (8.111)$$

и ***малоценным*** *— в противном случае.*

Теорема 8.7. *Существует хотя бы одно ценное благо.*

Доказательство. Предположим противное, что все блага являются малоценными, т.е.

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial I} \le 0; \forall i.$$

Тогда

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial I} p_1 + \ldots + \frac{\partial x_n^*}{\partial I} p_n \le 0.$$

А это противоречит (8.99). Теорема доказана.

8.4.3. Реакция потребителя на изменение цен

Исследуем теперь влияние цен на потребительский выбор. Продифференцируем уравнения (8.64). (8.65) по p_i:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k^*}{\partial p_i} = \frac{\partial\lambda^*}{\partial p_i} \cdot p_j + \lambda^* \delta_{ij}; \qquad (8.112)$$

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_i} p_1 + \ldots + \frac{\partial x_n^*}{\partial p_i} p_n + x_i^* = 0, \qquad (8.113)$$

где δ_{ij} — компоненты единичной матрицы E (*символ Кронекера*):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases}$$

Запишем эти уравнения в матричной форме:

$$p\frac{\partial x^*}{\partial p} = -(x^*)^T; \tag{8.114}$$

$$H\frac{\partial x^*}{\partial p} - p^T\frac{\partial \lambda^*}{\partial p} = \lambda^* E, \tag{8.115}$$

где

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_n} \\ \cdots & & \cdots \\ \dfrac{\partial x_n^*}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n^*}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

— матрица Якоби, а $\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} \end{pmatrix}$. В матричной форме уравнения (8.114), (8.115) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{*T} \\ \lambda^* E \end{pmatrix}. \tag{8.116}$$

Решая уравнение (8.116), получаем

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & h \cdot pH^{-1} \\ h \cdot H^{-1}p^T & h \cdot (H^{-1}p^T)(pH^{-1}) + H^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{*T} \\ \lambda^* E \end{pmatrix}. \tag{8.117}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial p} = h(x^*)^T + \lambda^* h(pH^{-1}); \tag{8.118}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = h\cdot(H^{-1}p^T)(x^*)^T + \lambda^* h\cdot(H^{-1}p^T)(pH^{-1}) + \lambda^* H^{-1}. \qquad (8.119)$$

Замечание 8.35. Матричные уравнения (8.102) и (8.116) могут быть объединены в одно уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial I} & \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial I} & \dfrac{\partial x^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x^{*T} \\ 0 & \lambda E \end{pmatrix}, \qquad (8.120)$$

которое называют ***основным матричным уравнением*** теории потребления.

8.4.4. Компенсационный рост цены и уравнение Слуцкого

Определение 8.11. *Рост цены на благо, при котором величина функции полезности остается неизменной за счет соответствующего увеличения бюджета, называется* ***компенсационным****.*

Компенсационные производные (т.е. производные по переменной, по которой осуществляется компенсационный рост) обозначаются $\left(\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}}$ и $\left(\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}}$.

С геометрической точки зрения компенсационный рост характеризуется тем, что бюджетная плоскость меняет свое положение, сохраняя касание к той же самой поверхности безразличия.

Лемма 8.1. *Имеют место следующие соотношения:*

$$p\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\text{комп}} = 0; \qquad (8.121)$$

$$\frac{\partial I}{\partial p} = (x^*)^T; \qquad (8.122)$$

$$H\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\text{комп}} - p^T\left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p}\right)_{\text{комп}} = \lambda^* E; \qquad (8.123)$$

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)^T_{\text{комп}} H\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\text{комп}} = \lambda^*\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)^T_{\text{комп}}; \qquad (8.124)$$

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)^T_{\text{комп}} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\text{комп}}, \tag{8.125}$$

где $\dfrac{\partial I}{\partial p} = \left(\dfrac{\partial I}{\partial p_1} \;\cdots\; \dfrac{\partial I}{\partial p_n}\right)$.

Доказательство.

1. Пусть осуществляется компенсационный рост на i-е благо. Он характеризуется следующими условиями:

$$I = I(p_i); \tag{8.126}$$

$$U(x^*) = M = \text{const}. \tag{8.127}$$

Дифференцируя (8.127) по p_i, находим

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n}\left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} = 0. \tag{8.128}$$

Принимая во внимание (8.64), получаем

$$\lambda^*\left(p_1\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} + \ldots + p_n\left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}}\right) = 0.$$

Сокращая на λ^*, приходим к координатной форме записи соотношений (8.121):

$$p_1\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} + \ldots + p_n\left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} = 0. \tag{8.129}$$

2. Продифференцируем теперь (8.65) по p_i, с учетом (8.126) имеем

$$p_1\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} + \ldots + p_n\left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} + x_i^* = \frac{\partial I}{\partial p_i}.$$

Отсюда в силу (8.129) следует

$$\frac{\partial I}{\partial p_i} = x_i^*, \tag{8.130}$$

что доказывает справедливость (8.122)

3. Продифференцировав (8.64) по p_i, получаем координатную форму записи (8.123):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\partial x_k^*}{\partial p_i} \right)_{\text{комп}} = \left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_i} \right)_{\text{комп}} p_j + \lambda^* \delta_{ij}. \tag{8.131}$$

4. Умножая (8.123) слева на $\left(\frac{\partial x^*}{\partial p} \right)_{\text{комп}}^T$ и принимая во внимание (8.121), получаем (8.124).

5. Транспонируя (8.124) и учитывая симметричность матрицы Гессе ($H^T = H$), получаем (8.125).

Лемма доказана.

Замечание 8.36. Подобно вышеприведенным преобразованием уравнения (8.121) могут быть объединены в блочно-матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p} \right)_{\text{комп}} \\ \left(\frac{\partial x^*}{\partial p} \right)_{\text{комп}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^* E \end{pmatrix}. \tag{8.132}$$

Отсюда, после стандартных рассуждений, получаем:

$$\left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p} \right)_{\text{комп}} = \lambda^* h(p^T H^{-1}); \tag{8.133}$$

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p} \right)_{\text{комп}} = \lambda^* h \cdot (H^{-1} p)(p^T H^{-1}) + \lambda H^{-1}. \tag{8.134}$$

Теорема 8.8. *При компенсационном росте цены на i-е благо спрос на это благо уменьшается, т.е.*

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} \right)_{\text{комп}} < 0. \tag{8.135}$$

Доказательство. Запишем соотношение (8.124) в координатной форме:

$$\sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_m \partial x_k} \left(\frac{\partial x_k^*}{\partial p_i} \right)_{\text{комп}} \left(\frac{\partial x_m^*}{\partial p_j} \right)_{\text{комп}} = \lambda^* \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} \right)_{\text{комп}} \tag{8.136}$$

Положим в (8.36) $j = i$, имеем

$$\sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_m \partial x_k} \left(\frac{\partial x_k^*}{\partial p_i} \right)_{\text{комп}} \left(\frac{\partial x_m^*}{\partial p_i} \right)_{\text{комп}} = \lambda^* \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} \right)_{\text{комп}}. \tag{8.137}$$

Так как матрица Гессе отрицательно определена, то левая часть равенства (8.37) меньше нуля. Учитывая, что $\lambda^* > 0$, получаем (8.135).

Определение 8.12. *Говорят, что i-е и j-е блага образуют* ***взаимодополнительную пару***, *если при компенсационном росте цены на i-е благо спрос на j-е благо падает, т.е.*

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} < 0. \tag{8.138}$$

Если же

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} > 0, \tag{8.139}$$

то блага называются ***взаимозаменительными***.

Замечание 8.37. Данное определение корректно, так как в силу (8.25)

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}}, \tag{8.140}$$

а следовательно, $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}}$ и $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}}$ имеют одинаковый знак.

Следствие 8.6. *Для любого блага существует хотя бы одно взаимозаменительное благо.*

Доказательство. Предположим противное: пусть для у i-го блага не существует ни одного взаимозаменительного блага, тогда

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} \le 0;\ i \ne j.$$

Тогда с учетом (8.135) и положительности всех цен получаем

$$\sum_{i=1}^{n} p_j \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} < 0.$$

А это противоречит (8.129). Следствие доказано.

Теорема 8.9. *Имеет место уравнение Слуцкого*

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\text{комп}} - \left(\frac{\partial x^*}{\partial I}\right)(x^*)^T. \tag{8.141}$$

Доказательство. При компенсационном росте цены на i-е благо бюджет есть функция от p_i, т.е. $I = I(p_i)$. Следовательно,

$$x_j^* = x_j^*\left(p_1, \cdots, p_n, I(p_i)\right). \tag{8.142}$$

Дифференцируя эти соотношения по p_i, находим

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} = \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j^*}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial p_i}.$$

Отсюда, принимая во внимание (8.130), получаем

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} - \frac{\partial x_j^*}{\partial I}x_i^*. \tag{8.141}$$

Теорема доказана.

Первое слагаемое $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}}$ в правой части *уравнения Слуцкого* называют ***эффектом замены***, а второе слагаемое $\left(-\frac{\partial x_j^*}{\partial I}x_i^*\right)$ — ***эффектом дохода***.

Замечание 8.38. Уравнение Слуцкого может также получено из (8.134) на основании (8.108) и (8.119).

Следствие 8.7. *При повышении цены на ценное благо спрос на него уменьшается, т.е.*

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0. \tag{8.142}$$

Доказательство. Положим в (8.141) $i = j$, имеем

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} - \frac{\partial x_i^*}{\partial I}x_i^*. \tag{8.143}$$

Так как благо ценное, то $\frac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0$. Принимая во внимание, что $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} < 0$ и $x_i^* > 0$, из (8.143) получаем (8.142). Следствие доказано.

8.4.5. Косвенная функция полезности и ее свойства

Определение 8.13. *Функция*

$$U^*(p, I) = U\left(x^*(p, I)\right) \tag{8.144}$$

называется косвенной функцией полезности.

Пример 8.6. Найти косвенную функцию полезности для функции Кобба — Дугласа.

Решение. Имеем

$$U(x_1, \dots, x_n) = A\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i};$$

$$x_i^* = \frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\frac{I}{p_i}.$$

Отсюда

$$U^*(p_1, \dots, p_n, I) = A^*\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{I}{p_i}\right)^{\alpha_i}, \qquad (8.145)$$

где $A^* = A\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\right)^{\alpha_i}$.

Лемма 8.2. *Справедливы следующие соотношения*:

$$\frac{\partial U^*}{\partial I} = \lambda^*; \qquad (8.146)$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial p} = -\lambda^*(x^*)^T. \qquad (8.147)$$

Доказательство. Продифференцируем U^* по I, находим

$$\frac{\partial U^*}{\partial I} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial I} = \lambda^* p\frac{\partial x^*}{\partial I}.$$

Отсюда с учетом (8.101) получаем (8.146).

Аналогично имеем

$$\frac{\partial U^*}{\partial p} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial p} = \lambda^* p\frac{\partial x^*}{\partial p},$$

откуда в силу (8.112) следует (8.147). Лемма доказана.

Замечание 8.39. Равенство показывает, что λ^* есть ***предельная полезность бюджета*** (***денег***). Причем, так как $\frac{\partial\lambda^*}{\partial I} < 0$, то

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial I^2} < 0. \qquad (8.148)$$

Следовательно, с ростом бюджета дополнительная полезность каждой следующей денежной единицы уменьшается.

Теорема 8.10. *Косвенная функция полезности $U^*(p_1, \ldots, p_n, I)$ является возрастающей функцией от бюджета и убывающей от цен на блага*:

$$\frac{\partial U^*}{\partial I} > 0; \tag{8.149}$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial p} > 0. \tag{8.150}$$

Доказательство. Справедливость (8.149) и (8.150) вытекает соответственно из (8.147) и (8.148) с учетом того, что $\lambda^* > 0$ и $x^* > 0$.

Теорема 8.11. *Косвенная функция полезности $U^*(p_1, \ldots, p_n, I)$ является однородной функцией нулевой степени, т.е. для любого $t > 0$*

$$U^*(tp_1, \ldots, tp_n, tI) = U^*(p_1, \ldots, p_n, I). \tag{8.151}$$

Доказательство. Принимая во внимание нулевую однородность функции спроса x^*, имеем для любого $t > 0$

$$U^*(tp, tI) = U\left(x^*(tp, tI)\right) = U\left(x^*(p, I)\right) = U^*(p, I),$$

что доказывает теорему.

Таким образом, косвенную функцию полезности можно, как и функции спроса, рассматривать как в номинальных, так и в относительных ценах. Так, косвенная функция полезности для предпочтения Кобба — Дугласа в относительных ценах имеет вид

$$U^*(q_1, \ldots, q_n) = A^* \prod_{i=1}^{n} q^{-\alpha_i}. \tag{8.152}$$

Теорема 8.12. *Косвенная функция полезности $U^*(q_1, \ldots, q_n)$ обладает следующими свойствами*:

1) *убывает по любому аргументу*:

$$\frac{\partial U^*}{\partial q} < 0; \tag{8.153}$$

2) *если функция полезности $U(x_1, \ldots, x_n)$ является однородной степени* μ, то *$U^*(q_1, \ldots, q_n)$ есть однородная функция степени* $-\mu$.

Доказательство. 1. Аналогично преобразованиям при доказательстве леммы 8.2 находим

$$\frac{\partial U^*}{\partial q} = -l^*(x^*)^T. \tag{8.154}$$

Отсюда следует (8.153).

2. Принимая во внимание, что $x^*(q)$ имеет минус первую степень однородности, получаем

$$U^*(tq)=U\left(x^*(tq)\right)=U\left(t^{-1}x^*(q)\right)=t^{-\mu}U\left(x^*(q)\right)=t^{-\mu}U^*(q),$$

что доказывает теорему 8.12.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Перечислите аксиомы, которым удовлетворяет отношение предпочтения. Приведите пример отношения предпочтения, заданного на R_+^n.
2. Как определяется отношение безразличия на R_+^n? Перечислите его свойства.
3. Сформулируйте аксиому ненасыщаемости для отношения предпочтения и дайте ее экономическую трактовку. Что такое точка насыщения?
4. Приведите пример отношения предпочтения, не являющегося непрерывным.
5. Дайте определение и приведите пример функции полезности.
6. Может ли функция полезности быть отрицательной? Однозначно ли определяется функция полезности для заданного предпочтения?
7. Дайте определение и приведите пример неоклассической функции полезности.
8. Сформулируйте первый закон Госсена.
9. Является ли линейная функция полезности неоклассической?
10. Будет ли сумма двух неоклассических функций полезности неоклассической функцией полезности?
11. Что такое предельная полезность? В чем ее экономический смысл? Может ли предельная полезность быть отрицательной?
12. Что такое средняя полезность? В чем ее экономический смысл? Может ли предельная полезность превышать среднюю полезность?
13. Дайте определение коэффициента эластичности функции $U(x_1, \ldots, x_n)$ по i-му аргументу. Чему равны коэффициенты эластичности для функции Кобба — Дугласа?
14. Дайте определение полной эластичности функции. Как связана полная эластичность функции со степенью однородности?

15. Дайте определение однородной функции и докажите формулу Эйлера. Приведите пример однородной функции полезности.
16. Как связана степень однородности функции Кобба — Дугласа с ее вогнутостью?
17. Дайте определение поверхности безразличия. Найдите и изобразите графически линии безразличия для линейной функции, функции Леонтьева и функции Кобба — Дугласа.
18. Дайте определение предельной нормы замещения и объясните ее геометрический и экономический смысл.
19. Что такое бюджетное ограничение? Дайте экономическую и геометрическую трактовку этого понятия.
20. Сформулируйте задачу потребителя. Что называется оптимальным набором потребления? Может ли задача потребителя иметь несколько решений?
21. Дайте геометрическую интерпретацию решения задачи потребителя.
22. Сформулируйте второй закон Госсена и дайте его экономическую интерпретацию.
23. Найдите оптимальный набор потребителя с бюджетом $I = 5000$ и функцией полезности $U = x_1^{0,5} x_2^{0,3}$ при ценах $p_1 = 5$ и $p_2 = 20$.
24. Дайте определение функции спроса и сформулируйте ее свойства.
25. Какое благо называется ценным? Как изменяется спрос на ценное благо при росте цены на это благо?
26. Что такое компенсационный рост цены на благо? Дайте геометрическую трактовку компенсационному росту цены на благо.
27. Как изменяется спрос на благо при компенсационном росте цены на это благо?
28. Запишите уравнение Слуцкого и охарактеризуйте экономический смысл входящих в него слагаемых.
29. Какие блага называются взаимозаменительными (взаимодополнительными)?
30. Дайте определение косвенной функции полезности и перечислите ее свойства.

ГЛАВА 9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВА

9.1. Пространство ресурсов и производственная функция

9.1.1. Определение производственной функции

Производством называется процесс изготовления какой-либо продукции. В процессе производства *производственными единицами* (фирмами, предприятиями, отраслями, странами) затрачиваются определенные *ресурсы* (*факторы производства*). К ним относятся: труд, капитал, сырье, энергия, земля.

Пусть в производстве используется n видов ресурсов в объемах $x_1, \ldots, x_n$, а Q — количество выпускаемой продукции. Тогда с формальной точки зрения производство можно рассматривать как некоторую функцию $Q(x_1, \ldots, x_n)$, задающую соответствие между *вектором ресурсов* (*производственным планом*) $x = (x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащего *пространству ресурсов* R_+^n, и объемом выпускаемой продукции Q. Эта функция должна удовлетворять естественным (с экономической точки зрения) условиям, которые мы сформулируем в следующем определении.

Определение 9.1. *Производственной функцией* называется непрерывная, определенная на R_+^n функция $Q(x)$, удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам):

$$Q(x) \geq 0 \ (\forall x \in R_+^n); \tag{9.1}$$

$$Q(0) = 0; \tag{9.2}$$

$$Q(x) \geq Q(y), \text{ если } x \geq y \ (\forall x, y \in R_+^n). \tag{9.3}$$

Замечание 9.1. Условие (9.1) носит название аксиомы *неотрицательности выпуска*. Условие (9.2) говорит о том, что производство невозможно в отсутствии ресурсов. Условие (9.3) (*аксиома монотонности*) показывает, что $Q(x_1, \ldots, x_n)$ является неубывающей по любому из аргументов.

Приведем некоторые наиболее часто встречающиеся типы производственных функций:

1) *линейная производственная функция*

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ (a_i > 0\ \forall i = 0, ..., n); \tag{9.4}$$

2) *производственная функция Леонтьева (функция затраты — выпуск)*

$$Q(x)=\min\left\{\frac{x_1}{a_1}; ...; \frac{x_n}{a_n}\right\},\ a_i > 0\ (\forall i). \tag{9.5}$$

Коэффициенты a_i в (9.5) суть столбцы матрицы прямых затрат в модели Леонтьева (см. главу 2);

3) *производственная функция Кобба — Дугласа*

$$Q(x)=Ax_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},\ A, \alpha_i > 0\ (\forall i). \tag{9.6}$$

Замечание 9.2. Приведенные выше производственные функции уже встречались нам в теории потребления. Это не удивительно, так как производственную функцию можно считать функцией полезности производителя, выступающего как потребитель ресурсов. Полезность в этом случае определяется количеством выпускаемой продукции.

Замечание 9.3. Наибольшее распространение получили так называемые двухфакторные производственные функции, т.е. функции вида $Q(K, L)$, где K — величина затраченного капитала (основных фондов), а L — величина затраченного труда.

Замечание 9.4. Ресурс называется *существенным*, если в его отсутствии производство невозможно. Таковым ресурсом, например, является труд. Условие (9.2) часто усиливают требованием, чтобы все ресурсы были существенными. Данному требованию удовлетворяют функции Леонтьева и Кобба — Дугласа.

9.1.2. Экономико-математические характеристики производственной функции

Рассмотрим основные экономико-математические характеристики производственной функции, многие из которых уже нам знакомы и подробно изучены в теории потребления:

1) *средняя производительность i-го ресурса*

$$q_i=\frac{Q}{x_i}, \tag{9.7}$$

в частности

$$q_L = \frac{Q}{L} \tag{9.8}$$

— *средняя производительность труда,*

$$q_K = \frac{Q}{K} \tag{9.9}$$

— *средняя фондоотдача;*

2) *предельная производительность i-го ресурса*

$$m_i = \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \tag{9.10}$$

в частности

$$m_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \tag{9.11}$$

— *предельная производительность труда,*

$$m_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \tag{9.12}$$

— *предельная фондоотдача;*

3) *коэффициент эластичности по i-му ресурсу*

$$\varepsilon_i(Q) = \frac{\partial Q}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{Q}; \tag{9.13}$$

4) *коэффициент полной эластичности функции*

$$E(Q) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(Q); \tag{9.14}$$

5) *предельная норма замещения i-го ресурса j-м ресурсом*

$$S_{ij} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial Q}{\partial x_j}}; \tag{9.15}$$

6) *фондовооруженность*

$$k = \frac{K}{L}. \tag{9.16}$$

Поверхность уровня производственной функции называется *изоквантой*. Роль изоквант в теории производства аналогична роли кривых безразличия в теории потребления.

9.1.3. Неоклассическая производственная функция

Определение 9.2. *Производственная функция $Q(x_1, ..., x_n)$, имеющая непрерывные частные производные до второго порядка включительно, называется **неоклассической**, если наряду с условиями* (9.1) *и* (9.2) *она удовлетворяет следующим соотношениям (аксиомам) для любых $x > 0$ из R^n_+:*

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x) > 0, ..., \frac{\partial Q}{\partial x_n}(x) > 0; \tag{9.17}$$

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x) = +\infty, ..., \lim_{x_n \to 0} \frac{\partial Q}{\partial x_n}(x) = +\infty; \tag{9.18}$$

$$\lim_{x_1 \to +\infty} \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x) = 0, ..., \lim_{x_n \to +\infty} \frac{\partial Q}{\partial x_n}(x) = 0; \tag{9.19}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}(x) < 0, ..., \frac{\partial^2 Q}{\partial x_n^2}(x) < 0. \tag{9.20}$$

Замечание 9.5. Соотношения (9.17)—(9.20) в точности воспроизводят аксиомы неоклассической функции полезности, подробно изученные нами в теории потребления.

Замечание 9.6. Часто на неоклассическую производственную функцию дополнительно накладывают условие однородности

$$Q(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^{\mu} Q(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Так как Q — неотрицательна, то из формулы Эйлера (8.36) в силу (9.17) следует, что $\mu > 0$. Степень однородности μ называют *коэффициентом отдачи от расширения масштаба производства*. При этом в случае, когда $0 < \mu < 1$, говорят об *убывающей отдаче*, при $\mu > 1$ — о *возрастающей отдаче*, а при $\mu = 1$ — о *постоянной отдаче*.

Приведем примеры неоклассических двухфакторных производственных функций.

1. *Производственная функция Кобба — Дугласа*

$$Q(K; L) = AK^{\alpha}L^{\beta}, (A > 0; \alpha > 0, \beta > 0) \tag{9.21}$$

является неоклассической при условии, что $\alpha < 1$ и $\beta < 1$.

2. *Производственная функция CES*:

$$Q(K, L) = A\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{\frac{-\mu}{\rho}} \quad (A > 0;\ \delta > 0;\ 0 < \mu < 1;\ \rho > -1). \tag{9.22}$$

3. *Производственная функция с полным взаимозамещением ресурсов*

$$Q(K, L) = aK^{\mu} + bL^{\mu} \quad (a > 0;\ b > 0;\ 0 < \mu < 1). \tag{9.23}$$

9.2. Оптимизационная задача производителя

9.2.1. Оптимальный производственный план

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что производственная функция $Q(x_1, ..., x_n)$ является неоклассической и строго вогнутой. Пусть p — цена единицы выпускаемой продукции, а $w = (w_1, ..., w_n) > 0$ — вектор цен на ресурсы. Тогда

$$I(x_1, ..., x_n) = pQ(x_1, ..., x_n) \tag{9.24}$$

— *функция дохода*;

$$C(x_1, ..., x_n) = w_1x_1 + ... + w_nx_n \tag{9.25}$$

— *функция затрат* (*издержек*);

$$\Pi(x_1, ..., x_n) = pQ(x_1, ..., x_n) - w_1x_1 - ... - w_nx_n \tag{9.26}$$

— *функция прибыли*.

Производитель стремится максимизировать прибыль, т.е. решает следующую оптимизационную задачу, называемую *задачей производителя* (*фирмы*):

$$\Pi(x_1, ..., x_n) \to \max \tag{9.27}$$

при условии

$$x_i \geq 0,\ i = 1, ..., n. \tag{9.28}$$

Замечание 9.7. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $x > 0$, т.е. что производитель использует в производстве все виды ресурсов (в противном случае можно уменьшить размерность R_+^n).

Определение 9.3. Вектор ресурсов $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$, являющийся решением задачи производителя (9.27)—(9.28), называется ***оптимальным производственным планом***, а максимальное значение производственной функции

$$Q^* = Q(x^*) \tag{9.29}$$

— ***оптимальным выпуском***.

Приравнивая к нулю частные производные функции прибыли, имеем

$$\begin{cases} p\dfrac{\partial Q}{\partial x_1}(x^*) - w_1 = 0; \\ \dots \\ p\dfrac{\partial Q}{\partial x_n}(x^*) - w_n = 0; \\ x_i^* > 0, \end{cases} \tag{9.30}$$

т.е.

$$\begin{cases} p\dfrac{\partial Q}{\partial x_1}(x^*) = w_1; \\ \dots \\ p\dfrac{\partial Q}{\partial x_n}(x^*) = w_n; \end{cases} \tag{9.31}$$

$$x_i^* > 0, \tag{9.32}$$

или в матричном виде

$$p\frac{\partial Q}{\partial x}(x^*) = w; \tag{9.33}$$

$$x^* > 0, \tag{9.34}$$

где

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial Q}{\partial x_n} \end{pmatrix};\ w = (w_1 \ \ \cdots \ \ w_n);\ x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix}.$$

Так как $Q(x_1, ..., x_n)$ строго вогнута, то $\Pi(x_1, ..., x_n)$ будет также строго вогнута, а следовательно, условия (9.31), (9.32) являются не только необходимыми, но и достаточными, для того чтобы $(x_1^*, ..., x_n^*)$ был решением задачи производителя. Итак, теорема доказана.

Теорема 9.1. *Для того чтобы вектор* $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ *был оптимальным планом производства, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям* (9.31), (9.32).

Замечание 9.8. В силу строгой вогнутости функции прибыли задача производителя имеет единственное решение.

Замечание 9.9. Поверхность уровня функции затрат $C(x_1, ..., x_n)$ называется *изокостой*. Геометрическая трактовка соотношения (9.31) означает, что в точке x^* изокванта максимального уровня касается некоторой изокосты.

С экономической точки зрения равенства (9.31) говорят о том, что производителю выгодно увеличивать ресурс до тех пор, пока предельный доход (являющийся в силу (9.20) убывающей функцией) не станет равен цене ресурса. После достижения этого равенства производителю нет смысла увеличивать этот ресурс, так как полученный им дополнительный доход будет меньше затрат на ресурс и следовательно, увеличение ресурса приведет к уменьшению прибыли.

Пример 9.1. Найти оптимальный план производства, если $Q(K; L) = 4K^{1/2}L^{1/4}$, $p = 10$, цена капитала (рентная плата) $R = 0{,}5$ и заработная плата $W = 4$.

Решение. Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial K} = \dfrac{2\sqrt[4]{L}}{\sqrt{K}}; \\ \dfrac{\partial Q}{\partial L} = \dfrac{\sqrt{K}}{\sqrt[4]{L^3}}. \end{cases}$$

Подставляя данные нашей задачи в (9.31), получаем

$$\begin{cases} 10\dfrac{2\sqrt[4]{L}}{\sqrt{K}} = 0{,}5; \\ 10\dfrac{\sqrt{K}}{\sqrt[4]{L^3}} = 4; \\ K > 0; \\ L > 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим

$$\begin{cases} K = 160000; \\ L = 1000. \end{cases}$$

9.2.2. Рентабельность производственного плана

Определение 9.4. *Производственный план $x = (x_1, ..., x_n)$ называется* ***рентабельным****, если функция прибыли $\Pi(x)$ положительна.*

Теорема 9.2. *Для того чтобы оптимальный план производства* $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *был рентабельным, необходимо и достаточно, чтобы*

$$E(Q)(x^*) < 1. \tag{9.35}$$

Доказательство. Согласно определению полной эластичности

$$E(Q)(x^*) = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x^*)x_1^* + \cdots + \frac{\partial Q}{\partial x_n}(x^*)x_n^*}{Q(x^*)}. \tag{9.36}$$

Умножив числитель и знаменатель дроби в левой части равенства (9.36) на p и воспользовавшись (9.31), имеем

$$E(Q)(x^*) = \frac{w_1 x_1^* + \cdots + w_n x_n^*}{I(x^*)}, \tag{9.37}$$

т.е.

$$E(Q)(x^*) = \frac{C(x^*)}{I(x^*)}. \tag{9.38}$$

Таким образом, в силу (9.38) неравенство (9.35) равносильно неравенству

$$I(x^*) - C(x^*) > 0,$$

доказывающему нашу теорему.

Замечание 9.10. Соотношение (9.38) показывает, что полная эластичность в точке x^* равна *норме издержек*, т.е. той части дохода, которая затрачивается на издержки.

Следствие 9.1. *Оптимальный план однородной производственной функции рентабелен.*

Доказательство. Пусть Q — однородная производственная функция степени μ. Из формулы Эйлера вытекает, что $E(Q)(x) = \mu$.

С другой стороны, так как Q — строго вогнута, то на основании следствия 8.3

$$\mu < 1.$$

Таким образом,

$$E(Q)(x) < 1 \quad (\forall x \in R_+^n).$$

И в силу теоремы 9.2 план рентабелен. Следствие доказано.

Замечание 9.11. Из формулы (9.28) видно, что степень однородности μ является нормой издержек, а $(\mu - 1)$ — нормой прибыли, т.е.

$$C(x^*) = \mu \cdot I(x^*);$$
$$\Pi(x^*) = (1 - \mu) \cdot I(x^*). \qquad (9.39)$$

9.3. Функция предложения и функции спроса на ресурсы

9.3.1. Однородность функций предложения и спроса

Изменение цены на продукцию и цен на ресурсы приводят к изменению оптимального производственного плана x^* и оптимального выпуска Q^*, определяя тем самым *функции спроса на i-й ресурс*

$$x_i^* = D_i(w_1, ..., w_n, p) \ (\forall i = 1, ..., n) \qquad (9.40)$$

и *функцию предложения*

$$Q^* = S(w_1, ..., w_n, p). \qquad (9.41)$$

Пример 9.2. Найти функцию предложения и функции спроса для двухфакторной функции Кобба — Дугласа.

Решение. Имеем $Q(K; L) = AK^\alpha L^\beta$, $(A > 0;\ 0<\alpha<1,\ 0<\beta<1)$;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1} L^\beta; \\ \dfrac{\partial Q}{\partial L} = A\beta K^\alpha L^{\beta-1}. \end{cases}$$

Подставляя полученные выражения в (9.31), получаем

$$\begin{cases} pA\alpha K^{\alpha-1} L^\beta = R; \\ pA\beta K^\alpha L^{\beta-1} = W; \\ K > 0; \\ L > 0. \end{cases}$$

Здесь R и W — соответственно рентная и заработная платы.

Решая последнюю систему, находим

$$\begin{cases} K^* = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}\left(\dfrac{R}{\alpha p}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}}\left(\dfrac{W}{\beta p}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}; \\ L^* = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}\left(\dfrac{R}{\alpha p}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}\left(\dfrac{W}{\beta p}\right)^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}}; \end{cases} \tag{9.42}$$

$$Q^* = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{R}{\alpha p}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\left(\frac{W}{\beta p}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}. \tag{9.43}$$

Теорема 9.3. *Функции спроса x_i^* и функция предложения Q^* являются однородными функциями нулевой степени, т.е. для любого $t > 0$*

$$D_i(tw_1, \dots, tw_n, tp) = D_i(w_1, \dots, w_n, p), \ (\forall i = 1, \dots, n); \tag{9.44}$$

$$S(tw_1, \dots, tw_n, tp) = S(w_1, \dots, w_n, p). \tag{9.45}$$

Доказательство. Пусть x^* — решение системы (9.33)—(9.34), соответствующее цене на продукцию p и вектору цен на ресурсы w. Умножим обе части уравнения (9.33) на $t > 0$. Находим

$$tp\frac{\partial Q}{\partial x}(x^*) = tw.$$

Таким образом, x^* является решением системы (9.33)—(9.34), соответствующим цене tp и вектору цен tw, т.е.

$$x^*(tw, tp) = D_i(w, p),$$

что доказывает (9.44). Принимая во внимание это равенство, получаем для любого $t > 0$

$$Q^*(tw, tp) = Q^*\left(x^*(tw, tp)\right) = Q^*\left(x^*(w, p)\right) = Q^*(w, p).$$

Теорема доказана.

Следствие 9.2. *Имеют место соотношения:*

$$\frac{\partial Q^*}{\partial p}p = -\frac{\partial Q^*}{\partial w}w^T; \tag{9.46}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p}p = -\frac{\partial x^*}{\partial w}w^T \tag{9.47}$$

Справедливость соотношений (9.46), (9.47) вытекает из формулы Эйлера для однородной функции с учетом нулевой однородности x_i^* и Q^*.

Замечание 9.12. Подобно тому как мы это делали в теории потребления, соотношения (9.44) с учетом (9.45) могут быть записаны в следующем виде:

$$x_i^* = d_i(\omega_1, \dots, \omega_n); \tag{9.48}$$

$$Q^* = s(\omega_1, \dots, \omega_n), \tag{9.49}$$

где

$$\omega_i = \frac{w_i}{p} \tag{9.50}$$

— *реальные цены*;

$$d_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = D_i\left(\frac{w_1}{p}, \dots, \frac{w_n}{p}, 1\right); \tag{9.51}$$

$$s(\omega_1, \dots, \omega_n) = S\left(\frac{w_1}{p}, \dots, \frac{w_n}{p}, 1\right). \tag{9.52}$$

Так, для двухфакторной производственной функции Кобба — Дугласа

$$\begin{cases} K^* = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}(\alpha r)^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}}(\beta\omega)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}; \\ L^* = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}(\alpha r)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}(\beta\omega)^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}}; \end{cases} \tag{9.53}$$

$$Q^* = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}(\alpha r)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}(\beta\omega)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}, \tag{9.54}$$

где $r = \frac{R}{p}$ и $\omega = \frac{W}{p}$ — соответственно реальные рентная и заработная платы.

Из (9.53), (9.54) следует, что K^*, L^* и Q^*, записанные в реальных ценах, также являются однородными (соответственно степени $\frac{1}{\alpha+\beta-1}$, $\frac{1}{\alpha+\beta-1}$ и $\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}$). Это связано с тем, что функция Кобба — Дугласа сама является однородной степени $\alpha + \beta$. Эта ситуация сохраняется и в общем случае.

Теорема 9.4. *Если $Q(x_1, ..., x_n)$ — однородная степени μ функция полезности, то функции x_i^* и Q^* также являются однородными соответственно степени $\frac{1}{\mu-1}$ и $\frac{\mu}{\mu-1}$, т.е. для любого $t > 0$*

$$d_i(t\omega_1, ..., t\omega_n) = t^{\frac{1}{\mu-1}} d_i(\omega_1, ..., \omega_n); \tag{9.55}$$

$$s(t\omega_1, ..., t\omega_n) = t^{\frac{\mu}{\mu-1}} s(\omega_1, ..., \omega_n). \tag{9.56}$$

Доказательство. Записав уравнение (9.33) в реальных ценах, имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x^*) = \omega. \tag{9.57}$$

Пусть x^* — положительное решение уравнения (9.33), соответствующее ω. Покажем, что для любого $t > 0$ вектор $t^{\frac{1}{\mu-1}} x^*$ является положительным решением этой системы, соответствующим вектору $t\omega$. Умножив обе части равенства (9.57) на $t > 0$, получаем

$$t\frac{\partial Q}{\partial x}(x^*) = t\omega. \tag{9.58}$$

Так как Q — однородная функция степени μ, то $\frac{\partial Q}{\partial x}$ имеет степень однородности $(\mu - 1)$, поэтому из (9.58) находим

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\left(t^{\frac{1}{\mu-1}} x^*\right) = t\omega.$$

А это означает, что вектор $t^{\frac{1}{\mu-1}} x^*$ является положительным решением уравнения (9.58), соответствующим $t\omega$. Следовательно, x^* имеет степень однородности $\frac{1}{\mu-1}$. С учетом этого факта и того, что Q — однородная функция степени μ, получаем

$$Q^*(t\omega) = Q\big(x^*(t\omega)\big) = Q\left(t^{\frac{1}{\mu-1}} x^*(\omega)\right) = t^{\frac{\mu}{\mu-1}} Q\big(x^*(\omega)\big) = t^{\frac{\mu}{\mu-1}} Q^*(\omega).$$

Таким образом, вторая часть теоремы и вся теорема в целом доказаны.

9.3.2. Свойства функций предложения и спроса

Исследуем влияние цены на продукцию и цен на ресурсы на спрос и предложение. Продифференцируем соотношения (9.31) по p и w_i:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+p\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 Q}{\partial x_j \partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k^*}{\partial p}=0; \tag{9.59}$$

$$p\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 Q}{\partial x_j \partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k^*}{\partial w_i}=\delta_{ij}, \tag{9.60}$$

или в матричном виде

$$pH\frac{\partial x^*}{\partial p}=-\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^T; \tag{9.61}$$

$$pH\frac{\partial x^*}{\partial w}=E. \tag{9.62}$$

Так как матрица Гессе H отрицательно определена и, следовательно, невырождена, то из (9.61), (9.62) получаем

$$\frac{\partial x^*}{\partial p}=-\frac{1}{p}H^{-1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^T; \tag{9.63}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial w}=\frac{1}{p}H^{-1}. \tag{9.64}$$

Теорема 9.5. *При росте цены на i-й ресурс спрос на этот ресурс уменьшается, т.е.*

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_i}<0. \tag{9.65}$$

Доказательство. Так как матрица Гессе H отрицательно определена и $p > 0$, то из (9.64) следует, что и матрица Якоби

$$\frac{\partial x^*}{\partial w}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial x_n^*}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial x_n^*}{\partial w_n}\end{pmatrix} \tag{9.66}$$

также отрицательно определена, а следовательно, на ее главной диагонали находятся отрицательные элементы, т.е.

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} < 0; \cdots; \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} < 0. \qquad (9.67)$$

Теорема доказана.

Замечание 9.13. Подобным образом доказывается, что спрос на ресурс является убывающей функцией от реальной цены на этот ресурс, т.е.

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \omega_i} < 0.$$

Теорема 9.6. *Повышение цены на продукцию приводит к увеличению предложения.*

Доказательство. Продифференцируем Q^* по p, имеем

$$\frac{\partial Q^*}{\partial p} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial p}. \qquad (9.68)$$

Принимая во внимание (9.63), находим

$$\frac{\partial Q^*}{\partial p} = -\frac{1}{p}\frac{\partial Q}{\partial x}H^{-1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^T. \qquad (9.69)$$

В силу отрицательной определенности матрицы H^{-1} правая часть равенства (9.69) больше нуля. Значит,

$$\frac{\partial Q^*}{\partial p} > 0, \qquad (9.70)$$

что доказывает теорему.

Определение 9.5. *Ресурс называется* ***ценным****, если при увеличении цены на продукции спрос на него увеличивается, т.е.*

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p} > 0, \qquad (9.71)$$

и ***малоценным*** *— в противном случае.*

Следствие 9.3. *Существует хотя бы один ценный ресурс.*

Доказательство. Предположим противное, что все ресурсы являются малоценными, т.е.

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p} \le 0; \forall i.$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial Q}{\partial x_i} > 0$, на основании нашего предположения получаем

$$\frac{\partial Q^*}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \frac{\partial x_i^*}{\partial p} \le 0.$$

А это противоречит (9.70) и доказывает теорему.

Теорема 9.7. *Справедливы следующие соотношения*:

$$\frac{\partial Q^{*T}}{\partial w} = -\frac{\partial x^*}{\partial p}; \tag{9.72}$$

$$\frac{\partial x^{*T}}{\partial w} = \frac{\partial x^*}{\partial w}. \tag{9.73}$$

Доказательство. Продифференцируем Q^* по w, имеем

$$\frac{\partial Q^*}{\partial w} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x^*}{\partial w}. \tag{9.74}$$

Принимая во внимание (9.64), находим

$$\frac{\partial Q^*}{\partial w} = -\frac{1}{p} \frac{\partial Q}{\partial x} H^{-1}. \tag{9.75}$$

Транспонируя (9.75) и учитывая (9.63), получаем (9.72).

В справедливости легко убедиться путем транспонирования соотношений (9.64). Теорема доказана.

Непосредственно из (9.72) вытекают два следующих утверждения.

Следствие 9.4. ***При росте цены на ценный ресурс спрос на продукцию падает.***

Следствие 9.5. ***При росте цены на продукцию спрос на малоценный ресурс не возрастает.***

Замечание 9.14. Запишем равенство (9.72) покомпонентно. Имеем

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j} = \frac{\partial x_j^*}{\partial w_i}. \tag{9.76}$$

Эти соотношения показывают, что влияние на спрос на j-й ресурс, оказываемое ростом цены на i-й ресурс, равно влиянию на спрос на i-й ресурс, оказываемому ростом цены на j-й ресурс. В частности, $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial w_j}$ и $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial w_i}$ имеют общий знак. При этом, если

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j} = \frac{\partial x_j^*}{\partial w_i} < 0, \tag{9.76}$$

то говорят, что i-й и j-й ресурсы образуют *взаимодополнительную* пару. Если же

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j} = \frac{\partial x_j^*}{\partial w_i} > 0, \tag{9.77}$$

то блага называются *взаимозаменительными*.

9.4. Сопряженная производственная функция и двойственная задача

9.4.1. Сопряженная производственная функция

Условимся в дальнейшем считать, что $p = 1$, т.е. что функции x_i^* и Q^* заданы в реальных ценах.

Определение 9.6. *Функция*

$$Q^c(\omega) = \omega x^*(\omega) - Q(x^*(\omega)) \tag{9.78}$$

***называется сопряженной** к производственной функции $Q(x)$ **или косвенной функцией убытков**.*

Лемма 9.2. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\frac{\partial Q^c}{\partial \omega}(\omega) = x^{*T}; \tag{9.79}$$

$$\frac{\partial^2 Q^c}{\partial \omega^2}(\omega) = H^{-1}; \tag{9.80}$$

$$Q^c(\omega) + Q(x) \le \omega x. \tag{9.81}$$

Доказательство.

1. Продифференцируем (9.78) по ω, с учетом (9.57) находим

$$\frac{\partial Q^c}{\partial \omega} = (x^*)^T + \omega \frac{\partial x^*}{\partial \omega} - \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial \omega} = (x^*)^T + \omega \frac{\partial x^*}{\partial \omega} - \omega \frac{\partial x^*}{\partial \omega} = (x^*)^T.$$

Справедливость (9.79) доказана.

2. Запишем теперь равенство (9.64) в реальных ценах, имеем

$$\frac{\partial x^*}{\partial \omega} = H^{-1}. \qquad (9.82)$$

Дифференцируя (9.79) по ω, получаем

$$\frac{\partial^2 Q^c}{\partial \omega^2} = \frac{\partial x^*}{\partial \omega}.$$

Отсюда, принимая во внимание (9.82), получаем (9.80).

3. Так как $x^*(\omega)$ является точкой максимума функции прибыли $\Pi(x) = Q(x) - \omega x$, то $Q(x) - \omega x \le Q\left(x^*(\omega)\right) - \omega x^*(\omega)$.

Из этого неравенства на основании (9.78) следует (9.81). Теорема доказана.

Замечание 9.15. Неравенство (9.81) носит название *неравенства Юнга — Френхеля*.

Теорема 9.8. *Пусть $Q(x_1, ..., x_n)$ — неоклассическая строго вогнутая производственная функция, тогда косвенная функция убытков $Q^c(\omega_1, ..., \omega_n)$ обладает следующими свойствами:*

1) *возрастает по любому аргументу*

$$\frac{\partial Q^c}{\partial \omega} > 0; \qquad (9.83)$$

2) *строго вогнута.*

Доказательство.

1. Соотношения (9.83) следуют непосредственно из (9.79) учетом того, что $x^* > 0$.

2. Строгая вогнутость Q^c вытекает из (9.80) и отрицательной определенности матрицы Гессе H. Теорема доказана.

Замечание 9.17. Если $Q(x_1, ..., x_n)$ — однородная степени μ функция полезности, то из (9.39) следует, что сопряженная к ней функция пропорциональна функции спроса:

$$Q^c = (\mu - 1)Q^*.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что Q^c $(\omega_1, ..., \omega_n)$ является однородной степени $\frac{\mu}{\mu - 1}$, а величина $(1 - \mu)$ равна норме прибыли.

9.4.2. Двойственные задачи теории производства

Определение 9.7. *Задача*

$$\left(Q^c(\omega) - \omega x\right) \to \max_{\omega}; \qquad (9.84)$$

$$\omega > 0 \tag{9.85}$$

*называется **двойственной** к задаче*

$$\left(Q(\omega) - \omega x\right) \to \max_x; \tag{9.86}$$

$$x > 0. \tag{9.87}$$

Решение двойственной задачи $\omega^*(x)$ называется *обратной функцией спроса* на ресурсы, а координата $\omega_i^*(x)$ — *обратной функцией спроса на i-й ресурс*.

Теорема 9.9. *Функции $\omega^*(x)$ и $x^*(\omega)$ являются взаимообратными, т.е.*

$$\omega^*\left(x^*(\omega)\right) = \omega; \tag{9.88}$$

$$x^*\left(\omega^*(x)\right) = x. \tag{9.89}$$

Доказательство. Существование обратной функции к $x^*(\omega)$ следует из (9.82). Так как матрица Гессе невырождена, то невырождена и матрица Якоби $\frac{\partial x^*}{\partial \omega}$. Докажем, что этой обратной функцией является $\omega^*(x)$. Для того чтобы $\omega^* > 0$ являлось решением двойственной задачи, соответствующее спросу x, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial Q^c}{\partial \omega}(\omega^*) = x^T. \tag{9.90}$$

Причем решение задачи (9.85), (9.86) в силу строгой вогнутости Q^c является единственным.

Рассмотрим решение двойственной задачи, соответствующее спросу $x = x^*(\omega)$. Таковым является $\omega^*\left(x^*(\omega)\right)$. С другой стороны, как это следует из (9.79), решением двойственной задачи, соответствующим спросу $x = x^*(\omega)$, является также и ω. А так как решения задачи (9.85), (9.86) в силу строгой вогнутости Q^c единственно, то $\omega^*\left(x^*(\omega)\right) = \omega$.

В силу обратимости $\omega^*(x)$ из (9.88) следует (9.89). Теорема доказана.

Следствие 9.6. *Имеет место равенство*

$$(Q^c)^c = Q. \tag{9.91}$$

Доказательство. Согласно определению

$$(Q^c)^c(x) = \omega^*(x)x - Q^c\left(\omega^*(x)\right).$$

Отсюда, принимая во внимание (9.78), получаем

$$(Q^c)^c(x) = \omega^*(x)x - \omega^*(x)x^*\left(\omega^*(x)\right) + Q\left(x^*\left(\omega^*(x)\right)\right).$$

Учитывая (9.89), находим

$$(Q^c)^c(x) = \omega^*(x)x - \omega^*(x)x + Q(x) = Q(x).$$

Следствие доказано.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение и приведите пример производственной функции. Объясните экономический смысл аксиом, которым она удовлетворяет.
2. Что такое двухфакторная производственная функция? Каков экономический смысл ее аргументов?
3. Перечислите и объясните экономический смысл основных экономико-математических характеристик производственной функции
4. Как связана степень однородности с отдачей от расширения масштаба производства.
5. Дайте определение и приведите пример неоклассической производственной функции.
6. Дайте определения изокванты и изокосты. Найдите и изобразите изокванты для линейной функции, функции Леонтьева и функции Кобба — Дугласа.
7. Сформулируйте задачу производителя. Что называется оптимальным планом производства?
8. Может ли задача производителя иметь несколько решений?
9. Какой оптимальный план называется рентабельным? Какая связь между рентабельностью и полной эластичностью?
10. Дайте определение функций спроса на ресурсы и функции предложения. Докажите, что они являются однородными функциями.
11. Что такое реальные цены?
12. Как изменяется спрос на ресурс при росте цены (реальной цены) на этот ресурс?
13. Как изменяется предложение при росте цены на продукцию?
14. Какой ресурс называется ценным (малоценным)?
15. Как изменяется предложение при росте цены на ценный ресурс?

16. Как изменяется спрос на малоценный ресурс при росте цены на продукцию?
17. Какие ресурсы называются взаимозаменительными (взаимодополнительными)?
18. Дайте определение сопряженной производственной функции Q^c.
19. Докажите неравенство Юнга — Френхеля.
20. Докажите, что сопряженная производственная функция возрастает по любому аргументу и строго вогнута.
21. Сформулируйте задачу, двойственную к задаче производителя.
22. Дайте определение и сформулируйте свойства обратной функции спроса на ресурс.
23. Докажите, что $(Q^c)^c = Q$.

ГЛАВА 10

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как следует из предыдущих глав учебника, решение нелинейных задач оптимизации непосредственно связано с решением систем нелинейных уравнений. Ясно, что в случае сложных моделей аналитическое решение с получением точного решения таких задач невозможно — для этого используются численные методы, при помощи которых системы можно решить приближенно. Изложению этих методов и посвящена настоящая глава.

10.1. Решение нелинейных уравнений

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке. Найдем все значения x из этого промежутка, обращающие уравнение

$$f(x) = 0 \tag{10.1}$$

в тождество. Такие значения называют *корнями* уравнения (10.1) или *нулями* функции $f(x)$.

Решение уравнений — это одна из самых старых математических задач. Линейные и квадратные алгебраические уравнения решали еще в Древней Греции. В эпоху Возрождения были получены точные решения для алгебраических многочленов третьей и четвертой степени. В 20-х годах XIX в. было доказано, что корни алгебраического многочлена n-й степени при $n \geq 5$ нельзя выразить через коэффициенты этого многочлена с помощью арифметических действий и операций извлечения корня.

Если функция $f(x)$ является алгебраическим многочленом n-й степени, то это алгебраическое уравнение. Известно, что такое уравнение имеет ровно n (комплексных) корней. Если $f(x)$ — трансцендентная функция, то уравнение (10.1) называется трансцендентным, и только в отдельных случаях удается получить его решение в аналитической форме. И даже получив такое решение, часто нельзя точно вычислить корни, например в тригонометрических уравнениях.

При решении практических задач возникает необходимость решения уравнений вида (10.1) с *вычислимой* функцией $f(x)$.

Определение 10.1. *Функция $f(x)$ называется вычислимой, если она не может быть представлена в виде явной формулы, но для любого значения x существует процедура вычисления ее значения.*

То есть функцию можно задавать в виде таблицы значений, графика, последовательности вычислений и т.п. Для таких уравнений аналитических методов решения просто не существует.

Итак, для многих нелинейных уравнений невозможно точно вычислить корни. Поэтому их следует искать приближенно с заданной точностью. При этом часто необходим поиск не всех корней, а только тех, которые требуются для практического решения задачи, например действительных.

Задача отыскания корней уравнения (10.1) состоит из двух этапов — *отделения корней* и *уточнения корней.*

10.1.1. Отделение корней

Отделить корень означает найти промежуток числовой оси, содержащий корень, причем единственный.

Для алгебраических уравнений существует ряд теорем, позволяющих определить количество положительных и отрицательных корней и их границы. При практическом решении уравнений чаще всего используют следующие способы.

1. *Графический.* Любым способом, в том числе и с помощью компьютера, строится график функции $f(x)$. Определяются точки пересечения графика с осью абсцисс с доступной точностью. При этом бывает удобно преобразовать уравнение (10.1) к виду

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0,$$

с более простыми функциями, чем исходная.

Пример 10.1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\sin(x^2 - 0{,}3) - 0{,}1x^3}{\cos^2(x^2 + 0{,}1) + x^2} = 0.$$

График левой части уравнения представлен на рис. 10.1. Корни уравнения принадлежат отрезкам [–0,6; –0,4], [0,5; 1], [1,5; 2].

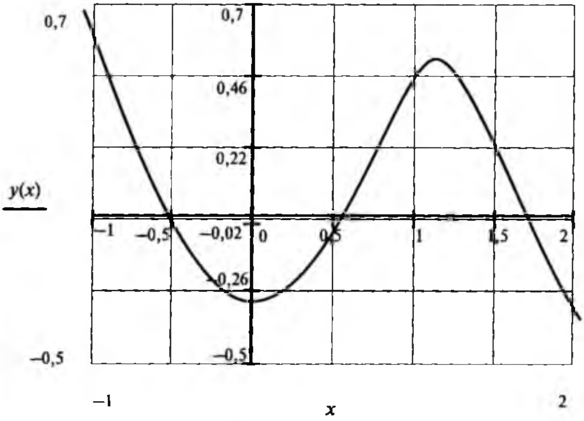


Рис. 10.1

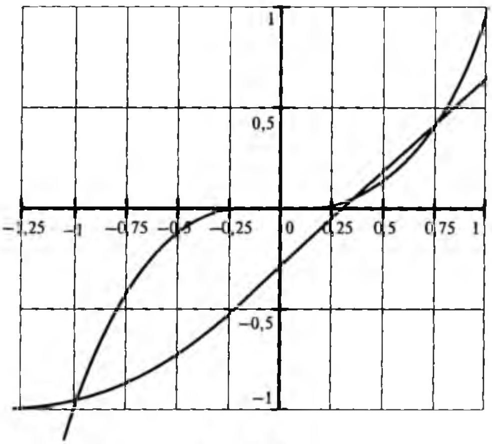


Рис. 10.2

Пример 10.2. Пусть уравнение имеет вид $\sin(x - 0{,}3) - x^3 = 0$. Преобразуем его к виду $\sin(x - 0{,}3) = x^3$. Построим графики левой и правой части уравнения (рис. 10.2.). Абсциссы точек пересечения графиков являются корнями исходного уравнения. В данном случае корни уравнения принадлежат отрезкам $[-1; -0{,}75]$, $[0{,}25; 0{,}5]$, $[0{,}5; 1]$.

2. *Замена уравнения* более простым.

Пример 10.3. Рассмотрим уравнение $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2^n}-1=0$. Возьмем только первые два члена ряда и заменим исходное уравнение таким: $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-1=0$. Корни этого уравнения $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{5}$ можно принять в качестве начального приближения к точным значениям.

3. *Аналитический* способ. Из курса математического анализа известно, что если непрерывная на отрезке функция принимает на его концах значения разных знаков, то хотя бы в одной точке этого отрезка она обращается в ноль (рис. 10.3). Таким образом, для существования корня уравнения (10.1) на отрезке $[a, b]$ *достаточно* выполнения условия

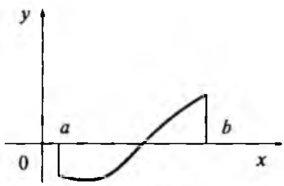


Рис. 10.3

$$f(a)\cdot f(b)<0. \tag{10.2}$$

Но это условие не обеспечивает наличия единственного корня на отрезке (рис. 10.4). Чтобы на отрезке находился только один корень, нужно, чтобы производная на этом отрезке не меняла знак, т.е.

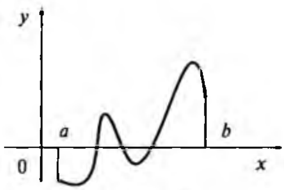


Рис. 10.4

$$\operatorname{sign}(f'(x))=\mathrm{const}\ \forall x\in[a, b]. \tag{10.3}$$

На рис. 10.3 это условие выполняется. Очевидно, оно также является *достаточным*.

Простейшим способом отделения корней является разбиение на части отрезка, на котором ищутся корни, вычисление значений функции в точках деления и выявление отрезков, на которых выполняется условие (10.2). Если это возможно, проверяется и условие (10.3). При необходимости можно добавлять точки деления.

Примеры аналитического отделения корней будут приведены далее.

10.1.2. Уточнение корней

Заметим вначале, что *все* численные методы, называемые методами решения нелинейных уравнений, и их программные реализации предназначены именно для *уточнения* корня. Для их успешной работы пользователем задается либо отрезок, заведомо содержащий корень, либо начальное приближение.

Пусть x^* — точное значение корня, а $\bar{x}$ — приближенное.

Определение 10.2. Величина $\Delta x = |x^* - \bar{x}|$ называется *погрешностью* приближенного значения, а $\delta x = f(\bar{x})$ называется *невязкой* (рис. 10.5).

Вычислить погрешность полученного приближенного решения нельзя, так как точное значение неизвестно. Поэтому обычно вычисляют невязку. Рассмотрим взаимосвязь этих двух характеристик. По теореме Лагранжа $f(x^*) - f(\bar{x}) = f'(\alpha)(x^* - \bar{x})$, где $\alpha \in [x^*; \bar{x}]$. Так как $f(x^*) = 0$, $|x^* - \bar{x}| = \dfrac{|f(\bar{x})|}{|f'(\alpha)|}$.

Рис. 10.5. Взаимосвязь невязки и погрешности

Обозначим $m = \min\limits_{\alpha \in [x^*; \bar{x}]} |f'(\alpha)|$. Тогда имеет место соотношение

$$\Delta x \le \frac{\delta x}{m}. \qquad (10.4)$$

Если m имеет «заметную» величину, например больше или равна 1, малая невязка порождает малую погрешность (см. рис. 10.5). Если же значение m достаточно мало, даже при малой невязке погрешность может оказаться очень большой (рис. 10.6). Такие задачи являются *плохо обусловленными*. При их решении возникают трудности, аналогичные описанным в параграфе 1.4.

Рис. 10.6. Малая невязка и большая погрешность

Приведем пример плохо обусловленной задачи.

Пример 10.4. Рассмотрим уравнение $x^{10} = 0$. Корнем этого уравнения кратности 10 является ноль. Изменим условия задачи и рассмотрим уравнение $x^{10} = 10^{-10}$. У этого уравнения 10 корней, каждый из которых по модулю равен 0,1. Таким образом, малое изменение исходных данных привело к заметному качественному изменению результата. В данном случае это связано с тем, что производная функции x^{10} при приближении к корню (к нулю) стремится к нулю.

Итак, методы уточнения корней позволяют уменьшить исходный интервал, в котором расположен корень, либо, начиная с некоторого начального приближения, построить последовательность значений, сходящуюся к корню. Рассмотрим некоторые из таких методов.

1. Метод половинного деления

Пусть дан отрезок $[a; b]$, содержащий простой корень уравнения (10.1). Условие (10.2) выполнено. Метод заключается в построении последовательности вложенных отрезков, каждый из которых содержит корень уравнения. Процесс заканчивается, когда длина полученного отрезка станет меньше наперед заданного числа ε, характеризующего точность решения. Методы такого типа отличаются только способом получения нового отрезка.

В методе *половинного деления* (его еще называют методом *дихотомии* или *бисекции*) находится точка, делящая отрезок пополам, в этой точке вычисляется значение функции $f(x)$ и из двух полученных отрезков выбирается тот, на концах которого функция имеет разные знаки, т.е. выполняется условие (10.2.) (рис. 10.7.)

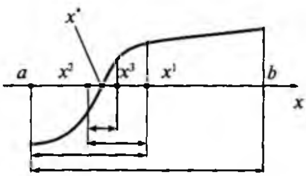


Рис. 10.7. Метод половинного деления

Алгоритм решения

Исходные данные: $f(x)$, a, b, ε.

1) $x^0 = a$; $z^0 = b$; $k = 0$;

2) $x^{k+1} = \dfrac{x^k + z^k}{2}$;

3) если $f(x^k) \cdot f(x^{k+1}) < 0$, то $z^{k+1} = x^k$, иначе $z^{k+1} = z^k$;

4) проверка на конец: если $z^{k+1} - x^{k+1} > \varepsilon$, положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 2; иначе процесс завершить, приняв $\bar{x} = \dfrac{x^{k+1} + z^{k+1}}{2}$.

На каждом шаге длина отрезка уменьшается вдвое. Метод сходится линейно со скоростью $v = 0{,}5$. После k шагов первоначальная длина отрезка уменьшится в 2^k раз, т.е.

$$\left|z^k - x^k\right| = \left|z^0 - x^0\right| \cdot 2^{-k}. \qquad (10.5)$$

Отсюда можно определить число итераций k, требуемых для достижения заданной точности ε:

$$k \geq \log_2 \frac{\left|z^0 - x^0\right|}{\varepsilon}. \qquad (10.6)$$

Например, если длина исходного отрезка равна 1, то для достижения точности $\varepsilon = 10^{-4}$ необходимо выполнить не менее 14 шагов.

Достоинства метода. Для непрерывных функций, удовлетворяющих на отрезке условию (10.2), метод сходится всегда. При этом не требуется вычисления и даже существования производных $f(x)$. Метод обладает устойчивостью к ошибкам вычислений, позволяет заранее определить требуемое число шагов, легко реализуем с помощью вычислительной техники, подходит для работы с вычислимыми функциями.

Недостатки метода. Метод сходится медленно. Он не подходит для уточнения корней четной кратности. Его нельзя обобщить на случай нескольких уравнений.

Замечание. Существуют аналогичные методы, в которых отрезок делится другим способом. Например, в *методе золотого сечения* отрезок каждый раз делится в отношении золотого сечения. Тогда скорость сходимости метода примерно равна 0,62. Все остальные характеристики метода сохраняются.

Пример 10.5. Для уравнения $\sin(x - 0{,}3) - x^3 = 0$ из примера 10.2 вычислим корень, лежащий на отрезке [0,25; 0,5] с точностью 10^{-3}. Для этого, в соответствии с (10.6), необходимо будет сделать не менее 8 шагов. Вычисления приведены в таблице.

k	x^k	z^k	$f(x^k)$	$f(z^k)$	$z^k - x^k$	$x^{k+1} = \frac{x^k + z^k}{2}$	$f(x^{k+1})$
0	0,25	0,5	–0,06560	0,07370	0,25	0,375	0,022200
1	0,25	0,375	–0,06560	0,02220	0,125	0,31	–0,019800
2	0,31	0,375	–0,01980	0,02220	0,0625	0,3425	0,002310
3	0,31	0,3425	–0,01980	0,00231	0,03125	0,32625	–0,008480
4	0,32625	0,3425	–0,00848	0,00231	0,015625	0,334375	–0,003020
5	0,334375	0,3425	–0,00302	0,00231	0,00781	0,3384375	–0,000340
6	0,3384375	0,3425	–0,00034	0,00231	0,00391	0,34046875	0,000990
7	0,3384375	0,34046875	–0,00034	0,00099	0,00195	0,339453125	0,000328
8	0,3384375	0,339453125	–0,00034	0,000328	0,00098	0,338945312	–0,000003

В качестве приближенного решения примем $x = 0{,}338945312$. Погрешность не превосходит $\Delta x \le 0{,}001$, а невязка равна $3 \cdot 10^{-6}$.

2. Метод Ньютона

Рассмотрим один из самых «быстрых» методов уточнения корня. Пусть для уравнения (10.1) известно некоторое начальное приближения x^0. В этой точке функция $f(x)$ заменяется своей касательной. Точка пересечения касательной с осью абсцисс является новым приближением (рис. 10.8). Процесс повторяется до выполнения требований к точности приближения.

Для касательной, проведенной из точки x^0, $\dfrac{f(x^0)}{x^0 - x^1} = \operatorname{tg}\beta = f'(x^0)$.

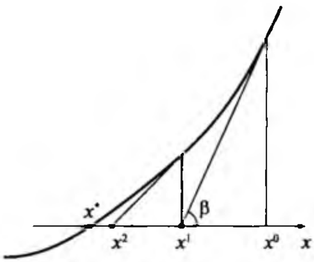


Рис. 10.8. Метод Ньютона

Отсюда $x^1 = x^0 - \dfrac{f(x^0)}{f'(x^0)}$. Повторяя процесс, получим расчетную формулу метода Ньютона,

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}. \tag{10.7}$$

Очевидно, что при $f'(x^k) = 0$ вычисления по формуле (10.7) невозможны. Если же производная по модулю близка к нулю, то следующее приближение может оказаться дальше от корня, чем предыдущее. Процесс в этом случае не будет сходящимся. Метод Ньютона характеризуется высокими требованиями к точности начального приближения и далеко не всегда порождает последовательность приближений, сходящуюся к корню. Такие методы называются *локально сходящимися*. В отличие от них *глобально сходящиеся* методы сходятся к корню из любого нального приближения.

Пример 10.6. Рассмотрим уравнение $\operatorname{arctg} x = 0$.

Очевидно, корнемураянения является $x = 0$. Если взять $x^0 \in [1{,}39;\ 1{,}40]$, то $x^1 = -x^0$. Процесс «зацикливается» (рис. 10.9). Если начальное приближение взять ближе к началу координат (т.е. к корню), то процесс сходится (на рисунке — штриховая линия), если дальше от корня, то процесс расходится.

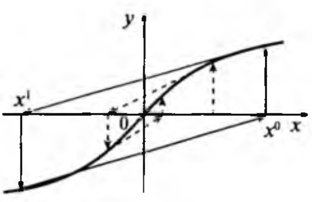


Рис. 10.9. Локальная сходимость метода Ньютона

Теорема 10.1 (*о достаточных условиях сходимости метода Ньютона*). Для того чтобы процесс, определяемый формулой (10.7), сходился к корню уравнения (10.1) из начального приближения $x^0 \in [a; b]$, достаточно выполнения следующих условий:

1) отрезок $[a; b]$ содержит один простой корень уравнения (10.1);

2) функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a; b]$;

3) производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на $[a;\ b]$, причем $\forall x \in [a;\ b] f'(x) \neq 0$;

4) $f(x^0) \cdot f''(x^0) > 0$.

Эту теорему часто называют *условиями глобальной сходимости метода Ньютона*. Если в результате отделения корней получен отрезок $[a;\ b]$, содержащий корень, то в качестве начального приближения следует выбрать тот его конец, в котором выполняется условие 4.

Метод Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимости. Это очень высокая скорость, поэтому метод часто применяют без проверки условий теоремы, тем более их не всегда возможно проверить. Кроме того, это достаточные условия, поэтому при невыполнении некоторых из них метод все равно может сходиться. Так, в примере 10.6 условия 3 и 4 не выполнены, однако при некоторых начальных условиях метод сходится.

Алгоритм решения

Исходные данные: $f(x)$, x^0, ε.

1) $k = 0$;

2) вычислить $f(x^k)$. Если $|f(x^k)| \leq \varepsilon$, решение $\bar{x} = x^k$ получено, конец; иначе перейти к шагу 3;

3) вычислить $f'(x^k)$. Если $|f'(x^k)| \leq \varepsilon$, решение не получено, но дальнейший расчет невозможен, конец; иначе перейти к шагу 4;

4) по формуле (10.7) вычислить x^{k+1}. Если $k = 0$, перейти к шагу 6; иначе вычислить $\Delta_k = |x^{k+1} - x^k|$;

5) если $k < 2$, перейти к шагу 6; иначе если $\Delta k < \Delta_{k-1}$, перейти к шагу 6; иначе процесс расходится, решение не получено; конец;

6) $k = k + 1$, перейти к шагу 2.

Достоинства метода. Квадратичная сходимость.

Недостатки метода. Метод требует хорошего начального приближения. Требуется вычисление производных, что не всегда возможно или трудоемко. При поиске кратных корней скорость сходимости метода существенно снижается.

Пример 10.7. Рассмотрим еще раз уравнение $\sin(x - 0{,}3) - x^3 = 0$ из примера 10.2. Вычислим корень, лежащий на отрезке $[0{,}25;\ 0{,}5]$.

Здесь $f(x) = \sin(x - 0{,}3) - x^3$, $f'(x) = \cos(x - 0{,}3) - 3x^3$, $f''(x) = -\sin(x - 0{,}3) - 6x$. Условия 1—3 теоремы 10.1 выполнены. Условие 4 выполняется в точке $x = 0{,}25$. Формула (10.7) имеет вид

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\sin(x^k - 0{,}3) - (x^k)^3}{\cos(x^k - 0{,}3) - 3x^2}.$$

Вычисления приведены в таблице. Если бы мы задали точность по невязке 10^{-3}, то процесс завершился бы уже после второго шага. После третьего шага результат более точный, чем после 8 шагов по методу половинного деления (см. пример 10.5).

k	x^k	$f(x^k)$	$f'(x^k)$	Δ_k
0	0,250	−0,0656	0,8112	
1	0,330868	$-0{,}5 \cdot 10^{-2}$	0,6711	0,08087
2	0,338852	$-0{,}6 \cdot 10^{-4}$	0,6548	$0{,}7 \cdot 10^{-2}$
3	0,338951	$1 \cdot 10^{-8}$	0,6545	$1 \cdot 10^{-4}$

3. Модификации метода Ньютона

Отмеченные недостатки метода Ньютона часто делают его неприменимым, несмотря на высокую скорость. При модификациях метода удается избежать ряда его недостатков, сохранив в основном его достоинства. Рассмотрим некоторые из таких модификаций.

Для ряда функций (вычислимых, сеточных и т.п.) найти производную невозможно или затруднительно. В таких случаях рекомендуется применять какой-либо из следующих методов.

Упрощенный метод Ньютона. Вместо формулы (10.7) применяют

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^0)}. \tag{10.8}$$

Производная вычисляется один раз в точке начального приближения (рис. 10.10). В этом случае снимаются некоторые ограничения метода Ньютона, например требование знакопостоянства производных. Упрощенный метод Ньютона сходится линейно.

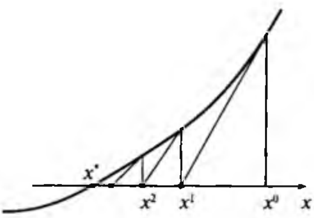


Рис. 10.10. Упрощенный метод Ньютона

Метод секущих. Производная функции $f\,(x)$ заменяется ее конечно-разностной аппроксимацией: $f'(x^k) = \dfrac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}}$. Геометрически это означает, что вместо касательной проводится секущая. Вместо формулы (10.7) применяется

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f(x^k) - f(x^{k-1})}(x^k - x^{k-1}). \tag{10.9}$$

На первом шаге секущая проводится через точки x^0 и $x^{0,5} = x^0 + \delta$, где δ — произвольная малая величина (рис. 10.11). Этот метод требует меньшего количества операций на каждом шаге, так как расчет производных не производится, а одно из значений функции уже вычислено на предыдущем шаге. Его скорость сходимости ниже, чем у метода Ньютона, но все же достаточно высокая (сверхлинейная).

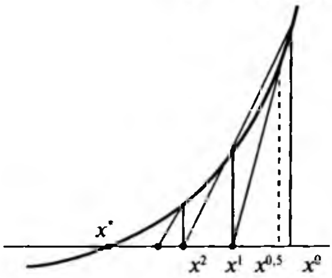


Рис. 10.11. Метод секущих

4. Метод хорд

Если заменять функцию $f(x)$ не касательной, а хордой, проводимой через концы отрезка, содержащего корень, и точку пересечения хордой оси абсцисс считать новым приближением, получим *метод хорд*. Этот метод можно считать аналогом метода бисекции, только отрезок делится не пополам, а в отношении $|f(a)| : |f(b)|$. Для того чтобы он сходился к корню, также необходимо выполнение условия (10.2). Уравнение хорды, проходящей через концы первоначального отрезка, имеет вид

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Она пересекает ось абсцисс в точке $(x^1; 0)$. Поэтому

$$x^1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a).$$

Новую хорду следует проводить через точку $(x^1; f(x^1))$ и тот конец отрезка, знак функции в котором противоположен знаку $f(x^1)$. Этот конец всегда остается неподвижным. Неподвижным будет тот конец, в котором выполняется условие

$$f(x) \cdot f''(x) > 0. \qquad (10.10)$$

На рисунке 10.12, *а* неподвижным является правый, а на рис. 10.12, *б* — левый конец отрезка. Для первого случая приближения ищутся по формуле

$$x^0 = a;\ x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f(b)-f(x^k)}(b-x^k), \qquad (10.11)$$

для второго случая

$$x^0 = b;\ x^{k+1} = a - \frac{f(a)}{f(x^k) - f(a)}(x^k - a). \tag{10.12}$$

Достоинства метода. Метод не требует вычисления производных. В случае знакопостоянства второй производной метод сходится всегда.

Недостатки метода. Метод хорд сходится линейно, хотя его скорость в общем случае выше, чем метода половинного деления.

Пример 10.8. Для уравнения $\sin(x - 0{,}3) - x^3 = 0$ из примера 10.2 вычислим корень, лежащий на отрезке $[0{,}25;\ 0{,}5]$ с точностью 10^{-3}. $f''(x) = \sin(x - 0{,}3) - 6x$. Проверка условия (10.10) показывает, что неподвижен левый конец, $a = 0{,}25$. Воспользуемся формулой (10.12). Вычисления приведены в таблице.

Сравнив с примерами 10.5 и 10.7, убедимся, что метод хорд сходится быстрее, чем метод половинного деления, но медленнее, чем метод Ньютона.

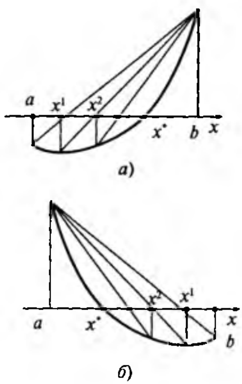


Рис. 10.12. Метод хорд

k	0	1	2	3	4	5
x^k	0,5	0,367761	0,342440	0,339347	0,338996	0,338956
Δ_k	0,25	0,13	0,02	$0{,}3 \cdot 10^{-2}$	$0{,}3 \cdot 10^{-3}$	$0{,}4 \cdot 10^{-4}$
$f(x^k)$	0,0737	0,0180	$0{,}23 \cdot 10^{-2}$	$0{,}26 \cdot 10^{-3}$	$0{,}29 \cdot 10^{-4}$	$0{,}33 \cdot 10^{-5}$

5. Метод итераций

Уравнение (10.1) равносильным преобразованием приводится к виду $x = \varphi(x)$. Последовательность приближений строится с помощью формулы

$$x^{k+1} = \varphi(x^k). \tag{10.13}$$

Геометрически это означает, что в качестве следующего приближения принимается абсцисса точки пересечения прямой $y = x$ и кривой $y = \varphi(x)$. Очевидно, что процесс не обязательно будет сходиться. Так, на рис. 10.13, *а*, *в* метод сходится, а на рис. 10.13, *б*, *г* — расходится.

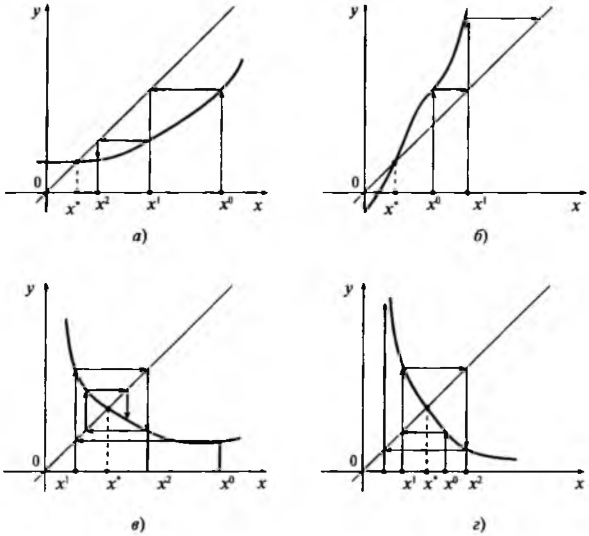


Рис. 10.13. Метод итераций

Для любых итерационных методов вопрос о приведении исходной задачи к виду, обеспечивающему сходимость итерационной последовательности, является наиболее важным. Для исследования этого вводится понятие *сжимающего отображения* в n-мерном пространстве. В силу большой важности этого понятия докажем соответствующую теорему.

Определение 10.3. *Отображение (функция) $G(x)$ называется сжимающим в области $D \subseteq R^n$, если* $\exists \alpha \in [0;\ 1)$:

$$\forall x_1, x_2 \in D\ \left\|G(x_1) - G(x_2)\right\| \le \alpha \left\|x_1 - x_2\right\|. \tag{10.14}$$

Число α называется *коэффициентом сжатия*.

Определение 10.4. *Точка $x^* \in D$ называется неподвижной точкой отображения $G(x)$, если $G(x^*) = x^*$.*

Теорема 10.2 (*о сжимающем отображении*). *Пусть $y = G(x)$ — сжимающее отображение в области D с коэффициентом* $\alpha \in [0;\ 1)$, *тогда*

а) *в D существует единственная неподвижная точка $x^* = G(x^*)$;*

б) $\forall x_0 \in D$ *последовательность* $\{x^k\}$,

$$x^k = G(x^{k-1}), \tag{10.15}$$

определяемая этим отображением, сходится к неподвижной точке x^* линейно со скоростью α;

в) если $\eta = \|x^0 - G(x^0)\|$, то $\forall k$ справедливо соотношение

$$\|x^k - x^*\| \le \frac{\alpha^k \eta}{1-\alpha}. \tag{10.16}$$

Доказательство. Так как отображение $G(x)$ сжимающее, то для всех членов последовательности (10.15) из (10.14) следует:

$$\|x^{k+1} - x^k\| = \|G(x^k) - G(x^{k-1})\| \le \alpha \|x^k - x^{k-1}\| \le$$
$$\le \alpha^2 \|x^{k-1} - x^{k-2}\| \le \ldots \le \alpha^k \|x^0 - G(x^0)\| \le \alpha^k \eta.$$

Отсюда, если последовательность сходится, то скорость сходимости α. Для любого номера $N > k$ справедливо:

$$\|x^N - x^k\| = \|x^N - x^{N-1} + x^{N-1} - \ldots + x^{k+1} - x^k\| \le$$
$$\le \|x^N - x^{N-1}\| + \ldots + \|x^{k+1} - x^k\| \le$$
$$\le \alpha^{N-1}\eta + \ldots + \alpha^k \eta = \alpha^k \eta \sum_{i=0}^{N-k-1} \alpha^i \le \alpha^k \eta \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \alpha^k \eta \frac{1}{1-\alpha},$$

так как последнее выражение есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Следовательно, согласно критерию Коши последовательность $\{x^k\}$ сходится. Перейдем в последнем выражении к пределу при $N \to \infty$ и получим соотношение (10.15). Теперь

$$\|x^* - G(x^*)\| \le \|x^* - x^{k+1}\| + \|x^{k+1} - G(x^*)\| = \|x^* - x^{k+1}\| + \|G(x^k) - G(x^*)\| \le$$
$$\le \ldots \le \|x^* - x^{k+1}\| + \alpha \|x^k - x^*\| \le 2\alpha^k \frac{1}{1-\alpha}\eta.$$

Так как $\eta = \text{const}$, $|\alpha| < 1$, последнее выражение можно сделать сколь угодно малым. Следовательно, $\|x^* - G(x^*)\| = 0$, т.е. x^* — неподвижная точка и $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = x^*$. Теорема доказана.

Возвращаясь к методу итераций, рассмотрим выражение (10.13). Если функция $\varphi(x)$ является сжимающим отображением, метод сходится. Проверить это условие не всегда возможно. Сформулируем более простое условие сходимости метода итераций.

Теорема 10.3. (*о достаточном условии сходимости метода итераций*). *Для сходимости итерационного процесса* (10.13) $\forall x_0 \in D \subseteq R$ *достаточно, чтобы функция* $\varphi(x)$ *была дифференцируема в области* D *и*

$$\exists\alpha \in [0;\, 1):\ \forall x \in D\ |\varphi'(x)| \le \alpha. \tag{10.17}$$

Доказательство. По теореме Лагранжа $\forall x^1, x^2 \in D$ справедливо $|\varphi(x^1)-\varphi(x^2)| \le |\varphi'(\xi)| \cdot |x^1 - x^2|$, где $\xi \in (x^1;\, x^2)$ Тогда в силу (10.17) функция $\varphi(x)$ является сжимающим отображением с параметром α. Значит, последовательность $\{x^k\}$ сходится к неподвижной точке $\varphi(x)$, т.е. к решению уравнения (10.13), или, что то же самое, уравнения (10.1).

Отметим, что чем меньше абсолютная величина α, тем быстрее сходится метод. Знак α влияет на характер сходимости. Так, если в окрестности решения производная $\varphi'(x) > 0$, то метод сходится монотонно (см. рис. 10.12, *а*), а если $\varphi'(x) < 0$, то сходимости имеет колебательный характер (см. рис. 10.12, *в*).

Приведение уравнения (10.1) к виду (10.13) можно производить по-разному. Более того, для поиска разных корней уравнения могут оказаться пригодными различные итерационные процессы.

Пример 10.9. Найдем корни уравнения $x^2 - 100x + 1 = 0$ методом итераций. Очевидно, что уравнение имеет малый и большой по абсолютной величине корни. Преобразуем уравнение к виду $x = \dfrac{1}{100}(x^2+1)$.

Тогда $\varphi(x) = \dfrac{1}{100}(x^2+1)$, $\varphi'(x) = \dfrac{2x}{100} = 0{,}02x$. Условие (10.17) выполняется, если $|x| < 50$.

k	0	1	2	3	4
x^k	1,0	0,02	0,010004	0,010001	0,010001
x^k	2,0	99,5	99,98995	99,989999	99,989999

Возьмем $x_0 = 1$. Вычисления приведены в таблице (вторая строка). Таким образом, найден корень $x_1 = 0{,}010001$, невязка равна $0{,}2 \cdot 10^{-7}$. Очевидно, что для поиска «большого» корня нужен другой процесс. Преобразуем уравнение к виду $x = 100 - \dfrac{1}{x}$. Тогда $\varphi'(x) = x^{-2}$. Для любого $x_0 > 1$ процесс должен сходиться. Пусть $x_0 = 2$. Вычисления приведены в таблице (третья строка). Найден корень $x_2 = 99{,}989999$. Невязка равна нулю.

Пример 10.10. Для уравнения $\sin(x - 0{,}3) - 2x + 0{,}5 = 0$ вычислим корни методом итераций. Естественным преобразованием уравнения будет $x = 0{,}5\sin(x - 0{,}3) + 0{,}25$. $\varphi'(x) = 0{,}5\cos(x - 0{,}3)$. Условие (10.17) выполнено. Вычисления приведены в таблице. Найден корень $x = 0{,}20017$, невязка 10^{-5}.

k	0	1	2	3	4	5	6		12
x^k	1	0,57211	0,38438	0,29214	0,24607	0,22304	0,21156	...	0,20017

Отметим, что завершение итерационного процесса, когда два последовательных приближения отличаются менее чем на наперед заданное малое число, не гарантирует достижения заданной точности.

10.2. Системы нелинейных уравнений

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{10.18}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ — вектор, функции $f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для $i = 1, \dots, n$ определены и непрерывны $\forall x \in D \subseteq R^n$.

Для системы (10.18) найти вектор $x^* \in R^n$, который при подстановке в каждое уравнение обращает его в верное равенство.

Систему (10.18) можно записать в векторной форме

$$F(x) = 0, \tag{10.19}$$

где $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ — вектор-функция.

Напомним, что корнем системы (10.18) или (10.19) является точка n-мерного пространства, т.е. вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Количество решений такой системы может быть различным. Для системы 2-го порядка можно произвести отделение корней, построив графики входящих в систему функций на плоскости двух переменных. На рисунке 10.14 проиллюстрированы случаи наличия у системы двух решений (рис. 10.14, *б*), четырех решений (рис. 10.14, *в*), отсутствия решений (рис. 10.14, *а*).

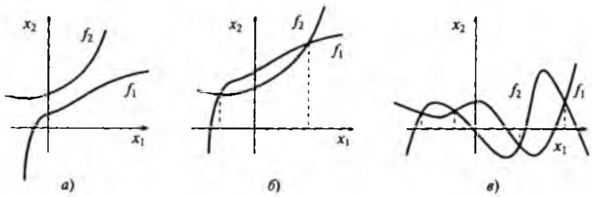


Рис. 10.14. Количество решений системы двух нелинейных уравнений

Как и в случае одного уравнения, существует достаточно много методов *уточнения* корней для систем нелинейных уравнений. Реализация каждого из них требует задания начального приближения. В общем случае поиск начального приближения является достаточно сложной задачей, для решения которой не существует регулярных методов.

Строго говоря, решение системы (10.18) предполагает поиск всех ее корней. Однако при решении практических задач часто ищут только те решения, которые соответствуют смыслу задачи, расположены в заданной области, удовлетворяют некоторым условиям. Поэтому и отделение корней производится при соответствующих ограничениях. Можно в качестве начального приближения выбирать решение известной более простой задачи.

Замечание 10.1. Чем ниже порядок системы, тем меньше вычислительных трудностей возникнет при ее решении. Поэтому следует использовать любую возможность понижения порядка системы, разбиения ее на подсистемы и т.д.

Рассмотрим основные методы решения систем нелинейных уравнений. Они являются обобщением на n-мерный случай некоторых методов, описанных в параграфе 10.1.

10.2.1. Метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений

Для одного уравнения метод Ньютона реализуется в виде процесса (10.7). Естественным его обобщением в n-мерном пространстве будет:

$$x^{k+1} = x^k - \left(F'(x^k)\right)^{-1} \cdot F(x^k). \tag{10.20}$$

Аналогом производной для вектор-функции является, как известно, матрица Якоби (якобиан) $F'(x) = J(x) = \left\| \dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right\|$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$. Вместо деления используется умножение на обратную матрицу или решение системы линейных алгебраических уравнений. Тогда алгоритм метода Ньютона для системы (10.18) имеет вид:

Алгоритм решения

Исходные данные: $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, ε;

1) $k = 0$;

2) вычислить $F(x^k)$. Если $\|F(x^k)\| < \varepsilon$, перейти к шагу 7; иначе перейти к шагу 3;

3) вычислить $J(x^k)$;
4) решить систему уравнений $J(x^k) \cdot s^k = -F(x^k)$;
5) если $\|s^k\| < \varepsilon$, перейти к шагу 7; иначе перейти к шагу 6;
6) $x^{k+1} = x^k + s^k$. Положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 2;
7) завершение работы.

Процесс заканчивается, когда невязка становится малой (после проверки на шаге 2) либо если вычисленная поправка к текущему приближению мала (проверка на шаге 5). И тот и другой результат, вообще говоря, не гарантирует заданной близости полученного решения к точному. Однако, если производные, входящие в якобиан, отличны от нуля, метод сходится.

Достоинства метода. Квадратичная сходимость из хорошего начального приближения и при невырожденности якобиана в окрестности этого приближения.

Недостатки метода. Метод обладает только локальной сходимостью. Требуется вычисление якобиана на каждом шаге, что не всегда возможно или трудоемко. На каждом шаге требуется решать систему линейных алгебраических уравнений, которая может оказаться плохо обусловленной.

Можно избежать многократного вычисления якобиана, используя на каждом шаге якобиан, вычисленный на первом шаге. Такая модификация метода носит название *упрощенный метод Ньютона*. Тогда шаг 4 алгоритма будет иметь вид:

4) решить систему уравнений $J(x^0) \cdot s^k = -F(x^k)$.

Это позволит сэкономить достаточно большое количество вычислений. Однако сходимость такого метода в общем случае хуже, чем у метода Ньютона.

Пример 10.11. А) Решить методом Ньютона систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$$

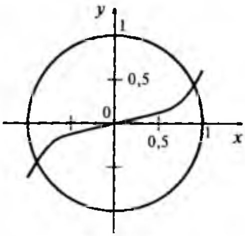


Рис. 10.15

с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. Для определения начального приближения построим графики функций в плоскости переменных (рис. 10.15). В качестве начального приближения выберем $x^0 = (0{,}9;\ 0{,}5)$.

Положим $k = 0$. Вычислим $F(x^0) = (0{,}06;\ 0{,}229)$, $\|F(x^0)\| > \varepsilon$. Якобиан $J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & -1 \end{pmatrix}$. $J(x^0) = \begin{pmatrix} 1{,}8 & 1 \\ 2{,}43 & -1 \end{pmatrix}$.

Решаем систему

$$J(x^0)\cdot s^0 = -F(x^0);\;\; s^0 = \begin{pmatrix} -0{,}068322 \\ 0{,}062979 \end{pmatrix};\;\; x^1 = \begin{pmatrix} 0{,}83168 \\ 0{,}56298 \end{pmatrix}.$$

Теперь $k = 1$. $F(x^1) = \begin{pmatrix} 8{,}6381\cdot 10^{-1} \\ 1{,}2286\cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$; $J(x^0) = \begin{vmatrix} 1{,}6634 & 1{,}1260 \\ 2{,}0751 & -1 \end{vmatrix}$;

$$s^1 = \begin{pmatrix} -0{,}0056181 \\ 0{,}0006279 \end{pmatrix};\;\; x^2 = \begin{pmatrix} 0{,}82606 \\ 0{,}56361 \end{pmatrix};\;\; F(x^2) = \begin{pmatrix} 3{,}1356\cdot 10^{-5} \\ 7{,}2795\cdot 10^{-5} \end{pmatrix}.$$

Требуемая точность достигнута.

Б) Решим теперь эту систему упрощенным методом Ньютона.

При $k = 0$ действия повторяются.

Для $k = 1$ $F(x^1) = (8{,}6381 \cdot 10^{-3};\, 1{,}2286 \cdot 10^{-2})$.

Решим систему уранений:

$$J(x^0)\cdot s^1 = -F(x^1);\;\; s^1 = \begin{pmatrix} -0{,}00049466 \\ 0{,}000026577 \end{pmatrix};\;\; x^2 = \begin{pmatrix} 0{,}82673 \\ 0{,}56325 \end{pmatrix}.$$

Для $k = 2$ $F(x^2) = \begin{pmatrix} 7{,}3306\cdot 10^{-4} \\ 1{,}8055\cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$.

Решим систему уранений:

$$J(x^0)\cdot s^2 = -F(x^2);\;\; s^2 = \begin{pmatrix} -6{,}0013\cdot 10^{-4} \\ 3{,}4718\cdot 10^{-4} \end{pmatrix};\;\; x^3 = \begin{pmatrix} 0{,}82613 \\ 0{,}56360 \end{pmatrix}.$$

Для $k = 3$ $F(x^3) = \begin{pmatrix} 1{,}3574\cdot 10^{-4} \\ 2{,}2611\cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$.

Решим систему уранений: $J(x^0) \cdot s\mathrm{k} = -F(x^3)$;

$$s^3 = \begin{pmatrix} -8{,}5544\cdot 10^{-5} \\ 1{,}8239\cdot 10^{-5} \end{pmatrix};\;\; x^4 = \begin{pmatrix} 0{,}82604 \\ 0{,}56362 \end{pmatrix};\;\; F(x^4) = \begin{pmatrix} 9{,}586\cdot 10^{-6} \\ 2{,}1853\mp\cdot 10^{-5} \end{pmatrix}.$$

Требуемая точность достигнута.

Таким образом, решение с помощью упрощенного метода Ньютона требует большего количества шагов, но на каждом шаге количество операций меньше.

Если найти производные для построения якобиана невозможно (например, для вычислимых функций), можно заменить производные их конечно-разностной аппроксимацией аналогично методу секущих. Такие модификации метода Ньютона называют *конечно-разностными* методами. При этом большой проблемой является правильный выбор шага для аппроксимации производных, который должен подбираться для каждого столбца отдельно. Кроме того, в этом случае требуется на каждом шаге еще n раз дополнительно вычислить функцию $F(x)$, что может существенно увеличить объем вычислений.

Существуют и другие модификации метода Ньютона (например, метод Бройдена, или метод секущих).

10.2.2. Итерационные методы для решения систем нелинейных уравнений

Итерационные методы для систем нелинейных уравнений практически не отличаются от аналогичных для линейных систем. Система (10.1) равносильными преобразованиями приводится к виду

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \ldots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{10.21}$$

или в векторной форме

$$x = \Phi(x). \tag{10.22}$$

Метод, в котором поиск каждого следующего приближения происходит с помощью формулы (10.22), называется *методом простых итераций*.

Алгоритм решения

Исходные данные: $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi f_n(x))$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, ε.

1) $k = 0$;

2) $x^{k+1} = \Phi(x^k)$;

3) если $\Delta^k = \|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$, перейти к шагу 5; иначе перейти к шагу 4;

4) $k = k + 1$, перейти к шагу 2;

5) завершение работы.

Теорема 10.4 (***о достаточном условии сходимости метода простых итераций***). Пусть функции $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \forall i$ определены и непрерывны в области $G \subseteq R^n$ и пусть в этой области выполнено неравенство

$$\max_{x \in G} \|\Phi'(x)\| \le q < 1, \tag{10.23}$$

где $\Phi'(x) = \left\| \dfrac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right\|$.

Итерационный процесс $x^{k+1} = \Phi(x^k)$, если $\forall k = 0, 1, \ldots$ приближения $x^k \in G$ сходится, т.е. $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = x^*$ и x^* является единственным решением системы (10.21) в области G.

Доказательство. По теореме Лагранжа для вектор-функций получим соотношение

$$\left\| \Phi(x^{k+1}) - \Phi(x^k) \right\| = \Phi'(\xi) \cdot \left\| x^{k+1} - x^k \right\| \le q \cdot \left\| x^{k+1} - x^k \right\|,$$

где точка $\xi \in R^n$ лежит между x^{k+1} и x^k.

Неравенство выполняется в силу (10.23). Следовательно, отображение $\Phi(x)$ является сжимающим и имеет единственную неподвижную точку, к которой и сходится итерационный процесс.

Как и в случае систем линейных уравнений, модификацией метода простой итерации, сходящейся быстрее, является *метод Зейделя*. При вычислении следующей компоненты вектора x^k используют все вычисленные к этому моменту значения. Тогда алгоритм решения в целом не меняется, лишь шаг 2 теперь имеет вид

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \varphi_1(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k); \\ x_2^{k+1} = \varphi_2(x_1^{k+1}, x_2^k, \ldots, x_n^k); \\ \ldots \\ x_n^{k+1} = \varphi_n(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{n-1}^{k+1}, x_n^k). \end{cases} \qquad (10.24)$$

Условия сходимости метода Зейделя те же, что и у метода простых итераций.

Эти методы применимы в случае невозможности или трудоемкости вычисления производных, они менее требовательны к точности начального приближения. Сходимость в общем случае линейная. Скорость сходимости характеризуется величиной q. Метода Зейделя обычно сходится быстрее, чем метод простых итераций с точки зрения количества шагов. Однако скорость сходимости существенно зависит от сформированного итерационного процесса и при удачном выборе системы (10.24) может быть достаточно высокой. Преобразование системы к виду (10.24) можно провести разными способами. Требуется лишь обеспечить условие сходимости.

Пример 10.12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x-1) \cdot y = 1; \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Для определения начального приближения построим графики функций в плоскости переменных (x, y) (рис. 10.16).

Будем искать корень, расположенный в первой четверти. Примем $x^0 = (2, 1)$. Преобразуем исходную систему к виду

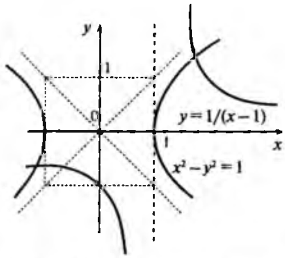


Рис. 10.16. Отделение корней

$$\begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{y}; \\ y = \sqrt{x^2 - 1}. \end{cases}$$

Вычисления методом Зейеля представлены в таблице. Вычисления завершены, так как у значений, полученных в последних итерациях три десятичных знака после запятой совпадают. Таким образом, $x^* =$ (1,7168; 1,3955), вектор невязки $(0{,}29 \cdot 10^{-5}; 0)$.

k	0	1	3	4	...	16	17
x	2	2	1,57735	1,81977	...	1,71650	1,71678
y	1	1,73205	1,21985	1,52039	...	1,39512	1,39547

Эффективное формирование итерационного процесса зависит от вида решаемой системы. Так, метод итераций Пикара[1] является наиболее подходящим для часто встречающихся систем специального вида

$$Ax + H(x) = 0, \qquad (10.25)$$

где $A \in R^{n \times n}$, $\det A \neq 0$.

Такие системы называют «почти линейными». Итерационный процесс Пикара строится так:

$$x^{k+1} = A^{-1} H(x^k). \qquad (10.26)$$

На каждом шаге алгоритма можно решать систему линейных уравнений либо один раз обратить матрицу A.

10.2.3. Завершение процесса расчета при решении нелинейных уравнений

Любой итерационный процесс, вообще говоря, бесконечен. Для завершения расчета необходимо задавать условия, выполнение

[1] Пикар Шарль Эмиль (1856—1941) — французский математик.

которых обеспечивает достижение требуемой точности результата. При этом, как и в случае одного уравнения, в качестве «меры ошибки», или точности полученного решения, можно рассматривать либо норму ошибки по аргументу (погрешности для одного уравнения) $\Delta(x^k) = \|x^* - x^k\|$, либо невязку $r^k = \|F(x^k)\|$. Очевидно, погрешность найти невозможно. Для хорошо обусловленных задач малая невязка соответствует малой погрешности. Для плохо обусловленных задач это соответствие нарушается. Но оценки невязки при реализации численного метода оказывается недостаточно. Чтобы завершить процесс вычисления решения, необходимо ответить на такие вопросы:

1. Решена ли задача? Для ответа можно проверить выполнение неравенства $\|F(x^k)\| < \varepsilon$, где ε — наперед заданное число.

2. Не расходится ли процесс? Если расстояния между соседними приближениями начинают возрастать, процесс расходится. Следует проверять выполнение условия $\Delta^{k+1} < \Delta^{k+1}$, $\Delta^k = \|x^k - x^{k-1}\|$. Если оно перестает выполняться, продолжать расчет не имеет смысла.

3. Не перестал ли изменяться вектор x? Может оказаться, что возможности вычислительного устройства не позволяют достичь заданной точности. В этом случае вычисленное значение x^k уже не изменяется, а задача еще не может считаться решенной. Процесс никогда не остановится. Для того чтобы избежать такой ситуации, следует контролировать изменение аргумента на каждом шаге, например проверяя условие $\|x^k - x^{k-1}\| < \varepsilon_M \cdot \|x^k\|$. Такая проверка позволяет избежать неожиданностей при реализации вычислительной процедуры на другом устройстве, например с другой длиной ячейки памяти.

4. И наконец, необходимо выяснить, не иссякли ли ресурсы для расчета (время, деньги, терпение и т.п.). В любой программе должно быть ограничение на максимальное число итераций. При его достижении пользователь может сам принять решение о возможности продолжения расчета.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Опишите постановку задачи решения нелинейных уравнений и процесс отделения корней.
2. Как проявляется плохая обусловленность задачи? Какую роль играют погрешности и невязка?

3. Опишите метод половинного деления, его алгоритм и особенности. Дайте геометрическую интерпретацию.
4. Найдите методом деления отрезка пополам корень нелинейного уравнения $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$, лежащий на отрезке $[2; 4]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
5. Опишите метод Ньютона, его алгоритм и особенности. Дайте геометрическую интерпретацию.
6. Для уравнения $e^{-x} - x^2 = 0$ покажите глобальную сходимость метода Ньютона. Решите уравнение с точностью 10^{-3}.
7. Для уравнения $e^x - 3 - \cos(x) = 0$ покажите глобальную сходимость метода Ньютона. Решите уравнение с точностью 10^{-3}.
8. Уравнение $3x^3 - 2x = 0$ имеет три корня. Исследовать, к какому корню сходится метод Ньютона из различных начальных приближений. Определить области притяжения корней. Проиллюстрировать полученный результат.
9. Что такое сходимость метода, какие вы знаете типы сходимости?
10. Опишите метод итераций, его алгоритм, условия сходимости. Дайте геометрическую интерпретацию.
11. Найдите методом простой итерации корень нелинейного уравнения $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$, лежащий на отрезке $[2; 4]$, с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
12. Опишите постановку задачи решения систем нелинейных уравнений. Каково значение вопросов существования и единственности решения?
13. Какие вам известны способы оценки точности при решения систем нелинейных уравнений? Опишите связь погрешности и невязки.
14. Проведите сравнительный анализ методов решения систем нелинейных уравнений: метода Ньютона, упрощенного метода Ньютона, метода простой итерации.
15. Для системы уравнений

$$\begin{cases} x - 2y^2 + 1 = 0; \\ -x^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

найдите начальное приближение к корням, расположенным в первом квадранте. Выпишите процесс уточнения корней по методу Ньютона. Уточните решение с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

16. Уточните корень системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0; \\ e^{x-1} + y^3 - 2 = 0, \end{cases}$$

исходя из начального приближения (1,5; 2), с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ упрощенным методом Ньютона.

17. Определите абсолютную и относительную погрешности решения задачи.
18. Сформируйте алгоритм вычисления параметров машинной арифметики.
19. Как определить число шагов метода половинного деления, обеспечивающее заданную точность решения?
20. Как проверить условия глобальной сходимости метода Ньютона?
21. Как вычислить ставку общего дохода купонной облигации?
22. Цена купонной облигации может быть вычислена по формуле

$$P = \frac{k}{1+r} + \frac{k}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{k}{(1+r)^{T-1}} + \frac{C+k}{(1+r)^T},$$

где k — стоимость купона; C — выкупная цена облигации; r — ставка дохода; T — количество лет действия облигации.

Вычислите r с точностью до 0,01% одним из численных методов (половинного деления, итераций, Ньютона). Исходные данные: $C = 1000$; $k = 15{,}5$; $T = 10$; $P = 1115$.

ГЛАВА 11

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

11.1. Многокритериальные задачи в экономике

При практическом выборе экономических решений важным является случай, когда степень достижения цели, которую желательно оптимизировать (объем продукции, размер издержек и пр.), невозможно представить одной величиной. Существует *многообразие* целей. Задачи такого рода часто встречаются, когда в результате производственного процесса получается ряд различных продуктов, количества которых невозможно суммировать, или когда на производство влияет несколько факторов, количество которых невозможно выразить в одной единице измерения.

Будем полагать, что известны варьируемые экономические переменные x_i, на значения которых наложены ограничения

$$x \in X \subset R^N, \tag{11.1}$$

где X — множество допустимых значений (альтернатив, вариантов, решений).

Предполагается, что множество X замкнуто.

Сравнение решений осуществляется не непосредственно, а при помощи заданных на X числовых функций u_1, ..., u_m, называемых *критериями*. Критериями могут быть прибыль, издержки, время, количество продукции и т.п.

В общем случае *многокритериальную* задачу можно записать в виде отображения

$$u : X \to U,$$

где $U \subset R^M$ — множество значений критериев.

Здесь можно заметить, что критерии бывают *качественными и количественными*. Для определения типа критерия задается множество допустимых преобразований.

Функция φ называется *допустимым преобразованием* критерия u_i, если $\varphi(u_i)$ вновь оказывается критерием, измеряющим то же свойство. Если критерием, например, является время, то его можно представлять в секундах, минутах, часах, годах. Время является *количественным критерием*, множеством допустимых преобразований в данном случае является

$$\Phi = \{\varphi | \varphi(u) = ku + l,\ k > 0\}.$$

С помощью этого критерия можно сравнивать, во сколько раз время изготовления одного изделия больше времени изготовления другого изделия, причем в различных единицах измерения.

Рассмотрим другой пример. Известно, что знания студента можно оценить по пяти-, десяти- или 100-балльной шкале. Если сравнивать знания студентов по данной дисциплине, то нельзя сказать, во сколько раз знания одного студента лучше, чем другого. Множество допустимых преобразований в этом случае является множество всех неубывающих функций. Критерии с таким множеством допустимых преобразований являются *качественными*.

Качественные критерии не всегда правильно используются на практике. Пусть при сравнении успеваемости студентов A и B по двум равнозначным дисциплинам были использованы следующие данные: студент A получил 70 баллов по линейной алгебре и 70 баллов по математическому анализу (по 100-балльной шкале), что соответствует оценкам 4 по пятибалльной шкале. Студент B был соответственно оценен в 48 и 100 баллов по 100-балльной шкале, что соответствует двум и пяти баллам по пятибалльной шкале. В результате получаем, что по 100-балльной шкале лучше второй студент: $70 + 70 < 48 + 100$, а по пятибалльной — первый: $4 + 4 > 2 + 5$.

В дальнейшем будем рассматривать только количественные критерии.

Рассмотрим теперь несколько примеров на составление моделей многокритериальных задач.

Пример 11.1. Рекламное агентство, в штате которого десять человек, получило заказ на рекламу нового продукта на радио и ТВ. Данные о рекламной аудитории, стоимости рекламы и количестве занятых при ее изготовлении агентов заданы в таблице.

Характеристики	Радио	Телевидение
Рекламная аудитория (млн человек)	4	8
Стоимость минуты рекламы (в тыс. у. е.)	8	24
Количество занятых агентов	1	2

Сколько минут рекламного времени должно купить агентство на радио и ТВ, чтобы максимизировать аудиторию и минимизировать свои издержки, если контракт запрещает использовать более 6 минут рекламы на радио?

Решение. Если x_1 — количество заказанных минут на радио, а x_2 — на ТВ, то имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} u_1 = 4x_1 + 8x_2 \to \max; \\ u_2 = 8x_1 + 24x_2 \to \min; \\ x_1 \le 6; \\ x_1 + 2x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Пример 11.2 (многокритериальная задача об использовании ресурсов). Для выпуска двух видов продукции используется два вида ресурсов. Известны: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ — матрица норм расхода сырья, $Q = (2, 1)$ — стоимость ресурсов, $P = (6, 9)$ — цена реализации продукции, $B = \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \end{pmatrix}$ — запасы ресурсов. Найти план производства, максимизирующий одновременно выручку и прибыль (или, что эквивалентно, максимизирующий прибыль и минимизирующий затраты на ресурсы).

Решение. Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — план производства, то стоимость ресурсов $QAX = 4x_1 + 8x_2$, выручка $u_1 = PX = 6x_1 + 9x_2$, прибыль $u_2 = PX - QAX = 2x_1 + x_2$. Расписав условие $AX \le B$, т.е. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \end{pmatrix}$, получим задачу

$$\begin{cases} u_1 = 6x_1 + 9x_2 \to \max; \\ u_2 = 2x_1 + x_2 \to \max; \\ x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + 2x_2 \le 16; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Чтобы сформулировать понятие Парето-оптимальности в пространстве переменных и в пространстве критериев, рассмотрим следующий пример.

Пример 11.3. (метод «стоимость — эффективность»). Пусть заданы два критерия: u_1 — стоимость, u_2 — эффективность. Рассмотрим задачу $u_1 \to \min$, $u_2 \to \max$. Множество допустимых вариантов U в пространстве критериев графически представленна на рис. 11.1

Рассмотрим два допустимых варианта 1 и 2. Вариант 1 имеет большую эффективность и меньшую стоимость, чем 2, следовательно, вариант 1 лучше. Если сравнить варианты 1 и 3, то видно, что вариант 1 имеет меньшую стоимость, но вариант 3 более эффективен. В этом случае можно сказать, что варианты 1 и 3 несравнимы.

Множество всех допустимых вариантов, для которых не существует вариантов лучше, находится на дуге *AB*. Все эти варианты несравнимы между собой и называются *Парето-оптимальными вариантами*.

Далее для определенности будем полагать, что все критерии желательно максимизировать.

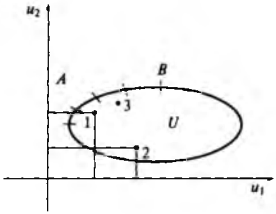


Рис. 11.1

Определение 11.1. *Вариант $x^0 \in X$ называется оптимальным по Парето, если не существует варианта $x \in X$, $x \neq x^0$ такого, что $u(x) \geq u(x^0)$, $u(x) \neq u(x^0)$.*

Определение 11.2. *Вариант $u^0 \in U$ называется оптимальным по Парето, если не существует варианта $u \in U$, $u \neq u^0$, что $u \geq u^0$.*

Для решения практических задач чаще используется понятие оптимальности по Слейтеру.

Определение 11.3. *Вариант $x^0 \in X$ называется оптимальным по Слейтеру, если не существует варианта $x \in X$, что $u(x) > u(x^0)$.*

Определение 11.4. *Вариант $u^0 \in U$ называется оптимальным по Слейтеру, если не существует варианта $u \in U$, что $u > u^0$.*

Пример 11.4. Пусть множество допустимых значений имеет вид, показанных на рис. 11.2

Тогда легко видеть, что отрезки *AB* и *BC* представляют множество решений, оптимальных по Слейтеру, а множество Парето-оптимальных решений состоит только из одной точки *B*.

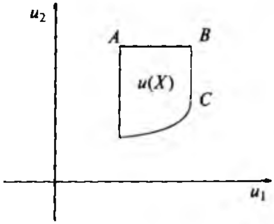


Рис. 11.2

Обозначим множество всех решений, оптимальных по Слейтеру, в пространстве параметров — $X_С$, в пространстве критериев — $U_С$, а множество решений, оптимальных по Парето, — $X_П$ и $U_П$, тогда, очевидно, выполняются следующие включения:

$$X_С \supseteq X_П,\ U_С \supseteq U_П. \tag{11.2}$$

Пример 11.5. Пусть M отраслей заняты производством M продуктов. Каждая отрасль может производить только один продукт, но при помощи нескольких технологических процессов. Каждой отрасли доступны процессы Λ_i. Пусть общее количество трудовых ресурсов равно единице, тогда u_i — доля трудовых ресурсов i-й отрасли. Очевидно, что $\sum u_i = 1$.

Пусть $a_{ij}^{\lambda_i}$ — количество j-го продукта, производимого i-й отраслью, когда она функционирует с единичным уровнем интенсивности ($u_i = 1$) и применяется производственный процесс $\lambda_i \in \Lambda_i$. Предполагается, что $a_{ij}^{\lambda i} \le 0$, если $i \ne j$, но $a_{ii}^{\lambda i} > 0$. Отрицательные значения интерпретируются как расход продуктов в производстве. Предположение о знаках означает, что каждая отрасль может использовать все материалы, а производить только одни продукт.

Вектор $a_i^{\lambda i} = (a_{i1}^{\lambda i}, a_{i2}^{\lambda i}, \dots, a_{iM}^{\lambda i})^T$ называется *вектор-процессом* i-й отрасли. Каждому производственному процессу λ_i соответствует свой вектор-процесс.

Если для каждой отрасли выбран производственный процесс, т.е. зафиксирован набор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)^T$, то чистый выпуск продукта j всей системой будет равен $c_j = \sum_{i=1}^{M} u_i \cdot a_{ij}^{\lambda i}$. Для практики наиболее интересен случай, когда $c_j > 0$ для всех j. Это означает, что можно так организовать производство всех продуктов (назначить λ_i и u_i), что каждая отрасль будет производить продукта больше, чем его требуется для потребления всеми остальными отраслями системы, т.е. все продукты будут производиться в избытке и их можно использовать вне системы.

Пример 11.6. Пусть $M = 2$. Заданы вектор-процессы отраслей $a_1^1 = (3; -1)^T$, $a_1^2 = (1{,}5; -3)^T$, $a_2^1 = (-3; 1)^T$, $a_2^2 = (-1; 2)^T$. В данном случае множество Парето-оптимальных решений со значениями $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ находится на интервале AB (рис. 11.3).

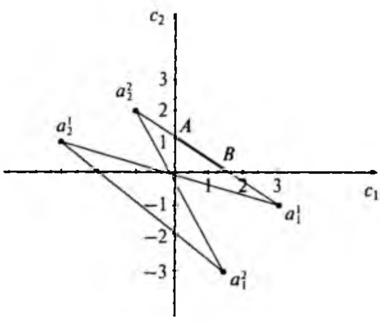


Рис. 11.3

Здесь необходимо заметить, что при $n > 3$ обычно невозможно изобразить множество Парето-оптимальных решений. Кроме того, вычисление значений $u(X)$ с достаточной точностью требует больших временных затрат.

В случае же $n = 2$ алгоритм построения множества Парето-оптимальных решений для задач с *линейными целевыми функциями и линейными ограничениями* основан на графическом методе решения задач линейного программирования. Чтобы выяснить, является ли точка $x \in X$ Парето-оптимальной, проведем через x линии уровня — прямые l_i — каждой из целевых функций $u_1, u_2, \ldots, u_M$.

Каждая из прямых l_i разбивает плоскость на две полуплоскости. Пусть Π_i — полуплоскость, содержащая вектор градиента целевой функции f_i, а их пересечение $\Pi = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \Pi_i$. Если x является единственной точкой пересечения Π и X, т.е. $\Pi \cap X = x$, то x является Парето-оптимальной.

Пример 11.7. Найдем Парето-оптимальную границу в задаче примера 11.2. Легко убедиться, что областью допустимых решений, т.е. решением системы ограничений задачи

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + 2x_2 \le 16; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

является четырехугольник $OABC$, где $A(0, 6)$, $B(3, 5)$, $C(8, 0)$ (рис. 11.4). Проведя описанное выше построение, например, в точке B, получим, что искомая область Π ограничена двумя лучами BE и BF. Ее пересечением с X является лишь сама точка B, а следовательно, точка B — Парето-оптимальная. Перемещая Π вдоль X и проверяя условие единственности, сразу убеждаемся, что любая внутренняя точка допустимой области не является Парето-оптимальной, а из граничных точек Парето-оптимальную границу образует отрезок BC.

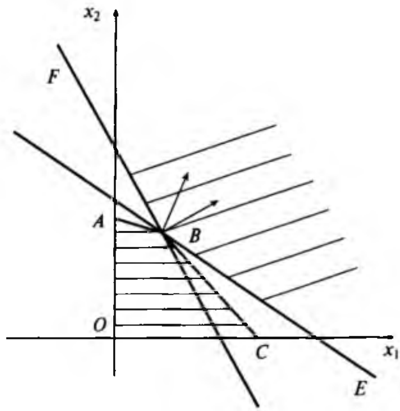
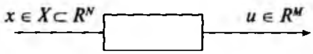


Рис. 11.4

Отметим также, что $f_{1,\max} = f_1(B) = 63, f_{2,\max} = f_2(C) = 16$, т.е. по разным критериям оптимальными являются различные точки. Теперь перед лицом, принимающим решение, возникает вопрос о компромиссном решении, и выбор естественно сделать из точек отрезка BC.

11.2. Построение недоминируемых решений

В целях эффективного и быстрого нахождения оптимального решения лицу, принимающему решения (ЛПР), т.е. экономисту, управленцу, необходимо передавать только *недоминируемые* (оптимальные по Парето, по Слейтеру) варианты, среди которых он должен выбрать единственное решение. Такой выбор осуществляется обычно на основании опыта и интуиции ЛПР. Несмотря на то что множество всех недоминируемых решений, как правило, уже множества всех возможных решений, рассчитать всевозможные Парето-оптимальные варианты на основании данной модели:



(11.5)

и предоставить их ЛПР для рассмотрения при заданных сроках решения задачи не всегда возможно. Для сокращения времени поиска можно попытаться формализовать на основании опроса ЛПР его опыт и интуицию в виде некоторой функции полезности и искать экстремумы этой функции на множестве допустимых значений. Если такая формализация невозможна, то наилучшим инструментом поиска оптимального решения является человеко-машинная процедура, в процессе которой вычислительной машиной ЛПР будут предоставляться только недоминируемые решения. Получив значения недоминируемого варианта в пространстве критериев, отвечая на ряд вопросов ЭВМ, ЛПР будет задавать направление желаемого улучшения или значения критериев желаемого варианта. В ответ на эти действия ЭВМ будет выдавать значения нового недоминируемого варианта. С помощью человеко-машинной процедуры ЛПР может исследовать множество недоминируемых вариантов, пока не найдет лучший.

Можно заметить, что множество $u(X)$, соответствующее модели (11.3), в явном виде не существует. Каждое недоминируемое решение, принадлежащее этому множеству, находится как решение некоторой оптимизационной однокритериальной задачи.

Далее излагаются некоторые методы, наиболее часто используемые в человеко-машинных процедурах выбора решений.

11.3. Метод Салуквадзе

Метод состоит из двух этапов. На первом этапе решаются (с помощью известных методов математического программирования) M задач следующего вида:

$$u_i^0 = \max u_i(x),\ x \in X. \tag{11.4}$$

Здесь u_i^0 — максимальное значение i-го критерия на множестве X. Значения u_i^0 являются координатами «идеальной» точки.

Если бы точка u^0 принадлежала множеству $u(X)$, то эта точка была бы наилучшей, поскольку она превосходит все возможные точки $u(X)$ по всем значениям координат. Однако в большинстве случаев точка u^0 не принадлежит множеству допустимых значений $u(X)$. Тогда на втором этапе на множестве $u(X)$ находится точка, ближайшая к идеальной как решение задачи

$$R\left(u(x), u^0\right) \to \min,\ \ x \in X, \tag{11.5}$$

где R — расстояние от $u(X)$ до u^0.

В качестве R можно выбирать функции

$$\left(\sum_{i=1}^{M}\left(u_i^0 - u_i(x)\right)^{\frac{1}{l}}\right)^{\frac{1}{l}}, \tag{11.6}$$

где l — целое число и $l \geq 1$.

Можно показать, что решение задачи (11.5) будет оптимально по Парето.

Пример 11.8. Нетрудно видеть, что для примера 11.5 и случая $l = 2$ (рис. 11.5) координаты идеальной точки будут равны: $u_1^0 = \dfrac{5}{3}$, $u_2^0 = \dfrac{5}{4}$.

Поверхностями уровня функции $R\left(u(x), u^0\right)$ будут концентрические окружности с центром в точке $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{4}\right)^T$. Решением задачи (11.5) будет Парето-оптимальная точка на интервале AB.

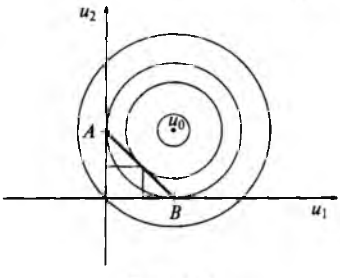


Рис. 11.5

Пример 11.9. Решим задачу примера 11.7 методом идеальной точки. Введем линейное преобразование $u = \left(u_1(x), u_2(x)\right): R^2 \to R^2$, определенное критериями u_1 и u_2:

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 + 9x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

При этом образом множества X будет четырехугольник с вершинами $u(O) = (0, 0)$, $u(A) = (54, 6)$, $u(B) = (63, 11)$ и $u(C) = (48, 16)$. Идеальной является точка I с координатами $(u_{1,\max}, u_{2,\max}) = (63, 16)$, не принадлежащая образу X в силу того, что оптимальные значения соответствующих целевых функций достигаются в различных точках (рис. 11.6).

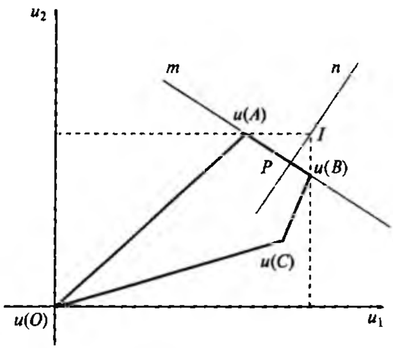


Рис. 11.6

Выбирая компромиссную точку P согласно правилу (11.5) для $l = 2$, получим, что $P = m \cap n$ имеет координаты $P\left(\dfrac{123}{2}; \dfrac{23}{2}\right)$. Здесь прямая m проходит через $u(A)$ и $u(B)$, а прямая n ей перпендикулярна и проходит через I.

Наконец, находим компромиссную точку как прообраз P:

$$x^* = u^{-1}(P) = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 123/2 \\ 23/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}.$$

11.4. Метод лексико-графического упорядочения

На основании опроса ЛПР критерии ранжируются по важности. Пусть первый критерий является наиболее важным, второй более важен, чем все остальные, и т.д. (критерии всегда можно переобозначить так, чтобы они имели соответствующую нумерацию). Затем сначала находится значение u_1^0 как решение задачи

$$u_1^0 = \max u_1(x), \ x \in X. \tag{11.7}$$

Затем находится значение u_2^0 как решение задачи

$$u_2^0 = \max u_2(x), \ u_1(x) = u_1^0, \ x \in X. \tag{11.8}$$

Далее,

$$u_3^0 = \max u_3(x),\ u_1(x) = u_1^0,\ u_2(x) = u_2^0,\ x \in X \tag{11.9}$$

и т.д.

Можно показать, что решение, полученное по данному методу, будет оптимально по Парето.

Достоинством данного метода является его простота, недостатком — то, что решение задачи в большинстве случаев сводится к поиску оптимального значения для первого критерия.

Применение данного метода к примеру 11.5 дает единственное Парето-оптимальное решение: $u_1 = \frac{5}{3}$, $u_2 = 0$.

11.5. Метод линейной сверки

ЛПР задает значения весов критериев α_i, $i = \overline{1, M}$, и решается задача

$$\sum_{i=1}^{M} \alpha_i u_i \to \max,\ x \in X. \tag{11.10}$$

Функция $\sum \alpha_i u_i$ является скалярным произведением векторов α и u. Поверхностями уровня такой функции являются гиперплоскости, нормальные вектору α. Поскольку градиент функции скалярного произведения равен вектору α:

$$\nabla(\alpha, u) = \alpha, \tag{11.11}$$

то вектор α указывает направление наискорейшего возрастания функции скалярного произведения.

Можно показать, что, изменяя вектор α ($\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, M}$), для выпуклого множества $u(X)$ *любую точку, оптимальную* по Слейтору (по Парето), можно получить как решение задачи (11.10).

Пример 11.5. Пусть $u \in R^2$, множество $u(X)$ изображено на рисунке 11.7.

Нетрудно видеть, что Парето-оптимальная точка A не может быть получена как решение задачи (11.10) ни при каких значениях α. Поскольку заранее неизвестно, какая из Парето-оптимальных точек является наилучшей с точки зрения ЛПР, то метод линейной свертки применяется для решения ограниченного класса задач.

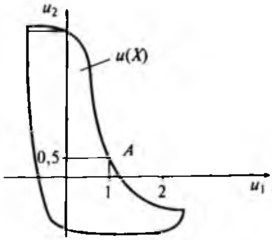


Рис. 11.7

11.6. Метод Гермеймера

Основой применения данного метода является свертка Гермейера которая имеет вид

$$\min_i \{\alpha_i u_i(x)\}, \alpha_i > 0, \ i = \overline{1, M}. \tag{11.12}$$

Можно показать, что любое решение x^0, удовлетворяющее

$$\min_i \{\alpha_i u_i(x^0)\} = \max_{x \in X} \min_i \{\alpha_i u_i(x)\}, \tag{11.13}$$

является оптимальным по Слейтеру, и для любого $x^0 \in X_c$ найдется вектор $\alpha > 0$ такой, что x^0 можно получить как решение задачи (11.13); предполагается, что $u(X)$ находится в положительном гиперортанте.

В силу сформулированного выше утверждения метод Гермейера применим для решения самого широкого класса задач.

Пример 11.8. Пусть $M = 2$, $\alpha_1 = 0{,}5$, $\alpha_2 = 1$. Тогда поверхности уровня свертки Гермейера можно изобразить, как показано рис. 11.8.

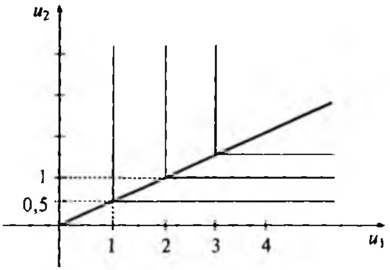


Рис. 11.8

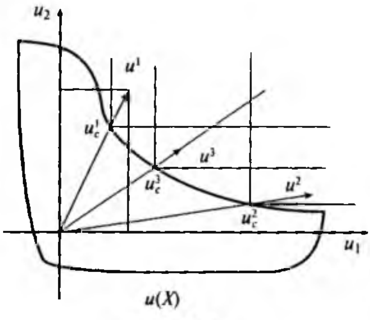


Рис. 11.9

Пример 11.9. Пусть множество допустимых значений имеет вид, представленный на рис. 11.9.

Предполагается, что в явном виде множество допустимых значений ЛПР неизвестно, u_i — количество продукта, произведенного i-й отраслью.

Человеко-машинная процедура с использованием свертки Гермейера может быть организована следующим образом.

Шаг 1. ЛПР задает желаемые варианты, т.е. желаемое количество продуктов, производимых первой и второй отраслями. ЭВМ вычисляет значения вектора α, решает оптимизационную задачу (11.13) и выдает на экран координаты «ближайшего» к желаемому, оптимального по Слейтеру (по Парето) вектора u_c^1 и соответственно x_c^1.

Шаг 2. ЛПР считает, что полученный вектор u_c^1 имеет хорошее значение второй координаты, т.е. выпуск продукции второй отрасли вполне достаточен, а первой отрасли слишком мал. Чтобы исправить это положение, ЛПР задает новые желаемые значения u^2. Эти желаемые значения недостижимы. ЭВМ снова решает оптимизационную задачу и выдает на экран «ближайшие» к желаемому значения, оптимальные по Слейтеру, u_c^2 и x_c^2.

Шаг 3. ЛПР считает, что теперь получен достаточный выпуск продукции первой отрасли, но слишком мал выпуск продукции второй отрасли, и задает новый желаемый вариант. Полученный в результате решения оптимизационной задачи вариант u_c^3 и x_c^3 является удовлетворительным для двух отраслей, процедура останавливается.

Замечание. Метод Гермейера применим для случая, когда количество критериев больше либо равно 2.

В процессе диалога ЛПР формулирует предпочтения в удобных ему категориях, ЭВМ только выполняет рутинные вычислительные операции. Можно показать, что если у ЛПР нет хаотических метаний и существует непротиворечивая система предпочтений, то процедура поиска оптимального решения сходится за конечное число шагов.

Контрольные вопросы и упражнения

1. В каких случаях линейная свертка позволяет получить любое Парето-оптимальное решение?
2. В чем состоит недостаток метода лексико-графического упорядочения?
3. Что является достоинством метода Гермейера?
4. Две отрасли заняты производством двух продуктов. Общее количество трудовых ресурсов равно единице; u_1 — доля трудовых ресурсов первой отрасли, а u_2 — доля трудовых ресурсов второй отрасли. Заданы вектор-процессы отраслей: $a_1^1 = (4; -1)$; $a_1^2 = (0{,}5; -3)$; $a_2^1 = (-5; 6{,}5)$; $a_2^2 = (-1{,}5; 3)$; $a_2^3 = (-10; 1{,}5)$. Известно, что чистый выпуск j продукта будет равен $C_j = \sum_{i=1}^{2} u_i a_{ij}^{\lambda i}$. Построить множество решений, оптимальных по Слейтеру.

5. Рассматривается задача с двумя критериями: u_1 — первый критерий, измеряет стоимость; u_2 — второй критерий, измеряет эффективность. Множество допустимых значений U имеет вид: $U = A \cup B$, где

$$A = \{u \in R^2 | (u_1 - 1)^2 + u_2^2 \le 1 \text{ и } 0 \le u \le 1,\ 0 \le u_2 \le 1\};$$

$$B = \left\{u \in R^2 | 1 \le u_1 \le 2,\ 0 \le u_2 \le 3\right\}.$$

Построить множество недоминируемых решений. Выделить решение, полученное по методу Салуквадзе.

6. Рассматривается задача с двумя критериями: u_1 — первый критерий, измеряет стоимость; u_2 — второй критерий, измеряет эффективность. Множество допустимых значений U имеет вид: $U = A \cup B$, где

$$A = \left\{u \in R^2 |\ 0 \le u_1 \le 2,\ \ 0 \le u_2 \le 2\right\};$$

$$B = \left\{u \in R^2 |\ 2 \le u_1 \le 4,\ \ 0 \le u_2 \le 3\right\}.$$

Построить множество недоминируемых решений. Выделить решение, полученное по методу Салуквадзе.

7. Найти множество недоминируемых решений для задачи

$$\begin{cases} f_1 = x_1 + 5x_2 \to \max; \\ f_2 = x_1 + x_2 \to \min; \\ x_1 + 2x_2 \le 8; \\ 3x_1 + x_2 \le 9; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

8. Найти множество недоминируемых решений задачи

$$\begin{cases} f_1 = 3x_1 + x_2 \to \max; \\ f_2 = x_1 + 4x_2 \to \max; \\ x_1 + x_2 \le 12; \\ x_1 \le 7,\ x_2 \le 8; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

9. Найти компромиссное решение задачи № 8 методом идеальной точки.

ГЛАВА 12

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

12.1. Постановка задачи

Адекватная экономическая теория должна отражать процесс непрерывного развития экономической системы, поэтому во многих экономических моделях переменные зависят от времени. Существующие в настоящее время динамические модели представляют собой формальное описание множеств вариантов развития экономической системы, или траекторий экономики, удовлетворяющих тем или иным требованиям. Траекторией будем называть отображение, которое каждому значению переменной времени ставит в соответствие состояние экономики в данный момент времени. Считается, что состояние экономики можно описать набором чисел, или переменных состояния $x = (x_1, ..., x_N)^T$, $x = x(t)$.

Обычно известно начальное состояние $x(0) = x^0$. В зависимости от управляющих воздействий $u = (u_1, ..., u_M)^T$, $u = u(t)$ система может переходить из начального состояния в конечное по различным траекториям. При этом качество реализуемого управления характеризуется соответствующим значением функционала I. Функционал выбирается в зависимости от рассматриваемой задачи. Примерами функционалов являются: прибыль, издержки, время, количество выпускаемой продукции. Общая задача динамического программирования состоит в том, чтобы из множества допустимых управлений U выбрать такое u^*, при котором функционал принимает экстремальное значение.

Будем рассматривать следующую задачу. Поведение экономической системы зависит от времени и описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t),$$

где $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1, N}$ — экономические переменные; $u_j = u_j(t)$, $j = \overline{1, M}$ — параметры управления (параметры, которые можно изменять).

Задано $x(t_0) = x^0$. Известно, что параметры управления ограничены и принадлежат некоторой допустимой области U.

Требуется минимизировать интеграл

$$\int_{t_0}^{T} F(x, u, t)dt.$$

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности Р. Беллманна, который можно сформулировать так: *любой последний участок оптимальной траектории должен быть оптимальной траекторией.*

Докажем принцип оптимальности.

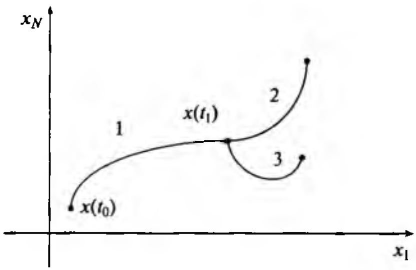


Рис. 12.1

Пусть на рис. 12.1 изображена оптимальная траектория (участки 1, 2), момент времени t_1 удовлетворяет условию $t_0 < t_1 < T$.

Предположим, что принцип оптимальности неверен, т.е. последний участок траектории не оптимален, тогда на интервале $(t_1,\ T)$ существует другая траектория, которая является оптимальной (участок 3 изображает оптимальную траекторию на данном интервале). В силу вышеизложенного можно записать

$$\int_{t_1}^{T} F \text{ (на участке 2) } dt > \int_{t_1}^{T} F \text{ (на участке 3) } dt. \tag{12.1}$$

Используя свойство аддитивности интеграла, можно записать

$$I_1 = \int_{t_0}^{T} F \text{ (на участках 1, 2) } dt = \int_{t_0}^{t_1} F \text{ (на участке 1) } dt + \int_{t_1}^{T} F\text{(на участке 2) } dt.$$

Аналогично $I_2 = \int_{t_0}^{T} F$ (на участках 1, 3) $dt = \int_{t_0}^{t_1} F$ (на участке 1) $dt +$ $+ \int_{t_1}^{T} F$ (на участке 3) dt. Используя свойство (12.1), получаем неравенство $I_1 > I_2$. Это противоречит тому, что траектория, состоящая из участков 1, 2, является оптимальной. Противоречие доказывает принцип оптимальности.

Замечание 12.1. При доказательстве принципа оптимальности не использовалось свойство непрерывности процесса. Следовательно, сформированный принцип оптимальности справедлив как для непрерывных, так и для дискретных систем.

Пример 12.1. В начальный момент времени самолет находится на высоте H_0 и имеет скорость V_0, самолет должен достичь высоты H_k и скорости V_k с минимальными затратами топлива. Непрерывная задача заменяется дискретной, предполагается, что в определенные моменты времени самолет может увеличить либо скорость на величину ΔV, либо высоту на величину ΔH, причем для каждого момента времени известно, сколько горючего необходимо для данного увеличения скорости или высоты. Эти данные заданы в таблице (рис. 12.2). Для получения оптимальных значений заполним таблицу.

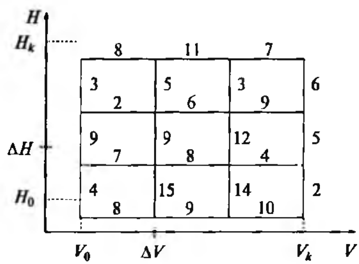


Рис. 12.2

Значение в кружочках (рис. 12.3) означает минимальное количество горючего, которое необходимо, чтобы попасть из данной точки в конечную точку с координатами V_k, H_k. Значения в кружочке можно получить, сравнивая возможные варианты движения наверх или направо. Для примера рассмотрим верхний правый угол таблицы (рис. 12.4).

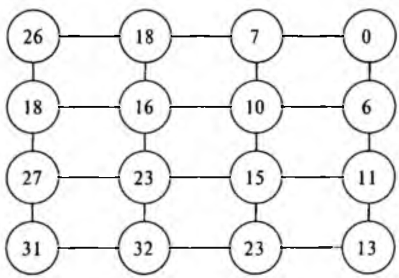


Рис. 12.3

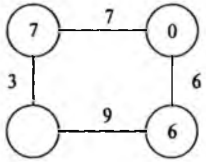


Рис. 12.4

Недостающее значение можно получить, сравнивая $7 + 3 = 10$ и $9 + 6 = 15$. Выбираем меньшее значение 10 и записываем в пустой кружок. Аналогичным образом заполняется вся таблица. Для того чтобы получить оптимальную траекторию, начинаем движение от начала таблицы, определяя, каким образом было получено значение в данном кружке. Очевидно, значение 31 в точке V_0, H_0 было получено как сумма 27 и 4, значение $27 = 9 + 18$ и т.д.

12.2. Рекуррентное соотношение

Пусть поведение экономической системы описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u),$$

где $x \in R$, $u \in U \subset R$.

Задано начальное условие $x(0) = x^0$. Требуется найти управление $u(t)$, минимизирующее интеграл

$$I = \int_0^T F(x, u)dt.$$

Заменим непрерывную задачу дискретной, для этого разобьем отрезок $[0, T]$ на N отрезков равной длины $\Delta = T/N$. Будем рассматривать значения функций только в дискретные моменты времени $t = k\Delta$. Вместо $x(k\Delta)$ будем писать x_k, а вместо $u(k\Delta)$ будем писать u_k. Вместо дифференциального уравнения запишем уравнение в конечных разностях

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta} = f(x_k, u_k),$$

или

$$x_{k+1} = x_u + f(x_k, u_k)\Delta. \qquad (12.2)$$

Заменим интеграл суммой:

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} F(x_k, u_k)\Delta. \tag{12.3}$$

Теперь нужно найти такие управления u_0, u_1, ..., u_{N-1}, которые минимизируют заданный функционал и удовлетворяют исходному ограничению $u \in U$, т.е. требуется найти минимум сложной функции нескольких переменных.

Для решения данной задачи будем использовать принцип оптимальности Беллмана. Вначале рассмотрим момент $t = (N - 1)\Delta$. Согласно принципу оптимальности управление $\overset{\bullet}{u}_{N-1}$ нужно выбирать так, чтобы минимизировать

$$I_{N-1} = F(x_{N-1}, u_{N-1})\Delta.$$

Обозначим найденное минимальное значение через S_{N-1}:

$$S_{N-1}(x_{N-1}) = I_{N-1}(x_{N-1}, \overset{\bullet}{u}_{N-1}) = \min_{u \in U} F(x_{N-1}, u_{N-1})\Delta.$$

Далее будем рассматривать последний и предпоследний участки времени.

Выпишем соответствующие члены суммы (12.3):

$$I_{N-2} = F(x_{N-2}, u_{N-2})\Delta + F(x_{N-1}, u_{N-1})\Delta.$$

Теперь можно записать

$$S_{N-2}(x_{N-2}) = I_{N-2}(x_{N-2}, \overset{\bullet}{u}_{N-2}, \overset{\bullet}{u}_{N-1}) =$$

$$= \min_{\substack{u_{N-2} \in U \\ u_{N-1} \in U}} \{F(x_{N-2}, u_{N-2})\Delta + F(x_{N-1}, u_{N-1})\Delta\} =$$

$$= \min_{u_{N-2} \in U} \{F(x_{N-2}, u_{N-2})\Delta + S_{N-1}(x_{N-1})\} =$$

$$= \min_{u_{N-2} \in U} \{F(x_{N-2}, u_{N-2})\Delta + S_{N-1}(x_{N-2} + f(x_{N-2}, u_{N-2})\Delta\},$$

поскольку из (12.2) следует

$$x_{N-1} = x_{N-2} + f(x_{N-2}, u_{N-2})\Delta.$$

Можно многократно повторить описанную выше процедуру. На k-м шаге получим

$$S_{N-k}(x_{N-k}) = I_{N-k}(x_{N-k}, \overset{\bullet}{u}_{N-k}, \overset{\bullet}{u}_{N-k+1}, \ldots, \overset{\bullet}{u}_{N-1}) =$$

$$= \min_{u_{N-k} \in U} \{F(x_{N-k}, u_{N-k}) + S_{N-k+1}(x_{N-k} + f(x_{N-k}, u_{N-k})\Delta\}.$$

Полученное выражение называется рекуррентным соотношением Беллмана для данной задачи. Заметим, что на каждом шаге минимизация проводится только по одной переменной. Определив на последнем этапе величину $S_0(x_0)$ и управление $u_0^{\bullet}$, можно по заданному начальному состоянию $x(0) = x^0$ найти последовательность $x_1, u_1^{\bullet}, \ldots, x_{N-1}, u_{N-1}^{\bullet}$, а значение $S_0(x_0)$ дает минимальное значение функционала.

Весь процесс решения можно перенести на случай, когда задан векторный закон движения

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}),$$

где $\bar{x} \in R^N$, $\bar{u} \in U \subset R^M$

и требуется минимизировать интеграл

$$S = \int_0^T F(\bar{x}(t), \bar{u}(t))dt.$$

Для этого заменим скаляры x, u и f в приведенных выше формулах на векторы:

$$S_{N-k}(\bar{x}_{N-k}) = \min_{\bar{u}_{N-k} \in U} \left\{ F(\bar{x}_{N-k}, \bar{u}_{N-k}) + S_{N-k+1}\left(\bar{x}_{N-k} + \bar{f}(\bar{x}_{N-k}, \bar{u}_{N-k})\Delta\right) \right\}.$$

Теперь на каждом шаге нужно находить минимум функции от N переменных.

Пример 12.2. Распределение капитальных вложений. Пусть фонд капитальных вложений A нужно распределить между N предприятиями. Если прирост выпуска продукции на i-м предприятии равен $F_i(x_i)$ для выделенной суммы x_i, то оптимальное распределение капиталовложений можно определить, используя следующую модель:

$$F = \sum_{i=1}^{N} F_i(x_i) \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = A, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Для решения данной задачи будем использовать принцип оптимальности Беллмана.

Обозначим через S_k средства, вложенные в последние предприятия, начиная с k-го, т.е. $S_k = x_k + x_{k+1} + \ldots + x_N$.

Пусть $L_k(S_k)$ — максимальная прибыль этих предприятий при вложении в них S_k средств, или

$$L_k(S_k) = \max_{x_k, \dots, x_N} \sum_{i=k}^{N} F_k(x_i).$$

Нетрудно видеть, что для заданной функции F (которая является аддитивной и сепарабельной) можно записать

$$L_k(S_k) = \max_{x_k \le S_k} \left[F_k(x_k) + L_{k+1}(S_{k+1})\right] = \max_{x_k \le S_k} \left[F_k(x_k) + L_{k+1}(S_k - x_k)\right].$$

Данное равенство является рекуррентным соотношением, по форме напоминающим рекуррентное соотношение, полученное ранее. Поскольку предприятия с номером $N + 1$ не существует, то $F_{N+1} = 0$.

Замечание 12.2. Аналогом времени в данной задаче является номер предприятия.

Пример 12.3. Однопродуктовая динамическая модель. Пусть заданы номера этапов $i = \overline{1, N}$, z_i — количество заказанной продукции; ξ_i — спрос; x_i — исходный запас на начало i-го этапа; h_i — затраты на хранение единицы запаса, переходящей из этапа i в этап $i + 1$; k_i — затраты на оформление заказа; $c_i(z_i)$ — функция предельных затрат, связанных с закупкой при заданном z_i, определим

$$C_i(z_i) = \delta_i k_i + c_i(z_i),$$

где $\delta_i = \begin{cases} 0, & z_i = 0; \\ 1, & z_i > 0. \end{cases}$

Требуется найти оптимальные значения z_i, минимизирующие общие затраты на оформление заказов, закупку и хранение по всем N этапам. Затраты на хранение предполагаются пропорциональными величине $x_{i+1} = x_i + z_i - \xi_i$, которая представляет собой объем запаса, переходящего из этапа i в этап $i + 1$. В результате затраты на хранение на этапе i равны $h_i x_{i+1}$.

Пусть $f_i(x_i)$ — минимальные общие затраты на этапах i, $i + 1$, ..., N, тогда, используя принцип оптимальности, можно получить рекуррентное уравнение

$$f_N(x_N) = \min_{z_N + x_N = \xi_N} \{C_N(z_N)\};$$

$$f_i(x_i) = \min_{\xi_i \le x_i + z_i \le \xi_i + \dots + \xi_N} \{C_i(z_i) + h_i(x_i + z_i - \xi_i) + f_{i+1}(x_i + z_i - \xi_i)\},$$

$$i = \overline{1, N-1}.$$

Пусть $N = 3$ и исходные данные заданы в таблице

Этап i	Спрос ξ_i, ед.	Затраты на оформление заказа k_i, дол.	Затраты на хранение h_i, дол.
1	3	3,00	1,00
2	2	7,00	3,00
3	4	6,00	2,00

Исходный запас x_1 для этапа 1 равен 1 единице. Предполагается, что предельные затраты на приобретение продукции составляют 10 дол. за каждую единицу для первых трех единиц и 20 дол. для каждой дополнительной единицы, тогда

$$c_i(z_i) = \begin{cases} 10 \cdot z_i, & 0 \le z_i \le 3; \\ 30 + 20(z_i - 3), & z_i \ge 4. \end{cases}$$

Результаты пошаговых вычислений можно представить в виде таблиц.

Шаг 1. $\xi_3 = 4,\ z_3 + x_3 = 4$.

	$z_3 = 0$	1	2	3	4		
x_3	$C_3(z_3) = 0$	16	26	36	56	$f_3(x_3)$	z_3^*
0					56	56	4
1				36		36	3
2			26			26	2
3		16				16	1
4	0					0	0

Шаг 2. $\xi_2 = 2,\ 2 \le x_2 + z_2 \le 2 + 4 = 6$.

$$f_2(x_2) = C_2(z_2) + h_2(x_2 + z_2 - \xi_2) + f_3(x_2 + z_2 - \xi_2).$$

	$z_2 = 0$	1	2	3	4	5	6		
x_2	$C_2(z_2) = 0$	17	27	37	57	77	97	$f_2(x_2)$	z_2^*
0			27 + + 0 + + 56 = = 83	37 + + 3 + + 36 = = 76	57 + + 6 + + 26 = = 89	77 + + 9 + + 16 = = 102	97 + + 12 + + 0 = = 109	76	3
1		17 + + 0 + + 56 = = 73	27 + + 3 + + 36 = = 66	37 + + 6 + + 26 = = 69	57 + + 9 + + 16 = = 82	77 + + 12 + + 0 = = 89		66	2

Окончание

	$z_2 = 0$	1	2	3	4	5	6		
x_2	$C_2(z_2) = 0$	17	27	37	57	77	97	$f_2(x_2)$	z_2^*
2	0 + + 0 + + 56 = = 56	17 + + 3 + + 36 = = 56	27 + + 6 + + 26 = = 59	37 + + 9 + + 16 = = 62	57 + + 12 + + 0 = = 69			56	0; 1
3	0 + + 3 + + 36 = = 39	17 + + 6 + + 26 = = 49	27 + + 9 + + 16 = = 52	37 + + 12 + + 0 = = 49				39	0
4	0 + + 6 + + 26 = = 32	17 + + 9 + + 16 = = 42	27 + + 12 + + 0 = = 39					32	0
5	0 + + 9 + + 16 = = 25	17 + + 12 + + 0 = = 29						25	0
6	0 + + 12 + + 0 = = 12							12	0

Шаг 3. $\xi_1 = 3$, $x_1 = 1$, $3 \le z_1 + x_1 \le 3 + 2 + 4 = 9$, т.е. $2 \le z_1 \le 8$.

	$z_1 = 2$	3	4	5	6	7	8		
x_1	$C_1(z_1) = 23$	33	53	73	93	113	133	$f_1(z_1)$	z_1^*
1	23 + 0 + + 76 = 99	33 + + 1 + + 66 = = 100	53 + + 2 + + 56 = = 111	73 + + 3 + + 39 = = 115	93 + + 4 + + 32 = = 129	113 + + 5 + + 25 = = 143	133 + + 6 + + 12 = = 151	99	2

$$f_1(x_1) = C_1(z_1) + h_1(x_1 + z_1 - \xi_1) + f_2(x_1 + z_1 - \xi_1).$$

Оптимальное решение: $z_1^* = 2$, $z_2^* = 3$, $z_3^* = 3$, общие затраты составляют 99 дол.

Очевидно, что для данной задачи для получения оптимальной траектории нет разницы двигаться от начала к концу траектории или наоборот. Поэтому можно получить прямое рекуррентное соотношение.

Определим состояние на шаге i как объем запаса на конец этапа i, т.е. x_{i+1}.

На любом шаге на величины x_{i+1} наложены следующие ограничения: $0 \le x_{i+1} \le \xi_{i+1} + \ldots + \xi_N$.

Пусть $f_i(x_{i+1})$ — минимальные общие затраты на этапах 1, 2, ..., i при заданной величине запаса x_{i+1} на конец этапа i. Тогда рекуррентное соотношение записывается в виде

$$f_1(x_2) = \min_{0 \le z_1 \le \xi_1 + x_2} \{C_1(z_1) + h_1 x_2\},$$

$$f_i(x_{i+1}) = \min_{0 \le z_1 \le \xi_1 + x_{i+1}} \{C_i(z_i) + h_i x_{i+1} + f_{i-1}(x_{i+1} + \xi_i - z_i)\},$$

$$i = \overline{2, N}.$$

Теперь результаты пошаговых выражений можно записать так:

Шаг 1. $\xi_1 = 3$, $0 \le x_2 \le 2 + 4 = 6$, так как $x_1 = 1$, то минимальное значение z_1 равно $\xi_1 - x_1 = 3 - 1 = 2$.

$$f_1(x_2) = C_1(z_1) + h_1 x_2.$$

		$z_1 = 2$	3	4	5	6	6	7	8	
x_2	$h_1 x_2$	$C_1(z_1) = 23$	33	53	73	93	113	133	$f_1(x_2)$	z_2^*
0	0	23							23	2
1	1		34						34	3
2	2			55					55	4
3	3				76				76	5
4	4					97			97	6
5	5						118		118	7
6	6							139	139	8

Шаг 2. $\xi_2 = 2$, $0 \le x_3 \le 4$.

$$f_2(x_3) = C_2(z_2) + h_2 x_3 + f_1(x_3 + \xi_2 - z_2).$$

		$z_2 = 0$	1	2	3	4	5	6		
x_3	$h_2 x_3$	$C_2(z_2) = 0$	17	27	37	57	77	97	$f_2(x_3)$	z_2^*
0	0	0 + + 55 = = 55	17 + + 34 = = 51	27 + + 23 = = 50					50	2
1	3	3 + + 76 = = 79	20 + + 55 = = 75	30 + + 34 = = 64	40 + + 23 = = 63				63	3

Окончание

		$z_2 = 0$	1	2	3	4	5	6		
x_3	$h_2 x_3$	$C_2(z_2) = 0$	17	27	37	57	77	97	$f_2(x_3)$	z_2^*
2	6	6 + + 97 = = 103	23 + + 76 = = 99	33 + + 55 = = 88	43 + + 34 = = 77	63 + + 23 = = 86			77	3
3	9	9 + + 118 = = 127	26 + + 97 = = 123	36 + + 76 = = 112	46 + + 55 = = 101	66 + + 34 = = 100	86 + + 23 = = 109		100	4
4	12	12 + + 139 = = 151	29 + + 118 = = 147	39 + + 97 = = 136	49 + + 76 = = 125	69 + + 55 = = 124	89 + + 34 = = 123	109 + + 23 = = 132	123	5

Шаг 3. $\xi_3 = 4, x_4 = 0.$

$$f_3(x_4) = C_3(z_3) + h_3 x_4 + f_2(x_4 + \xi_3 - z_3).$$

		$z_3 = 0$	1	2	3	4		
x_4	$h_3 x_4$	$c_3(z_3) = 0$	16	26	36	56	$f_3(x_4)$	z_3^*
0	0	0 + 123 = = 123	16 + 100 = = 116	26 + 77 = = 103	36 + 63 = = 99	56 + 50 = = 106	99	3

Оптимальное решение: $z_1^* = 2$, $z_2^* = 3$, $z_3^* = 3$, общие затраты составляют 99 дол.

12.3. Уравнение Беллмана

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} = f(x, u, t),\ x(0) = x^0,\ u \in U \subset R_M,\ x \in R_N;$$

$$I = \int_0^T F(x, u, t)dt \to \min.$$

Введем функцию

$$S(x, t) = \min_{u \in U} \int_t^T F(x, u, t)dt.$$

Используя свойство аддитивности интеграла, можно записать:

$$S(x,t)=\min_{u\in U}\left\{\int_t^{t+\Delta}F(x,u,t)dt+\int_{t+\Delta}^{T}F(x,u,t)dt\right\}=$$

$$=\min_{u\in U}\left\{F(x,u,t)\Delta+o(\Delta)+\min_{u\in U}\int_{t+\Delta}^{T}F(x,u,t)dt\right\}= \tag{12.4}$$

$$=\min_{u\in U}\{F(x,u,t)\Delta+o(\Delta)+S(x(t+\Delta),t+\Delta)\}.$$

Разложим функцию $S\big(x(t+\Delta),t+\Delta\big)$ по формуле Тейлора:

$$S\big(x(t+\Delta),t+\Delta\big)=S(x,t)+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial S}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}\Delta+\frac{\partial S}{\partial t}\Delta+o(\Delta)=$$

$$=S(x,t)+(\nabla S,f)\Delta+\frac{\partial S}{\partial t}\Delta+o(\Delta).$$

Подставим это выражение в формулу (12.4):

$$S(x,t)=\min_{u\in U}\left\{F(x,u,t)\Delta+o(\Delta)+S(x,t)+(\nabla S,f)\Delta+\frac{\partial S}{\partial t}\Delta\right\}.$$

После элементарных преобразований, устремляя Δ к нулю и учитывая свойство $o(\Delta)/\Delta\to 0$ при $\Delta\to 0$, получаем формулу

$$-\frac{\partial S}{\partial t}=\min_{u\in U}\{F(x,u,t)+(\nabla S,f)\},$$

которая называется уравнением Беллмана. Уравнение Беллмана является уравнением в частных производных и поэтому неудобно для практического применения.

Пример 12.4. Пусть $M=1$, $N=2$. Найти оптимальное управление для задачи

$$\dot{x}_1=x_2;$$

$$\dot{x}_2=u;$$

$$x_1(0)=x_2(0)=0;$$

$$x_1(T)=8;\ x_2(T)=0,\ |u|\le 4;$$

$$\int_0^T 1\cdot dt\to\min.$$

Решение. Запишем уравнение Беллмана:

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\min_{u\in U}\left\{1+\frac{\partial S}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial S}{\partial x_2}u\right\}.$$

Видно, что минимум фигурной скобки достигается в зависимости от знака $\frac{\partial S}{\partial x_2}$ при значениях u, равных 4 и –4. Можно заметить, что x_1 можно интерпретировать как пройденный путь, а x_2 — как скорость. В конечный момент пройденный путь равен 8, а скорость равна нулю. Этого можно достичь, если сначала будет максимальное положительное ускорение $u = 4$, а потом максимальное отрицательное ускорение $u = -4$.

Если $u = 4$, то уравнение Беллмана имеет вид

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = 1 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} \cdot 4,$$

или

$$-\frac{\partial S}{\partial t} - x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} - 4\frac{\partial S}{\partial x_2} = 1.$$

Это уравнение в частных производных, для которого можно записать:

$$\frac{dt}{-1} = \frac{dx}{-x_2} = \frac{dx_2}{-4} = \frac{dS}{1}.$$

Отсюда следует

$$\frac{dt}{-1} = \frac{dx}{-4};\ \ \frac{dx_2}{dt} = 4,\ x_2 = 4t + c_1, x_2(0) = 0,$$

т.е. $c_1 = 0$.

Аналогично можно получить, что при $u = -4$, $x_2 = -4t + c_2$.

Это можно записать так:

$$x_2^{\bullet} = \begin{cases} 4t \text{ при } 0 \le t < t_1; \\ -4t + c_2 \text{ при } t_1 \le t \le T. \end{cases}$$

Из условия задачи следует

$$x_1^{\bullet} = \begin{cases} 2t^2 + c_3 \text{ при } 0 \le t < t_1; \\ -2t^2 + c_2 t + c_4 \text{ при } t_1 \le t \le T. \end{cases}$$

Учитывая краевые условия

$$x_1(0) = 0 = c_3,\ \ x_2^{\bullet}(T) = 0 = -4T + c_2,$$

т.е. $c_2 = 4T$,

$$x_1^*(T) = -2T^2 + 4T \cdot T + c_4 = 8,$$

откуда следует

$$c_4 = 8 - 2T^2.$$

В силу непрерывности траектории можно записать:

$$4t_1 = -4t_1 + 4T;$$
$$\frac{4t_1^2}{2} = -\frac{4t_1^2}{2} - 4Tt_1 + 8 - 2T^2,$$

или

$$t_1 = \frac{T}{2},\ T = 2\sqrt{2}.$$

Запишем выражение для оптимального управления и траектории:

$$u^* = \begin{cases} 4 \text{ при } 0 \le t < \sqrt{2}; \\ -4 \text{ при } \sqrt{2} \le t \le 2\sqrt{2}; \end{cases}$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} 4t \text{ при } 0 \le t < \sqrt{2}; \\ -4t + 8\sqrt{2} \text{ при } \sqrt{2} \le t \le 2\sqrt{2}; \end{cases}$$

$$x_1^*(t) = \begin{cases} 2t^2 \text{ при } 0 \le t < \sqrt{2}; \\ -2t^2 + 8\sqrt{2}t - 8 \text{ при } \sqrt{2} \le t \le 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Контрольные вопросы и упражнения

1. В каких случаях задачи динамического программирования можно решать, начиная от точки $x(0)$?
2. Что можно назвать аналогом времени в задаче об инвестициях?
3. В чем состоит сложность решения уравнения Беллмана?
4. Записать уравнение Беллмана для задачи

$$I = \int_0^T F(x_1, x_2)dt \to \min;$$

$$\dot{x}_1 = ux_1 + x_2,\ \ \dot{x}_2 = u^2,\ \ |u| \le 2.$$

5. Ресурсы L нужно распределить между m отраслями. Известны значения $g_i(x_i)$ — прирост выпуска продукции в i-й отрасли для выделенного количества x_i. Решить задачу

$$\sum_{i=1}^{m} g_i(x_i) \to \max, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = L$$

методом динамического программирования, если $m = 2$, $L = 3$, а функции $g_i(x_i)$ заданы таблицей:

x_i	0	1	2	3
$g_1(x_1)$	0	2	3	1
$g_2(x_2)$	0	3	4	5

6. Рассматривается однопродуктовая динамическая модель. Заданы номера этапов $i = 1, ..., N$; z_i — количество заказанной продукции; ξ_i — спрос; x_i — исходный запас на начало i-го этапа; $x_1 = 1$; h_i — затраты на хранение единицы запаса, переходящего из этапа i в этап $i + 1$; k_i — затраты на оформление заказа. Определите $C_i(z_i) = \delta_i k_i + c_i(z_i)$,

$$c_i(z_i) = \begin{cases} 10z_i, \ 0 \le z_i \le 3; \\ 30 + 20(z_i - 3), \ z_i \ge 4. \end{cases}$$

Затраты на хранение пропорциональны величине $x_{i+1} = x_i + z_i - \xi_i$ и на этапе i равны $h_i x_{i+1}$. Исходные данные заданы в таблице:

Этап i	Спрос ξ_i	Затраты на оформление заказа k_i	Затраты на хранение h_i
1	2	2	2
2	3	3	3
3	1	1	1

7. Планируется действие двух отраслей производства на четыре года. Начальные ресурсы 10 000 у.е. Средства x, вложенные в 1-ю отрасль в начале года, дают в конце года прибыль $f_1(x)$ и возвращаются в размере $\varphi_1(x)$. Средства y, вложенные во 2-ю отрасль в начале года, дают в конце года прибыль $f_2(y)$ и возвращаются в размере $\varphi_2(y)$. В конце года возвращенные средства заново перераспределяются между отраслями. Определить оптимальный план распределения средств и найти максимальную прибыль, если $f_1(x) = 0{,}5x$; $\varphi_1(x) = 0{,}6x$; $f_2(y) = 0{,}7y$; $\varphi_2(y) = 0{,}4y$.

8. Планируется работа n предприятий на один год. Начальные средства равны s_0 тыс. у.е., а вложения кратны 1 тыс. у. е. При этом x тыс. у. е., вложенные в k-е предприятие в начале года, дают в конце года прибыль $f_k(x)$. Определить оптимальный план распределения средств и найти максимальную прибыль, если $s_0 = 4$, $n = 3$,

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	4	3	5
2	7	8	9
3	11	12	13
4	20	16	17

ГЛАВА 13

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

13.1. Основные определения. Понятие игры

В некоторых случаях для решения задач многокритериальной оптимизации можно использовать методы *теории игр*. Будем рассматривать задачи оптимизации, в которых сталкиваются интересы несколько участников. Между сторонами, принимающими решение, имеет место конфликт. Конфликтные ситуации связаны со многими областями практической деятельности, такими как экономика, политика, медицина, вопросы охраны окружающей среды и т.д.

Упрощенную математическую модель такой ситуации будем называть *игрой*. Стороны, участвующие в конфликте, называются *игроками*. Каждый игрок располагает выбором нескольких вариантов действий для достижения своих целей, которые называются *стратегиями*. Если число стратегий конечно, то такие игры называются *конечными*. *Исход* игры определяется выбором игроками своих стратегий. После того как выбор сделан, каждый игрок получает свой выигрыш. По числу участников игры подразделяются на *парные* и *множественные*. Если участники множественной игры объединяют свои усилия по достижению лучшего результата, то игра называется *коалиционной*, в противном случае игра *бескоалиционная*. Кроме этого различают *статические* и *динамические* игры. Параметры динамических игр изменяются во времени.

Будем рассматривать конечные бескоалиционные игры с двумя участниками. Первый игрок имеет m стратегий, второй — n. Выбор первым игроком стратегии с номером i, а вторым игроком стратегии с номером j определяет исход игры. Ни один из игроков не знает выбора противника. Игрок I получает в качестве выигрыша сумму a_{ij}, а игрок II — сумму b_{ij}. Такая игра называется игрой двух лиц в *нормальной форме*. Кроме нормальной формы игры рассматривают *позиционную* и *развернутую* формы, которые представляются иначе.

Игра двух лиц в нормальной форме с матрицами выигрышей (a_{ij}) и (b_{ij}) называется *антагонистической* (*или игрой с нулевой суммой*), если $a_{ij} + b_{ij} = 0$ при любой стратегии i игрока I и любой стратегии j игрока II.

Антагонистическая игра описывается одной матрицей, которая называется *матрицей игры*. В зависимости от содержательной стороны задачи она может быть платежной или матрицей выигрышей. Заметим, что составление платежных матриц является непростой задачей, непосредственно связанной с той областью, в которой рассматривается конфликт, и требует специальных знаний и большого объема статистической информации. Под решением игры подразумевается выработка рекомендаций для разумного поведения игроков, которые обеспечат игрокам максимально возможный выигрыш (или минимальный проигрыш). Таким образом, определяются оптимальные стратегии.

Бескоалиционные конечные игры с матрицами A и $\bar{A}$ называются *стратегически эквивалентными* если $\bar{a}_{ij} = a_{ij} + c$, т.е. матрицы отличаются на постоянную величину c — вещественную константу. Оптимальные стратегии стратегически эквивалентных игр совпадают. Для антагонистических игр стратегически эквивалентными являются игры *с постоянной суммой*.

Рассмотрим теперь примеры составления игровых моделей.

Пример 13.1. Две фирмы, имеющие сеть бензоколонок, планируют открыть новые автозаправки вдоль трассы, на которой расположены пять городов. Известны предпочтения автовладельцев по отношению к автозаправкам каждой фирмы (табл. 13.1), расстояние между городами (рис. 13.1) и количество автомобилей в каждом городе (табл. 13.2). В каком из городов каждая фирма должна разместить свою автозаправку?

Таблица 13.1

Расположение АЗС	Фирма 1	Фирма 2
Ближе	70%	30%
Дальше	35%	65%
На одинаковом расстоянии	56%	44%

Таблица 13.2

П1	П2	П3	П4	П5
10 тыс.	25 тыс.	20 тыс.	30 тыс.	15 тыс.

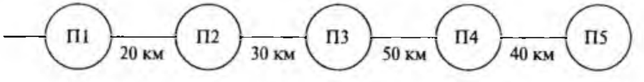


Рис. 13.1

Возможная прибыль зависит от места жительства автомобилиста и степени удаленности бензоколонки. Предполагается, что каждый из автомобилистов воспользуется услугами одной из фирм. Общее число автомобилей — 100 тыс. В платежной матрице указывается прибыль первой формы a_{ij}. Прибыль второй рассчитывается как разность $100 - a_{ij}$.

Вычислим элементы платежной матрицы с учетом предложенных условий: ситуация в игре (П1, П1) означает, что первая и вторая фирмы построили автозаправку в первом городе. Для всех автомобилистов расстояние до станций считается одинаковым. Прибыль первой фирмы: $0{,}56 \cdot 100 = 56$ у. е., прибыль второй: $100 - 56 = 44$ у. е. Ситуации (П2, П2), (П3, П3) и т.д. аналогичны. Ситуация (П1, П2) означает, что первая фирма построила заправку в первом городе, вторая — во втором. Водители первого города заправляют машины у себя, всем остальным ближе заправка во втором: $0{,}7 \cdot 10 + 0{,}35 \cdot (25 + 20 + 30 + 15) = 38{,}5$. Для ситуации (П1, П3) получим: $0{,}7 \cdot (10 + 25) + 0{,}35 \cdot (20 + 30 + 15) = 47{,}25$. Рассмотрим ситуацию (П1, П4), учитывая, что жители третьего поселка живут на одинаковом расстоянии от первого и четвертого поселков: $0{,}7 \cdot (10 + 25) + 0{,}56 \cdot 20 + 0{,}35 \cdot (30 + 15)$. Аналогично заполним все клетки и получим платежную матрицу игры с постоянной суммой (табл.13.3).

Таблица 13.3

	П1	П2	П3	П4	П5
П1	56	38.5	47,25	51,45	54,25
П2	66,5	56	47,25	57,25	57,25
П3	57,25	57,25	56	54,25	54,25
П4	54,95	50,75	50,75	56	64,75
П5	50,75	50,75	50,75	40,25	56

Для того чтобы принять решение, необходимо провести анализ полученной матрицы. Вопросу, как это можно сделать, посвящены следующие разделы.

Пример 13.2. Две фирмы *A* и *B*, имеющие сеть магазинов по продаже бытовой техники, проводят комплекс мероприятий для продвижения новых моделей и привлечению покупателей. Фирма *A* размещает рекламу на телевидении, в прессе, проводит акции для покупателей в своих магазинах. Фирма B проводит рекламу на телевидении, на радио, в прессе и расширяет сеть своих магазинов. Таким образом, фирма *A* располагает тремя стратегиями, а фирма *B* имеет четыре стратегии. Платежная матрица игры — матрица размерностью 3×4:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & -0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}02 \\ -0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}06 & -0{,}05 \\ 0{,}03 & 0{,}06 & -0{,}05 & 0{,}04 \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы a_{ij} определяет увеличение доли продаж фирмы A на рынке при использовании стратегии с номером i фирмой A и стратегии с номером j — фирмой B. Для фирмы B, соответственно, a_{ij} определяет уменьшение продаж. Если соответствующий элемент отрицательный, то это значит, наоборот, увеличение продаж фирмы B и уменьшение для фирмы A.

Пример 13.3. Представители военной части закупают наборы продуктов для обеспечения питания солдат на учениях. Цель — произвести закупки как можно дешевле. Однако врач военной части требует, чтобы питание было полноценным и поэтому более дорогим. В результате совместных усилий были выбраны четыре поставщика (M1, M2, M3, M4) и три варианта питания (B1, B2, B3). Руководство части выбирает поставщика, а врач — необходимый набор. Элементы платежной матрицы представляют стоимость возможных вариантов питания (табл. 13.4).

Таблица 13.4

Вариант / Поставщик	B1	B2	B3
M1	12,3	10,7	13,2
M2	11,4	15,6	14,7
M3	13,8	12,3	13,7
M4	12,2	13,5	14,7

13.2. Антагонистические игры

Теория антагонистических игр разработана наиболее подробно. Ее математический аппарат связан с традиционными разделами математики, такими как линейное программирование и симплекс-метод (см. главу 3).

Рассмотрим антагонистическую игру

$$G = \{X, Y, A, (m, n)\}, \tag{13.1}$$

где $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ — множество стратегий I игрока; $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ — множество стратегий II игрока; (m, n) — набор чисел, определяющий размерность задачи $m \times n$ и формат игры; A — $(m \times n)$-матрица, причем ее элемент a_{ij} является выигрышем I игрока и, соответственно, проигрышем II при выборе i-й стратегии I и j-й стратегии II игроком.

Решить игру (13.1) означает найти пару стратегий (x_i, y_j), которая удовлетворяла бы наилучшим образом интересам игроков.

13.2.1. Нижняя и верхняя цена игры. Принцип минимакса

Будем полагать, что целью I игрока является достижение максимума выигрыша. Каждой стратегии I игрока соответствует строка матрицы A: i-я строка матрицы определяет все возможные выигрыши I игрока, в зависимости от стратегии, выбранной II игроком. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_m$ — минимальные элементы в каждой строке,

$$r_i = \min_j a_{ij}.$$

Выбирая i-ю стратегию, I игрок получит по крайней мере выигрыш в размере r_i. Таким образом, независимо от выбора II игрока он может получить гарантированный выигрыш

$$r = r_{i_0} = \max_i r_i = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Стратегия i_0 называется *максиминной*, а выбор I игроком максиминной стратегии означает, что при выборе игроком II любой стратегии игроку I гарантирован выигрыш не меньше r. Величина r называется *нижней ценой игры*.

Аналогично для игрока II: если $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — максимальные элементы каждого столбца матрицы A и

$$c_j = \max_i a_{ij},$$

то выбор j-го столбца приводит к проигрышу не более c_j. Окончательный выбор игроком II столбца j_0, где

$$c = c_{j_0} = \min_j \max_i a_{ij},$$

приводит его к проигрышу не более c независимо от того, что предпримет игрок I. Стратегия j_0 называется *минимаксной стратегией*, а величина c называется *верхней ценой игры*.

Теорема 13.1. Для любой игровой $(m \times n)$-матрицы A имеет место соотношение

$$\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij},$$

т.е. нижняя цена игры не превышает верхнюю цену игры.

Доказательство. Запишем справедливое для всех $j = 1, ..., n$ неравенство

$$a_{ij} \leq \max_i a_{ij}. \tag{13.2}$$

Вычисление минимума от обеих частей не нарушает неравенства (13.2), следовательно,

$$\min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

для любого i. Так как в правой части последнего неравенства стоит константа и при всех i выражение слева ограничено константой, мы имеем

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}.$$

Теорема доказана.

Минимаксных и максиминных стратегий у игроков может быть несколько, а нижняя и верхняя цена игры могут иметь только одно значение.

Стратегии игроков, подразумевающие разумность действий противников в достижении своих целей, получили в теории игр название принципа гарантированного результата, или *принципа минимакса*. Соответствующие стратегии традиционно называют одним словом — *минимаксные*, а нижнюю и верхнюю цены игры — гарантированными выигрышами.

Для нахождения нижней и верхней цен игры удобно матрицу A увеличить в размерах, добавив столбец с компонентами вектора $(r_1, r_2, ..., r_m)$ и строку с компонентами вектора $(c_1, c_2, ..., c_n)$. Как видно из предшествующих теореме 13.1 рассуждений, выбор максимального элемента в добавленном столбце определяет нижнюю цену игры r, а номер строки — максиминную стратегию I игрока. Для II игрока выбор минимального элемента в строке — верхнюю цену игры c, а номер соответствующего столбца — минимаксную стратегию II игрока.

Пример 13.4. Найти оптимальные стратегии и гарантированные выигрыши в игре 3×2 с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим табл. 13.5, добавив к матрице A строку и столбец. В дополнительном столбце запишем минимальные элементы каждой строки, а в дополнительной строке — максимальные элементы каждого столбца.

Таблица 13.5

	y_1	y_2	r_i
x_1	2	4	2
x_2	9	2	2
x_3	5	7	5
c_j	9	7	5

Из таблицы видно, что оптимальными стратегиями являются x_3 для игрока I и y_2 для игрока II. Нетрудно видеть, что I игрок, выбрав максиминную стратегию, гарантированно получит выигрыш не менее 5 единиц. Аналогично II игрок не может проиграть больше 7 единиц.

Однако в силу того, что значения выигрыша и проигрыша различны, для игроков нет такого набора стратегий, которое устраивало бы обе стороны. В этом смысле минимаксная и максиминная стратегии не являются устойчивыми.

13.2.2. Игры с седловой точкой. Ситуация равновесия

Игры, в которых нижняя и верхняя цены игры совпадают, т.е. $r = c = v_A$, называются *играми с седловой точкой*. В таких играх ни I, ни II игрок не имеют лучшей стратегии, чем та, которая обеспечивает им выигрыш v_A, называемый *ценой игры*. Стратегии x_{i_0} и y_{j_0}, при которых это значение достигается, называют *оптимальными чистыми стратегиями*, а пара (x_{i_0}, y_{j_0}) — седловой точкой матрицы A.

Пример 13.5. Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры, заданной платежной матрицей $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Решение. Платежную матрицу запишем в виде таблицы с добавленными строкой и столбцом, в которые запишем минимумы строк и максимумы столбцов:

	y_1	y_2	y_3	r_i
x_1	0,5	0,6	0,8	0,5
x_2	0,9	0,7	0,8	0,7
x_3	0,7	0,5	0,6	0,5
c_j	0,9	0,7	0,8	0,7

Можно видеть, что максимум столбца r совпадает с минимумом строки c. Оптимальные стратегии x_2 I игрока и y_2 для II дает игроку I выигрыш, совпадающий с проигрышем игрока II. Это значит, что отступая от оптимальных стратегий, ни один игрок не может улучшить свое положение. Седловой точкой игры является пара (x_2, y_2) чистых стратегий, а ценой игры — элемент $v_A = a_{22} = 0{,}7$.

В заключении отметим, что седловых точек у матрицы может быть несколько. Между тем значение цены игры единственное.

Пример 13.6. Найдем седловую точку платежной матрицы из примера 13.3.

Вариант / Поставщик	B1	B2	B3	
M1	12,3	10,7	13,2	13,2
M2	11,4	15,6	14,7	15,6
M3	13,8	12,3	13,7	13,8
M4	12,2	13,5	14,7	14,7
	11,4	10,7	13,2	13,2

Решение. Отметим, что в соответствии с постановкой задачи (цель I игрока — минимум затрат) для строк необходимо определять максимальные значения, а для столбцов минимум.

Как видно из аналогичных примеру 13.5 рассуждений, (M1, B3) является седловой точкой игры.

13.2.3. Смешанные расширения

Рассмотрим игру $m \times n$, не имеющую седловой точки. Будем предполагать, что игра повторяется многократно. Под *смешанной стратегией игрока* I будем понимать вектор-строку $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ с неотрицательными компонентами. При этом полагаем, что $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Аналогично, *смешанная стратегия игрока* II — это вектор-столбец $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^T$ с неотрицательными компонентами такими, что $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$. Элементы p_i, q_j векторов p и q представляют собой вероятности выбора игроком I стратегии x_i, а игроком II — стратегии y_j. Значение выигрыша на смешанном расширении p и q определяется как

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j .$$

Будем говорить, что игра имеет решение в смешанных стратегиях, если существует пара векторов (p^*, q^*) и число v_A такие, что для любых смешанных стратегий p и q, выполняется соотношение

$$H(p, q^*) \le v_A \le H(p^*, q),$$

где число $v_A = H(p^*, q^*)$ — цена игры.

Приведем без доказательства основную теорему о минимаксе.

Теорема 13.2 (фон Нейман). *Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица выигрышей игры G, где $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, и пусть (x, y) — векторы ее смешанного расширения. Тогда игра G имеет ситуацию равновесия.*

Теорема фон Неймана является теоремой существования. Она не определяет способы вычисления ситуации равновесия. Таких способов существует несколько. Порядок их применения определяется размерностью задачи и свойствами платежных матриц.

13.2.4. Доминирующие и доминируемые стратегии

Прежде чем определять решение игры в смешанных стратегиях, нужно ответить на два вопроса.

1. Имеет ли игра седловую точку, или, что эквивалентно, решение в чистых стратегиях?

2. Если седловой точки в чистых стратегиях нет, то можно ли снизить размерность задачи, исключив часть стратегий из рассмотрения?

Для того чтобы ответить на второй вопрос, введем понятие доминирования.

Определение 13.1. *Стратегия x_i доминирует стратегию x_j игрока I, если для любой стратегии y_k, $k = 1, \ldots, n$, игрока II*

$$H(x_i, y_k) \ge H(x_j, y_k).$$

Иначе говоря, независимо от выбора II игрока I игрок, выбирая стратегию x_i, всегда получит больший выигрыш, чем с x_j. Таким образом, игроку I нет смысла выбирать x_j, и эту стратегию можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Стратегия x_i — доминирующая, x_j — доминируемая. Если для данной стратегии нет доминирующих стратегий, то она называется *недоминируемой*.

Аналогично можно определить *доминируемую* стратегию для II игрока. Знак неравенства для выигрыша в определении изменится на противоположный, учитывая, что целью II игрока является минимум проигрыша.

Исключая из рассмотрения доминируемые стратегии I и II игроков, можно значительно снизить размерность задачи.

Пример 13.7. Рассмотрим игру с платежной матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 3 & 6 & 5 \\ 8 & 4 & 5 & 2 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 9 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Проанализируем стратегии I игрока. Для него целью является максимум выигрыша, поэтому нужно исключить пятую строку, так как все ее элементы меньше соответствующих элементов строки с номером 4. Пятая стратегия I игрока является доминируемой. Для II игрока необходимо исключить столбец, все элементы которого, наоборот, ***не меньше*** элементов другого столбца. Сравнивая элементы столбцов, заметим, что доминируемыми являются третья и пятая стратегии II игрока. Исключая доминируемые стратегии из рассмотрения, получим игру меньшей размерности 4 × 4:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

13.2.5. Игра 2 × 2

Простейшим случаем конечной игры является игра 2 × 2, в которой каждый игрок располагает двумя стратегиями. Если такая игра имеет седловую точку, то какая-либо стратегия может быть отброшена как доминируемая. Рассмотрим случай, когда седловой точки нет. Решение должно быть в смешанных стратегиях. Найдем его.

Пусть вектор (p_1, p_2) определяет оптимальную смешанную стратегию игрока I. Значит, независимо от выбора II игрока для этих стратегий I игрок получит оптимальный выигрыш v_A — цену игры. Пусть II игрок выбрал свои чистые стратегии. Получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v_A; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v_A. \end{cases}$$

Учитывая, что $p_1 + p_2 = 1$, получим формулы для определения значений p_1 и p_2 на ситуации равновесия:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \\ p_2 = 1 - p_1 = \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{cases} \tag{13.3}$$

и формулу для цены игры

$$v_A = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Аналогично определяется вектор $(q_1,\ q_2)$ оптимальных стратегий игрока II из системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v_A; \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v_A, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \\ q_2 = \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \end{cases} \tag{13.4}$$

Пример 13.8. Найти оптимальные стратегии игры, заданной матрицей $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Нетрудно проверить, что седловой точки в игре нет. Используя формулы (13.3) и (13.4), получаем

$$p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = v_A = 0{,}5.$$

Таким образом, $p = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $q = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $v_A = \dfrac{1}{2}$.

13.2.6. Графоаналитические методы

Рассмотрим анализ игры 2×2 с помощью геометрической интерпретации пространства смешанных стратегий. (Такой метод позволяет находить оптимальные стратегии и для игр $2 \times n$ и $m \times 2$).

Обозначим A_1 и A_2 чистые стратегии I игрока, а B_1 и B_2 — чистые стратегии игрока II. Возьмем участок оси абсцисс длиной единица (рис. 13.2). Левый конец участка, точка $x = 0$ соответствует стратегии A_1, точка $x = 1$ соответствует стратегии A_2; все промежуточные точки участка будут изображать смешанные стратегии игрока I. Причем p_1 — это расстояние до правого конца (точка $x = 1$), а p_2 — это расстояние до точки $x = 0$.

Проведем через точку, соответствующую стратегии A_1, перпендикуляр — ось I, а через точку x 1 — ось II. На оси I отложим выигрыши, соответствующие стратегии A_1, а на оси II — выигрыши при выборе стратегии A_2. Пусть игрок II применяет стратегию B_1. На оси I отложим точку с ординатой a_{11}, а на оси II точку с ординатой a_{21}. Проведем через эти точки прямую B_1B_1. Для любой смешанной стратегии (p_1, p_2) I игрока его выигрышу будет соответствовать точка N на прямой B_1B_1. Точно так же построим прямую B_2B_2 для стратегии B_2. Для того чтобы найти оптимальную стратегию I игрока, построим нижнюю границу выигрыша при стратегиях B_1B_2, т.е. ломаную B_1NB_2, отмеченную на рис. 13.1 жирной линией. На этой линии будет расположен минимальный выигрыш игрока I при любой его смешанной стратегии. Точка N, в которой этот выигрыш достигает максимума, является решением. Координата этой точки по оси X — точка S_A^* определяет значение смешанной стратегии p_2 для I игрока, а координата по другой оси — цену игры v_A. На рисунке прямые, соответствующие стратегиям B_1B_2, пересекаются. Так бывает не всегда. Отсутствие точки пересечения говорит о том, что у II игрока есть доминируемая стратегия. Такую же геометрическую интерпретацию можно построить и для II игрока. По оси ординат нужно отложить значения a_{11} и a_{21}по оси I, а a_{12}и a_{22}по оси II. Вместо максимума нижней границы нужно рассмотреть минимум верхней (см. рис. 13.2).

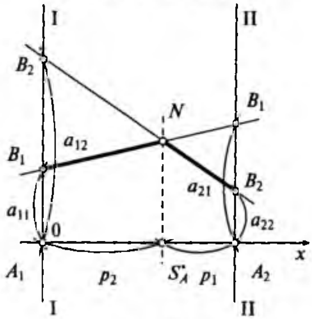


Рис. 13.1

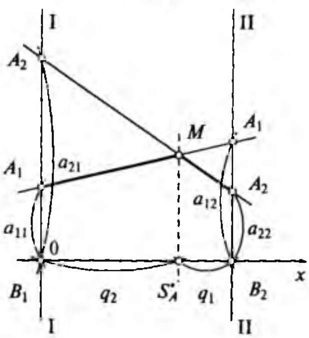


Рис. 13.2

Пример 13.9. Найти оптимальные стратегии игры, заданной матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Отметим на чертеже (рис. 13.3) все точки, соответствующие стратегиям игроков:

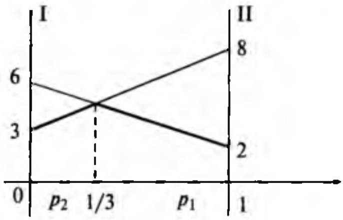


Рис. 13.3

Максимум нижней границы достигается в точке с абсциссой $p = \frac{1}{3}$.

Соответствующий вектор стратегий I игрока имеет вид: $p = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Аналогично построим минимум верхней границы для II игрока:

Цена игры определяется по значению ординаты точки пересечения прямых. В данном случае $v_A = \frac{14}{3}$.

13.2.7. Игры $2 \times n$ и $m \times 2$

Рассмотрим игру $2 \times n$. Построим геометрическую интерпретацию, аналогично игре 2×2, n стратегиям игрока II будут соответствовать n прямых (рис. 13.4). Построим нижнюю границу и найдем на ней точку с максимальной ординатой. Очевидно, что такая точка будет расположена только на пересечении двух прямых. Это говорит о том, что в игре $2 \times n$ часть стратегий будет доминируемой.

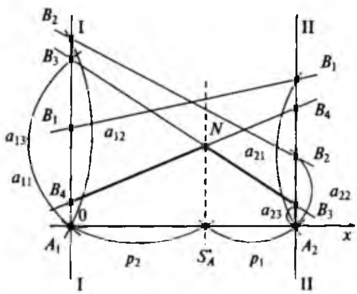


Рис. 13.4

Так же может быть решена игра $m \times 2$. Строится верхняя граница выигрыша и на ней определяется минимум.

Пример 13.10. Найти оптимальные стратегии игры 2×4, заданной матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Отметим на чертеже все точки, соответствующие стратегиям игроков (рис. 13.5).

Максимум нижней границы достигается в точке со значением абсциссы — $\frac{1}{2}$. Соответствующий вектор стратегий I игрока имеет вид: $p = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Третий и четвертый столбец матрицы A можно из рассмотрения исключить.

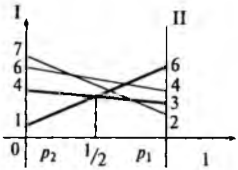


Рис. 13.5

Выполнив построения, аналогичные примеру 13.9, получим стратегии II игрока: $q = \left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$ и цену игры $v_A = \frac{7}{2}$.

Пример 13.11. Найти оптимальные стратегии игры 4 × 2, заданной

матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \\ 5 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Отметим на чертеже все точки, соответствующие стратегиям игроков (рис. 13.6)

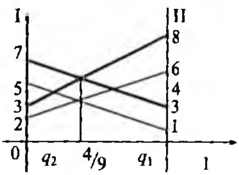


Рис. 13.6

Минимум верхней границы достигается в точке со значением абсциссы — $\frac{4}{9}$. Соответствующий вектор стратегий II игрока имеет вид: $q = \left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right)$. Вторую и третью строку матрицы A можно из рассмотрения исключить.

Выполнив построения, аналогичные примеру 13.9, получим стратегии I игрока: $p = \left(\frac{4}{9}; \frac{5}{9}\right)$ и цену игры $v_A = \frac{47}{9}$.

13.3. Антагонистические игры и линейное программирование

Для задач произвольной размерности $m \times n$ оптимальные стратегии можно получить как решение задачи линейного программирования.

Для игры $m \times n$ с платежной матрицей A допустим, что все компоненты матрицы A положительны, в этом случае цена игры $v_A > 0$.

Запишем условие равновесия

$$H(x, y^*) \le v_A \le H(x^*, y).$$

Перепишем левую часть неравенства в развернутом виде:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j^* \le v_A.$$

В качестве векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ выберем последовательно m векторов вида:

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0);$$

$$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0);$$

$$...$$

$$e_m = (0, 0, ..., 1).$$

Получим систему неравенств

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le v_A, i = 1, ..., m; \\ y_j^* \ge 0, i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Разделим обе части каждого неравенства на величину v_A и введем новый вектор $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$, $w_j = \frac{y_j^*}{v_A}$, $j = 1, ..., n$. Тогда система неравенств примет вид

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \le 1, i = 1, ..., m; \\ w_j \ge 0, j = 1, ..., n. \end{cases} \tag{13.5}$$

Учитывая, что $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, получим $\sum_{j=1}^{n} w_j = \frac{1}{v_A}$. Очевидно, что это максимально возможное значение суммы при ограничениях (13.5). Получим задачу линейного программирования

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \to \max;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \le 1, i = 1, ..., m; \\ w_j \ge 0, j = 1, ..., n. \end{cases} \tag{13.6}$$

Аналогично рассмотрим правую часть неравенства $H(x^*, y) \geq v_A$. Аналогичными рассуждениями получим систему неравенств

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \geq v_A, \ j = 1, \ldots, n; \\ x_i^* \geq 0, \ i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Разделим неравенства на v_A и введем вектор $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $u_i = \frac{x_i^*}{v_A}$, $i = 1, \ldots, m$. Получим двойственную к (13.6) задачу линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq 1, \ j = 1, \ldots, n; \\ x_i^* \geq 0, \ i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Оптимальные стратегии игры (x^*, y^*) связаны с решениями пары двойственных задач линейного программирования w^* и u^* следующими соотношениями:

$$y_j^* = \frac{w_j^*}{\sum_{j=1}^{n} w_j^*}; \quad x_i^* = \frac{u_i^*}{\sum_{i=1}^{m} u_i^*}.$$

Цена игры определяется формулой

$$v_A = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} w_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} u_i^*}.$$

Пример 13.12. Платежная матрица игры G имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решить игру в смешанных стратегиях.

Решение. Нетрудно проверить, что седловой точки матрица A не имеет. Составим задачу линейного программирования для II игрока. В этой задаче ограничения имеет знак «≤» и можно воспользоваться обычным симплекс-методом:

$$Z = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 5w_1 + 4w_2 + 3w_3 + 2w_4 \le 1; \\ 3w_1 + 2w_2 + 5w_3 + 4w_4 \le 1; \\ 2w_1 + 3w_2 + 4w_3 + 5w_4 \le 1. \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$Z = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 5w_1 + 4w_2 + 3w_3 + 2w_4 + w_5 = 1; \\ 3w_1 + 2w_2 + 5w_3 + 4w_4 + w_6 = 1; \\ 2w_1 + 3w_2 + 4w_3 + 5w_4 + w_7 = 1. \end{cases}$$

Заполним начальную симплекс-таблицу:

Базис	b_i	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
w_5	1	5	4	3	2	1	0	0
w_6	1	3	2	5	4	0	1	0
w_7	1	2	3	4	5	0	0	1
0	0	–1	–1	–1	–1	0	0	0

Поскольку все оценки равны -1, данная таблица не является заключительной. В качестве разрешающего столбца выберем второй столбец. Проверив отношения элементов столбца свободных членов к элементам разрешающего столбца, — $\min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{4}$, выберем в качестве разрешающей первую строку.

Пересчитаем таблицу по правилам симплекс-метода:

Базис	b_i	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
w_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0
w_6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	3	$-\frac{1}{2}$	1	0
w_7	$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{4}$	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	1
Z	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0

В качестве разрешающего выберем столбец, соответствующий w_4. А так как $\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{14}\right\} = \frac{1}{14}$, то разрешающей строкой является третья:

Базис	b_i	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
w_2	$\frac{3}{14}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{14}$	0	$-\frac{1}{7}$
w_6	$\frac{2}{7}$	−1	0	2	0	$\frac{1}{7}$	1	$-\frac{6}{7}$
w_4	$\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{14}$	0	$\frac{2}{7}$
Z	$\frac{2}{7}$	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$

В строке оценок нет отрицательных элементов, значит, оптимальное решение найдено: $w^* = \left(0;\frac{3}{14};0;\frac{1}{14}\right)$. В соответствии с правилами решения двойственных задач из таблицы можно определить и компоненты вектора u^*. Это компоненты вектора относительных разностей (последняя строка в таблице), соответствующие дополнительным переменным: $u^* = \left(\frac{1}{7};0;\frac{1}{7}\right)$. Также из итоговой таблицы понятно, что полученное решение не единственное.

Найдем решение игры:

$$v_A = \frac{7}{2};\ y_1^* = 0;\ y_2^* = \frac{3}{14}:\frac{2}{7} = \frac{3}{4};\ y_3^* = 0;\ y_4^* = \frac{1}{14}:\frac{2}{7} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично $x^* = (1/2, 0, 1/2)$.

Проверим решение. Для этого посчитаем цену игры для получившейся ситуации равновесия:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^* y_j^* = 4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + 5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

13.4. Элементы теории статистических решений

При определении оптимальных решений в задачах предыдущих разделов, предполагалось, что противоположная сторона принимает решения сознательно, стремясь получить для себя максимальную выгоду. Однако для некоторых классов задач исход игры может быть заранее неизвестен, а лишь предсказан с некоторой долей вероятности. Например, заранее могут быть неизвестны: погода, виды на урожай, покупательский спрос и т.д. В таких задачах решение игры зависит не от действий противоположной стороны, а от объективной действительности. Такие игры принято классифицировать как «игры с природой».

13.4.1. «Игры с природой»

В теории статистических решений «природа» рассматривается как сторона, поведение которой заранее неизвестно, но не содержит разумного противодействия планам. Предполагается, что существует некоторое множество $S = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$ состояний природы. Игрок из своего множества чистых стратегий $X = \{X_1, X_2, ..., X_m\}$ выбирает стратегию, которая является оптимальной с учетом информации о состоянии природы. В таких условиях составляется платежная матрица, в клетках которой расположены значения выигрыша (или убытков), который можно получить при данном состоянии природы.

	S_1	S_2	...	S_n
X_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
X_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
X_m	a_{m1}	a_{11}	...	a_{mn}

Однако заранее нельзя сделать никаких предположений о поведении противоположной стороны.

Простейшим примером определения решения в условиях неопределенности является случай, когда какая-то из стратегий игрока является доминирующей. Эта стратегия является самой выгодной независимо от состояния природы. Если такой стратегии нет, то решение активного игрока можно определять как оптимальную стратегию игры, в которой игрок применяет свою оптимальную стратегию против смешанной стратегии $S = (S_1, S_2, ..., S_m)$ игрока, которым является природа.

Можно показать, что наилучшей стратегией в играх с природой всегда будет чистая стратегия. Действительно, если игрок применяет смешанную стратегию $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, то его средний выигрыш $v = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i$ всегда меньше, чем $\max_i a_{ij}$.

В условиях неопределенности необходимо принимать решение также исходя из матрицы выигрышей, но учитывая специфику задачи. Пусть выигрыш при применении стратегии X_i и состоянии природы S_j больше, чем при стратегии X_k и состоянии природы S_l:

$$a_{ij} > a_{kl}.$$

Но так может быть просто в силу того, что состояние природы S_j более благоприятно, чем S_l. Например, влажная погода лучше для увеличения урожая, чем засуха. Необходимо ввести дополнительные показатели, которые отражали бы «удачность» выбора той или иной стратегии с учетом того, насколько данное состояние природы благоприятно для игрока, принимающего решение.

Для оценки эффективности действий игрока вводится понятие *риска*. Риск активного игрока при применении стратегии X_i равен разности между максимальным выигрышем, который возможен при ситуации S_j, и выигрышем, который он получит, выбрав стратегию X_i в предположении о неопределенности состояния природы:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}, \quad \beta_j = \max_i a_{ij}.$$

Риск не может быть отрицательным.

Матрица рисков дает более наглядную картину влияния неопределенности на ситуацию в игре, чем матрица выигрышей A.

Пример 13.13. Необходимо принять решение об инвестициях в условиях неопределенной рыночной конъюнктуры. Можно сделать различные предположения об условиях, сложившихся на рынке: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.

Выгодность вложений при различных стратегиях X_1, X_2, X_3, X_4 для различных условий S_j задана матрицей выигрышей в табл. 13.6

Таблица 13.6

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
X_1	1	3	4	5	8
X_2	2	9	5	3	4
X_3	3	7	4	3	2
X_4	4	6	6	4	5

Построим матрицу рисков по приведенной формуле. Каждый элемент матрицы вычтем из максимального в данном столбце значения (в первом столбце $\beta_1 = 4$, в остальных: $\beta_2 = 9$, $\beta_3 = 6$, $\beta_4 = 5$, $\beta_5 = 8$) (табл. 13.7).

Таблица 13.7

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
X_1	3	6	2	0	0
X_2	2	0	1	2	4
X_3	1	2	2	2	6
X_4	0	3	0	1	3

Проанализируем получившуюся таблицу. Например, в третьей строке выигрыши, соответствующие состояниям природы S_1 и S_4, совпадают. Однако в матрице рисков им соответствуют различные значения: $r_{31} = 1$, $r_{41} = 2$. Значит состояние S_4 менее благоприятно для игрока, чем S_1, так как риск больше.

Критерии принятия решений в условиях неопределенности можно разделить на две группы в зависимости от дополнительных условий:

1) на момент принятия решения неизвестно состояние природы, но известны вероятности для каждого из состояний;

2) принятие решения в условиях полной неопределенности. Нет никакой информации даже о вероятности какого-либо состояния.

13.4.2. Критерий Байеса — Лапласа

Критерий Байеса — Лапласа используется в предположении, что известны вероятности для возможности каждого из состояний $q_1, q_2, ..., q_n$. Вероятности могут быть получены при обработке дополнительной информации. Это могут быть метеонаблюдения в задачах с неизвестными погодными условиями, или дополнительный статистический анализ конъюнктуры рынка, или т.п. Если такой информации нет, то все состояния рассматривают как равновероятные.

В этом случае в качестве критерия оптимальности нужно взять математическое ожидание выигрыша с учетом вероятности всех возможных состояний. Для i-й стратегии игрока обозначим это среднее значение как $\overline{A}_i = q_1a_{i1} + q_2a_{i2} + ...+ q_na_{in}$.

В качестве оптимальной выбирается та стратегия, для которой величина $\overline{A}_i$ является максимальной. Принятое решение в таких условиях является оптимальным в среднем.

Пример 13.14. Рассмотрим задачу примера 13.13. Добавим в таблицу столбец со средними значениями выигрыша и строку с вероятностями для оценки конъюнктуры рынка (табл. 13.8).

Таблица 13.8

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	$\overline{A}_i$
X_1	1	3	4	5	8	4,2
X_2	2	9	5	3	4	5,9*
X_3	3	7	4	3	2	5
X_4	4	6	6	4	5	5,4
Qj	0,1	0,4	0,2	0,1	0,2	

Оптимальной стратегией игрока является стратегия X_2, дающая средний выигрыш $\bar{A}_2 = 5{,}9$.

При выборе оптимальной стратегии в условиях известных вероятностей можно пользоваться не только средним выигрышем, но и средним риском:

$$\bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} q_i r_{ij}.$$

Оптимальным будет решение, которому соответствует минимум среднего значения. Можно показать, что оптимальные стратегии в этом случае совпадут.

13.4.3. Критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица и Лапласа

При использовании *максиминного критерия Вальда* в качестве оптимальной выбирается стратегия, которая максимизирует минимальный результат для каждой альтернативы:

$$v_{opt} = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Значение критерия Вальда для рассматриваемого примера $v_{opt} = 4$. Этому значению соответствует стратегия X_4.

Для *критерия минимаксного риска Сэвиджа* оптимальной является стратегия, при которой величина риска r_{ij} в наихудших условиях минимальна, т.е. равна

$$\max_i \min_j r_{ij},$$

а риск определяется как $r_{ij} = (\max_i a_{ij}) - a_{ij}$. Значение критерия Сэвиджа для рассматриваемого примера равно единице. Ему соответствует стратегия X_3.

Критерий оптимизма — пессимизма Гурвица предполагает, что при выборе решения не следует руководствоваться ни крайним пессимизмом, ни крайним оптимизмом. Согласно этому критерию стратегия выбирается из условия

$$\max_i \left(k \min_j a_{ij} + (1-k) \max_j a_{ij}\right).$$

Значение коэффициента пессимизма k выбирается между нулем и единицей. При $k = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, *при* $k > 0$ — в критерий крайнего оптимизма.

В случае использования *критерия безразличия Лапласа* предполагается, что (неизвестные) вероятности возможных состояний окружающей среды (природы) одинаковы. Этот критерий выявляет альтернативу с максимальным средним результатом:

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{n}.$$

Пример 13.15. Молодой специалист (ЛПР) приглашен на стажировку в одну из европейских стран на пять лет. По итогам испытательного срока длительностью один год он может быть приглашен на постоянную работу. Ему необходимо распорядиться двухкомнатной квартирой, которую он имеет.

Возможные состояния конъюнктуры рынка S_j:

1) останется в Европе и курс доллара увеличится на 10% за год;
2) останется в Европе и курс доллара уменьшится на 10% за год;
3) вернется в Россию и курс доллара увеличится на 10% за год;
4) вернется в Россию и курс доллара уменьшится на 10% за год.

Варианты решений для ЛПР X_i:

1) продать квартиру перед отъездом за 7 200 тыс. руб. (240 тыс. дол.);
2) сдать квартиру в аренду за 30 тыс. руб./мес.;
3) сдать одну комнату в аренду за 12 тыс. руб., а вторую продать за 2 400 тыс. руб.;
4) продать квартиру через год, когда решение о переезде будет принято.

Очевидно, что если придется возвращаться и квартира будет сохранена, то этот вариант предпочтительнее. К такому варианту добавим некий бонус:

1) если квартира продана сразу, то вычитаем сумму минимальной стоимости квартиры — 220 тыс. дол.;
2) если квартира сохранена, то такую же сумму прибавляем;
3) если продана только одна комната, то бонус равен стоимости одной комнаты — 80 тыс. дол.

Пусть курс доллара на данный момент равен 30 руб. Составим матрицу выигрышей в долларах США (табл. 13.9).

Вычислим платежную матрицу игры (табл. 13.10) и матрицу рисков (табл. 13.11)

Найдем решения, используя все рассмотренные критерии. Применяя максиминный критерий Вальда, получим

$$v_{\text{опт}} = \max\{20000, 10909, 77091, -1818\} = 77091.$$

Этому критерию соответствует стратегия X_3.

Критерий минимаксного риска Сэвиджа дает

Таблица 13.9

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	240 000	240 000	240 000—220 000	240 000—220 000
X_2	$\frac{30000\cdot 12}{30+3}$	$\frac{30000\cdot 12}{30-3}$	$\frac{30000\cdot 12}{30+3}+220000$	$\frac{30000\cdot 12}{30-3}+220000$
X_3	$\frac{12\,000\cdot 12+2\,400\,000}{30+3}$	$\frac{12\,000\cdot 12+2\,400\,000}{30-3}$	$\frac{12\,000\cdot 12+2\,400\,000}{30+3}+$ $+80\,000$	$\frac{12\,000\cdot 12+2\,400\,000}{30-3}+$ $+80\,000$
X_4	$\frac{7200000}{30+3}$	$\frac{7200000}{30-3}$	$\frac{7200000}{30+3}-220000$	$\frac{7200000}{30-3}-220000$

Таблица 13.10

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	240 000	240 000	20 000	20 000
X_2	10 909	13 333	230 909	233 333
X_3	77 091	94 222	157 091	174 222
X_4	218 182	266 667	−1818	46 667

Таблица 13.11

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	0	26 667	210 909	213 333
X_2	229 091	253 334	0	0
X_3	162 909	172 445	73 818	59 111
X_4	21 818	0	232 727	**186 666**

$$r_{\text{опт}} = \max\{0, 0, 59111, 0\} = 59111,$$

что соответствует выбору стратегии X_3.

Применяя критерий Гурвица при $k = 0{,}6$ (что соответствует среднестатистическим предпочтениям), получим

$$v_{\text{опт}} = \max\begin{Bmatrix} 0{,}6\cdot 20000+0{,}4\cdot 240000, \\ 0{,}6\cdot 10909+0{,}4\cdot 233333, \\ 0{,}6\cdot 77091+0{,}4\cdot 174222, \\ 0{,}6\cdot(-1818)+0{,}4\cdot 266667 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 108000, \\ 998799, \\ 115943, \\ 105576 \end{Bmatrix} = 115943.$$

Этому критерию также соответствует стратегия X_3.

По критерию Лапласа

$$v_{\text{опт}} = \max\{130000, 122121, 125656, 132424\} = 132424.$$

Это решение соответствует стратегии X_4.

Таким образом, по трем критериям оптимальной стратегией является X_3.

В заключении отметим, что каждый критерий имеет свои положительные и отрицательные стороны. Анализ матрицы игры при помощи разных критериев позволяет исследовать задачу с разных точек зрения, особенно это полезно, если соответствующая матрица имеет большую размерность. Это в любом случае более конструктивный подход, чем попытки сравнения множества вариантов. Если полученные решения совпадут, как в примере, то решение однозначно. Если нет, то нужно провести дополнительный анализ с учетом всех характеристик рассматриваемых критериев.

13.5. Статическая игра в нормальной форме

В предыдущих разделах мы рассматривали антагонистические игры с нулевой суммой. Перейдем теперь к более общему случаю, когда в игре принимают участие n игроков и выигрыш одного отличен от проигрышей других.

13.5.1. Определение игры с n игроками

Пусть n игроков принимают участие в игре. Возможности i-го игрока ($i = 1, \ldots, n$) описываются множеством *стратегий* $S_i = (\bar{S}_{i1}, \ldots, \bar{S}_{im_i})$. Игроки i и k обладают различным количеством стратегий m_i и m_k. Игроки выбирают свои стратегии один раз и независимо друг от друга.

Пусть $s_1 = \bar{S}_{1,j_1}$ — выбор первого игрока, $s_2 = \bar{S}_{2,j_2}$ — выбор второго игрока и т.д., $s_n = \bar{S}_{n,j_n}$ — выбор n-го игрока. Тогда через

$$u_i(s_1, ..., s_n), i = 1, ..., n$$

обозначаются платежи игроков. Другими словами, каждому выбору стратегий соответствует результат игры — набор платежей $(u_1, ..., u_n)$.

Определение 13.2. *Нормальная форма игры, в которой участвуют n игроков, задается множествами стратегий $S_1, ..., S_n$ и платежей $u_1, ..., u_n$, заданными для всех комбинаций $\bar{S}_{ij}$, где $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$. Эта игра обозначается $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$.*

На рисунке 13.7 показан пример игры G двух игроков (Маши и Медведя) в нормальной форме. В этом примере у Маши есть две стратегии, обозначенные a и b, а у Медведя три — A, B и C. Выигрыши указаны на пересечении соответствующих строк и столбцов, причем первое число обозначает платеж Маши, а второе — Медведя. Так, если Маша и Медведь применяют стратегии b и C, то их платежи составят 3 и 2 соответственно.

Медведь

		A	B	C
Маша	a	9, 2	3, 4	2, 6
	b	1, 3	4, 8	3, 2

Рис. 13.7. Пример игры двух игроков

Рассмотренный пример не дает никакой информации о содержании игры. Вся история с пирожками и обманом Медведя Машей остается за пределами рис. 13.7.

13.5.2. Строго доминируемые стратегии

В определении игры отсутствует принципиальная информация о целях игроков[1]. Естественно думать, что игроки делают оптимальный для себя выбор. Однако понятие оптимальности следует ввести, что, как выяснится впоследствии, не так легко сделать в достаточно общей ситуации. С другой стороны, легко определить, что *рациональный* игрок *не* выберет.

В рассмотренном примере о Маше и Медведе стратегия A всегда дает Медведю меньший платеж, чем стратегия B. Действительно, если Маша и Медведь применяют стратегии a и A соответственно, то пла-

[1] «— Скажите, пожалуйста, куда мне отсюда идти? — спросила Алиса.
— Это во многом зависит от того, куда ты хочешь прийти, — ответил Кот» (*Кэррол Л.* Алиса в Стране Чудес).

теж Медведя $u_2(a, A) = 2$. Но при том же выборе Машей стратегии a Медведь может получить $u_2(a, B) = 4$, применяя стратегию B. Аналогично $u_2(b, A) = 3 < u_2(b, B) = 8$. В таком случае говорят, что стратегия A доминируется стратегией B.

Определение 13.3. *Пусть* $s_i' = \bar{S}_{ij'}$ *и* $s_i'' = \bar{S}_{ij''}$ *— две стратегии i-го игрока. Тогда стратегия* s_i' строго доминируется *стратегией* s_i'', *если*

$$u(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n) < u(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

для всех допустимых стратегий $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n$ *остальных игроков.*

В теории игр предполагается, что *игроки не применяют строго доминируемые стратегии*. Следовательно, Медведь не применяет стратегию A. В этом случае можно стереть в исходной матрице соответсвующий столбец (рис. 13.7). Получена новая игра G_2, эквивалентная предыдущей в том смысле, что у них совпадают возможные исходы.

Игра G_2 также обладает строго доминируемой стратегией a. Действительно, Маше выгоднее применять стратегию b как при выборе Медведем стратегии B, так и при выборе Медведем стратегии C:

$$u_1(a, B) = 3 < u_1(b, B) = 4,\ \ u_1(a, C) = 2 < u_1(b, C) = 3.$$

Следовательно, удаление первой строки в таблице не меняет возможные исходы игры.

Новая игра G_3 показана на рис. 13.8. Разумеется, в игре G_3 Медведю выгоднее применять стратегию B. После удаления стратегии C остается вырожденная матрица, состоящая из единственной клетки, соответствующей выбору Машей и Медведем стратегий b и B. Оптимальные стратегии игроков найдены.

Медведь

Маша		B	C
	b	4, 8	3, 2

Рис. 13.8. Игра G_3

Возникает естественная идея объявить решением игры (другими словами, набором оптимальных решений, или равновесием) ту пару стратегий, которая «выживает» при удалении строго доминируемых стратегий. Следующий пример показывает, что эту идею не удается реализовать даже в простых ситуациях. Рисунок 13.9 дает пример G игры без строго доминируемых стратегий. В игре G равновесие не определено, если основывать определения равновесия на строго доминируемых стратегиях.

	A	B	C
a	9, 5	3, 4	2, 6
b	1, 3	4, 8	3, 2

Рис. 13.9. Пример игры двух игроков без строго доминируемых стратегий

13.5.3. Равновесие по Нэшу

Равновесие, основанное на строго доминируемых стратегиях оказывается слишком сильным. Более слабое равновесие, которое будет использовано в дальнейшем, называется равновесием по Нэшу.

Определение 13.4. *Пусть игра* $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ *задана в нормальной форме. Тогда стратегии* $s_1^*, ..., s_n^*$ *образуют равновесие по Нэшу, если для произвольного игрока i стратегия* s_i^* *— это наилучший ответ этого игрока на стратегии* $s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*$:

$$u(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$$

для произвольной стратегии s_i *игрока i.*

Равновесие по Нэшу является равновесным в том смысле, что ни одному из игроков не выгодно (в одиночку) от него уклоняться. Напротив, если предложить игрокам следовать некоторым стратегиям, которые не образуют равновесие по Нэшу, то (какие-то) игроки будут стремиться не применять предписанные стратегии, поскольку эти игроки могут увеличить свой платеж, уклоняясь от этих стратегий.

В игре Маши и Медведя (см. рис. 13.7) в результате удаления строго доминируемых стратегий осталось решение (b, B). Непосредственная проверка показывает, что эти стратегии образуют равновесие по Нэшу. Действительно, единственная возможность Маши уклониться от указанного решения означает выбор стратегии a вместо b. Тогда ее платеж уменьшается с 4 до 3. У Медведя существуют две возможности уклониться от стратегии B. В обоих случаях его платеж уменьшается: до 3 при выборе стратегии A и до 2 при выборе стратегии C. Следовательно, из определения следует, что (b, B) — это равновесие по Нэшу.

Единственное отличие игры, показанной на рис. 13.9, от только что рассмотренной — платеж $u_2(a, A)$. В результате малого изменения условий игры исчезают строго доминируемые стратегии. Однако стратегии (b, B) по-прежнему образуют равновесие по Нэшу. Доказательство дословно повторяет только что приведенные рассуждения.

Оказывается, что замеченные свойства выполняются в общем случае. Во-первых, при исключении строго доминируемых стратегий равновесие по Нэшу не может быть удалено. Во-вторых, если при исключении строго доминируемых стратегий остается единственный набор стратегий (s_1, ..., s_n), то этот набор образует равновесие по Нэшу.

13.6. Приложения теории игр к задачам пространственной экономики

13.6.1. Дилемма заключенного

Два человека, совершивших преступление, задержаны полицией. Свидетелей преступления нет, поэтому полиция сможет обвинить задержанных, только если кто-нибудь сознается в совершенном преступлении. Полиция держит задержанных в отдельных камерах и объясняет последствия их решений: если оба подозреваемых не сознаются, то их обвинят в мелком преступлении и посадят на год в тюрьму; если оба сознаются, то за содеянное они будут осуждены на 3 года; если же сознается в преступлении только один из задержанных, то сознавшийся будет немедленно освобожден, тогда как его товарищ будет осужден на 9 лет.

Задача заключенного стандартным образом (рис. 13.10) записывается в биматричном виде. Каждый игрок имеет две стратегии: «молчать» или «сознаться». Платежи игроков показаны в таблице в зависимости от выбранных ими стратегий. Первое число в клетках таблицы — это «платеж» первого заключенного, а второе число — «платеж» второго заключенного. Например, если первый заключенный выбрал стратегию молчать, а второй сознаться, то их платежи равны –9 и 0 соответственно (так как в этом случае первый заключенный проведет 9 лет в тюрьме, а второй немедленно выйдет на свободу).

		Заключенный 2	
		Молчать	Сознаться
Заключенный 1	Молчать	–1, –1	–9, 0
	Сознаться	0, –9	–3, –3

Рис. 13.10

Легко понять, что стратегия «сознаться» строго доминирует стратегию «молчать». Действительно, предположим, что первый заключенный решает молчать. В этом случае, не признаваясь, второй заключенный получает год наказания, тогда как сознавшись, будет немедленно отпущен. Аналогично, если первый заключенный сознается, то больший платеж второго заключенного соответствует стратегии «сознаться». Следовательно, стратегия «сознаться» является лучшим ответом на обе стратегии другого заключенного. Поэтому пара стратегий («сознаться», «сознаться») является равновесием по Нэшу. Именно эти стратегии выберут рациональные заключенные. Таким образом, возникает парадоксальная ситуация: не имея возможности договориться, заключенные получают платеж −3 (проведут по 3 года в тюрьме), тогда как у них есть возможность получить платеж −1.

Дилемма заключенного дает представление, почему крупные фирмы (олигополии) в отсутствие сговора вынуждены устанавливать не наилучшие для себя цены. Более подробно эта экономическая ситуация обсуждается в следующих разделах.

13.6.2. Модель дуополии Курно

Предполагается, что на рынке представлены только две фирмы — 1 и 2, которые производят некоторый (однородный) продукт в количестве q_1 и q_2. Пусть $Q = q_1 + q_2$ — это общее количество производимых товаров, а равновесная цена дается уравнениями $P(Q) = a - Q$, если $Q < a$; $P(Q) = 0$, если $Q \geq a$. Здесь a — некоторый параметр, показывающий наибольшее количество товара, за которое готов платить покупатель. Предполагается, что затраты $C_i(q_i) = cq_i$, $i = 1,2$, пропорциональны количеству производимого товара, причем предельные затраты c одинаковы для обеих фирм.

Модель Курно естественным образом представляется в виде игры. В игре принимают участие два игрока, фирмы 1 и 2. Стратегией каждого игрока является решение о количестве производимого товара, т.е. число q_i из промежутка $[0, \infty)$. Будем считать, что платеж π_i фирмы i — это ее прибыль:

$$\pi_i = p_i q_i - cq_i = \left(a - (q_1 + q_2) - c\right)q_i. \tag{13.7}$$

Чтобы найти равновесие по Нэшу в этой игре, опишем лучший ответ q_1 первой фирмы на произвольную стратегию q_2 второй фирмы. Другими словами, q_2 задано, и требуется максимизировать π_1, определенное формулой (13.7) за счет выбора q_1. Прибыль π_1 как функция от q_1 является параболой, ветви которой направлены вниз (так как коэффициент при q_1^2 отрицательный). Поэтому максимальная прибыль достигается в вершине параболы, в точке

$$q_1 = (a - c - q_2)/2. \tag{13.8}$$

Аналогичные рассуждение показывают, что лучший ответ q_2 второй фирмы на произвольную стратегию q_1 первой фирмы определяется формулой

$$q_2 = (a - c - q_1)/2. \tag{13.9}$$

Прямые, иллюстрирующие лучшие ответы фирм, показаны на рис. 13.11.

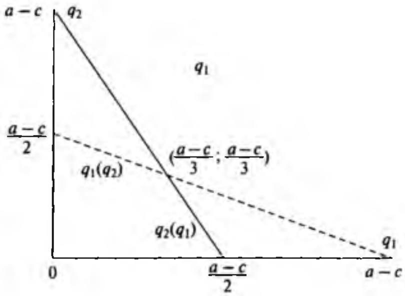


Рис. 13.11. Лучший ответ первой фирмы $q_1(q_2)$ (пунктир), второй фирмы $q_2(q_1)$ (сплошная линия) и равновесие по Нэшу (их пересечение)

В равновесии по Нэшу выполнены одновременно соотношения (13.8), (13.9). Решая эту систему уравнений, находим

$$q_1 = q_2 = \frac{a-c}{3}.$$

Таким образом, в равновесии фирмы выпускают $\frac{(a-c)}{3}$ товара, продают его по цене $\frac{(a+2c)}{3}$ и получают прибыль $\frac{(a-c)^2}{9}$.

13.6.3. Модель дуополии Бертрана

13.6.3.1. Однородный продукт

В модели Бертрана в отличие от модели Курно фирмы конкурируют ценами, полагая, что спрос на их товар определяется на рынке. Товар предполагается однородным, т.е. потребители всегда покупают более дешевый товар. Итак, зная функцию спроса, фирмы одновременно принимают решение о цене товара. Рассмотрим простейшую ситуацию двух одинаковых фирм (олигополий), производство которых связано с одинаковыми линейными издержками $C(q_i) = cq_i$, $i = 1, 2$ ($c > 0$ одинаково для обеих фирм). Спрос предполагается линейным по цене

$$q = a - \min\{p_i, p_j\}.$$

Минимум из цен появляется в формуле спроса как следствие предположения о том, что потребители всегда покупают более дешевый товар. Для простоты коэффициент пропорциональности при цене выбран равным единице.

Разумеется, выбор цен фирмами является игрой (в смысле сделанного определения). В ней принимает участие два игрока — две фирмы. Стратегией фирмы i, $i = 1, 2$, является назначаемая ей цена — число $p_i \in [0, \infty)$. Платеж i-й фирмы — это ее прибыль:

$$\pi_i = p_i q_i - C(q_i).$$

Предположим, что фирмы назначают цены p_1, p_2, причем $p_1 > p_2 > c$. Являются ли эти цены равновесными? При назначенных ценах товар первой фирмы не востребован (потому что он более дорогой), следовательно, ее прибыль равна нулю. Уменьшая свою цену до $\bar{p}_1 \in (c, p_2)$, первая фирма захватывает весь рынок и увеличивают свою прибыль до $\bar{p}_1(a - p_1) - c(a - p_1)$. Однако пара цен $(\bar{p}_1, p_2)$ также не является равновесием. Теперь уже вторая фирма может свою нулевую прибыль сделать положительной за счет уменьшения цены. Неулучшаемой парой цен (и следовательно, равновесием по Нэшу) оказывается $p_1 = p_2 = c$. В равновесии фирмы продают товар по предельным издержкам и получают нулевую прибыль, как в случае совершенной конкуренции. Таким образом, в отсутствие сговора фирмы не могут получить выгоду от своей возможности влиять на цену товара.

13.6.3.2. Дифференцированный продукт

В реальности товары не являются абсолютно одинаковыми. Они могут отличаться качеством, иметь характерные особенности и продаваться в разных местах. В последнем случае потребитель может купить более дорогой товар, если за ним не придется далеко идти.

Пусть спрос q_1 и q_2 на товары двух фирм задаются соотношениями:

$$q_1(p_1, p_2) = a - Bp_1 + bp_2; \tag{13.10}$$

$$q_2(p_1, p_2) = a - Bp_2 + bp_1. \tag{13.11}$$

Коэффициенты $B > 0$ и $b > 0$ (точнее, их отношение) показывает, насколько заменяемы продукции фирм для потребителей. Предполагается, что $b < 2B$ и

$$a > (B - b)c \tag{13.12}$$

(смысл этих неравенств выяснится позднее). Если уровень взаимозаменяемости товаров мал (b мало по сравнению с B), то отношение a/B отражает максимальное количество товаров, за которое готов платить потребитель.

Затраты $C_i(q)$, по-прежнему, линейны и одинаковы для обеих фирм:

$C_i(q) = cq$, $i = 1, 2$ ($c > 0$ одинаково для обеих фирм).

Как и в предыдущей постановке модели Бертрана, стратегией фирмы является выбор цены $p \in [0, \infty)$. Платеж — это прибыль, вычисляемая по формуле

$$\pi_1 = p_1 q_1 - c q_1 = (p_1 - c)(a - Bp_1 + bp_2)$$

для фирмы 1 и

$$\pi_2 = p_2 q_2 - c q_2 = (p_2 - c)(a - Bp_2 + bp_1)$$

для фирмы 2.

Чтобы найти лучший ответ фирмы 1 на выбор цены p_2 фирмой 2, необходимо максимизировать прибыль π_1 по цене p_1. Перепишем выражение для π_1 в виде

$$\pi_1 = -Bp_1^2 + p_1(a + bp_2 + Bc) - ac - bcp_2.$$

Тогда максимум прибыли достигается в вершине параболы

$$p_1 = \frac{a + bp_2 + Bc}{2B}. \tag{13.13}$$

Аналогично лучший ответ второй фирмы на цену p_1, выбранную первой фирмой, записывается в виде

$$p_2 = \frac{a + bp_1 + Bc}{2B}. \tag{13.14}$$

В равновесии выполняются оба соотношения (13.13), (13.14). Решая эту систему уравнений получим

$$p_1 = p_2 = \frac{a + Bc}{2B - b}.$$

Таким образом, в равновесии фирмы установят одинаковые цены и произведут

$$q = a - (B - b)\frac{a + Bc}{2B - b}$$

единиц товара. Условие (13.11) обеспечивает положительность равновесного q. Легко проверить, что неравенство

$$\frac{a + Bc}{2B - b} > c$$

эквивалентно условию (13.11). Следовательно, равновесные цены выше предельных издержек.

13.6.3.3. Динамическая ценовая конкуренция

Парадокс Бертрана заключается в том, что, имея возможность (при наличии сговора) назначить цену на товар, равную монопольной цене, фирмы вынуждены уменьшать цену, пока она не достигнет предельных издержек. Если цена, назначенная фирмой, больше предельных издержек, то назначение другой фирмой чуть меньшей цены позволяет ей полностью захватить рынок. Проще всего увидеть этот парадокс, если принципиально сузить количество возможных стратегий.

Пусть спрос определяется линейным соотношением $q = a - p$. Предполагается, что фирмы могут установить либо монопольную цену $p_M = (a + c)/2$, либо некоторую $p_I = (a + 3c)/4$, которая является промежуточной между монопольной ценой p_M и равновесной по Бертрану ценой $p_B = c$. Если обе фирмы установят цену p_M, то они делят рынок поровну, производя по $q_M = (a - c)/4$ единиц товара и получая по

$$\pi_M = (p_M - c)q_M = \left(\frac{a+c}{2} - c\right)\frac{a-c}{4} = \frac{(a-c)^2}{8}$$

(пиастров) прибыли. Если обе фирмы установят цену p_I, то суммарный спрос на их товар равен $a - p_I$. Каждая из фирм удовлетворит ровно половину спроса и получит прибыль

$$\pi_I = (p_I - c)\frac{a - p_I}{2} = \frac{3(a-c)^2}{32} = \frac{3}{4}\pi_M.$$

Наконец, если одна из фирм установит цену p_M, а другая p_I, то фирма, установившая большую цену, не сможет продать свой товар и получит нулевую прибыль, тогда как другая фирма удовлетворит спрос $a - p_I$ и получит прибыль

$$\left(\frac{a+3c}{4} - c\right)\left(a - \frac{a+3c}{4}\right)\frac{3(a-c)^2}{16} = \frac{3}{2}\pi_M.$$

Для удобства обозначений выберем параметры модели так, что прибыль $\pi_M = 1$. Тогда биматричная форма игры имеет вид указанный на рис. 13.12.

	Фирма 2	p_M	p_I
Фирма 1	p_M	1; 1	0; 1,5
	p_I	1,5; 0	0,75; 0,75

Рис. 13.12

Таким образом, определенная игра эквивалентна дилемме заключенного в том смысле, что в равновесии по Нэшу (p_I, p_I) фирмы не достигают оптимального для них обеих результата, которые они получили бы, если бы сотрудничали, выбрав стратегии (p_M, p_M).

Естественно, что в реальной практике игра не может быть одношаговой. Выбрав цены и проанализировав действия конкурентов, фирмы спустя некоторое время назначают новые цены и т.д. Перейдут ли фирмы к (хотя бы частичному) сотрудничеству, если игра будет состоять из ста шагов? Легко видеть, что не перейдут. На последнем, 100-м шаге экономически выгодно не сотрудничать, выбрав низкую цену (стратегию p_l). Выбирая стратегию на 99-м шаге, фирма знает, что на 100-м шаге конкурент выберет p_l. Поэтому фактически выбор на 99-м шаге эквивалентен выбору в одношаговой игре. Следовательно, этот выбор — цена p_l. В общем случае на шаге k выгоднее назначать цену p_l при условии, что в дальнейшем конкурент всегда будет назначать цену p_l.

Нежелание сотрудничать в рассмотренном примере следует из того, что количество шагов в игре заранее известно обеим фирмам. Если же это число неизвестно, то, оказывается, у фирм появляется стимул к сотрудничеству. Не описывая модель детально (для этого недостаточно сделанных определений), обсудим, на чем основано стремление к сотрудничеству.

Пусть x — вероятность, что следующий шаг игры состоится, r — дисконтирующий множитель прибыли за одну игру. Тогда максимальная выгода от сотрудничества (назначения более высокой цены p_M) будет достигнута, если другая фирма будет придерживаться той же стратегии. В этом случае суммарная прибыль равна

$$1+\frac{x}{1+r}+\frac{x^2}{(1+r)^2}+\ldots=\frac{1+r}{1+r-x}. \tag{13.15}$$

Имеет ли смысл стремиться к сотрудничеству? Если фирма надеется, что другая фирма назначит высокую цену, то у нее есть соблазн назначить низкую цену и получить более высокую прибыль π_l немедленно. Видимо, после этого конкурент также назначит низкую цену. Тогда можно ожидать, что фирмы «скатятся» к одношаговому равновесию низких цен (p_l, p_l). В этом случае суммарная прибыль равна

$$1{,}5+\frac{0{,}75x}{1+r}+\frac{(0{,}75x)^2}{(1+r)^2}+\ldots=0{,}5+\frac{1+r}{1+r-0{,}75x}. \tag{13.16}$$

Если прибыль в (13.15) меньше, чем прибыль в (13.15),

$$0{,}5+\frac{1+r}{1+r-0{,}75x}<\frac{1+r}{1+r-x}, \tag{13.17}$$

то у фирм нет стимула уклоняться от сотрудничества. Неравенство (13.17) эквивалентно неравенству

$$4\left(\frac{1+r}{x}\right)^2-9\frac{1+r}{x}+3<0.$$

Последнее неравенство выполнено, если отношение $(1+r)/x$ мало, т.е. если вероятность следующего раунда игры велика или будущие прибыль значимы (мало r).

Фирма 2

		p_M	p_I
Фирма 1	p_M	π_1, π_1	π_2, π_3
	p_I	π_3, π_2	π_4, π_4

Рис. 13.13

В общем случае один шаг многошаговой игры (см. рис. 13.12) записывается в биматричной форме (рис. 13.13). Тогда существование стимула к сотрудничеству зависит также от соотношения между π_1, π_2, π_3 и π_4.

13.6.4. Линейный город Хотеллинга

13.6.4.1. Отсутствие сотрудничества

Предположим, что город — это отрезок [0, 1]. Жители города равномерно распределены по отрезку. Две фирмы продают одинаковый товар. Жители ценят свое время и потому покупают товар в том магазине, который к ним ближе расположен. Если таких магазинов два, то покупатель выбирает магазин наугад. Если фирмы построят магазины в одной точке, то они поделят покупателей поровну. Где фирмам построить свои магазины?

Прежде всего определим, где бы жители *хотели* увидеть магазины. Предположим, что оптимальное для жителей место определяется минимом суммарного расстояния, которое им необходимо предолеть, чтобы добраться до магазина. Легко видеть, что такими точками будут 1/4 и 3/4. Убедимся, что если фирмы выберут точки 1/4 и 3/4 для своих магазинов, то такой выбор не будет равновесным (по Нэшу). В самом деле, если такой выбор сделан, то фирма, выбравшая точку 1/4, может улучшить свое положение, переместив однажды днем (или, вернее, ночью) магазин несколько правее, так как количество покупателей в результате переноса увеличится. Единственное равновесие по Нэшу в этой игре — выбор середины интервала обеими фирмами.

Вновь результат игры является парадоскальным — фирмы строят магазины по соседству, опасаясь отказа от сотрудничества со стороны конкурента. Такую же ситуацию (отсутствие сотрудничества) мы наблюдали в модели Бертрана. В данном случае парадокс не решается рассмотрением динамической игры, поскольку решение о строительстве магазина ответственное, перенос магазина требует определенных издержек. Однако представляется, что в рассмотренной задаче парадокс получился искусственно, поскольку фирмы конкурировали только за счет местоположения, но не за счет цен.

13.6.4.2. Ценовая конкуренция

Рассмотрим ситуацию с ценовой конкуренцией. Предположим, что городская дума убедила фирмы построить магазин в точках 1/4 и 3/4, которые наиболее предпочтительны для населения. Предположим далее, что полезность $u(x)$ жителя, живущего в x, равна

$$u(x) = \max_{j=1,2}\{v - p_j - k\,|x - x_j|\}. \tag{13.18}$$

Здесь x_1 и x_2 — местоположение магазинов фирм 1 и 2, т.е. точки 1/4 и 3/4, p_1 и p_2 — цены на товар, v — (одинаковая) оценка товара всеми жителями, k — расходы на преодоление единицы пути (опять же одинаковые для всех жителей). Формула означает, что жители сравнивают свои предпочтения о покупке товара в обоих магазинах в соответствии со своей функцией полезности и выбирают тот магазин, для которого полезность выше.

Фирмы в этой модели максимизируют прибыли:

$$\pi_i = p_i q_i - c q_i, \quad i = 1,2,$$

где q_i — количество проданного товара, c — предельные издержки, которые одинаковы у обеих фирм.

Предполагается, что параметры модели удовлетворяют соотношению

$$v > 1{,}25k + c. \tag{13.19}$$

Это условие, как будет показано в дальнейшем, дает возможность покупать товар всем жителям города. Для определенности будем считать, что магазин фирмы 1 (далее он называется первый магазин) находится в 1/4, а магазин фирмы 2 — в 3/4. Игра заключается в том, что фирмы одновременно выбирают цены. Наша цель — найти равновесие по Нэшу.

Выясним сначала, как распределяются покупатели между магазинами. Оказывается, существует такой особый (предельный) покупатель, живущий в некотором x^*, что все люди, живущие левее от него, покупают товар в первом магазине, а все люди, живущие правее него, покупают товар во втором. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что жителю, живущему в некотором $x < \frac{1}{4}$, всегда выгоднее покупать в 1/4 (если цены фирм равновесные). Выбирая магазин, покупатель ориентируется на свою функцию полезности. Он выберет магазин в 1/4, если

$$v - p_1 - k\left(\frac{1}{4} - x\right) > v - p_2 - k\left(\frac{3}{4} - x\right).$$

Это неравенство эквивалентно соотношению

$$p_1 - p_2 < \frac{k}{2}. \tag{13.20}$$

Последнее неравенство выполнено или не выполнено одновременно для всех $x \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$. Если это неравенство не выполнено, то никто из жителей не покупает в первом магазине (так как если покупателям, живущим левее от 1/4, не выгодно ходить в первый магазин, то покупателям, живущим правее от 1/4, тем более препочтительнее пользоваться вторым магазином). Значит, цены p_1 и p_2, не удовлетворяющие неравенству (13.19), не могут быть равновесными, и мы показали существование предельного покупателя.

Значение x^* находится из соотношения

$$v - p_1 - k\left(x^* - \frac{1}{4}\right) = v - p_2 - k\left(\frac{3}{4} - x^*\right).$$

Тогда

$$x^* = \frac{1}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2k}, \quad 1 - x^* = \frac{1}{2} - \frac{p_2 - p_1}{2k}.$$

Прибыль первой фирмы

$$\pi_1 = (p_1 - c)x^* = (p_1 - c)\left(\frac{1}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2k}\right).$$

Лучший ответ первой фирмы на цену p_2, выбранную второй фирмой, максимизириует функцию π_1 по переменной p_1. Функция π_1 по переменной p_1 является параболой. Она достигает максимума в вершине параболы, которая находится посредине между ее корнями $p_2 + k$ и c:

$$p_1 = \frac{p_2 + k + c}{2}. \tag{13.21}$$

Таким образом, (13.21) определяет лучший ответ фирмы 1 на произвольную цену p_2 фирмы 2.

Аналогично прибыль π_2 фирмы 2

$$\pi_2 = (p_2^* - c)(1 - x^*) = (p_2 - c)\left(\frac{1}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2k}\right).$$

Максимум этой параболы

$$p_2 = \frac{p_1 + k + c}{2} \tag{13.22}$$

определяет лучший ответ фирмы 2 на произвольную цену p_1 фирмы 1.

Решая систему уравнений (13.21), (13.22) (из симметрии уравнений относительно неизвестных следует, что $p_1 = p_2$), получим, что в равновесии

$$p_1 = p_2 = k + c.$$

Заметим, что при равновесных ценах предельный покупатель живет как раз в середине отрезка, $x^* = \frac{1}{2}$.

Остается проверить, что все покупатели смогут купить товар, т.е. $u(x)$ положительно для всех x. Наименьшее значение функция $u(x)$ принимает для покупателей, живущих дальше всего от магазинов, т.е. при x, равных 0, $\frac{1}{2}$, 1. Это значение $u\left(\frac{1}{2}\right) = v - (\frac{5k}{4} + c)$ положительно из-за условия (13.18).

13.6.4.3. Конкуренция местоположения и цен

В более общей ситуации фирмы конкурируют между собой как за счет местоположения, так и за счет цен. Сохраним все предположения предыдущей модели за исключением заранее фиксированного местоположения фирм. В новой ситуации фирмы сначала одновременно (и независимо друг от друга) выбирают место для своего магазина. В результате фирмы узнают местоположение магазина конкурента. На основе полученной информации фирмы одновременно назначают цены на свой товар. После этого формируется спрос в соответствии с функцией полезности

$$u(x) = \max\{v - p_1 - k\,|x - z_1|, v - p_2 - k\,|1 - z_2 - x|\}.$$

Здесь z_1 и $1 - z_2$ — местоположения первого и второго магазина соответственно (другими словами, z_1 и z_2 — это расстояния от первого магазина до левого конца отрезка и от второго магазина до правого конца отрезка соответственно). Не ограничивая общности, будем считать, что $z_1 < 1 - z_2$ (первый магазин расположен левее второго).

Анализ модели (поиск равновесия) распадается на несколько стандартных шагов:

- решить задачи потребителя (максимизация функции полезности) при заданных ценах и местоположении магазинов;
- выписать спрос на товар каждой из фирм на основе предыдущего пункта;

- решить задачу фирмы — максимизировать прибыль при заданном спросе. Точки максимума позволят описать наилучшие (равновесные) цены как функции от местоположений z_1 и z_2 магазинов;
- подставить найденные цены в формулы прибыли фирм и найти лучший ответ z_1 на выбор расстояния z_2 и лучший ответ z_2 на выбор расстояния z_1;
- записав наилучшие ответы в виде системы уравнений, найти равновесие по Нэшу.

Поиск равновесных цен как функции от местоположения проведен в предыдущей модели для $z_1 = z_1 = \frac{1}{4}$. Кратко повторим вычисления в общем случае, обращая внимание на возникающие отличия. Место жительства x^* предельного покупателя определяется из уравнения

$$v - p_1 - k(x^* - z_1) = v - p_2 - k(1 - z_2 - x^*). \qquad (13.23)$$

Его решение;

$$x^* = \frac{p_2 - p_1}{2k} + \frac{(1 + z_1 - z_2)}{k}, \quad 1 - x^* = \frac{p_1 - p_2}{2k} + \frac{(1 + z_2 - z_1)}{k}.$$

В уравнении (13.22) предполагается, что предельный покупатель живет между магазинами:

$$z_1 \le x^* \le 1 - z_2.$$

Это условие эквивалентно неравенству

$$|p_2 - p_1| \le k\Delta, \qquad (13.24)$$

где Δ — это расстояние между магазинами.

Если условие (13.24) не выполняется, то одна из фирм захватывает рынок полностью, т.е. $x^* = 0$ или $x^* = 1$.

Поэтому в равновесии (13.24) обязательно должно выполняться (в противном случае фирма, потерявшая покупателей из-за неоправданно высокой цены, опустит цену, чтобы (13.24) выполнялось, и улучшит свою прибыль, что противоречит определению равновесия).

Тогда выражение для прибыли π_1 первой фирмы имеет вид:

$$\pi_1 = (\rho_1 - c)x^* =$$

$$= \begin{cases} (\rho_1 - c), \text{ если } \rho_1 < \rho_2 + k\Delta; \\ \dfrac{(\rho_1 - c)(\rho_1 - \rho_2 + k(1 + z_1 - z))}{2k}, \text{ если (13.23) выполнено;} \\ 0, \text{ если } \rho_1 > \rho_2 + k\Delta. \end{cases} \qquad (13.25)$$

Аналогично прибыль π_2 фирмы 2 имеет вид

$$\pi_2 = (\rho_2 - c)(1 - x^*) =$$

$$= \begin{cases} (\rho_2 - c), \text{ если } \rho_2 < \rho_1 + k\Delta; \\ \dfrac{(\rho_2 - c)(\rho_2 - \rho_1 + k(1 + z_2 - z_1))}{2k}, \text{если (13.23) выполнено;} \\ 0, \text{ если } \rho_2 > \rho_1 + k\Delta. \end{cases} \quad (13.26)$$

Первой фирме требуется максимизировать прибыль, выбрав оптимальную цену p_1 в (13.25) при фиксированном p_2. В равновесии, как сказано выше, выполняется (13.24), поэтому необходимо максимизировать дробь во второй строке формулы (13.25). Числитель дроби — это парабола, ветви которой направлены вниз. Ее вершина вычисляется как среднее арифметическое корней:

$$p_1 = \frac{p_2 + k(1 + z_1 - z_2) + c}{2}. \quad (13.27)$$

Аналогично, если выполнено условие (13.25), то максимум прибыли π_2 достигается в точке

$$p_2 = \frac{p_1 + k(1 - z_1 + z_2) + c}{2}. \quad (13.28)$$

Чтобы найти равновесные цены как функции от местоположения магазинов z_1 и z_2, решим систему уравнений (13.27), (13.28). Складывая и вычитая уравнения (13.27), (13.28), получим

$$\begin{cases} 2(p_1 + p_2) = p_1 + p_2 + 2k + 2c; \\ 2(p_1 - p_2) = p_2 - p_1 + 2k(1 - z_1 - z_2) - 2k. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 2k + 2c; \\ p_1 - p_2 = \dfrac{2}{3}k(z_1 - z_2). \end{cases}$$

Складывая и вычитая полученные уравнения, найдем p_1 и p_2:

$$p_1 = k + c + \frac{1}{3}k(z_1 - z_2); \quad (13.29)$$

$$p_2 = k + c - \frac{1}{3}k(z_1 - z_2). \quad (13.30)$$

Обозначим далее p_1 и p_2, задаваемые выражениями (13.29), (13.30), через p_1^* и p_2^* соответственно. Тогда только цены p_1^* и p_2^* могут быть равновесными (т.е. других равновесий нет). Заметим, что равновесие в рассматриваемой игре вообще может не существовать (в чистых стратегиях). Действительно, пусть вторая фирма выбирает цену (т.е. стратегию) p_2^*. Тогда первая фирма выбирает между двумя возможностями:

а) относительно высокой ценой p_1^*, которая является лучшей при выполнении условия (13.24);

б) относительно низкой ценой $\tilde{p}_1 = p_2 - k\Delta$, которая позволяет захватить рынок полностью (нарушая условие (13.24)).

На самом деле $p_1 < \tilde{p}_1$, но поскольку первая фирма может выбрать цену как угодно близкую к $\tilde{p}_1$, то разницей между $\tilde{p}_1$ и p_1 мы пренебрежем в последующих вычислениях. Подставив цены p_1^* и p_2^*, найдем прибыль первой фирмы в случае а):

$$\pi_1^* = \frac{\left(\frac{1}{3}k(1+z_1-z_2)+\frac{2}{3}k\right)\left(\frac{-2}{3}k(z_1-z_2)+k(1+z_1-z_2)\right)}{2k} = \tag{13.31}$$

$$= \frac{(3+z_1-z_2)^2 k}{18}.$$

В случае б) первая фирма полностью захватит рынок, ее спрос будет равен единице, а прибыль равна

$$\tilde{\pi}_1 = \tilde{p}_1 - c = p_2^* - k\Delta - c = \frac{2}{3}kz_1 + \frac{4}{3}kz_2.$$

Следовательно, первая фирма отклоняется от цены p_1^*, если $\tilde{\pi}_1 > \pi_1^*$. Проводя элементарные преобразования, легко убедиться, что это неравенство эквивалентно условию

$$12(z_1+2z_2) > (3+z_1-z_2)^2. \tag{13.32}$$

Таким образом, если z_1 и z_2 таковы, что неравенство (13.32) справедливо, то цены p_1^*, p_2^* не являются равновесными, потому что p_1^* не является лучшим ответом первой фирмы на цену p_2^*.

Проводя аналогичные рассуждения для второй фирмы, получим, что существованию равновесия противоречит также выполнение неравенства

$$12(2z_1+z_2) > (3-z_1+z_2)^2. \tag{13.33}$$

Следовательно, цены p_1^*, p_2^* являются единственным равновесием в задаче выбора цен при фиксированных местоположениях магазинов z_1, $1-z_2$ тогда и только тогда, когда

$$12(z_1+2z_2)\le(3+z_1-z_2)^2,\ \ 12(2z_1+z_2)\le(3-z_1+z_2)^2. \qquad (13.34)$$

В противном случае равновесие не существует.

В случае симметричного расположения магазинов $z_1 = z_1 = z$ условия (13.34) имеют простейший вид:

$$z < \frac{1}{4} \qquad (13.35)$$

Следовательно, равновесие существует, только если магазины расположены достаточно далеко друг от друга.

Вернемся к задаче выбора местоположения магазинов. Предположим сначала, что магазины далеки друг от друга, так что (13.24) выполнено. Тогда прибыль первой фирмы задется формулой (13.31). Первая фирма полагает z_2 заданным и максимизирует это выражение по $z_1 \in [0, 1 - z_2]$ (мы предположили, что первый магазин расположен левее второго). Вершина параболы $(z_1 - z_2 + 3)^2$ расположена левее нуля (так как $z_2 \in [0,1]$). Ветви параболы направлены вверх, следовательно, прибыль возрастает по z_1 на $[0, 1 - z_2]$ и достигает максимума в точке $z_1 = 1 - z_2$.

Аналогично находится лучший ответ второй фирмы на выбор расстояния z_1 первой фирмой. Пока существует равновесие цен, прибыль второй фирмы равна

$$\pi_2 = \frac{(3-z_1+z_2)^2 k}{18}.$$

Это выражение возрастает по z_2 и достигает максимума в точке $z_2 = 1 - z_1$.

Итак, мы показали, что обеим фирмам выгодно приближать свои магазины к центру города, т.е. приближать их друг к другу. Будет ли пара $z_1 = z_2 = \dfrac{1}{2}$ равновесием? Нет, не будет. Если магазины окажутся слишком близко друг к другу, то нарушается условие существования равновесия в подигре цен.

Отсутствие равновесия не является общим свойством линейного города Хотеллинга. Этот результат получился из-за предположения, что расстояние входит линейно в функцию полезности жителей.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какие параметры определяют конечную игру?
2. Какая игра называется антагонистической?

3. Две фирмы, производящие сыр, устраивают дегустацию своей продукции в одном магазине. Если мероприятия происходят одновременно, то покупатели ни одной из фирм не отдают предпочтения. Если представители работают в разное время, то покупатели выбирают продукцию представленной фирмы с вероятностью 0,6 вечером, 0,3 — днем и 0,1 — утром. Сформулируйте данную ситуацию в виде игры.
4. Определите нижнюю и верхнюю цену игры, заданной матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
5. При каких условиях игра имеет седловую точку?
6. Найдите седловую точку в игре, заданной матрицей $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.
7. Как определить доминируемые стратегии I и II игроков в антагонистической игре?
8. Найдите доминируемые стратегии игроков в игре, заданной матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.
9. Какие существуют методы определения ситуации равновесия?
10. Найдите ситуацию равновесия в игре, заданной матрицей A, графически $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.
11. Сформулируйте и решите задачу линейного программирования для игры, заданной матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.
12. Опишите игру с n игроками.
13. В игре участвуют 4 игрока. У первого игрока есть 2 стратегии, у второго — 5, у третьего — 1, у четвертого — 10. Сколько существует результатов игры?
14. Дайте определение строго доминируемой стратегии. Приведите пример игры, в которой ни одна из стратегий не является строго доминируемой.
15. Игра задана рисунком 13.5. Являются ли стратегии Медведя B и C строго доминируемыми?

16. Дайте определение равновесия по Нэшу.
17. Игра задана в биматричной форме:

Игрок 2

		S_1	S_2
Игрок 1	s_1	4, 4	9, 1
	s_2	1, 9	2, 2

Найдите равновесие по Нэшу.
18. Существует ли игра, у которой нет равновесия в строго доминируемых стратегиях?
19. Существует ли игра, у которой не существует равновесие по Нэшу?
20. Игра задана в биматричной форме:

Игрок 2

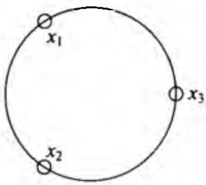
		S_1	S_2
Игрок 1	s_1	1, 1	0, 1
	s_2	1, 0	0, 0

Найдите равновесие по Нэшу.
21. Существует ли игра, у которой существует равновесие в строго доминируемых стратегиях, но не существует равновесие по Нэшу?
22. В чем заключается парадокс дилеммы заключенного?
23. Опишите игру (игроков, платежи) в модели дуополии Курно.
24. Издержки обеих фирм в модели Курно равны нулю. Найдите равновесие по Нэшу.
25. Издержки $C(q_i)$ фирм 1 и 2 в модели Курно определяются формулой $C(q_i) = c_i q_i$ с различными предельными издержками: $c_1 > c_2$. В предположении $c_1 < (a + c_2)/2$ нарисуйте на координатной плоскости (q_1, q_2) лучший ответ фирмы 2 на стратегию q_1 фирмы 1 и лучший ответ фирмы 1 на стратегию q_2 фирмы 2. Найдите точку пересечения нарисованных линий. Опишите равновесие по Нэшу.
26. В модели Курно предельные издержки фирм 1 и 2 равны c_1 и $1{,}5c_1 - a$. Найдите выпуск более дорогой (т.е. первой) фирмы.
27. В модели Курно $c_1 = 3a/5$, $c_2 = a/2$. После того как рынок оказался в равновесии, производство единицы продукции в первой фирме стало дороже на k рублей, а во второй дешевле на k рублей (k невелико). Как изменится цена на продукцию?

28. На рынке конкурируют n фирм, выбирая количество производимого товара (в соответствии с моделью Курно). Издержки $C(q_i) = cq_i$, предельные издержки одинаковы. Найдите равновесный выпуск (равновесие по Нэшу) и прибыль каждой из фирм. Опишите равновесные выпуск, прибыль фирм, суммарный объем выпуска и цены при $n \to \infty$.
29. Опишите игру (игроков, платежи) в модели дуополии Бертрана.
30. Опишите равновесие в модели Бертрана. Какую прибыль получают фирмы в равновесии?
31. Опишите равновесие в модели Бертрана для дифференцированных продуктов. Отличается ли это равновесие от равновесия в модели с однородным продуктом?
32. В модели Бертрана с $q = a - \min\{p_1, p_2\}$ линейные издержки фирм различны: $C_1(q) = c_1q$, $C_2(q) = c_2q$, $c_1 > c_2$. Опишите равновесие по Нэшу.
33. В модели Бертрана с $q = a - \min\{p_1, p_2\}$ и одинаковыми линейными издержками у обеих фирм существуют ограничения на объемы производства K_1 и K_2 для первой и второй фирм соответственно. Известно, что $K_1 \leq K_2 < (a - c)/2$. Являются ли стратегии $p_1 = p_2 = c$ — продавать по предельным издержкам — равновесием по Нэшу?
34. В модели Бертрана (13.10), (13.11) с дифференцированным товаром и линейными издержками предельные издержки c_1 и c_2 различны. Найдите равновесные цены.
35. Укажите сходство динамической конкуренции в модели Бертрана с дилеммой заключенного.
36. Игра задана в биматричной форме (см. рис. 13.13). При каких π_1, π_2, π_3, π_4 эта игра эквивалентна дилемме заключенного в том смысле, что оба игрока имеют строго доминантную стратегию, однако, применяя эту стратегию, игроки получают в равновесии по Нэшу меньший платеж, чем при сотрудничестве?
37. Будут ли фирмы сотрудничать в рамках дилеммы заключенного, если им предстоит выбирать стратегию 100 раз?
38. В каком случае у фирм появляется стимул сотрудничать (при отсутствии сговора) в повторяющейся дилемме заключенного?
39. Сформулируйте предположения модели Хотеллинга.
40. Какое расположение магазинов оптимально для жителей в модели Хотеллинга? Почему?
41. Дайте определение предельного покупателя в модели Хотеллинга. Существует ли предельный покупатель в модели Хотеллинга?

42. Укажите алгоритм поиска равновесия в модели Хотеллинга.
43. Существует ли равновесие в модели Хотеллинга?
44. Студенты группы выбирают число на промежутке [0, 100]. Приз получает студент, число которого ближе всего находится к двум третям от среднего арифметического выбранных чисел. Укажите равновесие по Нэшу.
45. Город — это отрезок [0, 1]. Жители города равномерно распределены на этом отрезке. Планируется построить два одинаковых магазина так, что если каждый житель придет в ближайший к нему магазин один раз, то сумма расстояний, пройденных жителями, будет наименьшей. Определите места для магазинов.
46. Город — это окружность, на которой равномерно распределены жители (рис.). Жители покупают товары в том магазине, который расположен к ним ближе. Если таких магазинов несколько, то они действуют наугад. Три фирмы построили по магазину в вершинах равностороннего треугольника. Магазины абсолютно одинаковы. Будет ли этот выбор местоположения магазинов равновесным по Нэшу?

    Является ли равновесным симметричное положение трех магазинов на окружности, если покупателя волнует только расстояние?



47. В тексте раздела рассмотрен город Хотеллинга, в котором магазины, расположенные в точках z_1 и $1 - z_1$, конкурируют ценами. Показано, что равновесие цен возможно не всегда. Объясните, почему при $z_1 = z_2 = 1/4$ (этот случай также разобран подробно), равновесие существует.
48. В линейном городе Хотеллинга магазины, расположенные в точках z и $1 - z$, $z \leq 1/4$, конкурируют ценами. При каком z фирмы получат наибольшую прибыль (при равновесных ценах)?
49. Функция полезности потребителей в модели линейного города Хотеллинга квадратична по расстоянию от жителей до магазинов:

$$u(x) = \max_{j=1,2}\left\{v - p_j - k(x - x_j)^2\right\}.$$

Фирмы одновременно выбирают место для своих магазинов, затем, увидев выбор конкурента, назначают цены. Все остальные предположения о фирмах и потребителях, сделанные в этом разделе, не меняются. Опишите равновесие по Нэшу.

ГЛАВА 14

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

В предыдущих главах учебника мы изучали методы поиска точных решений задач оптимизации. Однако далеко не все задачи могут быть решены аналитически с получением точного ответа. Кроме того, при решении практических экономических задач не всегда есть необходимость искать общее решение или все возможные решения. В таких случаях применяются *численные* методы, которым посвящается эта глава.

Постановка задачи исходит из требований практики. Если, например, исследуемая функция выражает прибыль при производстве различных видов товаров, то стремятся найти ее максимум. В случае если она выражает цену товара, участвующего в обороте, или издержки производства, стремятся найти условия для нахождения ее минимума.

С математической точки зрения не имеет значения, рассматривать минимизацию или максимизацию функции, так как поиск максимума функции $f(x)$ эквивалентен поиску минимума функции $-f(x)$. Поэтому ограничимся рассмотрением *задачи минимизации*: для функции $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, которая определена и непрерывна в области $D \subset R^n$, найти вектор $x^* \in D$ такой, что $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall x \in D$.

Значения переменных могут подчиняться ограничениям ($x \in D$), а могут изменяться без ограничений (множество D совпадает с R^n). Так, если переменные x_i выражают количество производимых товаров, то существенным является ограничение на производственную мощность, объемы используемого сырья, количество товара, которое может поглотить рынок, и т.д. Очевидно, что в этом случае поиск решения, не удовлетворяющего ограничениям, не имеет практического смысла.

Если ограничения отсутствуют, то для поиска минимума можно воспользоваться классическими методами математического анализа. Напомним, что для этого следует выполнить несколько последовательных шагов:

- найти все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$;
- решить систему нелинейных уравнений $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$; все ее решения являются критическими точками функции;
- составить матрицу вторых частных производных $H = \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$, $i, j = 1, \ldots, n$;
- определить тип каждой из найденных критических точек по критерию Сильвестра.

При этом могут возникнуть трудности при определении производных. Решение системы нелинейных уравнений, как известно, также является вычислительно непростой задачей. Наконец, проверять тип каждой критической точки весьма трудоемко, а то и невозможно. Эти проблемы становятся трудно преодолимыми, если участвующие в задачи функции относятся к классу *вычислимых* (см. определение 10.1). Все это делает практически неприменимым классический метод для реальных задач.

Современные численные методы делятся на методы безусловной и условной оптимизации. Методы безусловной оптимизации (т.е. без ограничений) являются весьма важными как сами по себе, так и в связи с тем, что с их помощью решается множество задач, таких как задачи условной оптимизации, задачи оптимального управления, краевые задачи и т.д. Методы, использующие только значения функции и не требующие вычисления ее производных, называются *прямыми методами* минимизации. Большим достоинством прямых методов является то, что от целевой функции не требуется дифференцируемости и, более того, она может быть вычислимой. Единственное, на чем основаны алгоритмы прямых методов минимизации, это возможность определения значений $f(x)$ в заданных точках.

Отметим также, что практически все численные методы рассчитаны на поиск локального минимума, ближайшего к выбранному начальному приближению.

14.1. Методы оптимизации функций одной переменной

Раздел, касающийся одномерной оптимизации, занимает особое место. С одной стороны, методы поиска минимума функции одной переменной имеют самостоятельную ценность и основаны на принципах, отличающихся от принципов минимизации функций нескольких переменных. С другой, одномерная минимизация является составной частью большинства алгоритмов решения многомерных задач.

Итак, постановка задачи минимизации функции одной переменной заключается в следующем: для функции $y = f(x)$, которая определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, найти значение x^* такое, что $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall x \in [a; b]$.

Для ее решения необходимо найти конечный отрезок, внутри которого содержится точка минимума (и притом единственная). Эта процедура называется ***локализующим поиском***. Предположим, что задано значение аргумента x_0, от которого следует начать поиск. Выберем некоторый шаг h и вычислим $f(x_0 + h)$. Если $f(x_0 + h) < f(x_0)$, то шаг сделан в правильном направлении; тогда перенесем начальную точку в $x_0 = h$ и увеличим размер шага в 2 раза. В противном случае изменим знак h на противоположный и будем двигаться в противоположном направлении. Движение в сторону уменьшения значения функции $f(x)$ продолжается с все увеличивающимся шагом до тех пор, пока значение функции в очередной точке не окажется больше предыдущего. Если смещение от x_0 на шаг h как в положительном, так и в отрицательном направлении приводит к увеличению значения функции, то дальнейшие шаги не нужны (минимум локализован на отрезке $[x_0 - h,\ x_0 + h]$).

Далее считаем, что эта процедура выполнена, функция на рассматриваемом отрезке $[a; b]$ ***унимодальна***, т.е. имеет на нем единственный минимум.

Теперь следует уточнить положения минимума путем последовательного сжатия найденного отрезка.

14.1.1. Прямые методы одномерной оптимизации

Самым простым методом, не требующим никакой информации, кроме способа вычисления значения минимизируемой функции при заданном значении аргумента, является ***метод пассивного поиска*** (***перебор***).

Для его реализации отрезок $[a; b]$ разбивают на n интервалов $(x_{i-1}; x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

затем вычисляют значения $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Путем простого перебора находят значение x_k такое, что $f(x_k) < f(x_i)$ для любого $i = 0, \ldots, n$. Считают, что минимум расположен на отрезке $[x_{k-1}; x_{k+1}]$. Теперь в качестве исходного отрезка выбирают $[x_{k-1}; x_{k+1}]$ и повторяют процедуру.

Таким образом, можно сделать отрезок, содержащий минимум, сколь угодно малым.

Очевидным недостатком этого метода является многократное вычисление значений функции. При этом информация, полученная на предыдущем шаге процедуры, никак не используется.

Более привлекательны методы, позволяющие сократить число вычислений функции. Они аналогичны методу половинного деления для уточнения корня нелинейного уравнения (см. пункт 10.2.1). Первоначальный отрезок на каждом шаге делится на две части и выбирается та часть, внутри которой содержится искомая точка. Используется следующее свойство непрерывных функций: если точки g и h ($g < h$) расположены на (a, b) и $f(g) \leq f(h)$, то на отрезке $[a, h]$ есть хотя бы один минимум функции. Аналогично, если $f(g) \geq f(h)$, то на отрезке $[g, b]$ есть хотя бы один минимум. Назовем точки g и h, в которых производится вычисление значения функции, ***пробными точками***.

Очевидно, что наименьшее число вычислений значений функции, которые необходимы для сокращения интервала неопределенности, равно 2. Методы прямого поиска различаются способом выбора пробных точек.

Метод деления отрезка пополам (дихотомический поиск)

Одной из стратегий является выбор этих двух точек симметрично на расстоянии δ ($0 < \delta < (b - a)$) от середины отрезка. Число δ настолько мало, чтобы длина нового интервала неопределенности $\delta + \frac{b-a}{2}$ являлась достаточно близкой к значению $\frac{b-a}{2}$, и в то же время такое, чтобы значение функции в этих двух точках были различимы. Целью метода является уменьшение длины интервала неопределенности до заданной длины ε.

Алгоритм дихотомического поиска

Исходные данные: $f(x)$, a, b, ε. Выбираем δ: $0 < \delta < (b - a)$.

1. $a_0 = a$; $b_0 = b$; $k = 0$.

2. Если $(b_k - a_k) < \varepsilon$, то процесс завершен, точка минимума принадлежит $[a_k; b_k]$; иначе перейти к шагу 3.

3. Вычислить $g_k = \dfrac{b_k + a_k}{2} - \delta$ и $h_k = \dfrac{b_k + a_k}{2} + \delta$.

4. Если $f(g_k) < f(h_k)$, то $a_{k+1} = a_k$; $b_{k+1} = h_k$; иначе $a_{k+1} = g_k$; $b_{k+1} = b_k$.

5. Положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 2.

После n шагов алгоритма ($k = n$) получим отрезок $[a_n; b_n]$, содержащий искомый минимум. Можно считать, что $x^* \approx x_n = \frac{b_n + a_n}{2}$ при этом погрешность вычисления: $|x^* - x_n| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n} + \delta$.

Число δ является параметром метода. Оно должно быть выбрано не меньше, чем $\varepsilon_м$ (см. пункт 1.1.4). Метод обладает линейной сходимостью со скоростью, близкой к 0,5. На каждом шаге алгоритма функция вычисляется дважды. Всего для достижения длины интервала неопределенности, равной ε, необходимо вычислить функцию N раз, где $N = 2n > 2\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon-\delta}\right)$.

Можно уменьшить количество вычислений, применив метод золотого сечения.

Метод золотого сечения[1]

Рассмотрим такое симметричное расположение точек g и h на отрезке $[a, b]$, при котором одна из них становится пробной точкой, и на новом отрезке, полученном после исключения части исходного отрезка. Использование таких точек позволяет на всех шагах, кроме первого, ограничиться определением только одного значения функции, так как другое значение уже найдено на одном из предыдущих шагов.

Известно, что если точка g_0 делит отрезок $[a, b]$ в отношении золотого сечения, т.е. $\frac{b-a}{b-g_0} = \frac{b-g_0}{g_0-a} = \varphi$, то симметричная ей относительно середины отрезка точка h_0 делит отрезок $[g_0, b]$ в таком же отношении. Таким образом, при отбрасывании любого из отрезков на оставшемся уже найдена одна из пробных точек, и в ней уже вычислено значение функции (рис. 14.1). При этом следующая пробная точка расположена симметрично имеющейся относительно середины отрезка.

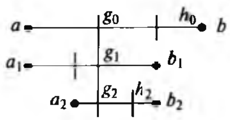


Рис. 14.1. Сжатие отрезка в методе золотого сечения

Алгоритм поиска по методу золотого сечения

Исходные данные: $f(x)$, a, b, ε.

1. $a_0 = a$; $b_0 = b$; $k = 0$.
2. Вычислить $g_k = a_k + (b_k - a_k)(1 - 0{,}618)$ и $h_k = a_k + 0{,}618(b_k - a_k)$.

---

[1] Золотое сечение (золотая пропорция, число Фидия) — деление отрезка на части в соотношении, при котором большая часть так относится к меньшей, как весь отрезок к большей. Эту пропорцию обозначают буквой φ, и она равна $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180\ldots$.

3. Если $(b_k - a_k) < \varepsilon$, то процесс завершен, точка минимума принадлежит $[a_k; b_k]$; иначе перейти к шагу 4.
4. Если $f(g_k) < f(h_k)$, то перейти к шагу 5; иначе перейти к шагу 6.
5. $a_{k+1} = a_k$; $b_{k+1} = h_k$; $h_{k+1} = g_k$; $g_{k+1} = a_{k+1} + (b_{k+1} - a_{k+1})(1 - 0{,}618)$, перейти к шагу 7.
6. $a_{k+1} = g_k$; $b_{k+1} = b_k$; $g_{k+1} = h_k$; $h_{k+1} = a_{k+1} + 0{,}618(b_{k+1} - a_{k+1})$.
7. Положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 3.

После n шагов алгоритма получим отрезок $[a_n; b_n]$, содержащий искомый минимум. Можно считать, что $x^* \approx x_n = \dfrac{b_n + a_n}{2}$, при этом погрешность вычисления: $|x^* - x_n| \le \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{b - a}{2 \cdot \varphi^n}$.

Интервал неопределенности в методе золотого сечения уменьшается медленнее, чем в методе деления отрезка пополам (в 1,618 раза по сравнению с 2 в методе деления пополам). Однако на каждом шаге алгоритма, начиная со второго, функция вычисляется один раз. Всего для достижения длины интервала неопределенности, равной ε, необходимо вычислить функцию N раз, где $N = n + 1 > \dfrac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln \varphi} + 1$.

Метод обладает линейной сходимостью со скоростью 0,618.

Пример 14.1. Пусть минимум функции расположен на отрезке длины 1. Определить, сколько раз нужно вычислить значение целевой функции при использовании метода половинного деления и метода золотого сечения, чтобы интервал неопределенности имел длину 10^{-6}.

Применяя приведенные выше формулы, получим, что при использовании метода половинного деления с $\delta = 10^{-8}$ необходимо вычислить функции не менее 49 раз, а при использовании метода золотого сечения — 29 раз.

Замечание 14.1. Недостатком метода является его чувствительность к накоплению ошибок округления, возникающих при вычислении пробных точек, которые от шага к шагу все более отличаются от истинных точек золотого сечения. Чтобы избежать этого, в алгоритм метода золотого сечения можно включить процедуру обновления, т.е. через несколько шагов принять отрезок $[a_k, b_k]$ за исходный и начать вычисления по методу золотого сечения сначала.

14.1.2. Метод поиска глобального минимума

Метод ломаных — практически универсальный метод оптимизации функции одной переменной, не требующий от функции никаких «хороших» свойств вроде унимодальности. Он предназначен для оптимизации одномерных функций, удовлетворяющих условию Липшица.

Определение 14.1. *Функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Липшица, если существует число $L > 0$ (константа Липшица) такое, что имеет место*

$$|f(x)-f(y)| \le L|x-y| \quad \forall x, y \in [a, b]. \tag{14.1}$$

Геометрически это означает, что тангенс угла наклона касательной в каждой точке графика функции не превосходит L. Любая функция, удовлетворяющая условию Липшица на отрезке, непрерывна на нем. Обратное, вообще говоря, не верно. Достаточным условием выполнения условия Липшица является существование ограниченной непрерывной производной.

Рассмотрим точку $v \in [a, b]$. Построим функцию $g(x, v) = f(v) - L|x - v|$. Это кусочно-линейная функция (двухзвенная ломаная), вершина которой принадлежит графику функции $f(x)$, а звенья составляют с осью x углы $\operatorname{arctg}(L)$ и $\pi - \operatorname{arctg}(L)$. Очевидно, что график функции всегда лежит над этой ломаной, т.е. $g(x, v) \le f(x)$, причем $g(v, v) = f(v)$.

Идея метода ломаных такова. Пусть задана функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Возьмем в качестве точки v концы отрезка и построим при $v = a y = g(x, a)$, при $v = b y = g(x, b)$, Графики этих функций пересекаются в точке x_0: $g(x_0, a) = g(x_0, b)$, где $x_0 = \frac{a+b}{2} + \frac{f(a)+f(b)}{2L}$.

Составим ломаную

$$k_0(x) = \begin{cases} g(x,a), \; x \le x_0; \\ g(x,b), \; x \ge x_0. \end{cases}$$

Вычислим $f(x_0)$ и построим $g(x, x_0)$. Теперь отбросим нижнюю вершину ломаной, заменив ее на две новых. Для этого составим функцию: $k_1(x) = \max\{k_0(x), g(x, x_0)\}$. В полученной ломаной выбираем нижнюю вершину и вновь заменяем ее на две новых (рис. 14.2). Функция $k_n(x) = \max\{k_{n-1}(x), g(x, x_{n-1})\}$ описывает ломаную, полученную на n-м шаге. Среди ее вершин простым перебором можно определить глобальный минимум, а нижние вершины ломаных, получаемых на последовательных шагах метода, составляют последовательность $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Полученные описанным методом функции $k_n(x)$ обладают следующими свойствами:

1) функции $k_n(x)$ непрерывны, кусочно-линейны, состоят из отрезков прямых с угловыми коэффициентами, равными $\pm L$;

2) функции $k_n(x)$ удовлетворяют условию: $k_n(x) \le k_{n-1}(x) \le f(x)$;

3) $k_n(x_i) = f(x_i)$ для любой точки $x_i \in X$;

4) $k_n(x)$ удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$.

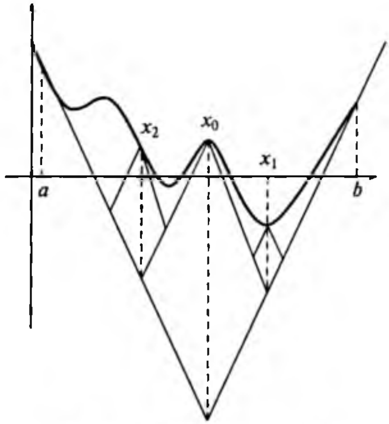


Рис. 14.2. Метод ломаных

Теорема 14.1. *Последовательность X, построенная по методу ломаных, такова, что*:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(x_n) = \inf\limits_{x\in[a,\,b]} f(x) = f(x^*) = f^*$;

2) *любая предельная точка указанной последовательности является точкой глобального минимума целевой функции*;

3) *если точка x^* глобального минимума функции единственна, то* $f(x^*) = \min\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Достоинством метода является возможность находить глобальный минимум сколько угодно сложных многоэкстремальных функций, он всегда сходится при любом отрезке $[a, b]$. При этом на каждом шаге осуществляется простой перебор точек.

К недостаткам метода можно отнести его малую эффективность при минимизации функции, близкой к константе. Метод наиболее эффективен для функций, которые в каждой точке графика или быстро растут, или быстро убывают (в идеале — со скоростью, близкой к константе Липшица). Кроме того, реализация метода ломаных требует достаточно большого объема памяти вычислительного устройства.

Отметим также, что оценить константу Липшица для вычислимых функций не всегда просто. Если ее взять заведомо больше истинной, сходимость замедляется, а если меньше, возможны ошибки.

Целесообразно использовать этот метод на начальной стадии оптимизации, с тем чтобы выделить интервалы, на которых функция унимодальна, а затем на каждом их них применить один из эффективных методов оптимизации унимодальной функции.

14.1.3. Методы одномерной оптимизации, использующие производные

Если целевая функция дифференцируема и возможно аналитическое определение ее производной, то можно определить ее критические точки, решив уравнение

$$f'(x) = 0.$$

Решение этого уравнения возможно любым из численных методов, описанных в главе 10. Так, если вторая производная функции известна, решение указанного уравнения методом Ньютона описывается итерационным процессом:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, \tag{14.2}$$

где x_0 необходимо задать.

Очевидно, что метод обладает всеми достоинствами и недостатками описанными в главе 10, а именно:

- обладает квадратичной сходимостью из хорошего начального приближения;
- для квадратичной функции решение находится за один шаг.

Последнее является важным, так как дважды дифференцируемая функция в окрестности минимума хорошо аппроксимируется квадратичной параболой.

При этом метод не обладает глобальной сходимостью. Кроме того, аналитическое определение производных затруднительно.

Решать указанное уравнение можно также методом хорд, секущих, итераций и т.д.

14.2. Методы безусловной оптимизации функций многих переменных

Задача безусловной оптимизации состоит в нахождении минимума или максимума функции нескольких переменных при отсутствии каких-либо ограничений. Несмотря на то что большинство практических задач оптимизации содержит ограничения, методы безусловной оптимизации занимают очень важное место. Многие алгоритмы решения задачи с ограничениями предполагают сведение ее к последовательности задач безусловной оптимизации. Обоснование методов безусловной оптимизации может быть естественным образом распространено на обоснование процедур решения задач с ограничениями.

Итак, для функции $y = f(x)$, $x \in R^n$, непрерывной в R^n, необходимо найти значение x^* такое, что $f(x^*) \le f(x)$ $\forall x \in R^n$.

Численные методы отыскания безусловного минимума позволяют находить приближенные значения как вектора x^*, так и $f(x^*)$. При этом весьма важным является возможность достижения необходимой точности вычисления этих значений.

Большинство методов, предназначенных для решения поставленной задачи, являются итерационными. Как и все уже рассмотренные итерационные методы, они основаны на различных способах построения последовательностей $\{x_k\} \in R^n$, которые в некотором смысле, при $k \to \infty$, приближаются к искомому значению x^*, а соответствующие им числовые последовательности $\{f(x_k)\} \in R$ стремятся к $f(x^*)$. Очевидно, что невозможно бесконечно долго генерировать последовательность приближений. Поэтому весьма важным является вопрос о выборе критерия завершения расчета, который бы гарантировал достижение необходимой точности. Универсальных рецептов выбора такого критерия нет. В каждом конкретном случае это необходимо делать, учитывая специфику решаемой задачи и привлекая какую-либо дополнительную информацию.

Напомним некоторые определения.

Линией (*поверхностью*) *уровня* функции $y = f(x)$ называется множество точек, удовлетворяющих условию $f(x) = C$. Для функции двух переменных линии уровня могут быть изображены графически. Фактически это проекция графика функции на плоскость двух переменных.

Определение 14.2. *Последовательность* $\{x_k\} \in R^n$ *называется* ***релаксационной***, *если выполняются неравенства*

$$f(x_{k+1}) < f(x_k) \quad \forall k \in N. \tag{14.3}$$

Методы оптимизации обеспечивают переход с одной линии (поверхности) уровня на другую, соответствующую меньшему значению целевой функции, т.е. построение релаксационной последовательности. Большинство таких методов базируются на следующей схеме.

Выбирается вектор $x_0 \in R^n$, являющийся начальным приближением. Последующие приближения строятся по рекуррентному правилу:

$$x_{k+1} = x_k + t_k s_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \qquad (14.4)$$

где $s_k \in R^n$ — векторы направления шага; $t_k \in R$ — величина шага.

В зависимости от способа выбора направлений и шаговых множителей получаются различные методы построения последовательностей.

Многие (хотя и не все) методы используют в качестве направлений s_k на каждой итерации релаксационные направления для целевой функции в точке x_k (рис. 14.3).

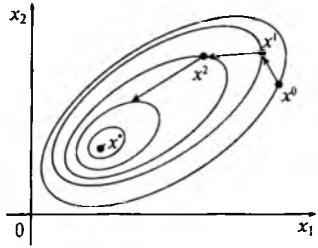


Рис. 14.3. Прямой метод поиска минимума

Существует большое количество методов безусловной минимизации. Одной из характеристик таких методов является порядок метода. Он определяется порядком частных производных целевой функции, используемых для построения последовательности (14.4). Если при реализации метода используются первые производные, то метод является методом первого порядка, в случае использования вторых производных — методом второго порядка и т.д. Если же производные не используются вообще, а используются только лишь значения функции, вычисленные в некоторых точках, то говорят о методах нулевого порядка или методах прямого поиска.

14.2.1. Методы прямого поиска

Идея методов прямого поиска такова. Пусть в пространстве R^n выбран базис $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. Строится последовательность приближений (14.4), при этом в качестве направлений s_k выбираются те или иные векторы из базисной системы $\{h_k\}$. Величина шага может регулироваться по-разному, например быть постоянной. В общем случае это возможно лишь для начала процесса минимизации. Можно, например, использовать *полный шаг*, т.е. самый большой из шагов в выбранном направлении, при котором функция уменьшается. Он находится для каждой итерации при помощи одномерной минимизации:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + t_k s_k) = \min_{t \in R} f(x_k + t s_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots . \qquad (14.5)$$

Если проведение одномерной оптимизации затруднительно, используют метод удвоения и деления шага пополам. Выбирается длина шага, используемая на предыдущей итерации. В случае если функция уменьшилась, длина шага удваивается до тех пор, пока это возможно.

Если функция не уменьшилась, длина шага уменьшается вдвое необходимое число раз.

Методы покоординатного спуска

В этих методах в качестве базиса выбирается ортонормированная система из n единичных ортов. Таким образом, на каждой итерации изменяется только одна координата вектора x_k. Действительно, если записать формулы (14.4) покоординатно, то получим следующие соотношения. Пусть $s_k = e_i$, тогда

$$x_j^{k+1} = x_j^k,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq j;$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + t_k.$$

Здесь x_j^k — j-я координата вектора x_k.

Порядок чередования этих базисных векторов в ходе осуществления итераций может быть различным. Этим и определяются модификации методов покоординатного спуска. Так, в *методе циклического покоординатного спуска* циклически перебираются все координаты по очереди от первой до последней. Траектория движения к точке минимума в этом случае состоит их отрезков прямых, параллельных осям координат. На рисунке 14.4 показана траектория движения их начальной точки при использовании циклического метода покоординатного спуска с полным шагом.

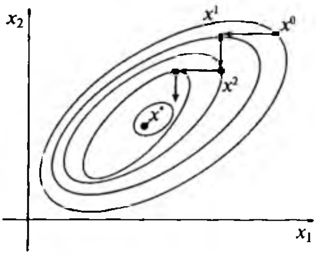


Рис. 14.4. Циклический метод покоординатного спуска

Метод случайного покоординатного спуска отличается тем, что номер изменяемой координаты выбирается случайным образом из целых чисел от 1 до n. При реализации метода используют генератор псевдослучайных чисел, обеспечивающий выбор каждого из указанных значений с равной вероятностью.

14.2.2. Градиентные методы

Методы, использующие первые производные целевой функции, называются *градиентными*. Это методы первого порядка. Пусть минимизируемая функция определена и непрерывно дифференцируема в R^n.

Напомним, что градиентом функции $f(x)$, $x \in R^n$, в точке $x^* \in R^n$ называется вектор, координаты которого равны значениям частных производных этой функции в данной точке:

$$\operatorname{grad} f(x^*) = \nabla f(x^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \Bigg|_{x=x^*}.$$

Необходимым условием минимума функции в точке (а для выпуклых функций и достаточным) является равенство в ней нулю всех частных производных, т.е. выполнение условия

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Известно, что скорость возрастания функции в направлении градиента в данной точке наибольшая, соответственно, наибольшая скорость убывания будет в направлении, противоположном градиенту. Это направление называется ***антиградиентом***. Поэтому (локально) вектор $-\nabla f(x_k)$ и задает направление наискорейшего убывания функции. Отметим, что глобально такое направление может и не быть наилучшим для минимизации функции f.

Градиентные методы для построения последовательности приближений в качестве направления спуска используют антиградиент целевой функции в соответствующей точке. Таким образом, формула (14.4) теперь имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (14.6)$$

Различные модификации градиентных методов отличаются лишь способом выбора шагового множителя t_k. Так, наиболее простым вариантом градиентного метода является *градиентный метод с постоянным шагом*. Очевидно, что по мере приближения к точке минимума модуль вектора спуска в выражении (14.6) становится все меньше, а в самой точке минимума он равен нулю. Поэтому скорость сходимости по мере приближения к минимуму падает. При этом растет влияние ошибок округления. Один из способов борьбы с этим влиянием заключается в нормировании вектора антиградиента. Выражение (14.6) модифицируется следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - t_k \frac{\nabla f(x_k)}{|\nabla f(x_k)|},\ \forall k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Градиентный метод с постоянным шагом может и не обладать сходимостью. Покажем это на простом примере.

Пример 14.2. Рассмотрим функцию одной переменной $f = ax^2$. Здесь $f' = 2ax$ и итерационный процесс (14.6) принимает вид

$$x_{k+1} = x_k - t \cdot 2a \cdot x_k.$$

При $t = \frac{1}{a}$ вычислим несколько первых членов последовательности. Выберем x_0. Тогда $x_1 = x_0 - \frac{1}{a} 2a \cdot x_0 = -x_0$; $x_2 = x_1 - \frac{1}{a} 2a \cdot x_1 = -x_1 = x_0$. Как говорят, процесс «зациклился». При $t > \frac{1}{a}$ метод расходится, при $t < \frac{1}{a}$ — сходится.

Для выбора величины шага используется также описанный выше метод удвоения и деления пополам шага. Главным преимуществом таких методов является их простота, так как для нахождения шагового множителя не требуется больших затрат. Такие методы имеет смысл использовать в случаях, когда решаются сравнительно простые задачи и число переменных невелико.

Среди методов первого порядка наиболее совершенным является *метод наискорейшего спуска* или *полношаговый градиентный метод*. Как видно из названия, в этом случае шаговый множитель определяется как полный, т.е. путем решения задачи одномерной минимизации (14.5). В данном случае она имеет вид

$$f(x_{k+1}) = f\left(x_k - t_k \nabla f(x_k)\right) = \min_{t \ge 0} f\left(x_k - t \nabla f(x_k)\right). \qquad (14.7)$$

Заметим, что одномерная минимизация осуществляется здесь не по всей числовой оси, а только на неотрицательной полуоси, так как направление итерационного перехода является заведомо релаксационным. Последовательность $\{f(x_k)\}$, построенная по методу наискорейшего спуска, обладает рядом свойств.

Если целевая функция определена, непрерывно дифференцируема и ограничена снизу, то $\lim\limits_{k \to \infty} \nabla f(x_k) = 0$. Если, кроме того, целевая функция выпукла, построенная последовательность сходится к точке минимума. Это замечание является существенным, поскольку в окрестности точки минимума непрерывно дифференцируемая функция является выпуклой.

Известно, что вектор градиента ортогонален касательной к линии уровня. При решении задачи одномерной оптимизации (14.7) происходит переход на линию уровня, которая является касательной к построенному антиградиенту. Поэтому следующий антиградиент (направление спуска) будет ортогонален текущему. Траектория спуска состоит из отрезков ортогональных прямых (рис. 14.5).

Если в выражении (14.6) величину t_k принять бесконечно малой, то при $t \to \infty$ получим соотношение

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x).$$

Это уравнение кривой, которая в каждой точке ортогональна линии уровня. Она называется *ортогональной траекторией*. Поэтому градиентные методы можно трактовать как методы построения приближенной ортогональной траектории.

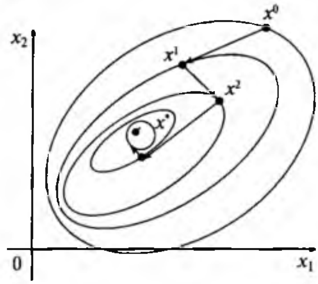


Рис. 14.5. Метод наискорейшего спуска

14.2.3. Овражные методы

Градиентные методы медленно сходятся в случаях, когда поверхности уровня целевой функции сильно вытянуты в каком-либо направлении. Говорят, что функция имеет «овражный» характер. Это приводит к тому, что небольшие изменения некоторых переменных приводят к большим изменениям значения функции (эти переменные характеризуют «склон оврага»), а вдоль других направлений функция меняется медленно («дно оврага») (рис. 14.6). Основная идея овражных методов заключается в том, что вначале делается попытка спуститься на дно оврага, а затем продолжить движение по дну к точке минимума.

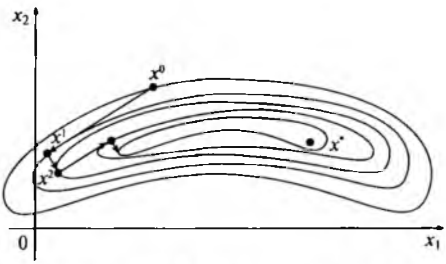


Рис. 14.6. Градиентный метод для овражной функции

Так, в *методе релаксации* переменные условно делят на «быстрые» и «медленные». Пусть в точке x_0 вычислены значения всех частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Задается достаточно малое число ε_1, Применяется метод покоординатного спуска с полным шагом, но лишь в направлении координат, для которых $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| > \varepsilon_1$. Длина шага будет небольшой. Сделав несколько шагов, как правило, удается спуститься на дно оврага. Затем выбирается достаточно большое число $\varepsilon_2 > 1$. Считая теперь, что $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| = 0$ для всех компонент, для которых $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| > \varepsilon_2$, применяется метод градиентов. При этом величина шага оказывается достаточно большой, а траектория спуска идет по дну оврага.

Еще один метод известен как метод *И.М. Гельфанда*[1]. В начале поиска задаются две близкие точки x_0 и y_0, из которых методом наискорейшего спуска делают несколько шагов, в результате получают две точки x_1 и y_1, расположенные на дне оврага. Эти точки определяют прямую, вдоль которой в сторону убывания функции делается большой шаг, называемый «овражным шагом». Так, если $f(x_1) < f(y_1)$, то

$$x_2 = x_1 + \lambda \frac{x_1 - y_1}{|x_1 - y_1|},$$

где λ — величина шага.

В окрестности точки x_2 выбирают точку y_2, и процесс повторяется. Величина овражного шага λ подбирается с учетом информации о целевой функции. Если шаг велик, возможен возврат на склон оврага. Этот эффект проявляется на крутых поворотах оврага. Если шаг слишком мал, то процесс поиска минимума замедляется, и смысл метода пропадает.

14.2.4. Методы второго порядка

Ранее рассмотренные градиентные методы для определения направления движения используют только первые производные, являясь методами первого порядка. В окрестности точки минимума частные производные малы, что приводит к необходимости делать неоправданно большое число шагов. Решить эту проблему можно путем применения вторых производных исследуемой функции.

Пусть функция f определена и дважды непрерывно дифференцируема. Пусть, начиная с некоторого начального приближения найдены точки x_0, x_1, ... x_k. Так как функция f дважды непрерывно дифференцируема, то квадратичная часть ее приращения $f(x) - f(x_k)$ в окрестности точки x_k имеет вид

---

[1] Гельфанд Израиль Моисеевич (1913—2009) — один из крупнейших математиков XX в., биолог, педагог и организатор математического образования; автор более 800 научных статей и около 30 монографий; основатель крупной научной школы.

$$F_k(x) = \left(\nabla f(x_k), (x - x_k)\right) + \frac{1}{2}\left(H(x_k)(x - x_k), (x - x_k)\right).$$

Здесь $H(x_k)$ — матрица вторых частных производных функции f в точке x_k (*матрица Гессе*).

Пусть квадратичная функция $F_k(x)$ имеет единственную точку минимума. Положим

$$F_k(x_{k+1}) = \min_{x \in R} F_k(x). \tag{14.8}$$

Это равенство и определяет правило построения последовательности приближений. Для решения задачи (14.8) возможно применение различных способов.

Необходимые условия минимума функции $F_k(x)$ имеют вид

$$\frac{\partial F_k(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или

$$\nabla f(x_k) + H(x_k)(x - x_k) = 0. \tag{14.9}$$

Таким образом, вектор x_{k+1} является решением системы линейных алгебраических уравнений (14.9).

Пусть матрица $H(x_k)$ невырождена. Тогда существует обратная ей матрица $\left(H(x_k)\right)^{-1}$. Из (14.9) получим

$$x_{k+1} = x_k - \left[H(x_k)\right]^{-1} \nabla f(x_k). \tag{14.10}$$

Последнее соотношение фактически определяет процесс решения методом Ньютона системы уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Поэтому такой метод второго порядка также называется *методом Ньютона*. Его реализация предполагает следующую последовательность действий:

Дано: $f(x)$, $x_0 \in R^n$, ε.

1) $k = 0$;

2) вычислить $\nabla f(x_k)$;

3) если $\left\|\nabla f(x_k)\right\| < \varepsilon$, то процесс завершен: можно считать, что $x^* = x_k$; иначе перейти к шагу 4.

4) вычислить $H(x_k)$;

5) решить систему уравнений $H(x_k)s_k = -\nabla f(x_k)$;

6) $x_{k+1} = x_k + s_k$; перейти к шагу 2.

При хорошем начальном приближении метод обладает квадратичной сходимостью. Однако наряду с отсутствием глобальной сходимости метод имеет и другие недостатки: для его реализации необходимо иметь аналитическое выражение для $f(x)$, а затем (на каждом шаге) вычислять градиент и матрицу Гессе. Кроме этого, решение системы уравнений на шаге 5 может быть сопряжено с большими вычислительными трудностями.

В целом метод Ньютона очень трудоемок. Его имеет смысл применять, если с помощью, возможно, грубых, но менее трудоемких методов найдено хорошее начальное приближение.

Существует достаточно много методов, которые являются усовершенствованными модификациями метода Ньютона. Поэтому изложенный выше вариант метода часто называют *классическим методом Ньютона*.

Пути совершенствования можно разделить на два направления. Так, в *модифицированном методе Ньютона* вводится шаговый множитель, и формула, задающая правило построения последовательности приближений, приобретает вид

$$x_{k+1} = x_k - t_k\left[H(x_k)\right]^{-1}\nabla f(x_k),$$

где t_k определяется как полный шаг.

Такая модификация усложняет метод, поскольку, кроме решения подзадачи отыскания направления итерационного перехода, необходимо на каждой итерации решать также задачу отыскания шагового множителя. Однако имеются и значительные преимущества по сравнению с классическим методом. Начальное приближение x_0 может быть произвольным, а также существенно ослабляются требования к свойствам функции f. Если матрица Гессе на каком-то шаге вырождена (или почти вырождена), делается шаг по методу наискорейшего спуска. Таким образом, диапазон применимости метода становится значительно шире. Заметим, что в модифицированном методе $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 1$, т.е. модифицированный метод в пределе превращается в классический. Поэтому имеется возможность, начиная с некоторой итерации, переключиться с модифицированного метода на классический.

Другое направление модификаций основано на различных способах приближенного вычисления обратной матрицы $\left(H(x_k)\right)^{-1}$, что заметно упрощает выполнение каждой итерации и расширяет область применения таких методов.

Правило построения последовательности приближений в таких модификациях имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - A_k \nabla f(x_k), \tag{14.11}$$

где A_k — симметричная квадратная матрица.

В ходе построения последовательности приближений эти матрицы все точнее аппроксимируют, в том или ином смысле, матрицы $(H(x_k))^{-1}$. Методы этой группы называются *квазиньютоновскими*. Эти методы заметно проще в реализации по сравнению с методом Ньютона, но мало чем уступают ему по эффективности.

Процесс вычисления матрицы A_k на очередном шаге и определяет конкретный метод. Приведем алгоритм одного из наиболее известных методов этого класса, метода *переменной метрики* (его также называют методом *Дэвидона — Флетчера — Пауэлла*).

Дано: $f(x)$, $x_0 \in R^n$, ε.

1) $k = 0$; $A_0 = 0$;

2) вычислить $g_k = \nabla f(x_k)$;

3) если $\|g_k\| < \varepsilon$, то процесс завершен: можно считать, что $x^* = x_k$; иначе перейти к шагу 4;

4) $s_k = -H_k \cdot g_k$;

5) найти t_k; $f(x_k - t_k s_k) = \min\limits_{t \geq 0} f(x_k - t s_k)$;

6) $g_{k+1} = \nabla f(x_k + t_k s_k)$; $x_{k+1} = x_k + t_k s_k$;

7) $\Delta g_k = g_{k+1} - g_k$; $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$;

8) $A_{k+1} = A_k - \dfrac{A_k \cdot \Delta g_k \cdot (\Delta g_k)^T \cdot A_k^T}{(\Delta x_k)^T \cdot A_k \cdot \Delta x_k} + \dfrac{\Delta x_k \cdot (\Delta x_k)^T}{(\Delta x_k)^T \cdot \Delta g_k}$;

9) перейти к шагу 2 с $k \to k + 1$.

Для этого метода доказано, что $\lim\limits_{k \leftarrow \infty} A_k = H^{-1}(x^*)$. То есть метод начинается как метод наискорейшего спуска, а затем стремится к методу Ньютона. Вычислительные затраты на реализацию меньше, чем у метода Ньютона. Кроме того, не требуется обращения матриц или решения систем уравнений. Метод обладает сверхлинейной сходимостью.

Для всех методов рассматриваемого класса возможна расходимость, в случае если целевая функции не является дважды непрерывно дифференцируемой. Вычислительные проблемы возможны также при применении недостаточно хороших алгоритмов одномерной оптимизации.

Из популярных квазиньютовских методов упомянем также *метод сопряженных направлений* (авторы Флетчер и Ривз), а также *метод Бройдена*. Подробнее о них можно прочитать в [3].

14.3. Методы поиска условного экстремума

При решении практических задач многие переменные не могут изменяться произвольно. Как правило, существуют ограничения на их величину. Эти ограничения могут быть заданы с помощью некоторых соотношений. Тем самым в пространстве R^n задается допустимая область D, а решение задачи оптимизации при наличии ограничений называется *условной оптимизацией*.

Итак, для функции $y = f(x)$, непрерывной в области $D \subset R^n$, найти значение $x^* \in D$ такое, что $f(x^*) \leq f(x)$ для $\forall x \in D$.

Для анализа и решения этой задачи существенным является метод задания области D. Рассмотрим случаи, когда D определяется при помощи системы уравнений или системы неравенств: пусть на R^n заданы дифференцируемые функции $g_1, g_2, \ldots, g_m$ $(m < n)$. В первом случае

$$D = \left\{x : x \in R^n,\ g_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\right\}. \qquad (14.12)$$

Если определить вектор-функцию $G(x) = \left(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)\right)$, то допустимую область можно задать в виде $D = \left\{x : x \in R^n, G(x) = 0\right\}$. Во втором случае

$$D = \left\{x : x \in R^n, g_i(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\right\}. \qquad (14.13)$$

14.3.1. Методы возможных направлений

Определение 14.3. *Вектор (направление) z в точке $x_0 \in D$ назовем **возможным** для задачи условной оптимизации, если малое перемещение в этом направлении уменьшает значение функции $f(x)$ и не выводит из допустимого множества D.*

Таким образом, если выполнить достаточно малый шаг s в возможном направлении z: $x_1 = x_0 + sz$, то $x_1 \in D$ и $f(x_1) < f(x_0)$. Делая последовательные шаги в возможном направлении, получим релаксационную последовательность, которая во многих случаях будет сходиться к решению задачи. Методы этого типа называются *методами возможных направлений*.

Напомним (см. главу 7), что ограничение с номером i называется *активным* в точке $x \in D$, если $g_i(x) = 0$. Если же $g_i(x) < 0$, ограничение называется *пассивным*. Множество индексов активных в точке x ограничений обозначается $I(x)$ (см. параграф 7.3).

Приведем без доказательства некоторые известные свойства возможных направлений.

1. Если направление z таково, что $(f(x_0), z) < 0$, то малое перемещение из точки x_0 в направлении z уменьшает значение функции $f(x)$.

2. Если $x_0 \in D$ и направление z таково, что $(g_i(x), z) < 0 \ \forall i \in I(x_0)$, то малое перемещение из точки x_0 в направлении z не выводит из допустимого множества.

Эти свойства определяют возможные направления z в очередной точке x_k. Среди этих направлений определим то, в котором целевая функция убывает быстрее всего. Определим множество активных в данной точке ограничений $I(x_k)$. Вычислим в этой точке градиент функции и градиенты активных ограничений. Сформулируем задачу:

$$\begin{aligned} &(f'(x_k), z) \to \min; \\ &(g_i'(x_k), z) \le 0, \ \forall i \in I(xk); \\ &z: -1 \le z_j \le 1, \ j = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{14.14}$$

Это задача линейного программирования, которая может быть решена, например, симплекс-методом. Ее решением является направление z_k, которое для точки x_k будет возможным направлением наискорейшего спуска. Делается шаг в этом направлении, получается следующая точка x_{k+1}. Величина шага выбирается любым из рассмотренных методов.

К сожалению, решение задачи (14.14) не всегда дает возможное направление. Причиной этого являются нестрогие неравенства в (14.14). Задачи же со строгими неравенствами часто оказываются неразрешимыми, поскольку точная нижняя грань значений функции f часто достигается на границе множества D. Эту трудность можно обойти разными способами. Например, на каждом шаге можно «возвращать» точку в множество D с помощью процедуры «проектирования». В следующем разделе описывается один из подходов к проектированию.

14.3.2. Метод проектирования градиента

Градиентные методы безусловной минимизации достаточно эффективны, однако для решения условно-экстремальных задач они непригодны. Чтобы их использовать, необходимо внести в них какие-либо механизмы учета ограничений на область изменения переменных. Это достигается различными способами и образуется множество модификаций градиентных методов условной минимизации. Среди них метод проектирования градиента, метод условного градиента, методы возможных направлений, линеаризации и другие методы.

Опишем метод проектирования градиента.

Непосредственное применение градиентного метода невозможно в силу того, что очередное приближение x_k может не принадлежать допустимой области. Чтобы этого избежать, будем проектировать каждый член последовательности $\{x_k\}$ на множество D (рис. 14.7). Сами члены последовательности будем искать с помощью соотношения (14.6).

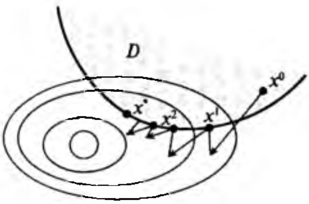


Рис. 14.7. Метод проекции градиента

Проекцией точки на множество будем называть точку $\bar{x}$, удовлетворяющую условиям: $\|x-\bar{x}\| = \min\limits_{y \in D}\|x-y\|$.

Если проектируемая точка принадлежит множеству D, она совпадает со своей проекцией.

Если множество D ограничено и замкнуто, то проекция точки на множество существует и единственна. В остальных случаях это условие может быть нарушено.

Задача отыскания проекции в свою очередь является задачей минимизации функции $H(x) = \|x-y\|^2$ при каждом фиксированном значении x. Эффективность решения этой задачи во многом обеспечивает успешность применения метода. В некоторых частных случаях, например когда допустимая область есть параллелепипед, шар, гиперплоскость или полупространство, задача проектирования точки просто решается в явном виде.

В общем случае возможен такой подход. На каждом шаге итерационного процесса множество D заменяют на некоторое D_k, для которого проекция ищется просто.

Метод проекции градиента имеет смысл применять только к тем задачам условной минимизации, у которых допустимые множества являются «простыми» с точки зрения проектирования.

14.3.3. Метод штрафных функций

Метод штрафных функций относится к группе методов, в которых решение задачи поиска условного экстремума сводится к решению последовательности задач поиска безусловного экстремума.

Пусть D — некоторое множество в R^n. Функцию $\Phi(x)$, назовем *штрафной функцией* множества D, если $\Phi(x) = 0$, $\forall x \in D$, и $\Phi(x) > 0$, $\forall x \notin D$. Можно привести примеры большого количества функций, удовлетворяющих этому определению.

При решении задач условной оптимизации используются штрафные функции для допустимого множества. Если множество D задано системой уравнений (14.12), часто используются следующие штрафные функции:

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x)$$

и

$$\Phi_2(x) = \sum_{i=1}^{m} |g_i(x)|.$$

Если же множество D задано системой неравенств (14.13), используется следующий подход.

Пусть $f(x)$ — функция, определенная на R^n. Введем функцию

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), \text{если } f(x) \geq 0; \\ 0, \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

В таких обозначениях допустимое множество можно задать при помощи системы уравнений $D = \{x : x \in R^n, g_i^+(x) = 0, i = 1, 2, \ldots, m\}$. Тогда можно использовать штрафные функции

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(g_i^+(x)\right)^2$$

и

$$\Phi_2(x) = \sum_{i=1}^{m} g_i^+(x).$$

Рассмотрим функцию

$$F(x, r) = f(x) + rG(x),$$

где $r > 0$ (коэффициент штрафа).

Очевидно, что исходя из определения штрафной функции $F(x, r) = f(x)$, $\forall x \in D$, и $F(x, r) > f(x)$, $\forall x \notin D$.

Для функции $F(x, r)$ при фиксированном значении $r = \bar{r}$ можно решить задачу поиска минимума. Пусть он достигается в точке $x(\bar{r})$:

$$F\left(x(\bar{r}), \bar{r}\right) = \min_{x \in R^n} F(x, r). \tag{14.15}$$

При достаточно больших значениях параметра r можно ожидать, что значение $x(\bar{r})$ будет близким к решению исходной задачи. Это и является основой метода штрафных функций.

Однако практическое применение такого метода связано с рядом проблем. В первую очередь невозможно заранее найти значение параметра r, которое обеспечивало бы необходимую точность приближения. Кроме того, решение задачи (14.15) само по себе является вычислительно сложным. При малых значениях r влияние штрафного слагаемого невелико, но полученная точка не принадлежит допустимому множеству. Чем больше r, тем ближе $x(\bar{r})$ к допустимому множеству, но тем сложнее рельеф функции $F(x, r)$, тем больше вычислительных проблем при решении задачи безусловной минимизации.

Поэтому вначале задают небольшой коэффициент штрафа r_0, решается задача безусловной оптимизации (14.15), определяется точка $x(r_0)$. Теперь выбирается новый коэффициент $r_1 > r_0$, находится решение новой задачи, при этом в качестве начального приближения принимается $x(r_0)$. Таким образом, строится последовательность $\{r_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$, такая, что $r_{k+1} > r_k > 0$, для каждого члена этой последовательности для функции $F_k(x) = F(x, r_k) = f(x) + r_kG(x)$ решается задача ее минимизации (14.15). Эти решения $\{x_k = x(r_k)\}$, $k = 0, 1, \ldots$, образуют последовательность, которая приближается к решению x^* исходной задачи условной оптимизации.

Отметим, что в общем случае точки x_k не принадлежат допустимому множеству. Таким образом, приближение к решению происходит извне множества D, а приближение к минимальному значению f^* осуществляется снизу, т.е. $f^* > f(x_k)$. Поэтому такой метод штрафных функций называют методом *внешнего штрафа* (внешней точки).

В ряде случаев выполнение ограничений является обязательным, т.е. выход из допустимого множества запрещен. В таких случаях применяют *метод внутреннего штрафа*. Суть его такова.

Для допустимого множества вида (14.13) функция штрафа строится так: $B(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}$. Для всех точек допустимого множества она положительна, а при приближении к границе области резко возрастает. Рассмотрим функцию

$$Z(x, r) = f(x) + rB(x),$$

где $r > 0$ (коэффициент штрафа).

Если x принимает допустимые значения, то $Z(x, r)$ принимает значения, которые больше соответствующих значений $f(x)$, и разность можно уменьшить за счет выбора величины r. При этом, если x принимает значения, которые хотя и являются допустимыми, но близки к границе области D, и по крайней мере одна из функций $\varphi_i(x)$ близка к нулю, значения функции $B(x)$ и, следовательно, значения функции $Z(x, r)$ станут очень велики. Следовательно, если поиск безусловного минимума функции $Z(x, r)$ при фиксированном значении r начинается из допустимой точки, то полученное решение будет находиться внутри допустимой области. Чем меньше значение r, тем ближе полученное решение к искомому. Решение задачи безусловной оптимизации само по себе является сложным, и достичь высокой точности не всегда просто. Кроме того, чем меньше значение r, тем более сложным становится рельеф функции $Z(x, r)$, тем хуже обусловлена задача. Поэтому и при использовании внутренних штрафов задача решается в несколько этапов. Вначале выбирается заметное, не очень малое значение r_0. В качестве x_0 выбирается внутренняя точка. Отметим, что в ряде случаев выбор хоть одной внутренней точки бывает не простым. Решим полученную задачу одним из известных методов, получим x_1, которую примем за начальную при решении следующей задачи с $r_1 < r_0$. Таким образом, строится последовательность $\{x_k = x(r_k), k = 0, 1, \ldots\}$, которая приближается к решению x^* исходной задачи условной оптимизации.

Приведем простой пример, позволяющий проиллюстрировать применение метода внешнего штрафа.

Пример 14.3. Пусть необходимо найти минимум функции $f(x) = kx$ при ограничении $\varphi(x) = x - b > 0$. Перепишем ограничение в виде: $b - x < 0$. Рассмотрим функцию

$$Z(x, r) = kx - \frac{r}{b - x}.$$

Для каждого фиксированного r будем искать значение x, доставляющее минимум $Z(x, r)$:

$$\frac{dZ}{dx} = k - \frac{-r}{(b - x)^2} = 0 \Rightarrow x = b \pm \sqrt{\frac{r}{k}}.$$

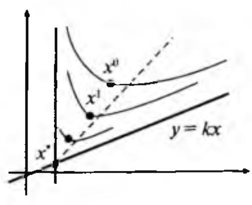


Рис. 14.8. Метод внутреннего штрафа

Для $r_0 > r_1 > \ldots > r_k$ соответствующие значения x_k образуют релаксационную последовательность, сходящуюся к условному минимуму (рис. 14.8).

Контрольные вопросы и упражнения

1. Опишите прямые методы одномерной оптимизации.
2. Чем отличается метод половинного деления от метода золотого сечения? Можно ли применять какой-либо из этих методов для поиска минимума функции многих переменных?
3. Обладает ли метод Ньютона поиска минимума функции одной переменной глобальной сходимостью?
4. Для уравнения $e^{3x} + 7x + 5 = 0$ отделите корень и определите количество шагов по методу половинного деления, необходимое для достижения точности 10^{-4}.
5. Найдите минимум функции $f(x) = 2x^2 + e^{-x}$ методом деления отрезка пополам и методом золотого сечения. Сравните необходимое число итераций.
6. Для уравнения $\sin 2x + 2x - 1 = 0$ отделите корень и решите его методом итераций с точностью не ниже 10^{-4}.
7. Опишите метод градиента с постоянным шагом для минимизации функции нескольких переменных. Приведите геометрическую интерпретацию для случая двух переменных.
8. В каких случаях применение метода наискорейшего спуска неэффективно?
9. В каком случае метод наискорейшего спуска приведет к минимуму функции за один шаг? Приведите пример.
10. Требуется найти минимум функции $u = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ из начальной точки (0,5; 0,5) с точностью 0,001. Решите задачу методом покоординатного спуска и методом наискорейшего спуска. Сравните требуемое число итераций.
11. Минимизируйте функцию $\frac{x^2}{2} + 5\cos x$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ методом наискорейшего спуска.
12. Минимизируйте функцию $\frac{1}{\ln x} + x^2$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ методом наискорейшего спуска.
13. Чем вызвана необходимость применения методов оптимизации второго порядка? Опишите известный вам метод.
14. Опишите метод штрафных функций для поиска условного минимума функции многих переменных.
15. Минимизируйте функцию $f(x, y) = (x + 2)^2 + 9(y - 1)^2$ при ограничении $2x - y = 1$ методом штрафных функций.
16. Требуется найти минимум функции $u = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ при ограничении $(x_1^2 + x_2^2) \leq 0,64$. Решите задачу методом штрафных функций.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава 2

5. $\lambda_A = 6$, $x_A = t(0, 12, 6)^T$, $t > 0$.

6. $\lambda_A = 15$, $x_A = t(1, 1,)^T$, $t > 0$.

7. $\lambda_A = 15$, $x_A = t(49, 64, 62)^T$, $t > 0$.

8. $x = (14, 15)^T,\ A = \begin{pmatrix} 0{,}214 & 0{,}467 \\ 0{,}429 & 0{,}333 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 2{,}06 & 1{,}44 \\ 1{,}32 & 2{,}43 \end{pmatrix}.$

14. Является.

Глава 3

5. $\begin{cases} f = 25x + 45y \to \min; \\ 2x + 23y \ge 2; \\ 73x + 91y \ge 73; \\ x \ge 0,\ y \ge 0, \text{ где } x,\ y \text{ — масса яблок и апельсинов.} \end{cases}$

9. $\begin{cases} z = -2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_5 \to \max; \\ x_1 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 15; \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_5 + x_7 = 10; \\ 2x_1 + 5x_2 - 42x_3 + 6x_4 - x_8 = 34; \\ x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, 8. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 27x_3 - 17x_4 + 30 \to \min; \\ -6x_3 + 5x_4 \le 7; \\ -9x_3 + 6x_4 \le 10; \\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \end{cases}$

18. $f_{\min} = 2$;

21. а) $f_{\min} = f(2, 4) = 8$, $f_{\max} = \infty$; б) $f_{\max} = f(12, 13) = 37$, $f_{\min} = f(7, 5) = 19$.

22. $f_{\max} = f(0, 9, 0, 12) = 40$, $f_{\min} = f(X^*) = 16$, где $X^* = (6 + 2t, t, 3 - 3t, 0)$, $t \in [0, 1]$.

26. $f_{\min} = f(0, 5, 19, 0, 2) = -15$.

30. а) $z_{\min} = z(0, 12, 34, 0, 8) = -30$; б) $z_{\max} = z(0, 11, 31, 0, 2) = 16$.

Глава 4

3. $\begin{cases} T = 8y_1 + 3y_2 - 3 \to \min; \\ y_1 + y_2 \ge 2; \\ -4y_1 + y_2 = -4; \\ 3y_1 + 10y_2 \le 1; \\ y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0. \end{cases}$

9. $T_{\min} = T(3, 1, 0) = 51.$

11. $f_{\min} = f(0, 4, 24, 0, 6) = -34,\ T_{\max} = T(-6, 0, 0) = -34.$

12. $z_{\max} = z(10, 0, 2, 0, 0) = T(11, 10) = 642.$

16. $z_{\max} = z(1, 0, 0, 3, 1) = 11.$

17. $f_{\max} = f(2, 0, 11) = g_{\min} = g(0, 9, 5) = 82.$

Глава 5

9. $z_{\max} = z(3, 4) = 26.$

10. $z_{\max} = z(2, 2) = 29.$

Глава 6

6. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 100 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix},\ z(X^*) = 1880.$

7. $X^* = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 35 \\ 75 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ z(X^*) = 780.$

8. $X^* = \begin{pmatrix} 75 & 35 & 40 & 0 \\ 0 & 110 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 60 \end{pmatrix},\ z(X^*) = 3145.$

9. $X^* = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 0 & 70 \\ 0 & 80 & 0 & 25 \\ 40 & 0 & 55 & 20 \end{pmatrix},\ z(X^*) = 3160.$

Глава 7

6. $z_{\min} = z(8, 6) = 832.$

Глава 11

7. Допустимое множество — четырехугольник $OABC$, где $O(0, 0)$, $A(0, 4)$, $B(2, 3)$, $C(3, 0)$. Множество недоминируемых решений — отрезок $[0, 4t]$, $t \in [0, 1]$.

8. Множество недоминируемых решений — отрезок $[7 - 3t, 5 + 3t]$, $t \in [0; 1]$.

9. $x^* = \left(\frac{76}{17}, \frac{162}{17}\right).$

Глава 12

7.

	1	2	3	4
I	0	0	0	640
II	10000	4000	1600	0

$z_0^*(s_0) = 11552.$

8.

$\dot{u}_1$	$\dot{u}_2$	$\dot{u}_3$	$\dot{z}_0$
4	0	0	20

Глава 13

4. Нижняя цена игры — 3; верхняя цена игры — 5.

6. Стратегии (x_1, y_2); цена игры $v_A = 4$.

8. x_2 у первого игрока, y_3 у второго игрока.

10. $x^* = \left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$; $y^* = \left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$; $v_A = 4$.

13. 100.

15. Нет.

17. (s_1, S_1).

20. Любая пара стратегий является равновесием по Нэшу.

24. $q_1 = q_2 = a/3$.

25. Лучший ответ: $q_1(q_2) = (a - c_1 - q_2)/2$, $q_2 = (a - c_2 - q_1)/2$. Равновесие $\left((a - 2c_1 + c_2)/3, (a - 2c_2 + c_1)/3\right)$.

26. Выпуск $q_1 = 0$, фирма уходит с рынка.

27. Не изменится. Суммарный объем продаж $Q = 2(a - \bar{c})/3$ по цене $p = (a + 2\bar{c})/3$, где $\bar{c} = (c_1 + c_2)/2$.

28. Выпуск $q_i = (a - c)/(n + 1)$ для всех фирм, прибыль $\pi_i = (a - c)/$ $/(n + 1)^2$. Суммарный выпуск $Q = q_1 + ... + q_n = n(a - c)/(n + 1) \to a - c$, цены $p = a/(n + 1) - nc/(n + 1) \to c$.

32. Вторая фирма устанавливает цену $p_2 = c_1$ и захватывает рынок, получая прибыль $c_1(a - c_1)$. Разумеется, чтобы не подвергаться критике, следует утверждать, что цена должна быть чуть меньше, чем c_1.

33. Нет, не является. Проверьте, что $K_1 + K_2$ меньше спроса при указанных ценах. Объясните, почему тогда, по крайней мере, малое увеличение цены не изменит спрос и, следовательно, увеличит прибыль.

34. $p_1 = (2aB + ab + bBc_2 + 2B^2c_1)/(4B^2 - b^2)$, $p_2 = (2aB + ab + bBc_1 +$ $+ 2B^2c_2)/(4B^2 - b^2)$.

36. $\pi_2 > \pi_1 > \pi_4 > \pi_3$.

44. Все выбирают 0.

45. 1/4, 3/4.

46. Да.

48. $z = 0$.

49. $x^{*}=\dfrac{p_2-p_1}{2k(1-z_1-z_2)}+\dfrac{a+1-b}{2}$, $\pi_1=(p_1-c)\left(\dfrac{p_2-p_1}{2k(1-z_1-z_2)}+\dfrac{1+z_1-z_2}{2}\right)$,
$\pi_2=(p_2-c)\left(\dfrac{p_1-p_2}{2k(1-z_1-z_2)}+\dfrac{1+z_2-z_1}{2}\right)$, $\pi_1^{*}=c+k(1-z_1-z_2)\left(1+\dfrac{z_1-z_2}{3}\right)$,
$\pi_2^{*}=c+k(1-z_1-z_2)\left(1+\dfrac{z_2-z_1}{3}\right)$, $\dfrac{\partial\pi_1}{\partial z_1}<0$, $\dfrac{\partial\pi_2}{\partial z_2}<0$, $z_1=0, z_2=0$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Акулич И.Л.* Математическое программирования в примерах и задачах. М. : Высшая школа, 1986.
2. *Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П.* Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения. М. : ИНФРА-М. 2003.
3. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М. : Наука, 1984.
4. *Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.* Численные методы в задачах и упражнениях. М. : Высшая школа, 2000.
5. *Беллман Р., Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления. М. : Наука, 1969.
6. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. Т. 1—3. М. : Мир, 1972—1973.
7. *Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркина Г.И.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. М. : МГТУ им. Баумана, 2001.
8. *Васин А.А., Морозов В.В.* Теория игр и модели математической экономики. М. : МАКС Пресс. 2008.
9. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. М. : Высшая школа, 2001.
10. *Вильямс Дж.Д.* Современный стратег, или Букварь по теории стратегических игр. М. : Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2009.
11. *Винюков И.А., Попов В.Ю., Пчелинцев С.В.* Линейная алгебра. Ч. 4 : Линейное программирование : учеб. пособие для бакалавров. М. : Финакадемия, 2009.
12. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М. : Наука, 1985.
13. *Гасс С.* Линейное программирование. М. : Физматлит, 1961.
14. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. М. : ИЛ, 1963.
15. *Гранберг А.Г.* Математические модели социалистической экономики. М. : Экономика, 1978.
16. *Денежкин И.Е.* Численные методы. Курс лекций. М. : Финакадемия, 2010.
17. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. Киев : Виша школа, 1975.
18. *Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.* Линейное и выпуклое программирование. М. : Наука, 1967.
19. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М. : Айрис-Пресс, 2002.
20. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М. : Наука, 1980.
21. *Киреев В.И., Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах и задачах. М. : Высшая школа, 2008.
22. *Киселев В.В.* Оптимальное управление в экономике. М.: Финакадемия, 2009.
23. *Колемаев В.А.* Математические методы и модели исследования операций : учеб. М. : ЮНИТИ, 2008.
24. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М. : Дело, 2002.
25. *Кремер Н.Ш.* Исследование операций в экономике. М. : ЮНИТИ, 1996.
26. *Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О.* Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом. М. : Дело, 2001.

27. *Леонтьев В.В.* Экономические эссе. М. : Политиздат, 1990.
28. *Маленво Э.* Лекции по микроэкономическому анализу. М. : Наука, 1984.
29. *Малыхин В.И.* Высшая математика. М. : Инфра-М, 2009.
30. *Охорзин В.* Оптимизация экономических систем. М. : Финансы и статистика. 2005.
31. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи принятия решений. М. : Машиностроение, 1998.
32. *Подиновский В.В.*, *Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М. : Физматлит, 2007.
33. *Салуквадзе М.Е.* Об оптимизации векторных функционалов // Автоматика и телемеханика. 1979. № 9.
34. *Самарский А.А.* Введение в численные методы : учеб. пособие для вузов. М. : Наука, 1987.
35. *Солодовников А.С.* Введение в линейную алгебру и линейное программирование. М. : Просвещение, 1966.
36. *Солодовников А.С.*, *Бабайцев В.А.*, *Браилов А.В.*, *Шандра И.Г.* Математика в экономике. Ч. 1—3. Финансы и статистика, 2011.
37. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций. М. : ИД «Вильямс», 2005.
38. *Фельдбаум А.А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. М. : Физматлит, 1966.
39. Экономико-математические методы и прикладные модели / под ред. В.В. Федосеева М. : ЮНИТИ, 1999.
40. *Ягодовский П.В.* Функции нескольких переменных : учеб. пособие для бакалавров. М. : Финакадемия, 2009.
41. *Axelrod R.* The evolution of cooperation. Basic Books, 2006.
42. *Combes P.-P.*, *Mayer T.*, *Thisse J-F.* Economic Geography : The Integration of Regions and Nations. Princeton University Press, 2008.
43. *Gibbons R.* Game theory for applied economists. Princeton University Press. 2008.

Тематическая подборка издательства «КНОРУС»