Г.И. Просветов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЛОГИСТИКЕ

задачи и решения

издание 3-е, переработанное и дополненное

Альфа-Пресс

Г. И. Просветов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЛОГИСТИКЕ:

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Учебно-практическое пособие

3-е издание, дополненное

Москва
Альфа-Пресс

УДК 510.6
ББК 22.12
П 82

П 82 **Просветов Г. И.**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЛОГИСТИКЕ: ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ: Учебно-практическое пособие. 3-е изд., доп. — М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2017. — 304 с.

ISBN 978-5-94280-630-9

Цель этой книги — научить основным математическим методам в логистике и познакомить с опытом в этой области.

В настоящем учебно-практическом пособии на простых примерах раскрываются следующие разделы логистики: транспортная задача, задача о назначении, задача о кратчайшем пути, коммуникационная сеть минимальной длины, максимальный поток, задача коммивояжера, задача единого среднего, задача охвата, основные понятия теории графов, задачи размещения производства, размещение объектов сервиса, анализ размещения завода и складов, факторы производства и затраты, дерево решений, принятие решений, временные ряды, экспоненциальное сглаживание, контролируемый прогноз, сетевое планирование и управление, балансировка линий сборки, статистический контроль качества, управление запасами, имитационное моделирование, оценка запасов, предупредительное обслуживание оборудования, планирование потребности в материалах, краткосрочные графики, система «точно в срок», ABC-анализ, системы массового обслуживания, обучаемость в производстве, лизинг, методы ценообразования, складирование и грузопереработка, перевозка, каналы распределения, оптовая и розничная торговля, излишки, кодирование, методы экспертных оценок, оценка поставщиков, обоснование решения «производить или покупать», конкурентные преимущества, принятие краткосрочных решений, фьючерсные контракты.

Для преподавателей и студентов экономических специальностей высших учебных заведений, специалистов в области логистики.

УДК 510.6
ББК 22.12

ISBN 978-5-94280-630-9

9 785942 806309

Предисловие

> ...Не существует какой-то одной, самой лучшей модели даже для конкретной ситуации. Логистики должны оценить несколько моделей и отыскать одну, дающую приемлемые результаты в течение длительного периода, хотя эта модель может и не быть оптимальной.
>
> М. Линдерс, Х. Фирон

В настоящее время существует ряд обстоятельных руководств по логистике, предназначенных для студентов высших учебных заведений экономического профиля. Но, по мнению автора данного пособия, всем им присущ один существенный недостаток — это книги «описательного жанра». Кроме названий различных методов, самых общих слов и всевозможных классификационных таблиц и схем читатель ничего там и не обнаружит. Поэтому ощущается потребность в пособии, которое на простых и конкретных примерах способно показать читателю со скромной математической подготовкой весь арсенал современных методов логистики. Одна их попыток решить эту задачу — перед вами, уважаемый читатель. Что же вошло в книгу?

Из первой главы читатель узнает, зачем нужна логистика. Материал второй главы (основные понятия теории графов) можно рассматривать как подготовительный материал, необходимый для понимания обсуждаемого математического аппарата. О факторах производства и затратах говорится в третьей главе. Задачи размещения производства рассмотрены в четвертой главе. Тема пятой главы — размещение объектов сервиса.

Следующие шесть глав «отданы» задачам дискретной оптимизации (кратчайший путь, коммуникационная сеть минимальной длины, максимальный поток, задача коммивояжера, задача единого среднего, задача охвата).

Способы решения транспортной задачи и задачи о назначениях читатель найдет в двенадцатой, тринадцатой и четырнадцатой главах, а после изучения пятнадцатой главы он сможет проводить анализ размещения завода и складов.

Правила принятия решений рассмотрены в шестнадцатой и семнадцатой главах. Способы построения прогнозов (временные ряды, экспоненциальное сглаживание, контролируемый прогноз) показаны в восемнадцатой, девятнадцатой и двадцатой главах.

Одна из центральных тем книги — сетевое планирование и управление (глава двадцать один). Как провести балансировку линий сборки, показано в двадцать второй главе. Из двадцать третьей главы читатель узнает о проведении статистического контроля качества.

Управление запасами — это тема двадцать четвертой главы. В двадцать пятой главе изучается имитационное моделирование. Как оценить запасы, показано в двадцать шестой главе. Как часто проводить предупредительное обслуживание оборудования? Ответ на этот вопрос читатель найдет в двадцать седьмой главе. В двадцать восьмой главе показаны способы построения краткосрочных графиков.

Планирование потребности в материалах — это тема двадцать девятой главы. В тридцатой главе рассмотрена система «точно в срок». Как проводить АВС-анализ, показано в тридцать первой главе. О системах массового обслуживания идет речь в тридцать второй главе. Тема тридцать третьей главы — обучаемость в производстве. Из тридцать четвертой главы читатель узнает о лизинге. Методы ценообразования анализируются в тридцать пятой главе. Складирование и грузопереработка — это тема тридцать шестой главы. В тридцать седьмой главе речь идет о перевозке.

О каналах распределения читатель узнает из тридцать восьмой главы. Оптовая и розничная торговля — это тема тридцать девятой главы. Об излишках говорится в сороковой главе.

Кодированию посвящена сорок первая глава. Методы экспертных оценок изучаются в сорок второй главе. Оценка поставщиков проводится в сорок третьей главе. Обоснование решения «производить или покупать» — это тема сорок четвертой главы.

С конкурентными преимуществами читатель познакомится в сорок пятой главе. О принятии краткосрочных решений идет речь в сорок шестой главе. Фьючерсные контракты — это тема сорок седьмой главы.

Весь материал разбит на главы, а главы — на параграфы. Каждый параграф — это отдельная тема. В начале параграфа приводится необходимый минимум теоретических сведений, затем подробно разбираются модельные примеры. Показано, как с помощью встроенных функций и надстроек «Пакет анализа», «Поиск решения» пакета Excel можно избежать долгих и утомительных вычислений. После каждого примера приводится задача для самостоятельного решения.

Ответы ко всем задачам помещены в конце книги. Пособие также содержит программу курса и задачи для контрольной работы.

За основу пособия принят материал курсов, читаемых автором в Российской академии предпринимательства. Всем студентам, прослушавшим эти курсы, автор выражает благодарность за продуктивную совместную работу.

Автор выражает искреннюю признательность В. М. Трояновскому за полезные замечания, способствовавшие улучшению книги.

Автор

Глава 1

ЧТО ТАКОЕ ЛОГИСТИКА

Логистика — это вид деятельности, связанный с передвижением товаров, услуг и информации между экономическими субъектами. Логистика позволяет получить ответы на те вопросы, с которыми предприятие постоянно сталкивается в процессе своей деятельности.

Самый важный вопрос — это что производить самим, а что закупать. Также нужно решить, будет ли предприятие приобретать стандартную продукцию или имеющееся на рынке сырье вместо особой продукции для потребностей конкретного заказа.

При этом возникает проблема качества товаров и услуг. Высокое качество конечной продукции необходимо для поддержания и роста доли на рынке. Производство продукции «с первого раза» гораздо эффективнее по стоимости, чем внесение корректив после выяснения фактов брака. Требуются программы контроля качества для наблюдения за производственным процессом с целью внесения необходимых корректив до того, как будет выпущена бракованная продукция. В этой ситуации на помощь приходит статистический контроль качества.

При проведении закупок необходимо решить, когда закупать, сколько всего закупать и сколько закупать за одну поставку. Ответы на эти вопросы дает управление запасами. При закупке сырья существует возможность фьючерсов и хеджирования.

Любое предприятие следует неким специфическим стратегиям цен. Выбор такой стратегии требует широкого применения анализа стоимости, анализа расходов и интенсивных переговоров. Сокращение расходов возможно при использовании долгосрочной транспортной стратегии.

Отвечая на вопрос, где покупать, предприятию предстоит сделать выбор между местными, региональными, национальными и международными источниками снабжения; между крупными и мелкими поставщиками; между одним и несколькими источниками снабжения. Для приобретения основного сырья и компонентов необходимо использование не менее двух поставщиков. Но такое дробление лишает возможности получения оптовой скидки. К тому же использование единственного источника снабжения может снизить административные расходы, связанные с закупками.

Для ответа на вопрос, как покупать, существует множество вариантов. Это переговоры, тендеры, системы открытых заказов, системные контракты, совместные закупки, долгосрочные контракты. Обычно на выбор той или иной стратегии снабжения влияют общие организационные цели и стратегии предприятия, а также рыночные условия как в настоящем, так и в будущем.

Логистика отвечает за прохождение материального потока (то есть товаров и услуг) через *цепь поставок* — ряд видов деятельности и предприятий, через которые проходят материалы во время своего перемещения от поставщиков начального уровня до конечного потребителя.

Другими словами, логистика — это управление цепью поставок, которое обеспечивает обслуживание высокого качества с низкими затратами. Сюда входят более быстрая доставка грузов, низкие затраты, небольшие отходы, оперативное реагирование на запросы потребителей, высокая продуктивность, низкий уровень запасов, отсутствие повреждений, небольшое число ошибок, хорошее отношение персонала к работе и т. д.

Без логистики никакие материалы не перемещаются, никакие операции не выполняются, никакие продукты не доставляются и никакие потребители не обслуживаются. Логистика оказывает значительное влияние на время выполнения заказов, надежность и другие параметры обслуживания потребителей. Она определяет оптимальные размеры элементов инфраструктуры и места их размещения.

Логистика состоит из ряда взаимосвязанных видов деятельности, которые начинаются со снабжения в начале выполнения операций и заканчиваются физическим распределением продукции. Это одна из областей, которую удобно передавать для выполнения *посредникам* — специализированным предприятиям, предлагающим ассортимент требуемых услуг.

Выделяют три направления развития логистики. Для *«тощей» логистики* характерны анализ операций и системное удаление всех действий, перемещений, времени, материальных и других ресурсов, приводящих к возникновению отходов. Это позволяет существенно повысить показатели деятельности предприятия.

Второе направление — это *динамичная логистика*, уделяющая основное внимание потребителям. Она предоставляет услуги на заказ и оперативно реагирует на изменяющиеся требования потребителей.

Интеграция цепей поставок — это третье направление развития логистики. Для достижения своих целей предприятия должны тесно сотрудничать с другими участниками цепи поставок.

В идеале логистика должна стремиться к тому, чтобы одновременно иметь три вышеназванные характеристики: отсутствие «жира», динамизм и интегрированность.

Общие логистические издержки содержат затраты на перевозку, на складирование, на управление запасами, на упаковывание, на обработку информации и другие накладные расходы логистического характера. При системном подходе к логистике, когда все взаимосвязанные логистические виды деятельности выполняются согласованно, сокращение затрат на один вид деятельности ведет к снижению общих логистических издержек, хотя затраты на другой вид деятельности могут и увеличиться.

Логистика должна постоянно совершенствоваться, то есть необходим постоянный поиск более совершенных способов логистической деятельности. В прошлом логистике не уделяли достаточного внимания. Сегодня же логистика находится в центре процесса принятия решения, оказывая долгосрочное влияние на все операции и общие показатели.

Каждое предприятие разрабатывает свою собственную *логистическую стратегию*, которая состоит из всех стратегических решений и планов, связанных с управлением цепью поставок. Существуют две базовые логистические стратегии: «тощая» и динамичная.

Цель *«тощей» логистики* — минимизировать общие логистические издержки, гарантируя при этом приемлемый уровень обслуживания потребителей (то есть производство той же или сопоставимой продукции более дешево).

Цель *динамичной стратегии* — обеспечить высокое качество обслуживания потребителей, оперативно реагируя на появление новых или на изменение прежних условий (то есть выпуск продукции, которую потребители не могут получить у других поставщиков). Динамичная стратегия сфокусирована на потребителях.

Конечно, на практике нет никакой разграничительной линии между «тощей» и динамичной стратегиями. Поэтому предприятию вовсе не нужно выбирать какую-то одну из этих стратегий в ущерб другой. Никакой единой «лучшей» стратегии просто не существует.

Логистическая стратегия должна соответствовать целям предприятия. При ее разработке следует учесть факторы, влияющие на логистику, но которыми логистика не может управлять. Это потребители, рыночные условия, экономические условия (темпы инфляции, темпы роста, объем валового внутреннего продукта), конкуренты, правовые ограничения, акционеры (доход на инвестиции), социальные и политические условия.

Также при разработке логистической стратегии нужно учесть факторы, которыми предприятие может управлять. Это сотрудники, финансы, сооружения, маркетинг, поставщики, технологии.

Стратегии только тогда становятся эффективными, когда они реализованы. Поэтому всегда необходимо рассматривать практические следствия любых выбираемых приемов. При переходе к реализации логистической стратегии следует сконцентрировать усилия на четырех областях: обслуживании потребителей, размещении элементов инфраструктуры, управлении запасами и транспорте.

Предприятие должно решить, с какими типами посредников оно будет иметь дело (то есть кто будет поставщиками и потребителями в цепи поставок), где должны располагаться склады, какая работа будет выполняться в логистических центрах, какие потребители будут обслуживаться из каждого центра, виды транспорта, скорость доставки, какова *ширина цепи поставок* (то есть число параллельных маршрутов, по которым может перемещаться продукция) и т. д.

Удлинение и расширение цепи поставок приводит к повышению качества обслуживания, но сопровождается ростом затрат и снижением контроля со стороны производителя. К сожалению, не существует «лучшего» варианта, и приходится выбирать компромиссный вариант, в наибольшей степени соответствующий заданным целям логистической стратегии.

Из-за постоянного изменения внешних и внутренних факторов в логистическую стратегию приходится постоянно вносить коррективы. Крупные изменения могут оказаться для предприятия очень разрушительными. Поэтому на практике гораздо чаще встречается *непрерывное совершенствование* (то есть серия небольших корректив). Такой подход гарантирует совершенствование логистической системы.

Однако в случае плохой логистической системы не следует тратить время на отыскание небольших улучшений, а следует отбросить всю прежнюю систему и разработать новую. Вполне возможно реализовать ряд крупных изменений в виде более мелких, но постоянно проводимых улучшений.

Для логистика главный вопрос заключается в том, как заставить потоки продуктов течь быстрее. Поэтому логистик изучает издержки предприятия, начиная с исходных составляющих и заканчивая моментом, когда потребитель получает товар. Сокращение времени на каждом этапе ведет к снижению издержек и цены продукта.

Цель логистики — обеспечить наличие нужного продукта в нужном месте в нужное время при наименьших издержках. Это достигается сокращением времени выполнения заказа, времени производства, времени транспортировки, контролем над запасами, повышением качества продукции и т. д.

Растущее внимание к экологическим вопросам удаления отходов и масштаб операций, связанных с потенциальным возвратом продукта, привели к созданию обратной логистики. *Обратная логистика* занимается сбором возвращаемых продуктов, их проверкой, ремонтом, модернизацией и переработкой. После этого продукты могут быть отправлены потребителю или на продажу на вторичном рынке.

Как правило, в книгах по логистике затрагиваются в основном вопросы терминологии и понятийного аппарата: определения, цели, концепции, принципы и т. д. И на этом пути достигнут значительный прогресс. В этой же книге мы рассмотрим на простых и понятных примерах методы и алгоритмы логистики.

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Представим на плоскости конечное множество точек V и некоторое множество линий X, соединяющих попарно какие-то точки из V. Например, схема автодорог, соединяющих населенные пункты Московской области.

Множество точек (населенных пунктов) назовем *множеством вершин*, а соединяющие линии (автодороги) — *множеством ребер*. Совокупность двух множеств (вершин и ребер) называют *графом.*

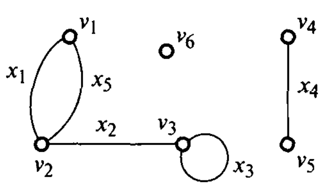
На некоторых участках допускается только одностороннее движение. Тогда соответствующее ребро называется *дугой* и изображается стрелкой, направленной от начальной вершины к конечной вершине.

Граф, состоящий из дуг, называют *ориентированным* (или просто *орграфом*), а образованный ребрами — *неориентированным.*

Один и тот же граф можно изобразить по-разному. Вершины можно располагать по своему усмотрению и произвольно выбирать форму соединяющих линий. В этом проявляется свойство *изоморфизма графов.*

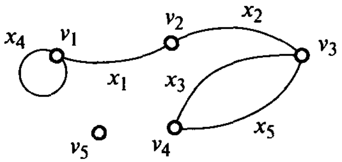
Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется *петлей*. Ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются *кратными*. *Изолированная вершина* не соединена с другими вершинами.

Пример 1. Задан граф G_1, состоящий из вершин v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 и ребер x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

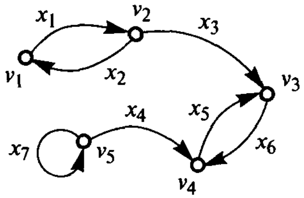


v_6 — изолированная вершина, x_1 и x_5 — кратные ребра, x_3 — петля, v_1 и v_2 — концевые вершины ребра x_1.

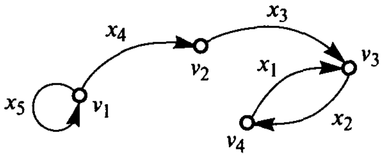
Задача 1. Для графа G указать вершины, ребра, изолированные вершины, кратные ребра, петли.



Пример 2. Задан орграф G_2. У дуги x_3 вершина v_2 — начальная, а вершина v_3 — конечная, x_7 — петля.



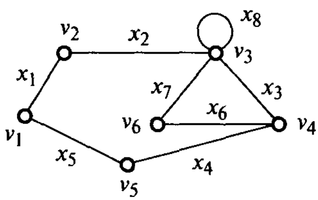
Задача 2. Для орграфа D указать вершины, дуги, петли.



Часто на графе требуется выделить различные маршруты, обладающие определенными свойствами. *Маршрут* длины m — это последовательность $x_1, ..., x_m$ m ребер графа (не обязательно различных) таких, что любые два соседних ребра x_i, x_{i+1} имеют общую концевую вершину.

Замкнутый маршрут приводит в ту же вершину, из которой он начался. *Цепь* — это маршрут, все ребра которого различны. *Простая цепь* — это цепь без повторяющихся вершин. Замкнутая цепь называется *циклом*. *Простой цикл* — это простая замкнутая цепь.

Пример 3. Дан граф G. $x_1x_2x_3x_6x_7x_2$ — маршрут длины 6, соединяющий вершины v_1 и v_2.



$x_1x_2x_3x_6x_7x_2x_1$ — замкнутый маршрут длины 7. Он начинается и заканчивается в вершине v_1. $x_1x_2x_3x_6x_7$ — цепь длины 5 (все ребра в ней различны). Эта цепь не является простой, так как при обходе вершину v_3 мы посетили два раза. $x_1x_2x_3$ — пример простой цепи (все вершины на нашем пути были различны). $x_6x_7x_8x_3$ — цикл. $x_7x_6x_3$ — простой цикл.

Задача 3. Для графа G из задачи 1 привести примеры маршрута, замкнутого маршрута, цепи, простой цепи, цикла, простого цикла.

В случае орграфа вместо слова «цепь» говорят «*путь*», а слово «цикл» заменяют на слово «*контур*».

Итак, для задания графа необходимо указать два множества: V (множество вершин) и X (множество ребер или дуг). Но при большом числе элементов рисунок графа становится громоздким. В этом случае используют *матричный способ*. Выбор матрицы определяется конкретной задачей.

Дан граф G с вершинами $v_1, \ldots, v_n$ и ребрами $x_1, \ldots, x_m$.

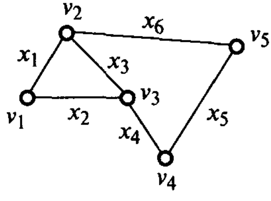
Матрица смежности графа G — это квадратная матрица $A(G)$ размера $n \times n$ (n — число вершин) с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если в графе } G \text{ вершины } v_i, v_j \text{ соединены ребром} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Матрица инцидентности графа G — это матрица $B(G)$ размера $n \times m$ (n — число вершин, m — число ребер) с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_i \text{ — концевая вершина ребра } x_j \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пример 4. Для графа G построим матрицу смежности $A(G)$ и матрицу инцидентности $B(G)$.



Так как у графа 5 вершин и 6 ребер, то размер матрицы $A(G)$ будет 5×5, а матрицы $B(G)$ — 5×6.

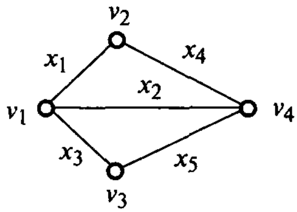
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$a_{12} = 1 \Leftrightarrow$ в графе G есть ребро, соединяющее вершины v_1 и v_2. $a_{13} = 1 \Leftrightarrow$ в графе G есть ребро, соединяющее вершины v_1 и v_3. $a_{14} = 0 \Leftrightarrow$ в графе G нет ребра, соединяющего вершины v_1 и v_4. И т. д.

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$b_{11} = 1 \Leftrightarrow v_1$ — концевая вершина для ребра x_1. $b_{12} = 1 \Leftrightarrow v_1$ — концевая вершина для ребра x_2. $b_{13} = 0 \Leftrightarrow v_1$ не является концевой вершиной для ребра x_3. И т. д.

Задача 4. Для графа G построить матрицу смежности $A(G)$ и матрицу инцидентности $B(G)$.



Дан орграф D с вершинами $v_1, \ldots, v_n$ и дугами $x_1, \ldots, x_m$.

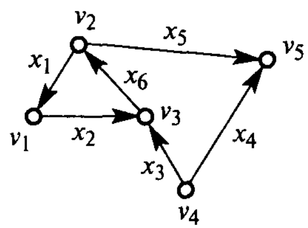
Матрица смежности орграфа D — это квадратная матрица $A(D)$ размера $n \times n$ (n — число вершин) с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если в орграфе } D \text{ есть дуга из } i\text{-й вершины в } j\text{-ю} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Матрица инцидентности орграфа D — это матрица $B(D)$ размера $n \times m$ (n — число вершин, m — число дуг) с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-я дуга заканчивается в } i\text{-й вершине} \\ -1, \text{ если } j\text{-я дуга начинается в } i\text{-й вершине} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пример 5. Для орграфа D построим матрицу смежности $A(D)$ и матрицу инцидентности $B(D)$.



Орграф D содержит 5 вершин и 6 дуг, поэтому размер матрицы $A(D)$ будет 5×5, а матрицы $B(D)$ — 5×6.

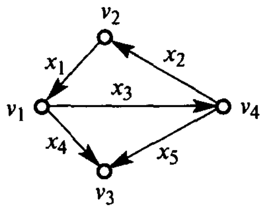
$$A(D) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$a_{12} = 0 \Leftrightarrow$ орграф D не содержит дуги из v_1 в v_2. $a_{13} = 1 \Leftrightarrow$ орграф D содержит дугу из v_1 в v_3. И т. д.

$$B(D) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

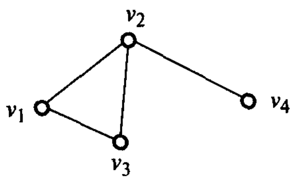
$b_{11} = 1 \Leftrightarrow$ в вершине v_1 заканчивается дуга x_1. $b_{12} = -1 \Leftrightarrow$ в вершине v_1 начинается дуга x_2. $b_{13} = 0 \Leftrightarrow$ вершина v_1 не является концевой вершиной для дуги x_3. И т. д.

Задача 5. Для орграфа D построить матрицу смежности $A(D)$ и матрицу инцидентности $B(D)$.

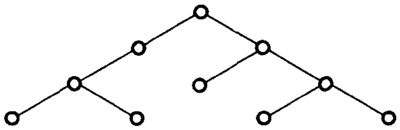


Граф G называется *связным*, если для любых двух его вершин существует маршрут, их соединяющий. Связный граф, не содержащий циклов, называется *деревом* (примеры деревьев: генеалогический граф (родословное дерево), совокупность всех файлов на дискете).

Пример 6. Граф G не является деревом, так как содержит цикл v_1, v_2, v_3.



Задача 6. Является ли следующий граф G деревом?



Очень часто на ребрах графа пишут числа. Такие графы называются *структурными* (или *сетью*). Вершины сети будем называть *узлами*, а ребра — *дугами*.

Глава 3

ФАКТОРЫ ПРОИЗВОДСТВА И ЗАТРАТЫ

§ 3.1. ФАКТОРЫ ПРОИЗВОДСТВА

Очень важно понимать взаимосвязь между затратами и достигаемыми объемами продаж и прибылью. Любой вводимый ресурс, который используется для производства продукции, называется *фактором производства*.

Пример 7. Земля, здания, оборудование, труд — это примеры факторов производства.

Задача 7. Привести примеры факторов производства.

Различают постоянные и переменные факторы производства. *Постоянные факторы производства* для своего изменения требуют значительного периода времени. *Переменные факторы производства* могут быстро изменяться в ответ на изменение спроса.

Пример 8. Здания — это пример постоянного фактора производства.

Задача 8. Привести примеры постоянных факторов производства.

Пример 9. Количество часов, отработанных сотрудниками-почасовиками, — это пример переменного фактора производства.

Задача 9. Привести примеры переменных факторов производства.

§ 3.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАТРАТ

Каждый фактор производства сопряжен с определенными затратами. Затраты, связанные с постоянными факторами производства, изменяются только в долгосрочном плане и не зависят от объема продаж. Затраты, не зависящие от объема продаж, называются *постоянными затратами.*

Пример 10. Затраты на отопление заводоуправления — это постоянные затраты.

Задача 10. Привести примеры постоянных затрат.

Независимость постоянных затрат от объема производства следует понимать исключительно в том смысле, что при заданных общих условиях (например, производственные фонды, списочный состав работников) постоянные затраты не зависят от объема выпуска продукции. При изменении указанных условий (например, при изменениях в производственных фондах, сокращении списочного состава работников) постоянные затраты могут соответственно измениться.

Независимо от того, сколько продукции производится за данный период, постоянные затраты должны быть осуществлены в полном объеме. Поэтому их иногда называют *затратами готовности предприятия к производству.*

Затраты на использование переменного фактора производства зависят от объема продаж. Это *переменные затраты.*

Пример 11. Затраты на тару для готовой продукции — это переменные затраты.

Задача 11. Привести примеры переменных затрат.

Понятие постоянности затрат довольно условно. Чем более длительные периоды времени рассматриваются, тем большее количество затрат относят к разряду переменных. Практически любое решение руководства предприятия ведет к увеличению или снижению затрат. Поэтому любые затраты, в принципе, можно назвать переменными. Следовательно, при разделении затрат на постоянные и переменные нужно проявлять некоторую гибкость.

Существуют затраты, которым присущи черты и постоянных, и переменных затрат. Это *полупеременные затраты.*

Пример 12. Стоимость использования телефона относится к категории переменных затрат, но фиксированная плата попадает под определение постоянных затрат.

Задача 12. Привести примеры полупеременных затрат.

Совокупные затраты — это сумма всех постоянных и переменных затрат для данного достигнутого объема продаж.

Предприятие стремится минимизировать свои совокупные затраты. Использование переменных факторов производства придает любому бизнесу гибкость и способность оперативно реагировать на изменение экономических условий и рыночной конъюнктуры.

В краткосрочном периоде количество имеющихся в распоряжении предприятия постоянных факторов производства ограничено. Предприятие может производить продукцию только в пределах этих ограничений. Дальнейший рост предприятия может быть достигнут только за счет дополнительных инвестиций капитала в постоянные факторы производства.

Средние затраты на единицу проданной продукции вычисляются по следующей формуле:

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{средние затраты на единицу}\\ \textbf{проданной продукции}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\textbf{совокупные}\\ \textbf{затраты}\end{array}} : \boxed{\begin{array}{c}\textbf{число проданных}\\ \textbf{единиц продукции}\end{array}}.$$

Пример 13. Совокупные затраты равны 100000 руб., число проданных единиц продукции — 5000. Определим средние затраты на единицу проданной продукции.

Средние затраты на единицу проданной продукции = (совокупные затраты)/(число проданных единиц продукции) = 100000/5000 = = 20 руб./единицу.

Задача 13. Совокупные затраты равны 150000 руб., число проданных единиц продукции – 6000. Определить средние затраты на единицу проданной продукции.

При открытии нового предприятия объем продаж сначала низок, а средние затраты на единицу проданной продукции относительно высоки. По мере развития и становления предприятия объем продаж увеличивается. Совокупные затраты также увеличиваются. Но изначально постоянные затраты имеют большее значение, так как требуются здания, оборудование и т. д.

Постоянные затраты с течением времени не меняются. Поэтому средние затраты на единицу проданной продукции сокращаются. Это *эффект масштаба*.

Еще одно преимущество эффекта масштаба — это *специализация*. На крупном предприятии существует разграничение функциональных обязанностей, что приводит к значительной экономии.

Но эффект масштаба имеет и недостатки. Чем крупнее предприятие, тем сложнее им управлять. Рост бюрократического аппарата ведет к росту средних затрат на единицу проданной продукции. Это *отрицательный эффект масштаба*. В этом случае нужно пересмотреть набор используемых ресурсов.

Глава 4

ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Размещение связано с нахождением наилучших географических точек для разных элементов цепи поставок. Решения о размещении очень важны, так как они влияют на показатели деятельности предприятия в течение многих лет. Конечно, удачное место расположения еще не гарантирует успеха в бизнесе, но неудачное практически гарантирует в будущем неудачу. Многие предприятия забывают, что решения по месту расположения носят долгосрочный характер, и выбирают места, ориентируясь на краткосрочные выгоды.

При принятии решения о размещении предприятие должно учесть множество факторов. Некоторые из этих факторов (операционные издержки, ставки заработной платы, конкуренты, налоги, курсы валют, расстояния до других предприятий, поставщики, численность населения и т. д.) можно оценить. Другие факторы (инфраструктура, политическая ситуация, правовая система, отношение общественности и т. д.) невозможно представить в числовом виде.

В задачах размещения производства требуется из нескольких возможных вариантов размещения производства выбрать наилучший. Существует ряд очень простых методов решения этих задач. На них мы и остановимся.

§ 4.1. МЕТОД ВЗВЕШИВАНИЯ

Метод взвешивания в первую очередь учитывает факторы, важные для размещения, но которые не всегда возможно представить в числовом виде. Различие между факторами отражается в начислении баллов. Именно так обстоит дело с отелями: невозможно явно измерить качество услуг отеля, но пять звезд отражают очень хорошие гостиничные характеристики.

Составляется список факторов, влияющих на размещение производства. Для определения относительной значимости этих факторов в деятельности компании каждому фактору приписывается *вес* — число из отрезка [0, 1]. Сумма всех весов должна равняться единице.

Выбирается шкала для измерения каждого фактора (например, от 1 до 10 или от 1 до 100 очков). Для каждого возможного варианта размещения производства нужно оценить все факторы по принятой шкале измерения.

Умножим оценки факторов на соответствующие веса и суммируем полученные числа для каждого возможного варианта размещения производства. Вариант с наибольшей суммой является наилучшим.

Изменяя оценки или веса факторов, можно исследовать устойчивость полученного решения, а также степень влияния факторов на конечный результат. Те факторы, которые практически не влияют на решение, можно исключить из рассмотрения и использовать в процессе качественного анализа при принятии решений.

Пример 14. Рассматривается вопрос о строительстве поликлиники. Существуют три возможных района строительства: *A*, *B*, *C*. Все данные отражены в таблице.

Фактор	Вес	A	B	C
Доступность для пациентов	0,5	10	8	7
Арендная плата	0,3	5	4	6
Удобство для персонала	0,2	3	6	5

Дадим рекомендации о месте строительства, используя метод взвешивания. Заполним таблицу.

Фактор	Вес	A	B	C	Вес× A	Вес× B	Вес× C
Доступность для пациентов	0,5	10	8	7	5	4	3,5
Арендная плата	0,3	5	4	6	1,5	1,2	1,8
Удобство для персонала	0,2	3	6	5	0,6	1,2	1
Сумма	1	—	—	—	7,1	6,4	6,3

Поясним, как заполняется таблица.

Числа 2-го столбца умножаем на числа 3-го (4-го) столбца соответственно и результат пишем в 6-м (7-м) столбце. 8-й столбец равен произведению 2-го и 5-го столбцов.

В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Вариант с наибольшей суммой (7,1) — это строительство поликлиники в районе *A*.

Задача 14. Рассматривается вопрос о строительстве поликлиники. Существуют три возможных района строительства: *A*, *B*, *C*. Все данные отражены в таблице.

Фактор	**Вес**	**A**	**B**	**C**
Доступность для пациентов	0,45	5	7	9
Арендная плата	0,35	5	3	4
Удобство персонала	0,2	4	8	6

Дать рекомендации о месте строительства, используя метод взвешивания.

§ 4.2. МЕТОД РАЗМЕЩЕНИЯ С УЧЕТОМ ПОЛНЫХ ЗАТРАТ

Этот метод основан на анализе затрат и объемов выпуска. Для каждого варианта определяются постоянные и переменные затраты. Выбирается вариант размещения с наименьшими совокупными затратами для определенного объема производства.

Пример 15. Рассматривается вопрос о строительстве завода в одном из трех городов: *A*, *B*, *C*. Исследование показало, что постоянные затраты (за год) в этих городах равны 20000, 50000 и 80000 рублей соответственно, а переменные затраты — 65, 45 и 30 рублей за единицу продукции соответственно. Ожидаемый годовой объем выпуска — 5000 единиц. Определим место строительства с учетом полных затрат.

Найдем совокупные затраты для каждого города:

$20000 + 65 \times 5000 = 345000$ рублей/год (*A*);

$50000 + 45 \times 5000 = 275000$ рублей/год (*B*);

$80000 + 30 \times 5000 = 230000$ рублей/год (*C*).

Наилучший вариант — это город *C*, так как там минимальные совокупные затраты при ожидаемом годовом объеме выпуска 5000 единиц.

Разумеется, при принятии решений эти данные следует рассматривать только в качестве стартовых. Предприятие должно провести более подробный анализ затрат, долгосрочных планов, своих целей и рассмотреть другие значимые факторы.

Задача 15. Рассматривается вопрос о строительстве завода в одном из трех городов: *A*, *B*, *C*. Исследование показало, что постоянные затраты (за год) в этих городах равны 25000, 45000 и 70000 рублей соответственно, а переменные затраты — 55, 40 и 35 рублей за единицу продукции соответственно. Ожидаемый годовой объем выпуска — 8000 единиц. Определить место строительства с учетом полных затрат.

§ 4.3. ГРАВИТАЦИОННЫЙ МЕТОД

Этот метод может служить, например, для определения расположения единственного торгового дома, обслуживающего несколько магазинов. Изобразим эти магазины на координатной плоскости Oxy. Пусть (x_i, y_i) — координаты i-го магазина, w_i — объем поставляемой в i-й магазин продукции ($i = 1, ..., n$). Тогда торговый дом нужно разместить в ***центре гравитации*** — точке с координатами (C_x, C_y), где

$$C_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i},\ C_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}.$$

Пример 16. Предполагается создать центральный узел связи для обслуживания почтовых отделений A, B, C, D.

Почтовое отделение	Координаты	Число поездок почтового фургона в день
A	(9, 6)	3
B	(7, 8)	4
C	(1, 5)	5
D	(2, 10)	2

Определим координаты центра гравитации для размещения центрального узла связи.

$$C_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{9\times3 + 7\times4 + 1\times5 + 2\times2}{3 + 4 + 5 + 2} \approx 4{,}6.$$

$$C_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{6\times3 + 8\times4 + 5\times5 + 10\times2}{3 + 4 + 5 + 2} \approx 6{,}8.$$

Ответ: (4,6; 6,8).

Задача 16. Предполагается создать центральный узел связи для обслуживания почтовых отделений A, B, C, D.

Почтовое отделение	Координаты	Число поездок почтового фургона в день
A	(7, 9)	3
B	(10, 4)	1
C	(2, 5)	2
D	(8, 6)	4

Определить координаты центра гравитации для размещения центрального узла связи.

Замечание. Проблема заключается в том, что место размещения, выбранное гравитационным методом, может оказаться непрактичным (например, выбранное место может оказаться на вершине горы или в море). Это один из недостатков гравитационного метода. Поэтому сначала нужно определить доступные места размещения, а затем с помощью методов взвешивания, размещения с учетом полных затрат или калькуляции затрат выбрать наилучший вариант.

§ 4.4. МЕТОД КАЛЬКУЛЯЦИИ ЗАТРАТ

В этой главе уже был рассмотрен метод размещения с учетом полных затрат. На практике многие расходы предприятия фиксированы и не зависят от его расположения. Поэтому при выборе места размещения можно ограничиться рассмотрением лишь общих переменных издержек.

Метод калькуляции затрат принимает во внимание только затраты на перевозку. Этот метод может служить, например, для выбора расположения единственного торгового дома, обслуживающего несколько магазинов, из m возможных вариантов.

Изобразим эти магазины на координатной плоскости Oxy. Пусть (x_i, y_i) — координаты i-го магазина, w_i — число ежедневных поставок в i-й магазин продукции ($i = 1, ..., n$), (x_j^0, y_j^0) — координаты j-го возможного расположения торгового дома ($j = 1, ..., m$).

Предпочтение отдается тому j-му возможному варианту, для которого сумма $\sum_{i=1}^{n} w_i(|x_i - x_j^0| + |y_i - y_j^0|)$ будет минимальной.

Пример 17. В примере 16 выберем расположение центрального узла связи из двух возможных вариантов: (6, 8) и (4, 7). Заполним таблицу для варианта (6, 8).

Почтовое отделение	x_i	y_i	w_i	$\|x_i - 6\|$	$\|y_i - 8\|$	$\|x_i - 6\| + \|y_i - 8\|$	$w_i(\|x_i - 6\| + \|y_i - 8\|)$
A	9	6	3	3	2	5	15
B	7	8	4	1	0	1	4
C	1	5	5	5	3	8	40
D	2	10	2	4	2	6	12
Сумма							71

Поясним, как заполняется таблица. Значения первых четырех столбцов взяты из условия. Из каждого числа 2-го (3-го) столбца вычитаем $x_1^0 = 6$ ($y_1^0 = 8$) и модуль полученного числа пишем в 5-м (6-м) столбце. 7-й столбец равен сумме 5-го и 6-го столбцов. 8-й столбец – это произведение 4-го и 7-го столбцов. В последней строке указана сумма чисел последнего столбца.

Аналогично заполняем таблицу для возможного варианта (4, 7).

Почтовое отделение	x_i	y_i	w_i	$\lvert x_i - 4\rvert$	$\lvert y_i - 7\rvert$	$\lvert x_i - 4\rvert + \lvert y_i - 7\rvert$	$w_i(\lvert x_i - 4\rvert + \lvert y_i - 7\rvert)$
A	9	6	3	5	1	6	18
B	7	8	4	3	1	4	16
C	1	5	5	3	2	5	25
D	2	10	2	2	3	5	10
Сумма							69

Так как 69 < 71, то наилучший вариант — это (4, 7).

На практике, конечно, прежде чем принять подобное решение приходится учитывать и множество других факторов.

Задача 17. В задаче 16 выбрать расположение центрального узла связи из двух возможных вариантов: (5, 7) и (6, 4).

Глава 5

РАЗМЕЩЕНИЕ ОБЪЕКТОВ СЕРВИСА

В производственном секторе затраты очень значительны для различных мест размещения. Поэтому при размещении производственных объектов основное внимание уделяется минимизации затрат. Затраты же сервисных предприятий, как правило, невелики. Поэтому при размещении объектов сервиса основное внимание уделяется максимизации выручки.

Из-за большого разнообразия сервисных услуг и относительно низких цен на создание сервисных предприятий новых сервисных центров вводится намного больше, чем новых заводов и товарных складов.

Обычно предприятия сервиса сталкиваются с проблемой, где и в каком количестве расположить точки обслуживания в данном географическом регионе. Рассмотрим размещение объектов сервиса с помощью *эвристического метода Ардолана*.

Пример 18. Определим с помощью эвристического метода Ардолана место расположения двух поликлиник для обслуживания жителей пунктов *B*, *C*, *D*, *E* с наименьшими затратами на преодоление расстояний.

В таблице указаны расстояния между пунктами, население пунктов (тыс. человек) и относительная важность обслуживания.

Пункт	Расстояние до поликлиники в пункте				Население пункта (тыс. человек)	Относительная важность обслуживания
	B	C	D	E		
B	0	9	6	5	15	0,9
C	9	0	7	8	10	1,1
D	6	7	0	4	12	1,2
E	5	8	4	0	14	0,8

Составляем матрицу $A = (a_{ij})$ размера 4×4, где элемент a_{ij} равен произведению числа из клетки (i, j) на соответствующие числа в i-й строке из двух последних столбцов. Например, $a_{12} = 9\times15\times0{,}9 = 121{,}5$, а $a_{21} = 9\times10\times1{,}1 = 99$.

$$\text{Тогда } A = \begin{bmatrix} 0 & 121{,}5 & 81 & 67{,}5 \\ 99 & 0 & 77 & 88 \\ 86{,}4 & 100{,}8 & 0 & 57{,}6 \\ 56 & 89{,}6 & 44{,}8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определим сумму чисел в каждом столбце полученной матрицы и найдем среди них минимум: min (241,4; 311,9; 202,8; 213,1) = 202,8.

Этот минимум соответствует третьему столбцу. Поэтому первую поликлинику разместим в пункте *D*.

Преобразуем матрицу *A* по следующему правилу. В каждой строке числа, превосходящие соответствующее число третьего столбца (именно в третьем столбце была наименьшая сумма чисел), заменим на это число третьего столбца.

$$\text{Получим матрицу } A = \begin{bmatrix} 0 & 81 & 81 & 67{,}5 \\ 77 & 0 & 77 & 77 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 44{,}8 & 44{,}8 & 44{,}8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определим сумму чисел в каждом столбце полученной матрицы и найдем среди них минимум: min (121,8; 125,8; 202,8; 144,5) = 121,8.

Этот минимум соответствует первому столбцу. Поэтому вторую поликлинику разместим в пункте *B*.

Итак, поликлиники нужно разместить в пунктах *B* и *D*.

Задача 18. Определить с помощью эвристического метода Ардолана место расположения двух поликлиник для обслуживания жителей пунктов *B*, *C*, *D*, *E* с наименьшими затратами на преодоление расстояний.

В таблице указаны расстояния между пунктами, население пунктов (тыс. человек) и относительная важность обслуживания.

Пункт	Расстояние до поликлиники в пункте				Население пункта (тыс. человек)	Относительная важность обслуживания
	B	C	D	E		
B	0	5	6	7	16	0,8
C	5	0	9	8	15	0,9
D	6	9	0	10	12	1,2
E	7	8	10	0	10	1,1

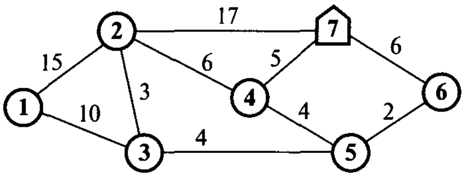
Глава 6

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

§ 6.1. МЕТОД ПРИСВОЕНИЯ МЕТОК

Задача состоит в том, чтобы найти кратчайший путь на графе от какой-то выделенной вершины до любой другой вершины.

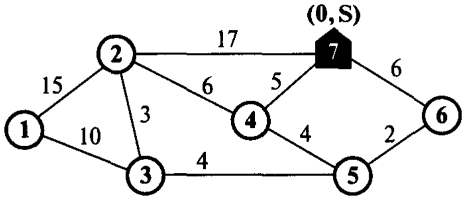
Пример 19. Узел 7 — склад, остальные узлы — строительные площадки компании. Показатели на дугах — расстояния в километрах.



Надо найти кратчайшие расстояния от склада до каждой строительной площадки. Какова длина кратчайшего пути от склада до строительной площадки 1? Проходит ли кратчайший путь от склада к строительной площадке 1 через строительную площадку 2? Какова длина кратчайшего пути от склада до строительной площадки 2? Проходит ли кратчайший путь от склада к строительной площадке 2 через строительную площадку 4?

Решим эту задачу *методом присвоения меток*. Каждому узлу присваиваем метку из двух чисел. Первое число — это минимальное расстояние от узла 7 до данного узла, второе — номер предыдущего узла на пути от узла 7 к данному узлу. Узел, для которого мы определили путь от узла 7, назовем *помеченным*. Узел, для которого такой путь еще не определен, назовем *непомеченным*. Если мы определили кратчайшее расстояние от узла 7 до данного узла, то соответствующую метку назовем *постоянной* и будем обозначать в круглых скобках. Все остальные метки назовем *временными* и будем обозначать в квадратных скобках. Узлы с постоянными метками будем закрашивать.

Итак, узлу 7 присваиваем метку (0, S), где 0 — это расстояние от узла 7, S — обозначение стартового узла.



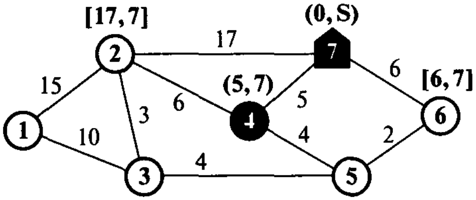
Узел 7 связан с узлами 2, 4, 6. Длины соответствующих ребер — 17, 5, 6. Поэтому узлам 2, 4, 6 присваиваем временные метки — [17, 7], [5, 7], [6, 7] соответственно (первое число — длина пути от узла 7 до данного узла, а второе — это предшествующий узел).

После выполнения этой операции можно сделать два следующих шага:

✧ найти участок (участки) минимальной длины и соответствующую временную метку (метки) сделать постоянной;

✧ узел (узлы), которому соответствует появившаяся постоянная метка, становится новым стартом.

После выполнения этой операции временная метка с наименьшим расстоянием до узла 7 становится постоянной. Это метка (5, 7) узла 4. Поэтому следующий шаг мы начнем с узла 4.

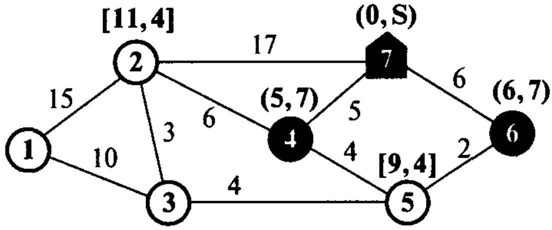


Узел 4 непосредственно связан с узлами 2 и 5 без постоянных меток. Длина ребра 4–5 равна 4, метка узла 4 — (5, 7) ⇒ временная метка узла 5 равна [5+4, 4] = [9, 4]. Длина ребра 4–2 равна 6, метка узла 4 — (5, 7) ⇒ временная метка узла 2 равна [5+6, 4] = [11, 4]. Таким образом мы нашли путь от узла 7 до узла 2 длины 11.

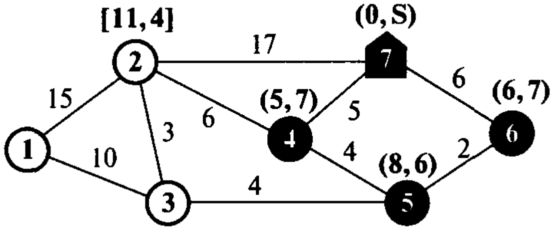
Узел 2 пока помечен меткой [17, 7] (путь длины 17), но 11 < 17 ⇒ старую метку [17, 7] узла 2 мы меняем на новую временную метку

[11, 4], где 11 — это длина пути от узла 7 до узла 2, а 4 — номер предшествующего узла.

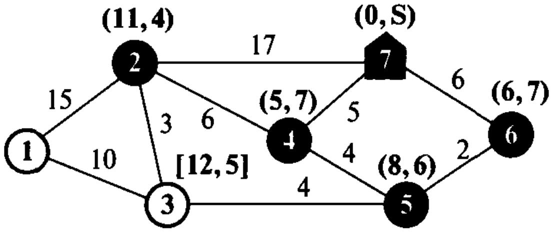
После этого из всех временных меток [11, 4], [9, 4], [6, 7] выбираем метку с наименьшим первым числом. Это [6, 7]. Эта метка становится постоянной, а очередной шаг мы начнем с узла, соответствующего этой метке, — узла 6.



Этот узел связан с узлом 5 без постоянной метки. Длина ребра 6–5 равна 2, метка узла 6 — (6, 7) ⇒ временная метка узла 5 равна [6+2, 6] = [8, 6]. Но узел 5 уже помечен меткой [9, 4]. Так как 8 < 9, то узлу 5 припишем новую метку — [8, 6]. После этого из всех временных меток [11, 4] и [8, 6] метку с наименьшим первым числом (8, 6) объявляем постоянной, а следующий шаг начнем с соответствующего ей узла 5.

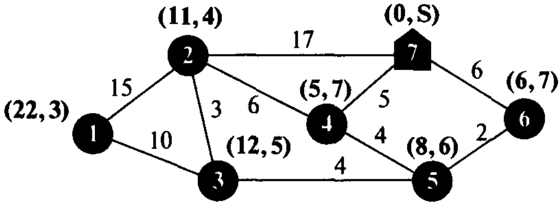


Узел 5 связан только с одним узлом без постоянной метки — узлом 3. Длина ребра 5–3 равна 4, метка узла 5 — (8, 6) ⇒ временная метка узла 3 равна [8+4, 5] = [12, 5]. Теперь из всех временных меток [11, 4] и [12, 5] метку с наименьшим первым числом [11, 4] объявляем постоянной, а следующий шаг начнем с соответствующего ей узла 2.



Узел 2 связан с узлами 1 и 3 без постоянных меток. Длина ребра 2–1 равна 15, метка узла 2 — (11, 4) ⇒ узлу 1 припишем временную метку [11+15, 2] = [26, 2]. Длина ребра 2–3 равна 3, метка узла 2 —

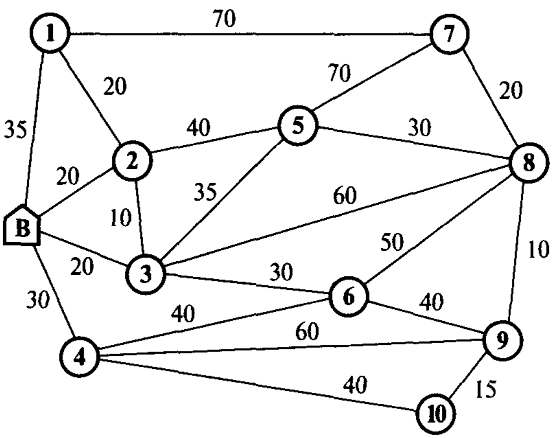
(11, 4) ⇒ мы могли бы пометить узел 3 меткой [11+3, 2] = [14, 2], но узел 3 уже помечен меткой [12, 5] с меньшим первым числом. Так что метку узла 3 не меняем. Теперь из временных меток [26, 2] и [12, 5] метка с наименьшим первым числом становится постоянной (12, 5), а с соответствующего ей узла 3 начнем следующий шаг. Метку узла 1 меняем на (12+10, 3) = (22, 3). Всем узлам приписаны постоянные метки. Действие алгоритма прекращается.



Первое число метки у каждой вершины — это длина кратчайшего пути от узла 7 до данной вершины. Чтобы восстановить кратчайший путь от узла 7 до какой-то вершины, мы должны из этой вершины перейти в соседнюю (ее номер — это второе число метки). И т. д. до вершины 7.

Теперь мы можем ответить на вопросы задачи. Метка узла 1 — (22, 3) ⇒ длина кратчайшего пути от узла 7 до узла 1 равна 22. Из узла 1 мы идем в узел 3. Метка узла 3 — (12, 5) ⇒ идем в узел 5. Метка узла 5 — (8, 6) ⇒ идем в узел 6. Метка узла 6 — (6, 7) ⇒ идем в узел 7, то есть кратчайший путь 1–3–5–6–7. Он не проходит через узел 2. Ответы на два других вопроса оставляем читателю в качестве упражнения.

Задача 19.1. Компания грузовых перевозок осуществляет услуги по перевозке грузов между Воронежем (В) и райцентрами. Если компания получает заказ на обслуживание, она как можно быстрее



посылает грузовик в райцентр, из которого поступил заказ. Так как существенны быстрое обслуживание и минимальные транспортные затраты, большое значение приобретает то, что грузовик проследует из Воронежа в соответствующий райцентр по наиболее короткому маршруту. Сеть, представленная на рисунке, отображает сеть дорог. Расстояния указаны в километрах.

Найти кратчайшие маршруты от Воронежа до всех 10 райцентров. Какова длина кратчайшего пути от Воронежа до райцентра 10? Какова длина кратчайшего пути от Воронежа до райцентра 8? Проходит ли кратчайший путь от Воронежа до райцентра 9 через райцентр 6?

Задача 19.2. Предложите алгоритм действий при наличии в сети нескольких равных постоянных меток.

§ 6.2. ЗАДАЧА О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПУНКТАМИ

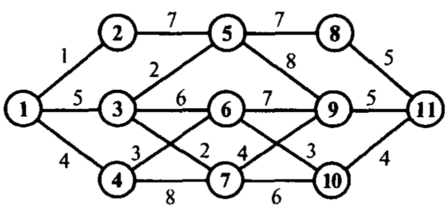
Известна схема дорог. Требуется перевезти груз из одного пункта в другой по маршруту минимальной длины.

Двигаясь от конечного пункта к начальному пункту, каждой вершине припишем число по определенным правилам. Конечной вершине присвоим число 0. Если i-я вершина в направлении от начального пункта к конечному пункту непосредственно соединена с вершинами $j_1, ..., j_k$, которым приписаны числа $r(j_1), ..., r(j_k)$, то вершине i приписывается число $r(i) = \min\limits_s (r(j_s) + t(i, j_s))$, где $t(i, j_s)$ — длина ребра (i, j_s).

Пусть этот минимум достигается для вершины j_m. Тогда ребро (i, j_m) покажем двумя чертами со стрелкой от i к j_m. Если таких j_m несколько, то на этом шаге будет несколько двойных ребер.

Число, приписанное начальному пункту, равно минимальной длине искомого маршрута. Двигаться от начального пункта к конечному пункту нужно по двойным ребрам со стрелками.

Пример 20. Найдем маршрут минимальной длины от пункта 1 к пункту 11.



Припишем вершинам числа вместо номеров. Для 11-й вершины это 0.

11-я вершина соединена с 8-й, 9-й и 10-й вершинами, которым припишем $0 + 5 = 5$, $0 + 5 = 5$, $0 + 4 = 4$ соответственно. Все эти ребра покажем двумя чертами со стрелками.

По числам 8-й и 9-й вершин найдем число 5-й вершины: $\min(5 + 7, 5 + 8) = 12$. Ребро (5, 8) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 9-й и 10-й вершин найдем число 6-й вершины: $\min(5 + 7, 4 + 3) = 7$. Ребро (6, 10) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 9-й и 10-й вершин найдем число 7-й вершины: $\min(5 + 4, 4 + 6) = 9$. Ребро (7, 9) изобразим двумя чертами со стрелкой.

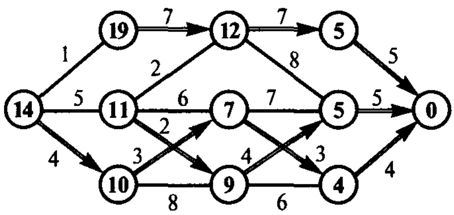
По числу 5-й вершины определим число 2-й вершины: $12 + 7 = 19$. Ребро (2, 5) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 5-й, 6-й и 7-й вершин определим число 3-й вершины: $\min(12 + 2, 9 + 2, 7 + 6) = 11$. Ребро (3, 7) изобразим двумя чертами со стрелкой.

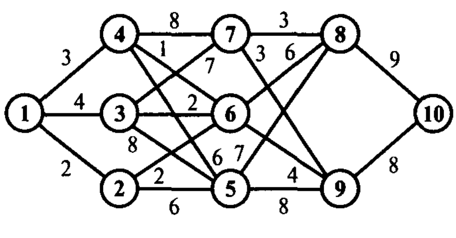
По числам 6-й и 7-й вершин найдем число 4-й вершины: $\min(7 + 3, 9 + 8) = 10$. Ребро (4, 6) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 2-й, 3-й и 4-й вершин определим число 1-й вершины: $\min(19 + 1, 11 + 5, 10 + 4) = 14$. Ребро (1, 4) изобразим двумя чертами со стрелкой. Длина кратчайшего пути равна 14.

Двигаемся из начальной вершины 1 к конечной вершине 11 по ребрам со стрелкой. Получаем кратчайший путь 1–4–6–10–11. Его длина равна 14.



Задача 20. Найти маршрут минимальной длины от пункта 1 к пункту 10.



Глава 7

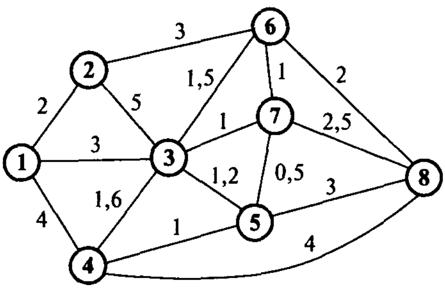
ПОСТРОЕНИЕ КОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ МИНИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Коммуникационная сеть минимальной длины (или *дерево кратчайших расстояний*) — это совокупность дуг сети, имеющая минимальную суммарную длину и обеспечивающая достижение всех узлов сети, то есть возможность попасть из любого узла в любой другой узел. Алгоритм построения:

1. Начать с любого узла и соединить его с ближайшим узлом. Считаем, что это связанные узлы, а все другие узлы — несвязанные.

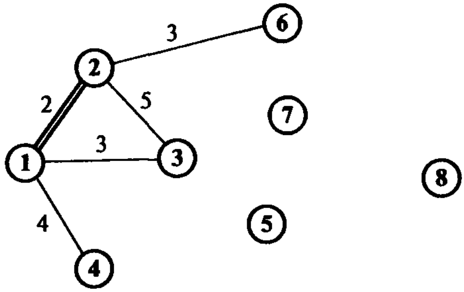
2. Определить несвязанный узел, ближайший к одному из связанных узлов. Если таких «ближайших» узлов несколько, то выбрать любой. Добавить этот узел к связанным. И т. д. до тех пор, пока есть несвязанные узлы.

Пример 21. Университет устанавливает компьютерную систему электронной почты, которая позволит передавать сообщение между деканами восьми факультетов. Сеть возможных электронных связей между деканатами показана ниже.

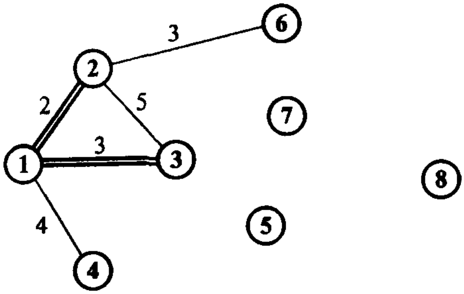


Протяженность коммуникаций в километрах отмечена на дугах. Предложим проект системы связи, которая позволит всем восьми деканам обеспечить доступ к системе электронной почты. Решение должно обеспечить минимальную возможную общую длину коммуникаций.

Начнем с узла 1. Ближайший к нему узел — это узел 2 на расстоянии 2. Считаем, что узлы 1, 2 — связаные, и отметим это двойной чертой.

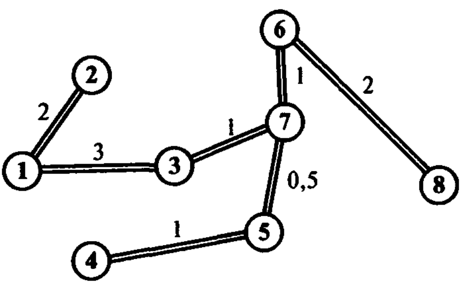


Ближайшие несвязанные узлы к одному из связанных узлов 1 и 2 — это узлы 3 и 6. Выбираем любой из них, например, узел 3. Ребро 1–3 отметим двойной чертой и считаем узлы 1, 2, 3 связанными.

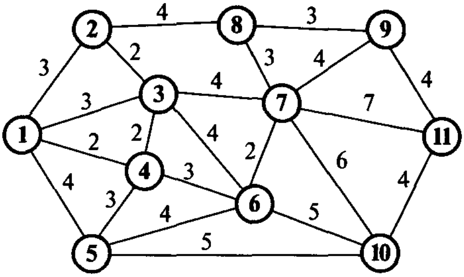


Далее ищем ближайший несвязанный узел к узлам 1, 2, 3. И т. д. В результате получим минимальное дерево.

Его длина равна сумме расстояний на дугах: 2 + 3 + 1 + 1 + 0,5 + + 1 + 2 = 10,5 (км).



Задача 21. Фирма получила заказ на прокладку кабеля для кабельного телевидения. Узлы сети, приводимой ниже, отражают точки, к которым должна быть проложена кабельная сеть.



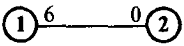
Дуги сети показывают количество километров между точками подвода кабеля. Предложить решение, которое позволит обеспечить доступ кабельной сети ко всем точкам, но при этом общая протяженность кабельных линий будет минимально возможной.

Глава 8

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

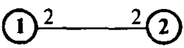
Рассматривается сеть с одним узлом входа (*источник*) и одним узлом выхода (*сток*). Какова максимальная величина потока (количество машин, сообщений, жидкости и т. д.), который может войти в сетевую систему и выйти из нее в заданный период времени? Мы предполагаем, что поток, вытекающий из узла, равен потоку, втекающему в узел.

Под *пропускной способностью* (или *мощностью*) *дуги* будем понимать верхнее ограничение на поток в этой дуге. Понятно, что автомобильные трассы ограничивают число автомобилей в транспортной системе, величина трубопроводов ограничивает количество нефти в системе ее распределения. Мощность потока может зависеть от его направления. Условное изображение в сети



означает, что мощность потока от узла 1 к узлу 2 равна 6, а мощность потока от узла 2 к узлу 1 равна 0, то есть это — «улица с односторонним движением».

Условное же изображение



означает, что мощность потока в каждом направлении равна 2.

Алгоритм определения максимального потока:

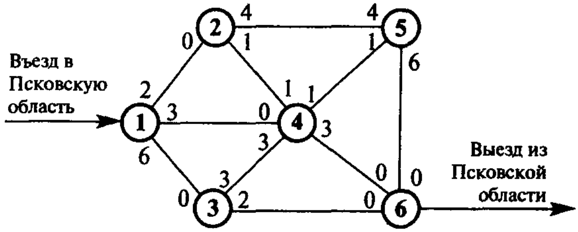
Полагаем искомую величину максимального потока равной нулю.

Шаг 1. Найти какой-нибудь путь от источника до стока, который образован дугами, каждая из которых имеет в направлении потока ненулевую мощность. Если такого пути нет, то оптимальное решение найдено.

Шаг 2. Найти наименьшее значение мощности дуги P_f на выбранном пути шага 1. Увеличить поток через сеть на величину P_f.

Шаг 3. На пути из шага 1 сократить на P_f мощности потоков на всех дугах в направлении потока и увеличить на P_f мощности потоков на всех дугах в обратном направлении. Перейти к шагу 1.

Пример 22. Система автодорог «Север — Юг», проходящих через Псковскую область, может обеспечить пропускные способности, показанные на приводимой ниже схеме (тыс. автомашин в час).



1. Каков максимальный поток через эту систему (тыс. автомашин в час)?

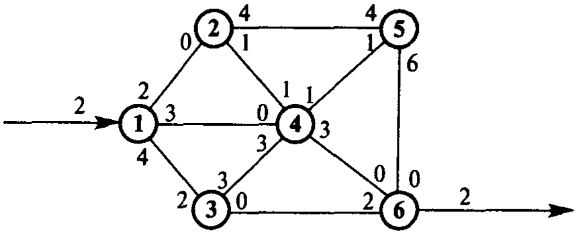
2. Сколько автомашин должно проехать по дороге 5–6, чтобы обеспечить максимальный поток?

Искомую величину максимального потока положим равной нулю.

Итерация 1. Выбираем путь 1–3–6.

$P_f = \min\{6, 2\} = 2$. Поэтому мощности потоков на пути 1–3–6 в направлении потока (а именно, 6 и 2) уменьшаем на величину $P_f = 2$, а мощности потоков в обратном направлении на пути 1–3–6 (0 и 0) увеличим на $P_f = 2$. Общий поток станет $0 + 2 = 2$.

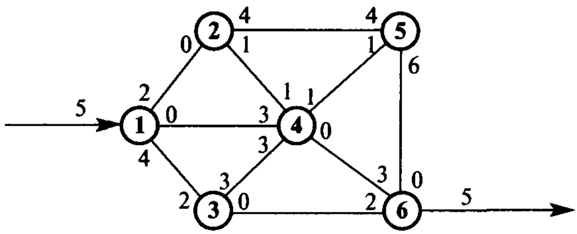
Получим:



Итерация 2. Выбираем путь 1–4–6.

$P_f = \min\{3, 3\} = 3$. Все потоки на пути 1–4–6 в направлении общего потока (3 и 3) уменьшаем на $P_f = 3$, а все потоки на этом пути в обратном направлении (0 и 0) увеличиваем на $P_f = 3$. Общий поток увеличиваем на $P_f = 3$ $(2 + 3 = 5)$.

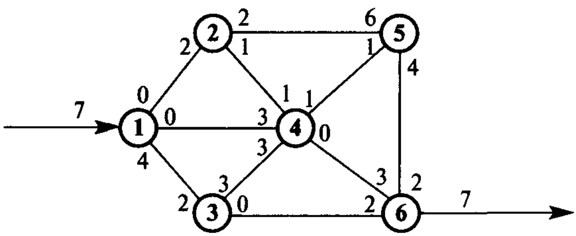
Получим:



Итерация 3. Выбираем путь 1–2–5–6.

$P_f = \min\{2, 4, 6\} = 2$. Все потоки на пути 1–2–5–6 в направлении общего потока (2, 4, 6) уменьшаем на $P_f = 2$, а все потоки на этом пути в обратном направлении (0, 4, 0) увеличиваем на $P_f = 2$. Общий поток увеличиваем на $P_f = 2$ $(5 + 2 = 7)$.

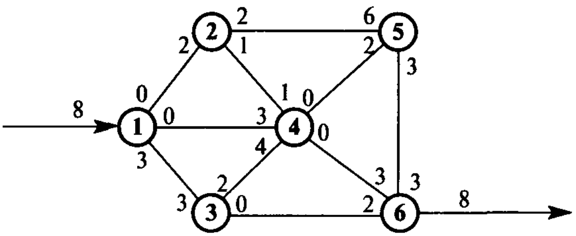
Получим:



Итерация 4. Выбираем путь 1–3–4–5–6.

$P_f = \min\{4, 3, 1, 4\} = 1$. Все потоки на пути 1–3–4–5–6 в направлении общего потока (4, 3, 1, 4) уменьшаем на $P_f = 1$, а все потоки на этом пути в обратном направлении (2, 3, 1, 2) увеличиваем на $P_f = 1$. Общий поток увеличиваем на $P_f = 1$ $(7 + 1 = 8)$.

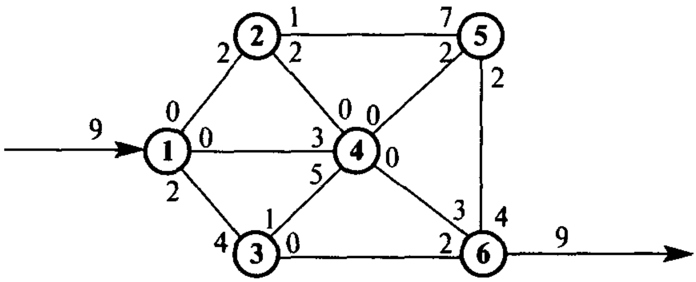
Получим:



Итерация 5. Выбираем путь 1–3–4–2–5–6.

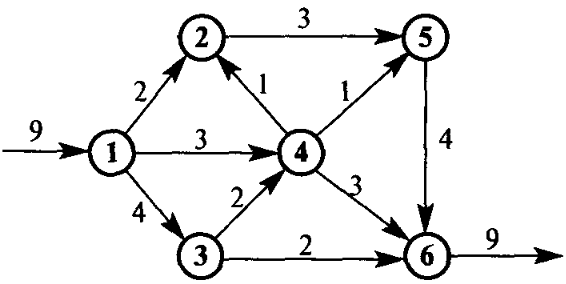
$P_f = \min\{3, 2, 1, 2, 3\} = 1$. Все потоки на пути 1–3–4–2–5–6 в направлении общего потока (3, 2, 1, 2, 3) уменьшаем на $P_f = 1$, а все потоки на этом пути в обратном направлении (3, 4, 1, 6, 3) увеличиваем на $P_f = 1$. Общий поток увеличиваем на $P_f = 1$ (8 + 1 = 9).

Получим:

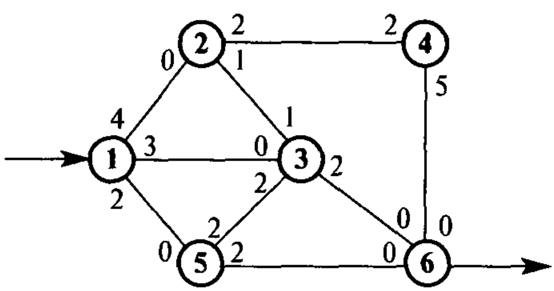


Больше не существует путей из узла 1 в узел 6 с мощностью, превышающей нуль на всем пути ($P_f = 0$) ⇒ 9 тыс. — это максимальный поток через сеть.

Определим теперь величину и направление потока на каждой дуге, чтобы достичь максимального потока в 9 тыс. автомобилей. Поток проходит по дуге с величиной, равной разнице между первоначальной и конечной мощностями потока. Так, первоначальная мощность дуги 1—2 равна 2, а конечная — 0 ⇒ в направлении от узла 1 к узлу 2 поток имеет мощность 2 – 0 = 2. Сравнивая конечные и начальные мощности потока для всех дуг сети, мы получаем конечную модель потоков.



Задача 22. Чему равен максимальный поток автомашин для системы автодорог? Рассматривается возможность введения секции 3–4 с пропускной способностью 3 тыс. автомашин в час. На сколько увеличится величина максимального потока автомашин?



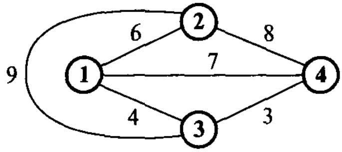
Глава 9

ЗАДАЧА ЕДИНОГО СРЕДНЕГО

Сеть городов связана друг с другом дорогами. В каждом городе существует спрос на какие-то виды продукции. Требуется определить место расположения склада в одном из этих городов. В качестве показателя оптимизации выбирается среднее расстояние или время поездки. Это *задача единого среднего.*

Рассмотрим решение задачи единого среднего на следующем примере.

Пример 23. Для схемы городов решим задачу единого среднего.



Масса грузов, которые необходимо перевезти, указана в таблице.

Пункт	1	2	3	4
Груз (т)	5	6	9	7

Сначала расположим склад в вершине 1 и с помощью метода присвоения меток (см. § 6.1) определим длины кратчайших путей до остальных вершин (см. 3-й столбец следующей таблицы). Затем расположим склад в вершине 2 и с помощью метода присвоения меток определим длины кратчайших путей до остальных вершин (см. 4-й столбец следующей таблицы). И т. д. Заполним таблицу.

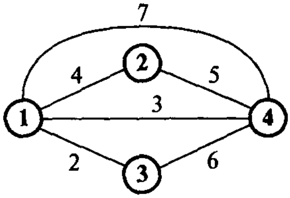
Пункт	Груз	Склад 1	Склад 2	Склад 3	Склад 4	Груз × (Склад 1)	Груз × (Склад 2)	Груз × (Склад 3)	Груз × (Склад 4)
1	5	0	6	4	7	0	30	20	35
2	6	6	0	9	8	36	0	54	48
3	9	4	9	0	3	36	81	0	27
4	7	7	8	3	0	49	56	21	0
Сумма						121	167	95	110

Поясним, как заполняется таблица.

Числа второго столбца взяты из условия. Числа третьего-шестого столбцов получены с помощью метода присвоения меток. Каждое число третьего-шестого столбцов умножаем на соответствующее число второго столбца и результат пишем в седьмом-десятом столбцах соответственно. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Определим минимум в последней строке. Это 95. Поэтому склад нужно разместить в пункте 3.

Задача 23. Для схемы городов решить задачу единого среднего.



Масса грузов, которые необходимо перевезти, указана в таблице.

Пункт	1	2	3	4
Груз (т)	8	9	7	6

Глава 10

ЗАДАЧА ОХВАТА

Иногда среднее расстояние или время поездки до предприятия менее важны, чем максимальное время обслуживания. Например, пожарные службы стараются отреагировать на чрезвычайную ситуацию за максимально короткое время. Это пример *задачи охвата.*

Мы рассмотрим вариант задачи охвата, в котором нужно определить единственное размещение, имеющее самое низкое значение максимального времени, необходимого для поездки в другой город.

Пример 24. Решим задачу охвата для схемы из примера 23. Заполним таблицу.

Пункт	Склад 1	Склад 2	Склад 3	Склад 4
1	0	6	4	7
2	6	0	9	8
3	4	9	0	3
4	7	8	3	0
Максимум	7	9	9	8

Поясним, как заполняется таблица. Все числа (кроме последней строки) взяты из решения примера 23. В последней строке указаны максимумы соответствующих столбцов.

Определим минимум в последней строке. Это 7. Поэтому склад нужно разместить в пункте 1.

Задача 24. Решить задачу охвата для схемы из задачи 23.

Глава 11

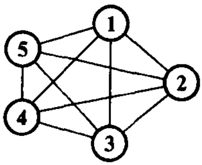
ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА. МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Имеется n населенных пунктов ($n \geqslant 1$) с заданными между ними расстояниями a_{ij} ($i, j = 1, ..., n$). Если прямого сообщения между пунктами i и j не существует, то полагаем $a_{ij} = \infty$. Также считаем $a_{ii} = \infty$, $i = 1, ..., n$. Так как на некоторых дорогах допускается только одностороннее движение, то, вообще говоря, $a_{ij} \neq a_{ji}$.

Требуется найти такой маршрут, начинающийся в данном населенном пункте, проходящий через все населенные пункты по одному разу и заканчивающийся в исходном пункте (такие циклы называются *гамильтоновыми*), чтобы его длина была минимальной. Это *задача коммивояжера*.

Задача коммивояжера может быть решена с помощью простого перебора всех возможных маршрутов. Но при больших n их число огромно. С целью сокращения перебора вариантов используют *метод ветвей и границ*.

Пример 25.



Расстояния между населенными пунктами заданы с помощью

матрицы $A = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 5 & \infty & 3 & 9 & 1 \\ 4 & 8 & \infty & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & \infty & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 7 & \infty \end{pmatrix}$.

Здесь a_{ij} — это длина пути от пункта i до пункта j. Например, длина пути от пункта 2 до пункта 4 равна $a_{24} = 9$. Решим задачу коммивояжера.

На каждом шаге мы либо включаем ребро (i, j) в ответ (и обозначаем это следующим образом: (i, j)), либо не включаем ребро (i, j) в ответ (и обозначаем это следующим образом: $(\overline{i, j})$).

Находим минимум в 1-й строке (это 2) и вычитаем его из всех элементов 1-й строки. Находим минимум во 2-й строке (это 1) и вычитаем его из всех элементов 2-й строки. И т. д. Получим матрицу:

$$\left[\begin{array}{ccccc} \infty & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 5 & \infty & 3 & 9 & 1 \\ 4 & 8 & \infty & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & \infty & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 7 & \infty \end{array}\right] \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{array} \to \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} \infty & 5 & 0 & 7 & 5 \\ 4 & \infty & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & \infty & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \infty & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & \infty \end{array}\right] \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \end{array}.$$

В полученной матрице находим минимумы в каждом столбце (1, 2, 0, 2, 0 соответственно) и вычитаем их из всех элементов соответствующего столбца.

Получим матрицу:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} \infty & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & \infty \end{array}\right] \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 18 \end{array} \end{array}.$$

Найденные минимумы в строках и столбцах — это так называемые *константы приведения*. Их сумма равна 18 (число в правом нижнем углу). Это оценка снизу на данном шаге длины маршрута.

Определим дугу, исключение которой максимально увеличило бы полученную оценку. С этой целью заменяем поочередно каждый из нулей на ∞ и вычисляем сумму наименьших элементов в строке и столбце, содержащих этот новый элемент ∞.

Для элемента (1, 3) это $3 + 0 = 3$, для элемента (2, 5) это $0 + 2 = 2$, для элемента (3, 1) это $0 + 0 = 0$ и т. д. Полученные суммы укажем в качестве верхних индексов для соответствующих нулей.

$$\left[\begin{array}{ccccc} \infty & 3 & 0^3 & 5 & 5 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0^2 \\ 0^0 & 3 & \infty & 0^2 & 0^0 \\ 0^0 & 0^1 & 0^0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 0^1 & 2 & \infty \end{array}\right].$$

Для элемента (1, 3) эта сумма наибольшая. Поэтому все множество маршрутов распадается на два класса: $\{(\overline{1, 3})\}$ (не содержат дугу (1, 3)) и $\{(1, 3)\}$ (содержат дугу (1, 3)).

Рассмотрим множество $\{(\overline{1, 3})\}$. Исключение дуги (1, 3) проводится с помощью замены элемента (1, 3) на ∞:

$$\begin{bmatrix} \infty & 3 & \infty & 5 & 5 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & \infty \end{bmatrix}.$$

В полученной матрице нужно определить сумму констант приведения.

$$\begin{bmatrix} \infty & 3 & \infty & 5 & 5 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & \infty \end{bmatrix}\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \to \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & 2 & 2 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & \infty \end{bmatrix}\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}. \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \quad 3 \end{matrix} \end{array}$$

Нижняя граница множества $\{\overline{(1, 3)}\}$ равна $H\{\overline{(1, 3)}\}$ = 18 (оценка на предыдущем шаге) + 3 (оценка на этом шаге) = 21.

Рассмотрим множество $\{(1, 3)\}$. Включение дуги (1, 3) проводится с помощью исключения 1-й строки (в множестве $\{(1, 3)\}$ из пункта 1 мы идем только в пункт 3) и 3-го столбца (в множестве $\{(1, 3)\}$ в пункт 3 мы можем попасть только из пункта 1); элемент (3, 1) заменяем на ∞ (исключаем возможность образования негамильтонова цикла). Получим матрицу:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & \infty & 6 & 0 \\ \infty & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 2 & \infty \end{bmatrix} \end{array}.$$

Здесь числа над матрицей и слева от матрицы — это номера строк и столбцов исходной матрицы. В полученной матрице нужно определить сумму констант приведения.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & \infty & 6 & 0 \\ \infty & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 2 & \infty \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array} \to \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & \infty & 6 & 0 \\ \infty & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 3 \\ 2 & 0 & 1 & \infty \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}. \\ & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \quad 1 \end{matrix} \end{array}$$

Нижняя граница множества $\{(1, 3)\}$ равна $H\{(1, 3)\}$ = 18 (оценка на предыдущем шаге) + 1 (оценка на этом шаге) = 19.

Так как $H\{(1, 3)\} < H\{\overline{(1, 3)}\}$ (19 < 21), то в дальнейшем ветвим множество $\{(1, 3)\}$.

Для матрицы $\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \infty & 6 & 0 \\ 3 & \infty & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & \infty \end{array}$ определим дугу, исключение которой максимально увеличило бы полученную оценку $H\{(1, 3)\} = 19$. С этой целью заменяем поочередно каждый из нулей на ∞ и вычисляем сумму наименьших элементов в строке и столбце, содержащих этот новый элемент ∞. Полученные суммы укажем в качестве верхних индексов для соответствующих нулей.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \infty & 6 & 0^3 \\ 3 & \infty & 3 & 0^1 & 0^0 \\ 4 & 0^2 & 0^0 & \infty & 3 \\ 5 & 2 & 0^1 & 1 & \infty \end{array}.$$

Для элемента (2, 5) эта сумма наибольшая. Поэтому все множество маршрутов распадается на два класса: $\{(1, 3), \overline{(2, 5)}\}$ (не содержат дугу (2, 5)) и $\{(1, 3), (2, 5)\}$ (содержат дугу (2, 5)).

Рассмотрим множество $\{(1, 3), \overline{(2, 5)}\}$. Исключение дуги (2, 5) проводится с помощью замены элемента (2, 5) на ∞:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \infty & 6 & \infty \\ 3 & \infty & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \infty & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & \infty \end{array}.$$

В полученной матрице нужно определить сумму констант приведения.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 4 & 5 & \\ \hline 2 & 3 & \infty & 6 & \infty & 3 \\ 3 & \infty & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \infty & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & \infty & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & \\ \hline 0 & \infty & 3 & \infty & 3 \\ \infty & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \infty & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}.$$

Нижняя граница множества $\{(1, 3), \overline{(2, 5)}\}$ равна $H\{(1, 3), \overline{(2, 5)}\} = H\{(1, 3)\} + 3 = 19 + 3 = 22$.

Рассмотрим множество $\{(1, 3), (2, 5)\}$. Включение дуги (2, 5) проводится с помощью исключения 2-й строки (в множестве $\{(1, 3), (2, 5)\}$ из пункта 2 мы идем только в пункт 5) и 5-го столбца (в множестве $\{(1, 3), (2, 5)\}$ в пункт 5 мы можем попасть только из пункта 2); элемент (5, 2) заменяем на ∞ (исключаем возможность образования негамильтонова цикла). Получим матрицу:

$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \\ 2 & \infty & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

В полученной матрице нужно определить сумму констант приведения.

$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \\ 2 & \infty & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \\ 1 & \infty & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}\begin{array}{c} \\ 0 \\ 0. \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

Нижняя граница множества $\{(1, 3), (2, 5)\}$ равна $H\{(1, 3), (2, 5)\} = H\{(1, 3)\} + 1 = 19 + 1 = 20 < H\{(1, 3), (\overline{2, 5})\} = 22$. Поэтому в дальнейшем ветвим множество $\{(1, 3), (2, 5)\}$.

Для матрицы $\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \\ 1 & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ определим дугу, исключение которой максимально увеличило бы полученную оценку $H\{(1, 3), (2, 5)\} = 20$. С этой целью заменяем поочередно нули на ∞ и вычисляем сумму наименьших элементов в строке и столбце, содержащих этот новый элемент ∞. Полученные суммы укажем в качестве верхних индексов для нулей.

$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 3 & 0^3 \\ 0^1 & 0^3 & \infty \\ 1 & \infty & 0^1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Для элементов (4, 2) и (3, 4) эта сумма наибольшая. Выберем любой из них. Например, (4, 2). В этом случае все множество маршрутов распадается на два класса: $\{(1, 3), (2, 5), \overline{(4, 2)}\}$ (не содержат дугу (4, 2)) и $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\}$ (содержат дугу (4, 2)).

Рассмотрим множество $\{(1, 3), (2, 5), \overline{(4, 2)}\}$. Исключение дуги (4, 2) проводится с помощью замены элемента (4, 2) на ∞:

$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 3 & 0 \\ 0 & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

В полученной матрице нужно определить сумму констант приведения.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 4 & \\ \hline 3 & \infty & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & \infty & \infty & 0 \\ 5 & 1 & \infty & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 3 & 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 4 & \\ \hline 3 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & \infty & \infty & 0 \\ 5 & 1 & \infty & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}.$$

Нижняя граница множества $\{(1, 3), (2, 5), \overline{(4, 2)}\}$ равна $H\{(1, 3), (2, 5), \overline{(4, 2)}\} = H\{(1, 3), (2, 5)\} + 3 = 20 + 3 = 23$.

Рассмотрим множество $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\}$. Включение дуги $(4, 2)$ проводится с помощью исключения 4-й строки (в множестве $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\}$ из пункта 4 мы идем только в пункт 2) и 2-го столбца (в множестве $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\}$ в пункт 2 мы можем попасть только из пункта 4). Получим матрицу:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

В полученной матрице нужно определить сумму констант приведения.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & 4 & \\ \hline 3 & \infty & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc|c} & 1 & 4 & \\ \hline 3 & \infty & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Нижняя граница множества $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\}$ равна $H\{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\} = H\{(1, 3), (2, 5)\} + 1 = 20 + 1 = 21 < H\{(1, 3), (2, 5), \overline{(4, 2)}\} = 23$. Поэтому в дальнейшем ветвим множество $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\}$.

В матрице $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ надо так выбрать нули, чтобы в каждой строке и каждом столбце был ровно один отмеченный нуль. Это элементы $(3, 4)$ и $(5, 1)$. Именно такие дуги и нужно добавить в множество $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\}$, то есть множество $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2), (3, 4), (5, 1)\}$ дает ответ на вопрос задачи. Оценка 21, полученная на предыдущем шаге, не меняется. Это минимальная длина маршрута.

А вот и сам маршрут: $1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 5 \to 1$. Сложив элементы $(1, 3), (3, 4), (4, 2), (2, 5), (5, 1)$ первоначальной матрицы $(2 + 5 + 6 + 1 + 7 = 21)$, можем убедиться, что длина этого маршрута действительно равна 21.

Задача 25. Для матрицы $\begin{pmatrix} \infty & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 9 & \infty & 9 & 3 & 8 \\ 7 & 1 & \infty & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & \infty & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & \infty \end{pmatrix}$ решить задачу коммивояжера.

Глава 12

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

§ 12.1. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Существуют поставщики и потребители некоторого однородного груза. У каждого поставщика имеется определенное количество единиц этого груза (*мощность поставщика*).

Каждому потребителю нужно некоторое количество единиц этого груза (*спрос потребителя*). Известны затраты на перевозку единицы груза от каждого из поставщиков к каждому из потребителей.

Нужно составить такой план перевозок от поставщиков к потребителям, при котором:

1) суммарные затраты на перевозку груза будут минимальны;
2) по возможности будут задействованы все мощности поставщиков;
3) по возможности будет удовлетворен весь спрос потребителей.

Закрытая модель транспортной задачи — это модель, в которой суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей. В противном случае модель называется *открытой*.

В процессе решения открытая модель всегда сводится к закрытой модели. Поэтому вначале рассмотрим закрытую модель.

Порядок решения для закрытой модели:

1) составляем специальную таблицу;
2) находим первоначальный план поставок (далее будут рассмотрены методы северо-западного угла и минимальной стоимости);
3) оптимизируем его распределительным методом.

§ 12.2. МЕТОД СЕВЕРО-ЗАПАДНОГО УГЛА

С помощью этого метода получается первоначальный план поставок.

Пример 26. У поставщиков A_1, A_2, A_3 сосредоточено соответственно 30, 190 и 250 единиц некоторого однородного груза, который необходимо доставить потребителям B_1, B_2, B_3, B_4 в количестве 70, 120, 150 и 130 единиц. Стоимость перевозок единицы груза от поставщиков к потребителям задается матрицей: $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Элемент в 1-й строке и 3-м столбце равен 2, то есть стоимость перевозки единицы груза от поставщика A_1 к потребителю B_3 равна 2, и т. д.

Построим первоначальный план поставок методом северо-западного угла.

Суммарная мощность поставщиков равна: 30 + 190 + 250 = 470.

Суммарный спрос потребителей равен: 70 + 120 + 150 + 130 = 470.

Это — закрытая модель. Запишем наши данные в виде специальной таблицы.

	70	**120**	**150**	**130**
30	4	7	2	3
190	3	1	2	4
250	5	6	3	7

В первом столбце указаны мощности поставщиков, в первой строке — спрос потребителей. Числа в левом верхнем углу клетки — это стоимость перевозок единицы груза от соответствующего поставщика к соответствующему потребителю, то есть значения из данной в условии матрицы.

План перевозок будет задан, если мы укажем, сколько единиц груза должен получить каждый потребитель от каждого поставщика, то есть если пустая таблица из трех строк и четырех столбцов будет заполнена.

Северо-западный угол таблицы — это ее левый верхний угол, то есть клетка в 1-й строке и 1-м столбце — клетка (1,1). Поэтому рассмотрим 1-го поставщика и 1-го потребителя. У поставщика A_1 есть 30 единиц груза, а потребителю B_1 нужно 70 единиц. Находим минимум из этих двух чисел: min (30,70) = 30. Клетка (1,1) перечеркивается по диагонали сплошной чертой (———), в правом нижнем углу пишется найденный минимум 30. Это означает, что A_1 должен поставить потребителю B_1 30 единиц груза. Такие клетки в дальнейшем будем называть *отмеченными*.

Так как поставщик A_1 израсходовал все свои 30 единиц груза, то мы исключаем его из рассмотрения. Поэтому все остальные клетки 1-й строки перечеркнем по диагонали пунктиром (----------). Такие клетки в дальнейшем из рассмотрения исключаем и будем называть *пустыми*.

После первого шага наша таблица примет следующий вид:

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3	1	2	4
250	5	6	3	7

Первая строка в дальнейшем не рассматривается.

Северо-западный угол этой таблицы — это клетка (2,1). Поэтому рассмотрим 2-го поставщика и 1-го потребителя. Мощность поставщика A_2 равна 190 единиц. Спрос потребителя B_1 — 70 единиц груза. Но 30 единиц груза он получил от поставщика A_1 (об этом говорит отмеченная клетка (1,1)). Поэтому непокрытый спрос потребителя B_1 равен $70 - 30 = 40$. Находим минимум $\min(190, 70 - 30) = 40$. Клетка (2,1) становится отмеченной. Мы запишем там этот минимум 40.

Поставщики A_1 (30 единиц) и A_2 (40 единиц) полностью покрывают спрос потребителя B_1 (70 единиц). Поэтому остальные клетки 1-го столбца объявим пустыми и в дальнейшем исключим из рассмотрения.

После второго шага таблица примет следующий вид:

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3 40	1	2	4
250	5	6	3	7

Северо-западный угол этой таблицы — это клетка (2,2). $\min(190 - 40, 120) = 120$.

Получаем следующую таблицу:

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3 40	1 120	2	4
250	5	6	3	7

Северо-западный угол этой таблицы — это клетка (2,3). min (190 – 40 – 120, 150) = 30. Получаем следующую таблицу:

	70	120	150	130
30	4 / 30	7	2	3
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4
250	5	6	3	7

Северо-западный угол этой таблицы — это клетка (3,3). min (250, 150 – 30) = 120. Получаем следующую таблицу:

	70	120	150	130
30	4 / 30	7	2	3
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4
250	5	6	3 / 120	7

Осталась одна незаполненная клетка — это клетка (3,4). min (250 – 120, 130) = 130. Получаем следующую таблицу:

	70	120	150	130
30	4 / 30	7	2	3
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4
250	5	6	3 / 120	7 / 130

После выполнения очередного шага мы исключали из рассмотрения либо строку, либо столбец. Только на последнем шаге отпали и строка, и столбец. Поэтому для полностью заполненной таблицы должно соблюдаться следующее соотношение: число отмеченных клеток = число строк + число столбцов – 1. В нашем случае это так: 6 = 3 + 4 – 1.

Если это соотношение не выполняется, то возникает так называемый *особый случай*. Как в этом случае поступать, будет рассказано дальше.

Посчитаем суммарные затраты. Для этого надо в каждой отмеченной клетке перемножить ее числа и результаты сложить: 4×30 + + 3×40 + 1×120 + 2×30 + 3×120 + 7×130 = 1690.

Задача 26. Найти первоначальный план поставок методом северо-западного угла.

	70	100	110
50	1	3	2
100	4	5	7
130	6	2	4

§ 12.3. МЕТОД МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ

Метод минимальной стоимости — еще один метод построения первоначального плана поставок. Он состоит в следующем.

Пример 27.

	70	120	150	130
30	4	7	2	3
190	3	1	2	4
250	5	6	3	7

На каждом шаге мы будем делать поставку в клетку с наименьшей стоимостью перевозки единицы груза среди всех незаполненных клеток.

Шаг 1. Среди всех незаполненных клеток у клетки (2,2) наименьшая стоимость перевозки единицы груза — 1. Поэтому делаем поставку в эту клетку. min (190, 120) = 120. Исключаем 2-й столбец как полностью «удовлетворенный».

	70	120	150	130
30	4	7	2	3
190	3	1 / 120	2	4
250	5	6	3	7

Шаг 2. Среди всех незаполненных клеток у клеток (1,3) и (2,3) наименьшая стоимость перевозки единицы груза — 2. Для клетки (1,3) min (30, 150) = 30. Для клетки (2,3) min (190 – 120, 150) = 70. Выби-

раем ту клетку, куда можно сделать наибольшую поставку. Так как 70 > 30, то это клетка (2,3). Исключаем 2-ю строку как полностью «использованную»:

	70	120	150	130
30	4	7	2	3
190	3	1 120	2 70	4
250	5	6	3	7

Среди всех незаполненных клеток у клетки (1,3) наименьшая стоимость перевозки единицы груза — 2. min (30, 150 – 70) = 30. Исключаем 1-ю строку как полностью «использованную»:

	70	120	150	130
30	4	7	2 30	3
190	3	1 120	2 70	4
250	5	6	3	7

И т. д. Окончательный вариант:

	70	120	150	130
30	4	7	2 30	3
190	3	1 120	2 70	4
250	5 70	6	3 50	7 130

Число отмеченных клеток = число строк + число столбцов – 1: 6 = 3 + 4 – 1.

Стоимость перевозки равна: 2×30 + 1×120 + 2×70 + 5×70 + 3×50 + + 7×130 = 1730.

Мы видим, что этот первоначальный план хуже первоначального плана из примера 26. Хотя бывает и наоборот.

Задача 27. В задаче 26 найти первоначальный план поставок методом минимальной стоимости.

§ 12.4. ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ

Пример 28.

	30	20	50
50	1	3	5
30	3	3	2
20	4	1	2

Воспользуемся методом северо-западного угла.

Шаг 1. Клетка (1,1). min (50, 30) = 30. Исключаем 1-й столбец:

	30	20	50
50	1 / 30	3	5
30	3	3	2
20	4	1	2

Шаг 2. Северо-западной клеткой является клетка (1, 2). min (50 – 30, 20) = 20. Мы видим, что отпадают и 1-я строка, и 2-й столбец. Это приведет к невыполнению соотношения: число отмеченных клеток = число строк + число столбцов – 1. Поэтому помимо клетки (1,2) мы объявляем отмеченной еще одну клетку в 1-й строке или 2-м столбце. Делаем туда так называемую *нулевую поставку*, то есть 0. Пусть это будет клетка (2,2).

	30	20	50
50	1 / 30	3 / 20	5
30	3	3 / 0	2
20	4	1	2

Так поступают каждый раз, когда на очередном шаге отпадают и строка, и столбец. Дальнейшее распределение поставок уже не составляет труда.

Задача 28. В примере 28 найти первоначальный план поставок.

§ 12.5. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

С помощью вышеприведенных методов мы научились находить первоначальный план поставок. Теперь надо выяснить, является ли найденный план оптимальным, и если нет, то как его оптимизировать. Для этого надо составить *матрицу оценок*.

Оценка клетки (i, j) вычисляется по следующему правилу: оценка i-й строки + оценка j-го столбца + число в левом верхнем углу клетки (i, j). Оценки строки и столбца выбираются таким образом, чтобы оценки всех отмеченных клеток были равны нулю. После этого оценки всех клеток записываются в виде матрицы — матрицы оценок. Если матрица оценок не содержит отрицательных чисел, то получен оптимальный план поставок. Иначе проводится оптимизация плана поставок.

Двигаясь из клетки с отрицательной оценкой по отмеченным клеткам (причем запрещается делать два последовательных шага в одной строке или в одном столбце), строят так называемый *цикл пересчета*. Внутри этого цикла перераспределяют поставки. Для полученной таблицы находят матрицу оценок и т. д. Рассмотрим подробнее эту схему на конкретном примере.

Пример 29. В примере 26 был получен следующий план поставок. Исследуем его на оптимальность.

	70	**120**	**150**	**130**
30	4 / 30	7	2	3
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4
250	5	6	3 / 120	7 / 130

Начинать можно с любой строки или любого столбца. Начнем с 1-го столбца, приписав ему ноль (впрочем, на 1-м шаге можно приписать столбцу любую оценку). В 1-м столбце находятся две отмеченные клетки (1,1) и (2,1). Их оценки должны быть нулевыми. Из этого условия, зная оценку 1-го столбца, найдем оценки 1-й и 2-й строк.

Оценка клетки (1,1) = оценка 1-й строки + оценка 1-го столбца + + число в левом верхнем углу клетки (1,1) = оценка 1-й строки + 0 + + 4 = 0 (так должно быть для отмеченной клетки). Отсюда оценка 1-й строки = –4.

Оценка клетки (2,1) = оценка 2-й строки + оценка 1-го столбца + + число в левом верхнем углу клетки (2,1) = оценка 2-й строки + 0 +

+ 3 = 0 (так должно быть для отмеченной клетки). Отсюда оценка 2-й строки = –3. Найденные оценки столбцов запишем под таблицей, найденные оценки строк — справа от таблицы.

После этого шага получаем следующую таблицу:

	70	**120**	**150**	**130**	
30	4 / 30	7	2	3	**–4**
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4	**–3**
250	5	6	3 / 120	7 / 130	
	0				

Теперь надо найти отмеченную клетку, для которой известны оценка строки или оценка столбца. Например, это клетка (2,2). Для нее известна оценка строки. Оценка клетки (2,2) = оценка 2-й строки + оценка 2-го столбца + число в левом верхнем углу клетки (2,2) = (–3) + оценка 2-го столбца + 1 = 0. Отсюда оценка 2-го столбца = 2.

После этого шага получаем следующую таблицу:

	70	**120**	**150**	**130**	
30	4 / 30	7	2	3	**–4**
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4	**–3**
250	5	6	3 / 120	7 / 130	
	0	**2**			

Для отмеченной клетки (2,3) мы знаем только оценку строки. Оценка клетки (2,3) = оценка 2-й строки + оценка 3-го столбца + + число в левом верхнем углу клетки (2,3) = (–3) + оценка 3-го столбца + 2 = 0. Отсюда оценка 3-го столбца = 1.

После этого шага получаем таблицу:

	70	**120**	**150**	**130**	
30	4 / 30	7	2	3	**–4**
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4	**–3**
250	5	6	3 / 120	7 / 130	
	0	**2**	**1**		

Оценка клетки (3,3) = оценка 3-й строки + оценка 3-го столбца + + число в левом верхнем углу клетки (3,3) = оценка 3-й строки + 1 + + 3 = 0. Отсюда оценка 3-й строки = –4.

После этого шага получаем следующую таблицу:

	70	**120**	**150**	**130**	
30	4 / 30	7	2	3	**–4**
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4	**–3**
250	5	6	3 / 120	7 / 130	**–4**
	0	**2**	**1**		

Оценка клетки (3,4) = оценка 3-й строки + оценка 4-го столбца + + число в левом верхнем углу клетки (3,4) = (–4) + оценка 4-го столбца + 7 = 0. Отсюда оценка 4-го столбца = –3.

После этого шага получаем следующую таблицу:

	70	**120**	**150**	**130**	
30	4 / 30	7	2	3	**–4**
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4	**–3**
250	5	6	3 / 120	7 / 130	**–4**
	0	**2**	**1**	**–3**	

Найдены оценки всех строк и столбцов. Вычислим оценки всех клеток и составим матрицу оценок.

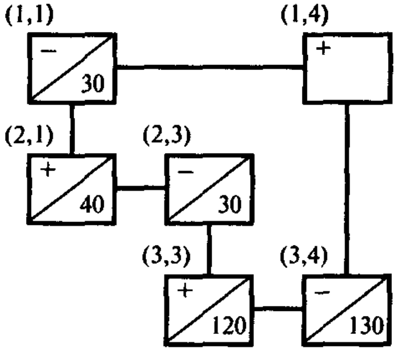
Оценка клетки (1,2) = оценка 1-й строки + оценка 2-го столбца + + число в левом верхнем углу клетки (1,2) = (–4) + 2 + 7 = 5.

Оценка клетки (1,3) = оценка 1-й строки + оценка 3-го столбца + + число в левом верхнем углу клетки (1,3) = (–4) + 1 + 2 = –1. И т. д.

Получаем следующую матрицу оценок: $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Так как матрица оценок содержит отрицательные числа, то наш план поставок является неоптимальным. Проведем его оптимизацию. Выбираем клетку с наименьшей оценкой. Это клетка (1,4). Ее оценка равна –4. Наша задача — построить цикл пересчета. Выходя из клетки (1,4) и двигаясь только по отмеченным клеткам, нужно вернуться в стартовую клетку (1,4). При этом запрещается делать два последовательных шага в одной строке или в одном столбце. Например, подходит цикл (1,4)–(1,1)–(2,1)–(2,3)–(3,3)–(3,4)–(1,4).

Нарисуем этот цикл. Для каждой клетки указаны ее индексы и объем поставок.



Стартовой клетке (1,4) припишем знак «+». Двигаясь по циклу, чередуем знаки. Среди поставок в клетки со знаком «–» (это клетки (1,1), (2,3), (3,4)) найдем минимальную: min (30, 30, 130) = 30. После этого в клетках со знаком «–» уменьшим поставки на этот минимум, а в клетках со знаком «+» увеличим на этот минимум. Клетка (1,4) становится отмеченной.

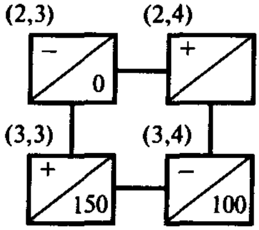
Если получена одна клетка с нулевой поставкой, то она становится пустой. У нас таких клеток две — (1,1), (2,3). Поэтому пустой объявим только одну из них с наибольшим тарифом — клетку (1,1). В клетку (2,3) будет сделана нулевая поставка, и она останется отмеченной. Это делается для выполнения соотношения: число отмеченных клеток = число строк + число столбцов – 1. Получаем новый план поставок.

Нужно следить, чтобы суммы поставок по строкам и столбцам были равны мощностям поставщиков и спросу потребителей соответственно.

	70	**120**	**150**	**130**	
30	4	7	2	3 / 30	**0**
190	3 / 70	1 / 120	2 / 0	4	**–3**
250	5	6	3 / 150	7 / 100	**–4**
	0	**2**	**1**	**–3**	

Для нового плана находим оценки строк и столбцов. Затем получим матрицу оценок клеток: $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

План является неоптимальным, так как оценка клетки (2,4) меньше нуля. Строим для нее цикл пересчета: (2,4)–(3,4)–(3,3)–(2,3)–(2,4).

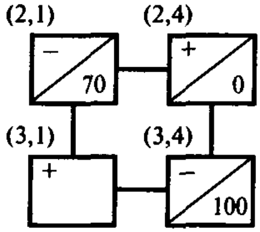


min (0, 100) = 0. Клетка (2,3) становится пустой, а клетка (2,4) — отмеченной (нулевая поставка). Новый план поставок:

	70	**120**	**150**	**130**	
30	4	7	2	3 / 30	**–2**
190	3 / 70	1 / 120	2	4 / 0	**–3**
250	5	6	3 / 150	7 / 100	**–6**
	0	**2**	**3**	**–1**	

Для нового плана находим оценки строк и столбцов. Затем получим матрицу оценок клеток: $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

План является неоптимальным, так как оценка клетки (3,1) меньше нуля. Строим для нее цикл пересчета: (3,1)–(2,1)–(2,4)–(3,4)–(3,1).



min (70, 100) = 70. В клетках с «+» поставки увеличиваются на 70, а в клетках с «–» поставки уменьшаются на 70. Клетка (2,1) становится пустой. Новый план поставок:

	70	**120**	**150**	**130**	
30	4	7	2	3 / 30	**–1**
190	3	1 / 120	2	4 / 70	**–2**
250	5 / 70	6	3 / 150	7 / 30	**–5**
	0	**1**	**2**	**–2**	

Находим оценки строк и столбцов. Получаем матрицу оценок: $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица оценок не содержит отрицательных чисел. Получен оптимальный план поставок. Суммарные затраты на перевозку груза равны: $3\times30 + 1\times120 + 4\times70 + 5\times70 + 3\times150 + 7\times30 = 1500$.

Напомним, что суммарные затраты на перевозку груза для первоначального плана были 1690.

Поставщик A_1 должен поставить 30 единиц груза потребителю B_4. Поставщик A_2 должен поставить 120 единиц груза потребителю B_2 и 70 единиц груза потребителю B_4. Поставщик A_3 должен поставить 70 единиц груза потребителю B_1, 150 единиц груза потребителю B_3 и 30 единиц груза потребителю B_4.

Задача 29. Найти оптимальный план поставок в задаче 26.

§ 12.6. ОТКРЫТАЯ МОДЕЛЬ

Открытая модель сводится к закрытой модели.

§ 12.6.1. Фиктивный потребитель

Если суммарная мощность поставщиков больше суммарного спроса потребителей, то вводится *фиктивный потребитель*, которому приписывается спрос, равный разнице между суммарной мощностью поставщиков и суммарным спросом потребителей. Стоимость перевозки единицы груза от поставщиков до фиктивного потребителя полагается равной нулю. Полученная закрытая модель решается. Груз, предназначенный фиктивному потребителю, остается у поставщика.

Пример 30.

	30	**40**	**60**
40	7	8	6
60	6	5	10
50	4	3	9

Суммарная мощность поставщиков $40 + 60 + 50 = 150$, суммарный спрос потребителей $30 + 40 + 60 = 130$. Это открытая модель. Вводим фиктивного потребителя, которому припишем спрос $150 - 130 = 20$. Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя равна нулю. Получаем следующую закрытую модель.

	30	40	60	20
40	7	8	6	0
60	6	5	10	0
50	4	3	9	0

Задача 30. Найти оптимальный план поставок в примере 30.

§ 12.6.2. Фиктивный поставщик

Если суммарная мощность поставщиков меньше суммарного спроса потребителей, то вводится *фиктивный поставщик*, которому приписывается мощность, равная разнице между суммарным спросом потребителей и суммарной мощностью поставщиков. Стоимость перевозки единицы груза от фиктивного поставщика до потребителей полагается равной нулю. Полученная закрытая модель решается. Потребитель, приписанный к фиктивному поставщику, просто не получает соответствующего груза.

Пример 31.

	20	30	50
10	6	7	5
40	7	6	11
30	3	2	8

Суммарная мощность поставщиков $10 + 40 + 30 = 80$, суммарный спрос потребителей $20 + 30 + 50 = 100$. Модель — открытая. Вводим фиктивного поставщика, которому припишем мощность $100 - 80 = 20$. Стоимость перевозки единицы груза от фиктивного поставщика до потребителей равна нулю. Получаем следующую закрытую модель.

	20	30	50
10	6	7	5
40	7	6	11
30	3	2	8
20	0	0	0

Задача 31. Найти оптимальный план поставок в примере 31.

§ 12.7. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И Excel

В Excel существует надстройка *Поиск решения* (*Solver*), которая, в частности, помогает решать транспортные задачи. Нужно воспользоваться меню *Сервис → Поиск решения*. Если в меню *Сервис* отсутствует команда *Поиск решения*, необходимо выполнить команду *Сервис → Надстройки*. Найти элемент *Поиск решения* и поставить «галочку» рядом с ним. Если в окне *Надстройки* нет элемента *Поиск решения*, то необходимо доустановить Excel.

Пример 32. Рассматривается следующая транспортная задача.

	70	**120**	**150**	**130**
30	4	7	2	3
190	3	1	2	4
250	5	6	3	7

В 1-м столбце указаны мощности поставщиков, в 1-й строке — спрос потребителей. Остальные числа таблицы — это стоимость перевозки единицы груза от соответствующего поставщика к соответствующему потребителю. Например, стоимость перевозки единицы

	A	B	C	D	E
1		70	120	150	130
2	30	4	7	2	3
3	190	3	1	2	4
4	250	5	6	3	7
5	Переменные				
6					
7					
8	Целевая функция	=4*B5+7*C5+2*D5+3*E5 +3*B6+1*C6+2*D6+4*E6 +5*B7+6*C7+3*D7+7*E7			
9	Ограничения				
10	70	= B5 + B6 + B7			
11	120	= C5 + C6 + C7			
12	150	= D5 + D6 + D7			
13	130	= E5 + E6 + E7			
14	30	= B5 + C5 + D5 + E5			
15	190	= B6 + C6 + D6 + E6			
16	250	= B7 + C7 + D7 + E7			

груза от 3-го поставщика ко 2-му потребителю равна 6. Нужно составить оптимальный план поставок.

Если модель открытая, то ее нужно свести к закрытой модели. При решении закрытой модели можно воспользоваться Excel. В данном случае модель закрытая (470 = 470).

Вводим формулы. Выделяем ячейку B8, в которой вычисляется целевая функция. Вызываем *Сервис* → *Поиск решения*. В диалоговом окне в поле ввода *Установить целевую ячейку* уже содержится $B$8. Установим переключатель *Равной минимальному значению*. В поле ввода *Изменяя ячейки* нужно указать $B$5:$E$7.

Щелкнем кнопку *Добавить*. Появится диалоговое окно *Добавление ограничения*. В поле ввода *Ссылка на ячейку* укажем $B$10. Правее в выпадающем списке с условными операторами выберем =. В поле ввода *Ограничение* введем $A$10. Щелкнем кнопку *Добавить* и введем другие ограничения. *OK*. Мы окажемся в диалоговом окне и увидим введенные ограничения. С помощью кнопок *Изменить* и *Удалить* мы можем изменить и удалить ограничение.

Щелкнем кнопку *Параметры*. Установим два флажка: *Линейная модель* и *Неотрицательные значения*. *OK*. *Выполнить*.

В ячейке B8 указано 1500. Это минимальные затраты на перевозку. В ячейках B5:E7 указаны значения оптимального плана поставок.

	A	B	C	D	E
5	Переменные	0	0	0	30
6		0	120	0	70
7		70	0	150	30

1-й поставщик должен доставить 30 единиц груза 4-му потребителю. 2-й поставщик должен доставить 120 единиц груза 2-му потребителю и 70 единиц груза 4-му потребителю. 3-й поставщик должен доставить 70 единиц груза 1-му потребителю, 150 единиц груза 3-му потребителю и 30 единиц груза 4-му потребителю.

Задача 32. Используя надстройку *Поиск решения*, решить следующую транспортную задачу.

	70	**100**	**110**
50	1	3	2
100	4	5	7
130	6	2	4

Глава 13

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА В СЕТЕВОЙ ПОСТАНОВКЕ

§ 13.1. ЧТО ТАКОЕ ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ?

Транспортная задача может быть задана в виде специальной схемы — *транспортной сети*. Пункты расположения поставщиков и потребителей изображаются кругами и называются *вершинами сети*. Мощности поставщиков будем отмечать положительными числами, а спрос потребителей — отрицательными числами. Дороги, связывающие поставщиков и потребителей, изображаются в виде линий и называются *ребрами сети*. Реальный масштаб не соблюдается. Возможны вершины с нулевым запасом груза — *нулевые вершины*.

В процессе решения открытая модель всегда сводится к закрытой модели. Поэтому сначала рассмотрим закрытую модель. Нужно построить первоначальный план поставок любым способом. Поставки груза из вершины в вершину будем обозначать стрелками с указанием величин поставок.

На план поставок налагаются следующие условия:

1) все мощности поставщиков должны быть распределены;

2) весь спрос потребителей должен быть удовлетворен;

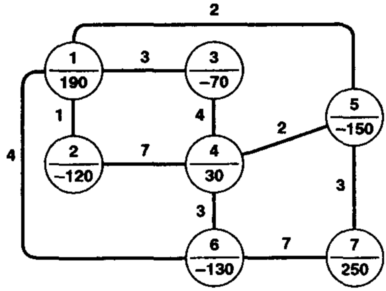
3) к каждой вершине должна подходить или выходить из нее хотя бы одна стрелка;

4) число стрелок = число вершин – 1;

5) стрелки не должны образовывать замкнутый контур (при этом неважно, двигаемся мы по стрелкам или против них).

Особый случай транспортной задачи в сетевой постановке проявляется в том, что при полном использовании мощностей поставщиков и полном удовлетворении спроса потребителей число стрелок $< n - 1$, где n — общее число вершин (в том числе и нулевые). Тогда дополнительно вводится нужное количество стрелок. При этом стрелки не должны образовывать замкнутый контур.

Пример 33. Задана следующая транспортная сеть:



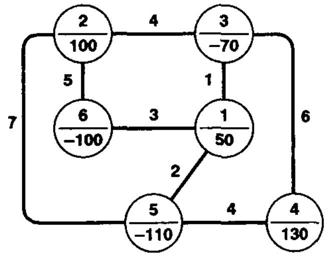
Верхнее число вершины — это номер соответствующего поставщика или потребителя, нижнее число вершины — это мощность поставщика (для положительных чисел) или спрос потребителя (для отрицательных чисел).

У поставщиков 1, 4 и 7 есть 190, 30 и 250 единиц груза соответственно. Потребителям 2, 3, 5 и 6 требуется 120, 70, 150 и 130 единиц груза соответственно.

Стоимость перевозки единицы груза от поставщика 1 до потребителя 2 равна 1, стоимость перевозки единицы груза от поставщика 7 до потребителя 5 равна 3 и т. д.

Суммарная мощность поставщиков равна 190 + 30 + 250 = 470, суммарный спрос потребителей равен 120 + 70 + 150 + 130 = 470. Это закрытая модель.

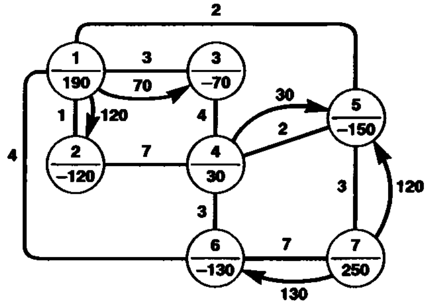
Задача 33. Какую информацию можно почерпнуть из следующей транспортной сети?



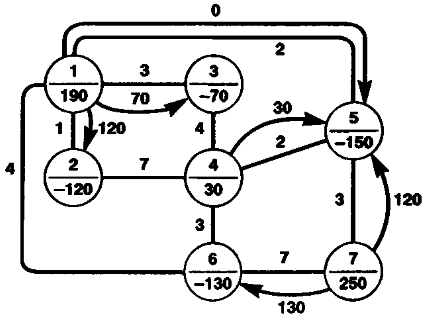
§ 13.2. ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЙ ПЛАН ПОСТАВОК

Пример 34. Найдем первоначальный план поставок в примере 33.

Способ расстановки стрелок может быть любым. Важно только выполнение условий 1–5. Все поставки указаны стрелками.



У нас 5 стрелок и 7 вершин. Не выполняется следующее условие: число стрелок = число вершин − 1, так как $5 \neq 7 - 1$. Введем еще одну стрелку с нулевой поставкой. Например, $1 \to 5$. Получим следующий первоначальный план поставок.



Затраты на перевозку равны $120 \times 1 + 70 \times 3 + 0 \times 2 + 30 \times 2 + 120 \times 3 + 130 \times 7 = 1660$.

Задача 34. Найти первоначальный план поставок в задаче 33.

§ 13.3. ПРОВЕРКА ПЛАНА ПОСТАВОК НА ОПТИМАЛЬНОСТЬ

Нужно проверить план поставок на оптимальность. Для этого требуется вычислить *потенциалы вершин.*

Одной из вершин припишем неотрицательное значение потенциала (например, 0). Для наглядности потенциал будем заключать в квадрат. Двигаясь по стрелкам, определяем потенциалы остальных вершин по следующему правилу:

1) если мы двигаемся по стрелке, то к потенциалу вершины прибавляем стоимость перевозки единицы груза по этой стрелке (а не число, которое написано на стрелке);

2) если мы двигаемся против стрелки, то из потенциала вершины вычитаем стоимость перевозки единицы груза по этой стрелке.

После вычисления потенциалов вершин нужно найти характеристики ребер без стрелок по следующему правилу: стоимость перевозки единицы груза для данного ребра – больший потенциал вершин этого ребра + меньший потенциал вершин этого ребра.

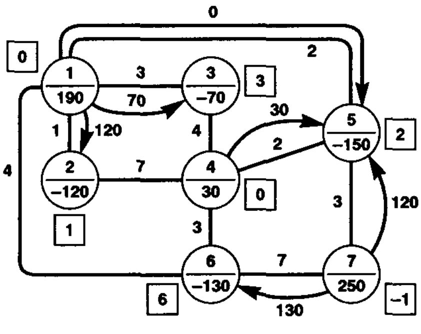
Если нет ребер с отрицательными характеристиками, то получен оптимальный план поставок.

Пример 35. Проверим план поставок из примера 34 на оптимальность. Припишем вершине 1 потенциал 0.

Из вершины 1 в вершину 2 ведет стрелка. Стоимость перевозки единицы груза для данного ребра равна 1. Поэтому потенциал вершины 2 равен 0 (потенциал вершины 1) + 1 (стоимость перевозки единицы груза по ребру $1 \to 2$) = 1.

Из вершины 1 в вершину 5 ведет стрелка. Стоимость перевозки единицы груза для данного ребра равна 2. Поэтому потенциал вершины 5 равен 0 (потенциал вершины 1) + 2 (стоимость перевозки единицы груза по ребру $1 \to 5$) = 2.

В вершину 5 из вершины 7 ведет стрелка. Стоимость перевозки единицы груза для данного ребра равна 3. Поэтому потенциал вершины 7 равен 2 (потенциал вершины 5) – 3 (стоимость перевозки единицы груза по ребру $7 \to 5$) = –1. И т. д.



У нас четыре ребра без стрелок: (1, 6), (2, 4), (3, 4), (4, 6). Найдем их характеристики.

Характеристика ребра (1, 6) = стоимость перевозки единицы груза для ребра (1, 6) – больший потенциал вершин ребра (1, 6) + меньший потенциал вершин ребра (1, 6) = 4 – 6 + 0 = –2 < 0.

Характеристика ребра (2, 4) = стоимость перевозки единицы груза для ребра (2, 4) – больший потенциал вершин ребра (2, 4) + меньший потенциал вершин ребра (2, 4) = 7 – 1 + 0 = 6.

Характеристика ребра (3, 4) = стоимость перевозки единицы груза для ребра (3, 4) – больший потенциал вершин ребра (3, 4) + меньший потенциал вершин ребра (3, 4) = 4 – 3 + 0 = 1.

Характеристика ребра (4, 6) = стоимость перевозки единицы груза для ребра (4, 6) – больший потенциал вершин ребра (4, 6) + меньший потенциал вершин ребра (4, 6) = 3 – 6 + 0 = –3 < 0.

Характеристики ребер (4, 6) и (1, 6) отрицательны. Поэтому полученный план поставок не является оптимальным.

Задача 35. Проверить план поставок из задачи 34 на оптимальность.

§ 13.4. УЛУЧШЕНИЕ ПЛАНА ПОСТАВОК

Выбираем ребро с наименьшей отрицательной характеристикой и рисуем к нему стрелку от вершины с меньшим потенциалом к вершине с большим потенциалом. Образуется замкнутый контур из стрелок (при этом неважно, двигаемся мы по стрелкам или против них).

Определяем минимум среди поставок для стрелок этого контура, направление которых противоположно направлению новой стрелки.

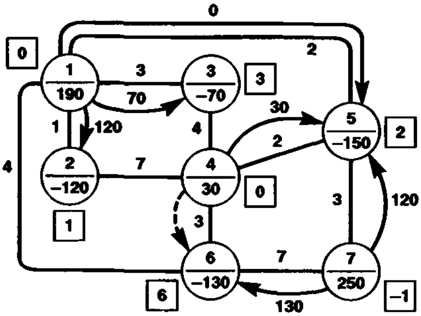
Для контура поставки на стрелках в направлении новой стрелки увеличим на этот минимум, а поставки на стрелках противоположного направления уменьшим на этот минимум. Стрелка, которой соответствует выбранный минимум, ликвидируется. Поставки для стрелок вне контура остаются без изменений.

Для нового плана поставок число стрелок = число вершин – 1. К этому плану поставок мы можем применить рассмотренный выше алгоритм проверки на оптимальность.

Пример 36. В примере 35 у ребра (4, 6) наименьшая отрицательная характеристика (–3). Рисуем к нему стрелку от вершины с меньшим потенциалом (4) к вершине с большим потенциалом (6).

Образуется замкнутый контур из стрелок 4 – 6 – 7 – 5 – 4 (при этом не важно, двигаемся мы по стрелкам или против них). В этом контуре направление стрелок 7 → 6 и 4 → 5 противоположно направлению новой стрелки 4 → 6.

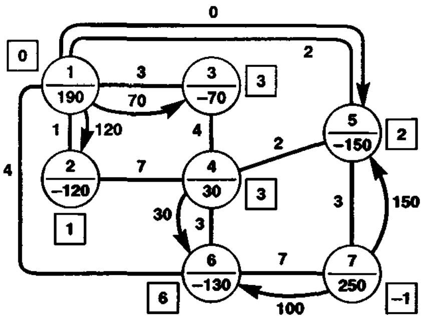
Определим минимум среди поставок для стрелок 7 → 6 и 4 → 5: min (30, 130) = 30.



Для контура 4 – 6 – 7 – 5 – 4 поставки на стрелках в направлении новой стрелки 4 → 6 (4 → 6 и 7 → 5) увеличим на этот минимум: 0 + 30 = = 30 и 120 + 30 = 150 соответственно.

Для контура 4 – 6 – 7 – 5 – 4 поставки на стрелках 7 → 6 и 4 → 5 уменьшим на этот минимум: 130 – 30 = 100 и 30 – 30 = 0 соответственно, то есть стрелку 4 → 5 ликвидируем.

Поставки для стрелок вне контура остаются без изменений. Число стрелок = 6 = число вершин – 1. Получаем следующий план поставок. Исследуем его на оптимальность.



Припишем вершине 1 потенциал 0 и пересчитаем потенциалы других вершин. У нас четыре ребра без стрелок: (1, 6), (2, 4), (3, 4), (4, 5). Найдем их характеристики.

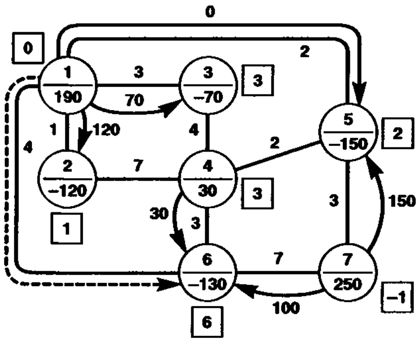
Характеристика ребра (1, 6) = стоимость перевозки единицы груза для ребра (1, 6) – больший потенциал вершин ребра (1, 6) + меньший потенциал вершин ребра (1, 6) = 4 – 6 + 0 = –2 < 0.

Характеристика ребра (2, 4) = стоимость перевозки единицы груза для ребра (2, 4) – больший потенциал вершин ребра (2, 4) + меньший потенциал вершин ребра (2, 4) = 7 – 3 + 1 = 5.

Характеристика ребра (3, 4) = стоимость перевозки единицы груза для ребра (3, 4) – больший потенциал вершин ребра (3, 4) + меньший потенциал вершин ребра (3, 4) = 4 – 3 + 3 = 4.

Характеристика ребра (4, 5) = стоимость перевозки единицы груза для ребра (4, 5) – больший потенциал вершин ребра (4, 5) + меньший потенциал вершин ребра (4, 5) = 2 – 3 + 2 = 1.

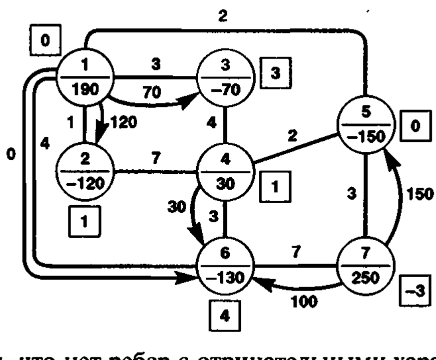
Характеристика ребра (1, 6) отрицательна. Поэтому полученный план поставок не является оптимальным. Рисуем к ребру (1, 6) стрелку от вершины с меньшим потенциалом (1) к вершине с большим потенциалом (6).



Образуется замкнутый контур из стрелок 1 – 6 – 7 – 5 – 1 (при этом не важно, двигаемся мы по стрелкам или против них). В этом контуре направление стрелок 7 → 6 и 1 → 5 противоположно направлению новой стрелки 1 → 6.

Определим минимум среди поставок для стрелок 7 → 6 и 1 → 5: min (100, 0) = 0. Поэтому все поставки остаются без изменений. Стрелку 1 → 5 ликвидируем.

Число стрелок = 6 = число вершин – 1. Получаем следующий план поставок. Проверим его на оптимальность.



Убеждаемся, что нет ребер с отрицательными характеристиками, то есть это оптимальный план поставок. Затраты на перевозку равны $120\times1 + 70\times3 + 0\times4 + 30\times3 + 150\times3 + 100\times7 = 1570$.

Задача 36. Если в задаче 35 первоначальный план поставок не является оптимальным, то получить из него оптимальный план поставок.

§ 13.5. ОТКРЫТАЯ МОДЕЛЬ

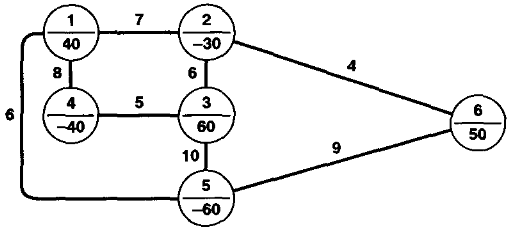
Открытая модель сводится к закрытой модели.

§ 13.5.1. Фиктивный потребитель

Если суммарная мощность поставщиков больше суммарного спроса потребителей, то вводится *фиктивный потребитель* (фиктивная вершина), которому приписывается спрос, равный разности между суммарной мощностью поставщиков и суммарным спросом потребителей. Фиктивная вершина соединяется непосредственно со всеми поставщиками.

Стоимость перевозки единицы груза от поставщиков до фиктивного потребителя следует брать одинаковой и сравнительно большой, чтобы исключить возможность использования фиктивной вершины в качестве промежуточного пункта. Груз, предназначенный фиктивному потребителю, остается у поставщика.

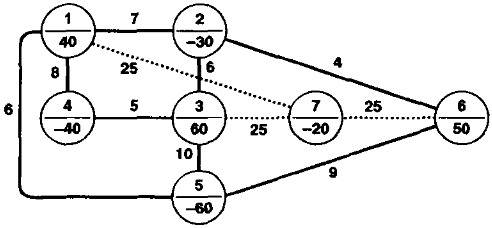
Пример 37. Задана следующая транспортная сеть.



Суммарная мощность поставщиков равна 40 + 60 + 50 = 150. Суммарный спрос потребителей равен 40 + 60 + 30 = 130. Это открытая модель.

Вводим фиктивного потребителя, которому припишем спрос 150 – 130 = 20. Это будет вершина 7. Соединим ее с вершинами 1, 3, 6 (поставщики).

Стоимость перевозки единицы груза от поставщиков до фиктивного потребителя возьмем одинаковой и сравнительно большой, чтобы исключить возможность использования фиктивной вершины в качестве промежуточного пункта. Например, 25. Получим следующую закрытую модель.



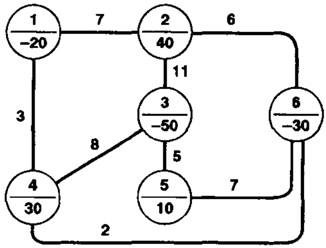
Задача 37. Найти оптимальный план поставок в примере 37.

§ 13.5.2. Фиктивный поставщик

Если суммарная мощность поставщиков меньше суммарного спроса потребителей, то вводится *фиктивный поставщик* (фиктивная вершина), которому приписывается мощность, равная разности между суммарным спросом потребителей и суммарной мощностью поставщиков. Фиктивная вершина соединяется непосредственно со всеми потребителями.

Стоимость перевозки единицы груза от фиктивного поставщика до потребителей следует брать одинаковой и сравнительно большой, чтобы исключить возможность использования фиктивной вершины в качестве промежуточного пункта. Потребитель, приписанный к фиктивному поставщику, просто не получает соответствующего груза.

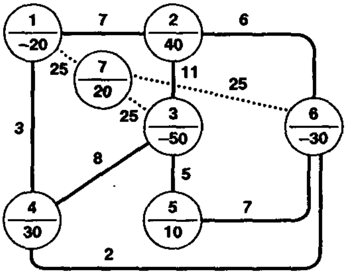
Пример 38. Задана следующая транспортная сеть.



Суммарная мощность поставщиков равна 40 + 30 + 10 = 80. Суммарный спрос потребителей равен 20 + 50 + 30 = 100. Это открытая модель.

Вводим фиктивного поставщика, которому припишем мощность 100 – 80 = 20. Это будет вершина 7. Соединим ее с вершинами 1, 3, 6 (потребители).

Стоимость перевозки единицы груза от фиктивного поставщика до потребителей возьмем одинаковой и сравнительно большой, чтобы исключить возможность использования фиктивной вершины в качестве промежуточного пункта. Например, 25. Получим следующую закрытую модель.



Задача 38. Найти оптимальный план поставок в примере 38.

Глава 14

ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. В этом случае число поставщиков равно числу потребителей, мощность каждого поставщика и спрос каждого потребителя равны единице. Решается задача о назначениях *венгерским методом*. Сначала рассмотрим задачу минимизации целевой функции (экономический смысл величин исходной матрицы может быть любым).

§ 14.1. МИНИМИЗАЦИЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

1. В каждой строке матрицы задачи находим минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов строки.

2. В каждом столбце полученной матрицы находим минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов столбца.

3. Находим строку с одним нулем. Этот нуль заключается в квадрат $\boxed{0}$ и называется *отмеченным*. В столбце, где находится отмеченный нуль, все остальные нули зачеркиваются и в дальнейшем не рассматриваются. Это шаг продолжаем, пока возможно.

4. Находим столбец с одним нулем и этот нуль отмечаем. В строке, где находится отмеченный нуль, все остальные нули зачеркиваются. Этот шаг продолжать, пока возможно.

5. Если после шагов 3 и 4 еще есть неотмеченные нули, то отмечаем любой из них, а в строке и в столбце, где находится этот отмеченный нуль, все остальные нули зачеркиваем.

6. Если каждая строка и каждый столбец матрицы содержат ровно один отмеченный нуль, то получено оптимальное решение. Каждый из отмеченных нулей указывает прикрепление поставщика к потребителю. В противном случае проводим минимальное число пересекающихся горизонтальных и вертикальных прямых через все нули. Среди не зачеркнутых этими прямыми чисел находим минимум. Этот минимум вычитаем из всех незачеркнутых чисел и приба-

вляем ко всем числам на пересечении прямых. К полученной матрице применяем вышеприведенный алгоритм, начиная с шага 3.

Пример 39. Существуют 4 базы A_1, A_2, A_3, A_4 и 4 торговые точки B_1, B_2, B_3, B_4. Расстояния от баз до торговых точек заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 12 & 5 \\ 3 & 14 & 9 & 1 \\ 13 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 15 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Нужно так прикрепить базы к торговым точкам, чтобы суммарное расстояние было минимальным.

Находим минимум в 1-й строке (это 5) и вычитаем его из всех элементов 1-й строки. Находим минимум во 2-й строке (это 1) и вычитаем его из всех элементов 2-й строки. И т. д.

Получим матрицу:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 10 & 20 & 12 & 5 \\ 3 & 14 & 9 & 1 \\ 13 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 15 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 1 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \\ \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 15 & 7 & 0 \\ 2 & 13 & 8 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array}.$$

В полученной матрице находим минимумы в каждом столбце (0, 2, 0, 0 соответственно) и вычитаем их из всех элементов соответствующего столбца.

Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 5 & 13 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & 8 & \xcancel{0} \\ 7 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В 1-й строке один нуль. Отметим его. Он находится в 4-м столбце. Поэтому в 4-м столбце зачеркнем все остальные нули.

Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 5 & 13 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & 8 & \xcancel{0} \\ 7 & 0 & 0 & 3 \\ \boxed{0} & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично поступаем с 4-й строкой. Больше нет строк с одним нулем. Зато есть столбцы с одним нулем. 2-й столбец содержит один нуль, который мы и отметим. Этот нуль находится в 3-й строке. Поэтому в 3-й строке зачеркнем все нули.

Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 5 & 13 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & 8 & \cancel{0} \\ 7 & \boxed{0} & \cancel{0} & 3 \\ \boxed{0} & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Больше нет нулей. Полученное распределение не является оптимальным, так как во 2-й строке нет отмеченных нулей. Проведем минимальное число пересекающихся горизонтальных и вертикальных прямых через все нули. Одной или двух прямых здесь недостаточно, а вот три прямые подойдут. Можно применять любой способ проведения прямых.

$$\begin{pmatrix} 5 & 13 & 7 & 0 \\ 2 & 11 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Среди не зачеркнутых этими прямыми чисел находим минимум: min (5, 13, 7, 2, 11, 8) = 2. Этот минимум вычитается из всех незачеркнутых чисел и прибавляется ко всем числам на пересечении прямых (3, 3). Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

К этой матрице применим вышеприведенный алгоритм.

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 9 & 6 & \cancel{0} \\ 7 & \boxed{0} & \cancel{0} & 5 \\ \cancel{0} & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Полученное распределение не является оптимальным, так как в 3-м столбце нет отмеченных нулей. Проводим прямые.

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

min (11, 5, 9, 6, 6, 1) = 1. Этот минимум вычитается из всех незачеркнутых чисел и прибавляется ко всем числам на пересечении прямых (7, 5). Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 3 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

К этой матрице применим вышеприведенный алгоритм.

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 8 & 5 & \cancel{0} \\ 8 & \boxed{0} & \cancel{0} & 6 \\ \cancel{0} & 5 & \boxed{0} & 5 \end{pmatrix}.$$

В каждой строке и каждом столбце матрицы ровно один отмеченный нуль. Это оптимальное распределение. Возможно, оно не является единственным. A_1 прикрепляется к B_4, A_2 — к B_1, A_3 — к B_2, A_4 — к B_3. Как найти суммарное расстояние? Надо сложить числа, которые расположены в исходной матрице на месте отмеченных нулей: $5 + 3 + 8 + 8 = 24$.

Задача 39. Найти назначения, минимизирующие целевую функцию для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

§ 14.2. МАКСИМИЗАЦИЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Случай максимизации целевой функции сводится к задаче минимизации для матрицы, полученной из исходной матрицы умножением каждого элемента на -1.

Пример 40. Существуют 4 продавца A_1, A_2, A_3, A_4 и 4 торговые точки B_1, B_2, B_3, B_4. Эффективность работы продавцов на торговых точках задается матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & 11 \\ 5 & 8 & 8 & 4 \\ 6 & 12 & 15 & 9 \end{pmatrix}$.

Найти оптимальное распределение продавцов по торговым точкам.

Приведенная задача — это задача максимизации целевой функции. Умножим исходную матрицу на -1.

$$\begin{pmatrix} -9 & -3 & -4 & -8 \\ -4 & -6 & -7 & -11 \\ -5 & -8 & -8 & -4 \\ -6 & -12 & -15 & -9 \end{pmatrix}.$$

К полученной матрице можно применить рассмотренный выше алгоритм.

Задача 40. Найти оптимальное распределение продавцов по торговым точкам в примере 40.

§ 14.3. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ И Excel

Пример 41. Существуют 4 базы A_1, A_2, A_3, A_4 и 4 торговые точки B_1, B_2, B_3, B_4. Расстояния от баз до торговых точек заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 12 & 5 \\ 3 & 14 & 9 & 1 \\ 13 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 15 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Нужно так прикрепить базы к торговым точкам, чтобы суммарное расстояние было минимальным.

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. Поэтому при ее решении также можно воспользоваться надстройкой *Поиск решения*. Если ищется минимум целевой функции, то в диалоговом окне нужно установить переключатель *Равной минимальному значению*. Если ищется максимум целевой функции, то в диалоговом окне нужно установить переключатель *Равной максимальному значению*.

Мы ищем минимум целевой функции для следующей транспортной задачи:

	1	1	1	1
1	10	20	12	5
1	3	14	9	1
1	13	8	6	9
1	7	15	8	10

Используя материал главы 12, получаем ответ: A_1 прикрепляется к B_4, A_2 — к B_1, A_3 — к B_2, A_4 — к B_3. Минимальное суммарное расстояние равно 24.

Задача 41. Существуют 4 базы A_1, A_2, A_3, A_4 и 4 торговые точки B_1, B_2, B_3, B_4. Расстояния от баз до торговых точек заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Используя надстройку *Поиск решения* пакета Excel, прикрепить базы к торговым точкам таким образом, чтобы суммарное расстояние было минимальным.

Глава 15

АНАЛИЗ РАЗМЕЩЕНИЯ ЗАВОДА И СКЛАДОВ

Каждый новый завод или производственный склад сопровождается появлением другого распределения перевозок грузов, зависящего от затрат собственного производства, от затрат транспортировки грузов и от затрат иных ресурсов.

Пример 42. Заводы предприятия, находящиеся в пунктах A и B, снабжают распределительные пункты C и D. Информация о мощностях поставщиков, спросе потребителей и тарифах перевозки приведена в таблице.

	C,50	D,80
A,40	2	3
B,60	5	4

Чтобы покрыть весь спрос, предприятие решает построить новый завод в одном из двух пунктов: E или F. Стоимость перевозки единицы груза от пункта E (F) до пунктов C и D равна 5 и 2 (3 и 4) соответственно.

Определим вариант, при котором суммарные затраты минимальны.

Мощность нового завода равна 50 + 80 – (40 + 60) = 30.

Для каждого нового завода решаем свою транспортную задачу.

В случае строительства завода в пункте E транспортная задача имеет следующий вид.

	50	**80**
40	2	3
60	5	4
30	5	2

Используя результаты главы 12, получаем следующую окончательную таблицу.

	50	**80**
40	2 / 40	3
60	5 / 10	4 / 50
30	5	2 / 30

Суммарные затраты: $2\times40 + 5\times10 + 4\times50 + 2\times30 = 390$.

В случае строительства завода в пункте *F* транспортная задача имеет следующий вид.

	50	**80**
40	2	3
60	5	4
30	3	4

Используя результаты главы 12, получаем следующую окончательную таблицу.

	50	**80**
40	2 / 40	3
60	5	4 / 60
30	3 / 10	4 / 20

Суммарные затраты: $2\times40 + 4\times60 + 3\times10 + 4\times20 = 430$.

Так как $390 < 430$, то следует построить завод в пункте *E*.

Задача 42. Заводы предприятия, находящиеся в пунктах *A* и *B*, снабжают распределительные пункты *C* и *D*. Информация о мощностях поставщиков, спросе потребителей и тарифах перевозки приведена в таблице.

	C,70	*D*,80
A,50	4	5
B,60	6	3

Чтобы покрыть весь спрос, предприятие решает построить новый завод в одном из двух пунктов: *E* или *F*. Стоимость перевозки единицы груза от пункта *E* (*F*) до пунктов *C* и *D* равна 7 и 4 (5 и 6) соответственно. Определить вариант, при котором суммарные затраты минимальны.

Глава 16

ДЕРЕВО РЕШЕНИЙ

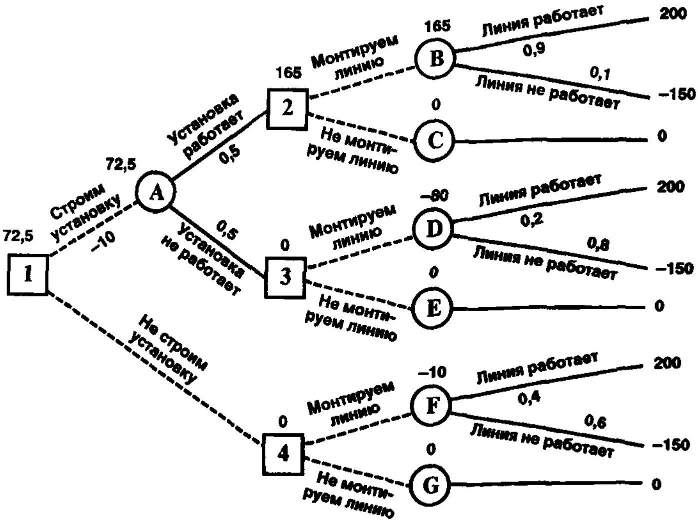
Своевременная разработка и принятие правильного решения — главные задачи работы управленческого персонала любой организации. Непродуманное решение может дорого стоить компании. На практике результат одного решения заставляет нас принимать следующее решение и т. д. Когда нужно принять несколько решений в условиях неопределенности, когда каждое решение зависит от исхода предыдущего решения или исходов испытаний, то применяют схему, называемую деревом решений.

Дерево решений — это графическое изображение процесса принятия решений, в котором отражены альтернативные решения, альтернативные состояния среды, соответствующие вероятности и выигрыши для любых комбинаций альтернатив и состояний среды.

Рисуют деревья слева направо. Места, где принимаются решения, обозначают квадратами □, места появления исходов — кругами ○, возможные решения — пунктирными линиями ············, возможные исходы — сплошными линиями ———.

Для каждой альтернативы мы считаем *ожидаемую стоимостную оценку* (EMV) — максимальную из сумм оценок выигрышей, умноженных на вероятность реализации выигрышей, для всех возможных вариантов.

Пример 43. Главному инженеру компании надо решить, монтировать или нет новую производственную линию, использующую новейшую технологию. Если новая линия будет работать безотказно, компания получит прибыль 200 млн. рублей. Если же она откажет, компания может потерять 150 млн. рублей. По оценкам главного инженера, существует 60% шансов, что новая производственная линия откажет. Можно создать экспериментальную установку, а затем уже решать, монтировать или нет производственную линию. Эксперимент обойдется в 10 млн. рублей. Главный инженер считает, что существует 50% шансов, что экспериментальная установка будет работать. Если экспериментальная установка будет работать, то 90% шансов за то, что смонтированная производственная линия также будет работать. Если же экспериментальная установка не будет работать, то только 20% шансов за то, что производственная линия заработает. Следует ли строить экспериментальную установку? Следует ли монтировать производственную линию? Какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения?



В узле F возможны исходы «линия работает» с вероятностью 0,4 (что приносит прибыль 200) и «линия не работает» с вероятностью 0,6 (что приносит убыток –150) ⇒ оценка узла F: $\text{EMV}(F) = 0{,}4\times200 + 0{,}6\times(-150) = -10$. Это число мы пишем над узлом F.

$\text{EMV}(G) = 0$.

В узле 4 мы выбираем между решением «монтируем линию» (оценка этого решения $\text{EMV}(F) = -10$) и решением «не монтируем линию» (оценка этого решения $\text{EMV}(G) = 0$): $\text{EMV}(4) = \max\{\text{EMV}(F), \text{EMV}(G)\} = \max\{-10, 0\} = 0 = \text{EMV}(G)$. Эту оценку мы пишем над узлом 4, а решение «монтируем линию» отбрасываем и зачеркиваем.

Аналогично:

$\text{EMV}(B) = 0{,}9\times200 + 0{,}1\times(-150) = 180 - 15 = 165$.

$\text{EMV}(C) = 0$.

$\text{EMV}(2) = \max\{\text{EMV}(B), \text{EMV}(C)\} = \max\{165, 0\} = 165 = \text{EMV}(B)$. Поэтому в узле 2 отбрасываем возможное решение «не монтируем линию».

$\text{EMV}(D) = 0{,}2\times200 + 0{,}8\times(-150) = 40 - 120 = -80$.

$\text{EMV}(E) = 0$.

$EMV(3) = \max\{EMV(D), EMV(E)\} = \max\{-80, 0\} = 0 = EMV(E)$. Поэтому в узле 3 отбрасываем возможное решение «монтируем линию».

$EMV(A) = 0{,}5\times165 + 0{,}5\times0 - 10 = 72{,}5$.

$EMV(1) = \max\{EMV(A), EMV(4)\} = \max\{72{,}5; 0\} = 72{,}5 = EMV(A)$. Поэтому в узле 1 отбрасываем возможное решение «не строим установку».

Ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения равна 72,5 млн. рублей. Строим установку. Если установка работает, то монтируем линию. Если установка не работает, то линию монтировать не надо.

Задача 43. Предприниматель провел анализ, связанный с открытием магазина. Если он откроет большой магазин, то при благоприятном состоянии рынка получит прибыль 60 млн. рублей, при неблагоприятном – понесет убытки 40 млн. рублей. Маленький магазин принесет ему 30 млн. рублей прибыли при благоприятном состоянии рынка и 10 млн. рублей убытков при неблагоприятном. Возможность благоприятного и неблагоприятного состояния рынка он оценивает одинаково. Исследование рынка, которое может провести специалист, обойдется предпринимателю в 5 млн. рублей. Специалист считает, что с вероятностью 0,6 состояние рынка окажется благоприятным. В то же время при положительном заключении состояние рынка окажется благоприятным лишь с вероятностью 0,9. При отрицательном заключении с вероятностью 0,12 состояние рынка может оказаться благоприятным. Используйте дерево решений для того, чтобы помочь предпринимателю принять решение. Следует ли заказать проведение обследования состояния рынка? Следует ли открыть большой магазин? Какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения?

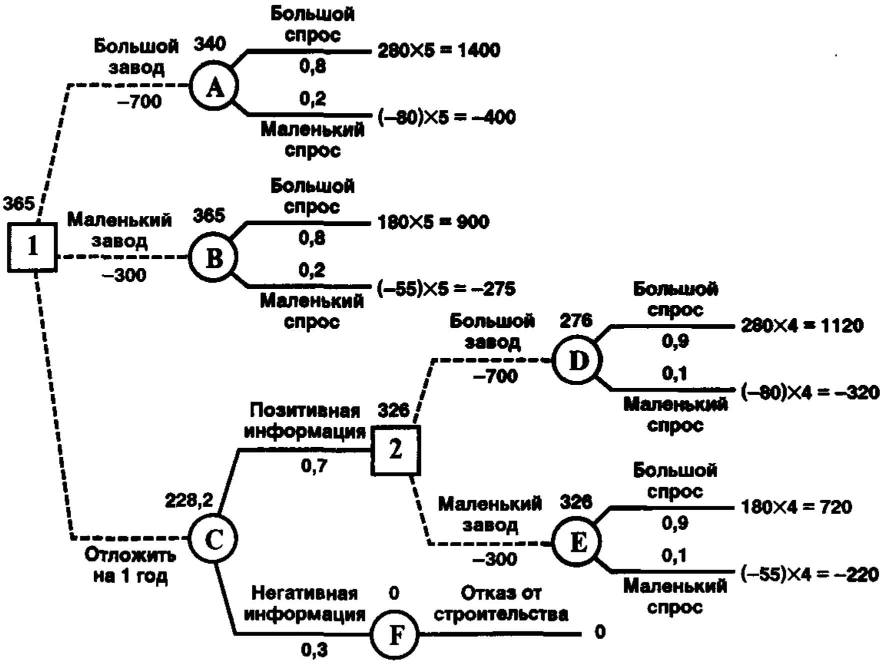
Пример 44. Компания рассматривает вопрос о строительстве завода. Возможны три варианта действий.

А. Построить большой завод стоимостью M_1 = 700 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере R_1 = 280 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью p_1 = 0,8 и низкий спрос (ежегодные убытки R_2 = 80 тысяч долларов) с вероятностью p_2 = 0,2.

Б. Построить маленький завод стоимостью M_2 = 300 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере T_1 = 180 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью p_1 = 0,8 и низкий спрос (ежегодные убытки T_2 = 55 тысяч долларов) с вероятностью p_2 = 0,2.

В. Отложить строительство завода на один год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной с вероятностью $p_3 = 0,7$ и $p_4 = 0,3$ соответственно. В случае позитивной информации можно построить заводы по указанным выше расценкам, а вероятности большого и низкого спроса меняются на $p_5 = 0,9$ и $p_6 = 0,1$ соответственно. Доходы на последующие четыре года остаются прежними. В случае негативной информации компания заводы строить не будет.

Все расчеты выражены в текущих ценах и не должны дисконтироваться. Нарисовав дерево решений, определим наиболее эффективную последовательность действий, основываясь на ожидаемых доходах.



Ожидаемая стоимостная оценка узла A равна $EMV(A) = 0,8\times1400 + 0,2\times(-400) - 700 = 340$.

$EMV(B) = 0,8\times900 + 0,2\times(-275) - 300 = 365$.

$EMV(D) = 0,9\times1120 + 0,1\times(-320) - 700 = 276$.

$EMV(E) = 0,9\times720 + 0,1\times(-220) - 300 = 326$.

$EMV(2) = \max\{EMV(D), EMV(E)\} = \max\{276, 326\} = 326 = EMV(E)$. Поэтому в узле 2 отбрасываем возможное решение «большой завод».

$EMV(C) = 0,7\times326 + 0,3\times0 = 228,2$.

$EMV(1) = \max\{EMV(A), EMV(B), EMV(C)\} = \max\{340; 365; 228,2\} = 365 = EMV(B)$. Поэтому в узле 1 выбираем решение «маленький завод». Исследование проводить не нужно. Строим маленький завод. Ожидаемая стоимостная оценка этого наилучшего решения равна 365 тысяч долларов.

Задача 44. Компания рассматривает вопрос о строительстве завода. Возможны три варианта действий:

А. Построить большой завод стоимостью $M_1 = 650$ тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере $R_1 = 300$ тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью $p_1 = 0{,}7$ и низкий спрос (ежегодные убытки $R_2 = 85$ тысяч долларов) с вероятностью $p_2 = 0{,}3$.

Б. Построить маленький завод стоимостью $M_2 = 360$ тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере $T_1 = 120$ тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью $p_1 = 0{,}7$ и низкий спрос (ежегодные убытки $T_2 = 60$ тысяч долларов) с вероятностью $p_2 = 0{,}3$.

В. Отложить строительство завода на один год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной с вероятностью $p_3 = 0{,}9$ и $p_4 = 0{,}1$ соответственно. В случае позитивной информации можно построить заводы по указанным выше расценкам, а вероятности большого и низкого спроса меняются на $p_5 = 0{,}8$ и $p_6 = 0{,}2$ соответственно. Доходы на последующие четыре года остаются прежними. В случае негативной информации компания заводы строить не будет.

Все расчеты выражены в текущих ценах и не должны дисконтироваться. Нарисовать дерево решений. Определить наиболее эффективную последовательность действий, основываясь на ожидаемых доходах. Какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения?

Глава 17

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

§ 17.1. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЧИСЛЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИСХОДОВ

§ 17.1.1. Максимаксное и максиминное решения

Максимаксное решение — это максимизация максимума возможных доходов. *Максиминное решение* — это максимизация минимума возможных доходов.

Пример 45. Владелец небольшого магазина в начале каждого дня закупает для реализации некий скоропортящийся продукт по цене 50 рублей за единицу. Цена реализации этого продукта — 60 рублей за единицу. Из наблюдений известно, что спрос на этот продукт за день может быть равен 1, 2, 3 или 4 единицы. Если продукт за день не продан, то в конце дня его всегда покупают по цене 30 рублей за единицу. Сколько единиц этого продукта должен закупать владелец каждый день?

Ниже приведена таблица возможных доходов за день.

Возможные исходы: спрос в день	Возможные решения: число закупленных для реализации единиц			
	1	2	3	4
1	10	−10	−30	−50
2	10	20	0	−20
3	10	20	30	10
4	10	20	30	40
максимакс	10	20	30	40
максимин	10	−10	−30	−50

Поясним, как заполняется таблица.

В клетке (2,2) для реализации было закуплено 2 единицы, спрос был 2 единицы. Поэтому возможный доход для этой клетки: 60×2 (реализация двух единиц) – 50×2 (их предварительная закупка) = 20.

В клетке (3,1) была закуплена для реализации 1 единица, спрос был 3 единицы. Поэтому возможный доход для этой клетки: 60×1 (реализация только одной единицы, владелец магазина неверно оценил спрос) – 50×1 (ее предварительная закупка) = 10.

В клетке (3,4) было закуплено для реализации 4 единицы, спрос был 3 единицы. Поэтому возможный доход для этой клетки 60×3 (реализация трех единиц, на которые был спрос) – 50×4 (предварительная закупка четырех единиц) + 30×(4 – 3) (реализация в конце дня непроданной единицы) = 10. И т. д.

Каждая реализованная в течение дня единица приносит доход 60 – 50 = 10, а каждая реализованная в конце дня единица приносит доход 30 – 50 = –20 (то есть убыток).

Рассматриваемые способы принятия решения состоят в следующем. В каждом столбце (то есть для каждого возможного решения) находим максимальное число. Это числа 10, 20, 30, 40 соответственно. Запишем их в строке «максимакс» и найдем среди них максимальное. Это 40, что соответствует решению о закупке для реализации 4 единиц. Руководствуясь правилом максимакса, каждый раз надо закупать для реализации 4 единицы. Это — подход очень азартного человека.

В каждом столбце (то есть для каждого возможного решения) находим минимальное число. Это числа 10, –10, –30, –50 соответственно. Запишем их в строке «максимин» и найдем среди них максимальное. Это 10, что соответствует решению о закупке для реализации 1 единицы. Руководствуясь правилом максимина, каждый раз надо закупать для реализации 1 единицу. Это — подход очень осторожного человека.

§ 17.1.2. Минимаксное решение

Минимаксное решение — это минимизация максимума возможных потерь, причем упущенная выгода также трактуется как потери.

Пример 46. Вернемся к предыдущему примеру 45.

Таблица возможных потерь за день имеет следующий вид:

Возможные исходы: спрос в день	**Возможные решения: число закупленных для реализации единиц**			
	1	**2**	**3**	**4**
1	0	20	40	60
2	10	0	20	40
3	20	10	0	20
4	30	20	10	0
минимакс	30	20	40	60

Поясним, как заполняется таблица.

В клетке (2,2) было закуплено для реализации 2 единицы, спрос был 2 единицы, то есть число закупленных для реализации единиц равно спросу за день. Поэтому возможные потери для этой клетки равны нулю.

В клетке (3,1) закупленная для реализации единица продана, но могли бы продать еще 3 – 1 = 2 единицы, заработав на их продаже 2×(60 – 50) = 20. Это и есть возможные потери.

В клетке (3,4) одна закупленная единица не реализована в течение дня. Она приносит убыток 1×(50 – 30) = 20. Это и есть возможные потери.

В каждом столбце (то есть для каждого возможного решения) находим максимальное число. Это числа 30, 20, 40, 60 соответственно. Запишем их в строке «минимакс» и найдем среди них минимальное. Это 20, что соответствует решению о закупке для реализации 2 единиц. Руководствуясь правилом максимакса, каждый раз надо закупать для реализации 2 единицы.

§ 17.1.3. Критерий Гурвица

Критерий Гурвица — это компромиссный способ принятия решений. Составляется таблица возможных доходов (см. пример 45). Задаются числа a и b, называемые *весами*. Условия на a и b:

$$a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ a + b = 1.$$

Для каждого возможного решения определяются наименьший и наибольший возможные доходы и вычисляется целевая функция по правилу:

$$a\times(\text{наименьший доход}) + b\times(\text{наибольший доход}).$$

Выбираем решение, при котором целевая функция принимает наибольшее значение.

Веса a и b выбирает сам исследователь. При $a = 0$, $b = 1$ получаем правило максимакса. При $a = 1$, $b = 0$ получаем правило максимина.

Пример 47. Вернемся к примеру 45. Зададим $a = 0{,}4$ и $b = 0{,}6$. $a + b = 0{,}4 + 0{,}6 = 1$. Из таблицы возможных доходов для каждого решения находим наименьший и наибольший возможные доходы (это числа в строках «максимакс» и «максимин»). Заполним таблицу.

Возможные решения	Наибольший доход	Наименьший доход	a × (наименьший доход) = 0,4 × (наименьший доход)	b × (наибольший доход) = 0,6 × (наибольший доход)	Сумма
1	10	10	4	6	10
2	20	–10	–4	12	8
3	30	–30	–12	18	6
4	40	–50	–20	24	4

Числа во 2-м и 3-м столбцах взяты из таблицы возможных доходов. Числа 3-го столбца умножаем на $a = 0{,}4$ и результат пишем в 4-м столбце. Числа 2-го столбца умножаем на $b = 0{,}6$ и результат пишем в 5-м столбце. В 6-м столбце находится сумма соответствующих элементов 4-го и 5-го столбцов. Находим максимум в 6-м столбце (это 10). Он соответствует возможному решению о закупке для реализации одной единицы. Очевидно, для других весов результат будет, вообще говоря, иным.

Замечание. В методе Гурвица вместо таблицы возможных доходов можно воспользоваться таблицей возможных потерь (см. пример 46). В этом случае ищется минимум целевой функции $a\times$(наименьшие потери) + $b\times$(наибольшие потери) по всем возможным решениям.

§ 17.2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЛЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИСХОДОВ

§ 17.2.1. Правило максимальной вероятности

Пример 48. Модифицируем пример 45. Пусть известно, что на практике спрос 1 наблюдался 15 раз, спрос 2 наблюдался 30 раз, спрос 3 наблюдался 30 раз, спрос 4 наблюдался 25 раз, то есть известна частота каждого возможного исхода.

Всего наблюдений было 15 + 30 + 30 + 25 = 100. По формуле (частота исхода)/(сумма частот всех исходов) определим относительную частоту (или вероятность) каждого исхода. Это 15/100 = 0,15; 30/100 = = 0,30; 30/100 = 0,30; 25/100 = 0,25 соответственно. Составим таблицу. Находим исходы, вероятность которых максимальна. Это 2 и 3.

Возможные исходы	**1**	**2**	**3**	**4**	**Сумма**
Частота	15	30	30	25	100
Вероятность p	0,15	0,30	0,30	0,25	1

В таблице возможных доходов наибольший возможный доход из этих двух решений у решения «закупать 3 единицы» (30 против 20). Поэтому, руководствуясь правилом максимальной вероятности, надо закупать для реализации 3 единицы.

§ 17.2.2. Максимизация ожидаемого дохода

Мы знаем вероятность каждого исхода и знаем таблицу возможных доходов.

По формуле $\sum_i$ (доход при i-м исходе) × (вероятность i-го исхода) вычисляем для каждого решения математическое ожидание дохода (грубо говоря, средний ожидаемый доход). И смотрим, для какого решения оно максимально.

Пример 49. Вернемся к примеру 48.

	Возможный доход x	Вероятность p	x × p
Возможное решение 1	10	0,15	10×0,15 = 1,5
	10	0,30	10×0,30 = 3
	10	0,30	10×0,3 = 3
	10	0,25	10×0,25 = 2,5
	Сумма	1	10

Столбец «Возможный доход *x*» взят из таблицы возможных доходов (соответствует возможному решению 1). Столбец «Вероятность *p*» — это строка «Вероятность *p*» из примера 48. 3-й столбец — это результат поэлементного произведения 1-го и 2-го столбцов. Нас интересует сумма элементов 3-го столбца. Она равна 10.

	Возможный доход x	Вероятность p	x × p
Возможное решение 2	–10	0,15	–10×0,15 = –1,5
	20	0,30	20×0,30 = 6
	20	0,30	20×0,3 = 6
	20	0,25	20×0,25 = 5
	Сумма	1	15,5

	Возможный доход x	Вероятность p	x × p
Возможное решение 3	–30	0,15	–30×0,15 = –4,5
	0	0,30	0×0,30 = 0
	30	0,30	30×0,3 = 9
	30	0,25	30×0,25 = 7,5
	Сумма	1	12

	Возможный доход x	Вероятность p	x × p
Возможное решение 4	–50	0,15	–50×0,15 = –7,5
	–20	0,30	–20×0,30 = –6
	10	0,30	10×0,3 = 3
	40	0,25	40×0,25 = 10
	Сумма	1	–0,5

Выбираем максимум среди итоговых чисел: max (10; 15,5; 12; –0,5) = = 15,5. Поэтому надо закупать для реализации 2 единицы.

Замечание. Воспользовавшись формулой $\sum_i$ (возможные потери при i-м исходе)$\times$(вероятность i-го исхода), аналогично можно минимизировать ожидаемые потери.

§ 17.2.3. Ожидаемая стоимость полной информации

На практике каждый предприниматель мечтает о том, чтобы точно уравновесить спрос и предложение. В этом случае нет потерь и потребители довольны. Этот идеальный сценарий может стать более реальным, если точно известен уровень спроса.

Один из способов определения будущего спроса — проведение маркетингового исследования с целью получения информации о покупательских предпочтениях потребителей. Подобные попытки, несомненно, увеличат затраты на ведение бизнеса. Сколько именно средств предприниматель может позволить себе потратить на получение информации об ожидаемом уровне спроса?

Постараемся ответить на этот вопрос, воспользовавшись результатами примеров 45, 48 и 49.

Из таблицы возможных доходов за день мы видим, что если бы владелец магазина знал, что спрос на продукт будет равен 1 единице, то была бы закуплена для реализации 1 единица и возможный доход был бы равен 10 руб. (максимальное число в 1-й строке находится в 1-м столбце и равно 10).

Если заранее известно, что спрос составит 2 единицы, то были бы закуплены для реализации 2 единицы и возможный доход был бы равен 20 руб. (максимальное число во 2-й строке находится во 2-м столбце и равно 20).

Если заранее известно, что спрос составит 3 единицы, то были бы закуплены для реализации 3 единицы и возможный доход был бы равен 30 руб. (максимальное число в 3-й строке находится в 3-м столбце и равно 30).

Если заранее известно, что спрос составит 4 единицы, то были бы закуплены для реализации 4 единицы и возможный доход был бы равен 40 руб. (максимальное число в 4-й строке находится в 4-м столбце и равно 40).

Так как известны вероятности различных значений спроса, то можно определить ожидаемый доход в условиях полной информации: $0{,}15\times10 + 0{,}30\times20 + 0{,}30\times30 + 0{,}25\times40 = 26{,}5$ руб.

Лучшее, что мог сделать владелец магазина в условиях отсутствия полной информации – это закупать для реализации 2 единицы в день с целью максимизации ожидаемого дохода. Тогда его ожидаемый доход равен 15,5 руб. Он имеет возможность увеличить ежедневный доход до 26,5 руб., затратив дополнительную сумму денег (не свыше 26,5 – 15,5 = 11 руб./день) на маркетинговые исследования.

Разница между ожидаемым доходом в условиях определенности и в условиях риска называется *ожидаемой стоимостью полной информации*. Это максимально возможный размер средств, которые можно потратить на получение полной информации о рыночной конъюнктуре.

Задачи 45–49. Владелец небольшого магазина в начале каждого рабочего дня закупает для реализации некий скоропортящийся продукт по цене 30 рублей за единицу. Цена реализации этого продукта — 50 рублей за единицу. Из наблюдений известно, что спрос на этот продукт за день может быть равен 1, 2, 3 или 4 единицы. Если продукт за день не продан, то в конце дня его всегда покупают по цене 20 рублей за единицу.

Возможные исходы	**1**	**2**	**3**	**4**
Частота	5	40	40	15

Пользуясь правилами максимакса, максимина, минимакса, максимальной вероятности, критерием Гурвица и максимизируя ожидаемый доход, определить, сколько единиц этого продукта должен закупать владелец каждый день. Чему равна ожидаемая стоимость полной информации?

Глава 18

ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

В этой главе мы рассмотрим возможность использования данных за прошлые периоды для прогнозирования.

Множество данных, где время является независимой переменной, называется *временным рядом*. Будут рассмотрены аддитивные и мультипликативные модели.

Общее изменение со временем результативного признака называется *трендом*. Мы рассмотрим модели *линейного тренда*, то есть параметры тренда можно рассчитать с помощью модели линейной регрессии.

Сезонная вариация — это повторение данных через небольшой промежуток времени. Под «сезоном» можно понимать и день, и неделю, и месяц, и квартал. Если же промежуток времени будет длительным, то это — *циклическая вариация*. Мы остановимся на изучении данных для небольших интервалов времени, поэтому циклическую вариацию исключим из рассмотрения.

Сначала на основании прошлых данных определяется сезонная вариация. Исключив сезонную вариацию (проведя так называемую *десезонализацию данных*), с помощью модели линейной регрессии находим уравнение тренда. По уравнению тренда и прошлым данным вычисляем величины ошибок. Это среднее абсолютное отклонение $MAD = \sum|e_t|/n$ и среднеквадратическая ошибка $MSE = \sum e_t^2/n$, где e_t — это разность фактического и прогнозного значений в момент времени t, n — число наблюдений.

§ 18.1. АНАЛИЗ АДДИТИВНОЙ МОДЕЛИ

Для аддитивной модели фактическое значение A = трендовое значение T + сезонная вариация S + ошибка E.

Пример 50. В таблице указан объем продаж (тыс. руб.) за последние 11 кварталов. Дадим на основании этих данных прогноз объема продаж на следующие два квартала.

Квартал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Объем продаж	4	6	4	5	10	8	7	9	12	14	15

На первом шаге нужно исключить влияние сезонной вариации. Воспользуемся методом скользящей средней. Заполним таблицу.

Номер квартала	Объем продаж	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной вариации
1	4			
2	6			
3	4	4,75	5,5	–1,5
4	5	6,25	6,5	–1,5
5	10	6,75	7,125	2,875
6	8	7,5	8	0
7	7	8,5	8,75	–1,75
8	9	9	9,75	–0,75
9	12	10,5	11,5	0,5
10	14	12,5		
11	15			

1 год = 4 квартала. Поэтому найдем среднее значение объема продаж за 4 последовательных квартала. Для этого нужно сложить 4 последовательных числа из 2-го столбца, эту сумму разделить на 4 (количество слагаемых) и результат записать в 3-й столбец напротив третьего слагаемого.

(4 + 6 + 4 + 5)/4 = 4,75 (пишем напротив 4).

(6 + 4 + 5 + 10)/4 = 6,25 (пишем напротив 5). И т. д.

Полусумму двух соседних чисел из 3-го столбца запишем в 4-й столбец напротив верхнего из них. Если при заполнении 3-го столбца скользящая средняя вычислялась для нечетного числа сезонов, то результат записывается напротив среднего слагаемого и данные не надо центрировать (то есть не надо заполнять 4-й столбец). 5-й столбец — это разность 2-го и 4-го столбцов (2-го и 3-го столбцов, если скользящая средняя вычислялась для нечетного числа сезонов).

Заполним следующую таблицу. Оценки сезонной вариации запишем под соответствующим номером квартала в году. В каждом столбце вычисляем среднее = (сумма чисел в столбце)/(количество чисел в столбце). Результат пишем в строке «Среднее» (округления до одной цифры после запятой). Сумма чисел в строке «Среднее» равна –1.

Скорректируем значения в строке «Среднее», чтобы общая сумма была равна 0. Это необходимо, чтобы усреднить значения сезонной вариации в целом за год. Корректирующий фактор вычисляется следующим образом: сумма оценок сезонных вариаций (–1) делится на число кварталов в году (4). Поэтому из каждого числа этой строки нужно вычесть $-1/4 = -0{,}25$. Так как у нас округления до одной цифры после запятой, то из нечетных столбцов вычтем $-0{,}3$, а из четных столбцов вычтем $-0{,}2$. В последней строке получены значения сезонной вариации для соответствующего квартала года.

	Номер квартала в году				
	1	**2**	**3**	**4**	
			−1,5	−1,5	
	2,875	0	−1,75	−0,75	
	0,5				**Сумма**
Среднее	1,7	0,0	−1,6	−1,1	−1
Скорректированная сезонная вариация	2,0	0,2	−1,3	−0,9	0,0

Исключим сезонную вариацию из фактических данных. Проведем десезонализацию данных.

Номер квартала	**Объем продаж** A	**Сезонная вариация** S	**Десезонализированный объем продаж** $A-S=T+E$
1	4	2	2
2	6	0,2	5,8
3	4	−1,3	5,3
4	5	−0,9	5,9
5	10	2	8
6	8	0,2	7,8
7	7	−1,3	8,3
8	9	−0,9	9,9
9	12	2	10
10	14	0,2	13,8
11	15	−1,3	16,3

Из чисел 2-го столбца вычитаем числа 3-го столбца и результат пишем в 4-м столбце.

Уравнение линии тренда $T = a + bx$.

Найдем коэффициенты a и b по данным первого и последнего столбцов.

Номер	**x**	**y**	x^2	**xy**
1	1	2	1	2
2	2	5,8	4	11,6
3	3	5,3	9	15,9
4	4	5,9	16	23,6
5	5	8	25	40

Номер	x	y	x^2	xy
6	6	7,8	36	46,8
7	7	8,3	49	58,1
8	8	9,9	64	79,2
9	9	10	81	90
10	10	13,8	100	138
11	11	16,3	121	179,3
Сумма	66	93,1	506	684,5

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{11\times 684{,}5 - 66\times 93{,}1}{11\times 506 - 66^2} \approx 1{,}1.$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{93{,}1 - 1{,}1\times 66}{11} \approx 1{,}9.$$

Замечание. Вместо вычислений коэффициентов a и b по формулам можно воспользоваться статистическими функциями ОТРЕЗОК (изв_знач_y; изв_знач_x) и НАКЛОН (изв_знач_y; изв_знач_x) мастера функций f_x пакета Excel. Здесь изв_знач_y и изв_знач_x — это ссылки на ячейки, содержащие значения переменных y и x соответственно.

Трендовое значение объема продаж = 1,9 + 1,1×(номер квартала).
Теперь займемся расчетом ошибок.

Номер квартала	Объем продаж A	Десезонализированный объем продаж $A - S = T + E$	Трендовое значение	Ошибка e_t	$\lvert e_t \rvert$	e_t^2
1	4	2	3	–1	1	1
2	6	5,8	4,1	1,7	1,7	2,89
3	4	5,3	5,2	0,1	0,1	0,01
4	5	5,9	6,3	–0,4	0,4	0,16
5	10	8	7,4	0,6	0,6	0,36
6	8	7,8	8,5	–0,7	0,7	0,49
7	7	8,3	9,6	–1,3	1,3	1,69
8	9	9,9	10,7	–0,8	0,8	0,64
9	12	10	11,8	–1,8	1,8	3,24
10	14	13,8	12,9	0,9	0,9	0,81
11	15	16,3	14	2,3	2,3	5,29
				Сумма	11,6	16,58

Из чисел 3-го столбца приводимой выше таблицы вычитаем числа 4-го столбца и результат пишем в 5-м столбце.

Среднее абсолютное отклонение $MAD = \sum|e_t|/n = 11{,}6/11 \approx 1{,}1$, среднеквадратическая ошибка $MSE = \sum e_t^2/n = 16{,}58/11 \approx 1{,}5$. Мы видим, что ошибки достаточно велики. Это скажется на качестве прогноза.

Дадим прогноз объема продаж на следующие два квартала.

Мы считаем, что тенденция, выявленная по прошлым данным, сохранится и в ближайшем будущем. Подставляем номера кварталов в формулу и учитываем сезонную вариацию.

Прогноз объема продаж в 12-м квартале:

$(1{,}9 + 1{,}1\times12) + (-0{,}9) = 14{,}2$ тыс. руб.

Прогноз объема продаж в 13-м квартале:

$(1{,}9 + 1{,}1\times13) + 2 = 18{,}2$ тыс. руб.

Задача 50. В таблице указан объем продаж (тыс. руб.) за последние 11 кварталов. Дать на основании этих данных прогноз объема продаж на следующие два квартала.

Квартал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Объем продаж	4	5	5	6	9	9	8	10	11	13	16

§ 18.2. АНАЛИЗ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ МОДЕЛИ

В некоторых временных рядах значение сезонной вариации — это определенная доля трендового значения, то есть сезонная вариация увеличивается с возрастанием значений тренда. В таких случаях используется мультипликативная модель.

Для мультипликативной модели фактическое значение A = трендовое значение $T\times$ сезонная вариация $S\times$ ошибка E.

Пример 51. В таблице указан объем продаж (тыс. руб.) за последние 11 кварталов. Дадим на основании этих данных прогноз объема продаж на следующие два квартала.

Квартал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Объем продаж	63	74	79	120	67	79	88	130	69	82	90

Числа 2-го столбца приведенной далее таблицы делим на числа 4-го столбца и результат (округляем до трех цифр после запятой) запишем в 5-й столбец.

Номер квартала	Объем продаж	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной вариации
1	63			
2	74			
3	79	84	84,5	0,935
4	120	85	85,625	1,401
5	67	86,25	87,375	0,767
6	79	88,5	89,75	0,880
7	88	91	91,25	0,964
8	130	91,5	91,875	1,415
9	69	92,25	92,5	0,746
10	82	92,75		
11	90			

	Номер квартала в году				
	1	2	3	4	
			0,935	1,401	
	0,767	0,880	0,964	1,415	
	0,746				Сумма
Среднее	0,756	0,880	0,950	1,408	3,994
Скорректированная сезонная вариация	0,757	0,881	0,952	1,410	4,000

Значения сезонной вариации — это доли. Число сезонов равно 4. Поэтому необходимо, чтобы сумма средних была равна 4. У нас же получилось 3,994. Следовательно, итоговые коэффициенты сезонности нужно умножить на множитель 4/3,994. В последней строке указаны окончательные коэффициенты сезонности.

Как показывают полученные оценки, в 1-м, 2-м и 3-м кварталах года объем продаж снижается соответственно на 24,3%, 11,9% и 4,8% от соответствующих трендовых значений. В 4-м квартале года объем продаж увеличивается на 41% от соответствующего трендового значения.

Исключим сезонную вариацию из фактических данных. Проведем десезонализацию данных. Числа 2-го столбца таблицы делим на числа 3-го столбца, результат округляем до одной цифры после запятой и пишем в 4-й столбец.

Номер квартала	Объем продаж A	Сезонная вариация S	Десезонализированный объем продаж $A/S = T \times E$
1	63	0,757	83,2
2	74	0,881	84,0
3	79	0,952	83,0

Номер квартала	Объем продаж A	Сезонная вариация S	Десезонализированный объем продаж $A/S=T\times E$
4	120	1,41	85,1
5	67	0,757	88,5
6	79	0,881	89,7
7	88	0,952	92,4
8	130	1,41	92,2
9	69	0,757	91,1
10	82	0,881	93,1
11	90	0,952	94,5

Уравнение линии тренда $T = a + bx$.

Используя результаты § 18.1, найдем коэффициенты a и b по данным первого и последнего столбцов.

Трендовое значение объема продаж = 81,6 + 1,2×(номер квартала).

Теперь займемся расчетом ошибок.

Номер квартала	Объем продаж A	Коэффициент сезонности S	Десезонализированный объем продаж $A/S=T\times E$	Трендовое значение	Ошибка e_t	$\lvert e_t\rvert$	e_t^2
1	63	0,757	83,2	82,8	0,4	0,4	0,16
2	74	0,881	84,0	84	0,0	0,0	0,00
3	79	0,952	83,0	85,2	–2,2	2,2	4,84
4	120	1,41	85,1	86,4	–1,3	1,3	1,69
5	67	0,757	88,5	87,6	0,9	0,9	0,81
6	79	0,881	89,7	88,8	0,9	0,9	0,81
7	88	0,952	92,4	90	2,4	2,4	5,76
8	130	1,41	92,2	91,2	1,0	1,0	1,00
9	69	0,757	91,1	92,4	–1,3	1,3	1,69
10	82	0,881	93,1	93,6	–0,5	0,5	0,25
11	90	0,952	94,5	94,8	–0,3	0,3	0,09
					Сумма	11,2	17,10

Среднее абсолютное отклонение $MAD = \sum|e_t|/n = 11{,}2/11 \approx 1$, среднеквадратическая ошибка $MSE = \sum e_t^2/n = 17{,}1/11 \approx 1{,}6$. Мы видим, что ошибки малы и составляют порядка 1%. Это позволяет получить хорошие краткосрочные прогнозы.

Дадим прогноз объема продаж на следующие два квартала. Мы считаем, что тенденция, выявленная по прошлым данным, сохранится и в ближайшем будущем. Подставляем номера кварталов в формулу и учитываем сезонную вариацию.

Прогноз объема продаж в 12-м квартале:
$(81{,}6 + 1{,}2 \times 12) \times 1{,}41 \approx 135{,}4$ тыс. руб.
Прогноз объема продаж в 13-м квартале:
$(81{,}6 + 1{,}2 \times 13) \times 0{,}757 \approx 73{,}6$ тыс. руб.

Задача 51. В таблице указан объем продаж (тыс. руб.) за последние 11 кварталов. Дать на основании этих данных прогноз объема продаж на следующие два квартала.

Квартал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Объем продаж	64	75	81	110	66	77	91	120	68	78	92

Замечание. Excel позволяет быстро вычислить оценки методом скользящей средней. *Сервис → Анализ данных → Скользящее среднее → ОК.* Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Интервал* вводится количество сезонов, для которых вычисляется скользящее среднее (по умолчанию это 3). Если требуется график, на котором будут указаны прогнозные и фактические значения, то нужно поставить «галочку» рядом со словосочетанием *Вывод графика. ОК.* Появляется итоговая таблица, которая содержит исходные данные и оценки, полученные методом скользящей средней. Если оценка находилась как среднее k слагаемых, то в таблице оценок она находится напротив последнего из этих k слагаемых.

Ряд недостатков скользящей средней влияет на применение аддитивной и мультипликативной моделей. До тех пор, пока не пройдет определенное число сезонов, нельзя сделать прогноз. Все данные имеют равный вес. Чувствительность скользящей средней обратно пропорциональна числу слагаемых. Поэтому на практике большей популярностью пользуется экспоненциальное сглаживание.

Глава 19

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ

При анализе временных рядов использовался метод скользящей средней, где все данные (и поздние, и ранние) были равноправны. Более правильным представляется способ, в котором данным приписываются веса: более поздним данным придается больший вес, чем более ранним. Этот метод обеспечивает быстрое получение прогноза на один период вперед и автоматически корректирует любой прогноз в свете различий между фактическим и спрогнозированным результатом.

§ 19.1. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО СГЛАЖИВАНИЯ

Новый прогноз = $\alpha\times$(фактический результат в последний период) + $(1 - \alpha)\times$(прогноз в последний период), то есть $F_{t+1} = \alpha A_t + (1 - \alpha)F_t$. Константу сглаживания α исследователь выбирает из отрезка [0, 1]. В условиях стабильности часто $\alpha \in [0,2; 0,4]$.

Пример 52. Вернемся к примеру 50. Пусть $\alpha = 0,8$. Тогда $1 - \alpha = 1 - 0,8 = 0,2$. Предположим, что на первый квартал был дан прогноз 3. Дадим прогноз на 12-й квартал.

Заполним таблицу.

A_t (фактически)	F_t (прогноз)
4	3
6	3,8
4	5,6
5	4,3
10	4,9
8	9

A_t (фактически)	F_t (прогноз)
7	8,2
9	7,2
12	8,6
14	11,3
15	13,5
	14,7

$F_{t+1} = \alpha A_t + (1 - \alpha)F_t = 0{,}8A_t + 0{,}2F_t$, то есть числа в каждой строке умножаем соответственно на 0,8 и 0,2 и результат пишем в следующей строке во втором столбце.

$0{,}8 \times 4 + 0{,}2 \times 3 = 3{,}8$.

$0{,}8 \times 6 + 0{,}2 \times 3{,}8 \approx 5{,}6$. И т. д.

Результат округляем до одной цифры после запятой.

Прогноз на 12-й квартал — 14,7 тыс. руб.

Задача 52. В задаче 50 дать прогноз объема продаж на 12-й квартал методом простого экспоненциального сглаживания. $\alpha = 0{,}8$. $F_1 = 3$.

Замечание. Excel позволяет быстро провести простое экспоненциальное сглаживание. *Сервис → Анализ данных → Экспоненциальное сглаживание → ОК.* Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Фактор затухания* указать значение $1 - \alpha$ (по умолчанию 0,3). *ОК.*

§ 19.2. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ С ПОПРАВКОЙ НА ТРЕНД

Даем прогноз методом простого экспоненциального сглаживания, а затем корректируем его с учетом тренда по следующей формуле:

$$\text{прогноз с учетом тренда } FIT_t = \text{прогноз } F_t + \text{тренд } T_t.$$

Тренд $T_t = (1 - b)T_{t-1} + b(F_t - F_{t-1})$, где T_t и T_{t-1} — сглаженный тренд в периоды t и $t - 1$ соответственно, b — выбранная константа сглаживания.

Начальное значение тренда может быть получено на основе предположения.

Пример 53. В примере 52 дадим прогноз объема продаж на 12-й квартал методом экспоненциального сглаживания с поправкой на тренд. Возьмем $b = 0{,}4$, $T_1 = 0$.

Заполним таблицу.

Из каждого числа 1-го столбца вычитаем предыдущее число 1-го столбца и результат запишем во 2-й столбец.

Каждое число 3-го столбца есть сумма числа, умноженного на $1 - b = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, из предыдущей строки 3-го столбца и числа, умноженного на $b = 0{,}4$, из этой же строки 2-го столбца. Результат округляем до одной цифры после запятой.

F_t	$F_t - F_{t-1}$	T_t	$FIT_t = F_t + T_t$
3	—	0	3
3,8	0,8	0,3	4,1
5,6	1,8	0,9	6,5
4,3	−1,3	0,0	4,3
4,9	0,6	0,3	5,2
9	4,1	1,8	10,8
8,2	−0,8	0,8	9,0
7,2	−1	0,1	7,3
8,6	1,4	0,6	9,2
11,3	2,7	1,4	12,7
13,5	2,2	1,7	15,2
14,7	1,2	1,5	16,2

Прогноз на 12-й квартал — 16,2 тыс. руб.

Задача 53. В задаче 52 дать прогноз объема продаж на 12-й квартал методом экспоненциального сглаживания с поправкой на тренд. $b = 0{,}4$, $T_1 = 0$.

Глава 20

КОНТРОЛИРУЕМЫЙ ПРОГНОЗ

Один из способов обеспечения точности прогнозов — использование *трекинг-сигнала*, который вычисляется по следующей формуле:

$$\text{трекинг-сигнал} = RSFE/MAD,$$

где $RSFE = \sum_{t=1}^{n} e_t$ — *итоговая сумма ошибок*, $MAD = \sum_{t=1}^{n} |e_t|/n$ — среднее абсолютное отклонение, e_t — разность фактического и прогнозного значений в момент времени t, n — число наблюдений.

При положительном (отрицательном) трекинг-сигнале фактические значения больше (меньше) прогнозных значений. У хорошего трекинг-сигнала итоговая сумма ошибок $RSFE$ мала, то есть для него положительные ошибки приблизительно равны отрицательным ошибкам.

Вычисленные трекинг-сигналы следует сравнить с заранее определенными *верхней* и *нижней границами контроля*. Если трекинг-сигнал выходит за границы контроля, то метод прогнозирования требует корректировки (например, изменения константы сглаживания в модели экспоненциального сглаживания).

Границы контроля выбирает сам исследователь. Обычно это или ±4 (*жесткий контроль*), или ±8 (*слабый контроль*).

Пример 54. В примере 52 определим трекинг-сигналы по результатам первых шести кварталов. Границы контроля равны ±4. Нужно ли менять константу сглаживания?

Заполним таблицу.

Квартал	A_t	F_t	e_t	$RSFE$	$\lvert e_t \rvert$	Суммарная ошибка	MAD	Трекинг-сигнал
1	4	3	1	1	1	1	1	1
2	6	3,8	2,2	3,2	2,2	3,2	1,6	2
3	4	5,6	–1,6	1,6	1,6	4,8	1,6	1
4	5	4,3	0,7	2,3	0,7	5,5	1,38	1,67
5	10	4,9	5,1	7,4	5,1	10,6	2,12	3,49
6	8	9	–1	6,4	1	11,6	1,93	3,32

Поясним, как заполняется таблица.

Значения первых трех столбцов взяты из примера 52. 4-й столбец — это разность 2-го и 3-го столбцов. 6-й столбец — это абсолютные величины чисел 4-го столбца. Для получения чисел данной строки 5-го (7-го) столбца прибавляем к числу предыдущей строки 5-го (7-го) столбца число данной строки 4-го (6-го) столбца. Каждое число 7-го (5-го) столбца делим на соответствующее число 1-го (8-го) столбца, результат округляем до двух цифр после запятой и пишем в 8-м (9-м) столбце.

Так как все трекинг-сигналы (числа в последнем столбце) принадлежат интервалу (– 4; 4), то константу сглаживания менять не нужно.

Задача 54. В задаче 52 определить трекинг-сигналы по результатам первых шести кварталов. Границы контроля равны ±4. Нужно ли менять константу сглаживания?

Глава 21

СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

§ 21.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Сетевое планирование — это метод планирования работ, операции в которых, как правило, не повторяются (например, разработка новых продуктов, строительство зданий, ремонт оборудования, проектирование новых работ).

Для проведения сетевого планирования вначале необходимо расчленить проект на ряд отдельных работ и составить логическую схему (*сетевой граф*).

Работа — это любые действия, трудовые процессы, сопровождающиеся затратами ресурсов или времени и приводящие к определенным результатам. На сетевых графах работы обозначаются стрелками. Для указания того, что одна работа не может выполняться раньше другой, вводят *фиктивные работы*, которые изображаются пунктирными стрелками. Продолжительность фиктивной работы принимается равной нулю.

Событие — это факт окончания всех входящих в него работ. Считается, что оно происходит мгновенно. На сетевом графе события изображаются в виде вершин графа. Ни одна выходящая из данного события работа не может начаться до окончания всех работ, входящих в это событие.

С *исходного события* (которое не имеет предшествующих работ) начинается выполнение проекта. *Завершающим событием* (которое не имеет последующих работ) заканчивается выполнение проекта.

После построения сетевого графа необходимо оценить продолжительность выполнения каждой работы и выделить работы, которые определяют завершение проекта в целом. Нужно оценить потребность каждой работы в ресурсах и пересмотреть план с учетом обеспечения ресурсами.

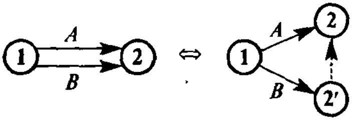
Часто сетевой граф называют *сетевым графиком*.

§ 21.2. ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ СЕТЕВЫХ ГРАФИКОВ

1. Завершающее событие лишь одно.

2. Исходное событие лишь одно.

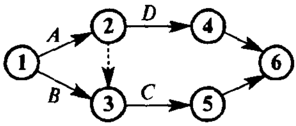
3. Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой-стрелкой. Если два события связаны более чем одной работой, рекомендуется ввести дополнительное событие и фиктивную работу:



4. В сети не должно быть замкнутых циклов.

5. Если для выполнения одной из работ необходимо получить результаты всех работ, входящих в предшествующее для нее событие, а для другой работы достаточно получить результат нескольких из этих работ, то нужно ввести дополнительное событие, отражающее результаты только этих последних работ, и фиктивную работу, связывающую новое событие с прежним.

Например, для начала работы D достаточно окончания работы A. Для начала же работы C нужно окончание работ A и B.



§ 21.3. МЕТОД КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ

Метод критического пути (Critical Path Method — CPM) используется для управления проектами с фиксированным временем выполнения работ. Он позволяет ответить на следующие вопросы:

1. Сколько времени потребуется на выполнение всего проекта?

2. В какое время должны начинаться и заканчиваться отдельные работы?

3. Какие работы являются критическими и должны быть выполнены в точно определенное графиком время, чтобы не сорвать установленные сроки выполнения проекта в целом?

4. На какое время можно отложить выполнение некритических работ, чтобы они не повлияли на сроки выполнения проекта?

Самый продолжительный путь сетевого графика от исходного события к завершающему называется *критическим*. Все события и работы критического пути также называются *критическими*. Продолжительность критического пути и определяет срок выполнения проекта. Критических путей на сетевом графике может быть несколько.

Рассмотрим основные временные параметры сетевых графиков.

Обозначим $t(i, j)$ — продолжительность работы с начальным событием i и конечным событием j.

Ранний срок $t_p(j)$ свершения события j — это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию. Правило вычисления:

$$t_p(j) = \max \{t_p(i) + t(i, j)\},$$

где максимум берется по всем событиям i, непосредственно предшествующим событию j (соединены стрелками).

Поздний срок $t_n(i)$ свершения события i — это такой предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием. Правило вычисления:

$$t_n(i) = \min \{t_n(j) - t(i, j)\},$$

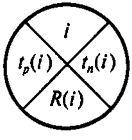
где минимум берется по всем событиям j, непосредственно следующим за событием i.

Резерв $R(i)$ события i показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения срока наступления завершающего события:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

Критические события резервов не имеют.

При расчетах сетевого графика каждый круг, изображающий событие, делим диаметрами на четыре сектора:

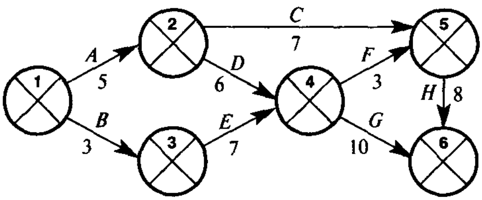


Пример 55. Рассмотрим сеть проекта, представленную следующими данными. Найти критический путь. Сколько времени потребуется для завершения проекта? Можно ли отложить выполнение рабо-

ты D без отсрочки завершения проекта в целом? На сколько недель можно отложить выполнение работы C без отсрочки завершения проекта в целом?

Работа	Непосредственный предшественник	Продолжительность работы, нед.
A	–	5
B	–	3
C	*A*	7
D	*A*	6
E	*B*	7
F	*D*, *E*	3
G	*D*, *E*	10
H	*C*, *F*	8

Рисуем сетевой график.



I этап. При вычислении $t_p(i)$ перемещаемся по сетевому графику от исходного события 1 к завершающему событию 6.

$t_p(1) = 0.$

В событие 2 входит только одна работа: $t_p(2) = t_p(1) + t(1, 2) = 0 + 5 = 5.$

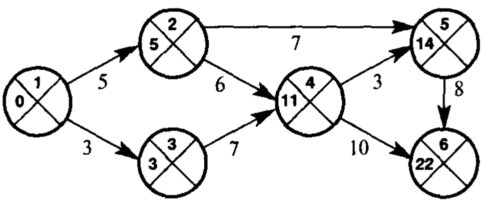
Аналогично $t_p(3) = t_p(1) + t(1, 3) = 0 + 3 = 3.$

В событие 4 входят две работы $\Rightarrow$

$t_p(4) = \max\{t_p(2) + t(2, 4), t_p(3) + t(3, 4)\} = \max\{5 + 6, 3 + 7\} = 11.$

$t_p(5) = \max\{t_p(2) + t(2, 5), t_p(4) + t(4, 5)\} = \max\{5 + 7, 11 + 3\} = 14.$

$t_p(6) = \max\{t_p(4) + t(4, 6), t_p(5) + t(5, 6)\} = \max\{11 + 10, 14 + 8\} = 22$ $\Rightarrow$ t критическое $= 22.$



II этап. При вычислении $t_n(i)$ перемещаемся от завершающего события 6 к исходному событию 1 по сетевому графику против стрелок.

$t_n(6) = t_p(6) = 22.$

Далее рассматриваем непосредственно предшествующее событие 5, из которого выходит только одна работа (5, 6):

$t_n(5) = t_n(6) - t(5, 6) = 22 - 8 = 14.$

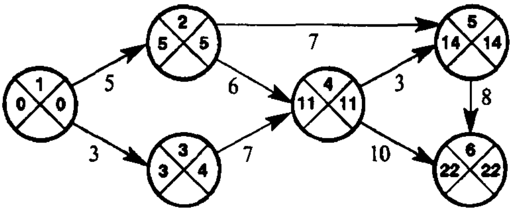
Из события 4 выходят две работы: (4, 5) и (4, 6). Поэтому определяем $t_n(4)$ по каждой из этих работ:

$t_n(4) = \min\{t_n(5) - t(4, 5), t_n(6) - t(4, 6)\} = \min\{14 - 3, 22 - 10\} = \min\{11, 12\} = 11.$

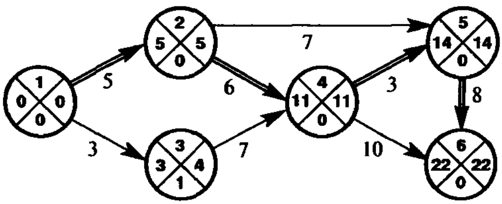
$t_n(3) = t_n(4) - t(3, 4) = 11 - 7 = 4.$

$t_n(2) = \min\{t_n(5) - t(2, 5), t_n(4) - t(2, 4)\} = \min\{14 - 7, 11 - 6\} = \min\{7, 5\} = 5.$

$t_n(1) = \min\{t_n(2) - t(1, 2), t_n(3) - t(1, 3)\} = \min\{5 - 5, 4 - 3\} = \min\{0, 1\} = 0.$



III этап. Вычисляем $R(i) = t_n(i) - t_p(i)$ — резерв времени события i, то есть из чисел, полученных на этапе II, вычитаем числа, полученные на этапе I.



IV этап. У критических событий резерв времени равен нулю, так как ранние и поздние сроки их свершения совпадают. Критические события 1, 2, 4, 5, 6 и определяют критический путь 1–2–4–5–6, который на сетевом графике мы покажем двумя чертами. Теперь можно ответить на вопросы задачи.

Для завершения проекта потребуется 22 недели. Работа $D = (2, 4)$ расположена на критическом пути. Поэтому ее нельзя отложить без отсрочки завершения проекта в целом. Работа $C = (2, 5)$ не расположена на критическом пути, ее можно задержать на $t_n(5) - t_p(2) - t(2, 5) = 14 - 5 - 7 = 2$ (недели).

Задача 55. Проект пусконаладки компьютерной системы состоит из восьми работ.

Работа	Непосредственный предшественник	Продолжительность работы, нед.
A	—	3
B	—	6
C	*A*	2
D	*B*, *C*	5
E	*D*	4
F	*E*	3
G	*B*, *C*	9
H	*F*, *G*	3

Найти критический путь. Сколько времени потребуется для завершения проекта? Можно ли отложить выполнение работы *C* без отсрочки завершения проекта в целом? На сколько недель можно отложить выполнение работы *F* без отсрочки завершения проекта в целом?

§ 21.4. УПРАВЛЕНИЕ ПРОЕКТАМИ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ

В методе критического пути предполагалось, что время выполнения работ нам известно. На практике же эти сроки обычно не определены. Можно строить некоторые предположения о времени выполнения каждой работы, но нельзя предусмотреть все возможные трудности или задержки выполнения. Для управления проектами с неопределенным временем выполнения работ наиболее широкое применение получил *метод оценки и пересмотра проектов* (Project Evaluation and Review Technique — PERT), рассчитанный на использование вероятностных оценок времени выполнения работ, предусматриваемых проектом.

Для каждой работы вводят три оценки:

✧ *оптимистическое время a* — наименьшее возможное время выполнения работы;

✧ *пессимистическое время b* — наибольшее возможное время выполнения работы;

✧ *наиболее вероятное время m* — ожидаемое время выполнения работы в нормальных условиях.

По a, b и m находят *ожидаемое время выполнения работы*:

$$t = \frac{a + 4m + b}{6}$$

и *дисперсию ожидаемой продолжительности* t:

$$\delta^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2.$$

Используя значения t, найдем критический путь сетевого графика.

Распределение времени T завершения проекта является нормальным со средним $E(T)$, равным сумме ожидаемых значений времени работ на критическом пути, и дисперсией $\delta^2(T)$, равной сумме дисперсий работ критического пути, если времена выполнения каждой из работ можно считать независимыми друг от друга. Тогда мы можем рассчитать вероятность завершения проекта в установленный срок T_0:

$$P(t_{кр} < T_0) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{T_0 - E(T)}{\delta(T)}\right),$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функция Лапласа.

Значения функции $\Phi(x)$ берутся из специальной таблицы. Важно, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Можно также воспользоваться мастером функций f_x пакета Excel: $\Phi(x)$ = НОРМРАСП(x; 0; 1; 1) – 0,5. Полагают $\Phi(x) = 0{,}5$ при $x > 5$.

Пример 56. Проект строительства плавательного бассейна состоит из девяти основных работ.

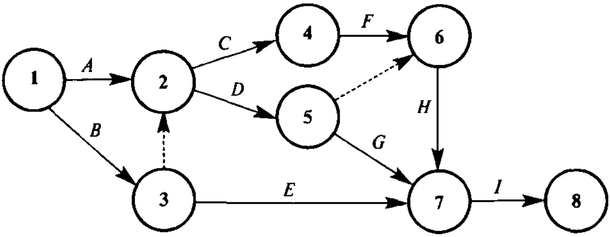
Работа	Непосредственный предшественник	Оптимистическое (a)	Наиболее вероятное (m)	Пессимистическое (b)
A	—	3	5	6
B	—	2	4	6
C	*A*, *B*	5	6	7
D	*A*, *B*	7	9	10
E	*B*	2	4	6
F	*C*	1	2	3
G	*D*	5	8	10
H	*D*, *F*	6	8	10
I	*E*, *G*, *H*	3	4	5

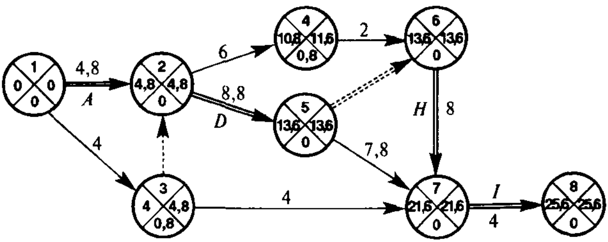
Каков ожидаемый срок завершения проекта? Чему равно стандартное отклонение времени завершения проекта? Какова вероятность того, что выполнение проекта займет не более 25 рабочих дней?

Ожидаемое время выполнения работы $t = \dfrac{a + 4m + b}{6}$, дисперсия ожидаемой продолжительности t: $\delta^2 = \left(\dfrac{b-a}{6}\right)^2$.

Работа	a	m	b	$t = \dfrac{a + 4m + b}{6}$	$\delta^2 = \left(\dfrac{b - a}{6}\right)^2$
A	3	5	6	$\dfrac{3 + 4\times5 + 6}{6} = \dfrac{29}{6} \approx 4{,}8$	$\left(\dfrac{6-3}{6}\right)^2 = \dfrac{9}{36}$
B	2	4	6	$\dfrac{2 + 4\times4 + 6}{6} = \dfrac{24}{6} = 4$	$\left(\dfrac{6-2}{6}\right)^2 = \dfrac{16}{36}$
C	5	6	7	$\dfrac{5 + 4\times6 + 7}{6} = \dfrac{36}{6} = 6$	$\left(\dfrac{7-5}{6}\right)^2 = \dfrac{4}{36}$
D	7	9	10	$\dfrac{7 + 4\times9 + 10}{6} = \dfrac{53}{6} \approx 8{,}8$	$\left(\dfrac{10-7}{6}\right)^2 = \dfrac{9}{36}$
E	2	4	6	$\dfrac{2 + 4\times4 + 6}{6} = \dfrac{24}{6} = 4$	$\left(\dfrac{6-2}{6}\right)^2 = \dfrac{16}{36}$
F	1	2	3	$\dfrac{1 + 4\times2 + 3}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$	$\left(\dfrac{3-1}{6}\right)^2 = \dfrac{4}{36}$
G	5	8	10	$\dfrac{5 + 4\times8 + 10}{6} = \dfrac{47}{6} \approx 7{,}8$	$\left(\dfrac{10-5}{6}\right)^2 = \dfrac{25}{36}$
H	6	8	10	$\dfrac{6 + 4\times8 + 10}{6} = \dfrac{48}{6} = 8$	$\left(\dfrac{10-6}{6}\right)^2 = \dfrac{16}{36}$
I	3	4	5	$\dfrac{3 + 4\times4 + 5}{6} = \dfrac{24}{6} = 4$	$\left(\dfrac{5-3}{6}\right)^2 = \dfrac{4}{36}$

Построим сетевой график с указанием ожидаемой продолжительности каждой работы. Найдем критический путь и рассчитаем обычным способом ожидаемый срок выполнения проекта $E(T)$.





Критический путь — A–D–H–I. Длина критического пути — 25,6 (дн) = $E(T)$. Дисперсия ожидаемого времени выполнения проекта равна сумме дисперсий критических работ: $\delta^2(T) = \delta^2_A + \delta^2_D + \delta^2_H + \delta^2_I =$ $= 9/36 + 9/36 + 16/36 + 4/36 = 38/36$ (дней^2).

Тогда стандартное отклонение времени выполнения проекта составит: $\delta(T) = \sqrt{38/36} \approx 1{,}03$ (дней).

Найдем вероятность того, что выполнение проекта займет не более $T_0 = 25$ дней: $P(t_{кр} < T_0) = P(t_{кр} < 25) = 0{,}5 + \Phi\left(\dfrac{T_0 - E(T)}{\delta(T)}\right) =$

$$= 0{,}5 + \Phi\left(\frac{25 - 25{,}6}{1{,}03}\right) \approx 0{,}5 + \Phi(-0{,}58) = 0{,}5 - \Phi(0{,}58) \approx 0{,}5 - 0{,}219 =$$
$= 0{,}281$.

Задача 56. Рассмотрим следующую сеть проекта (время продолжительности работ указано в неделях). Предположим, что для нее представлены следующие оценки продолжительности работ:

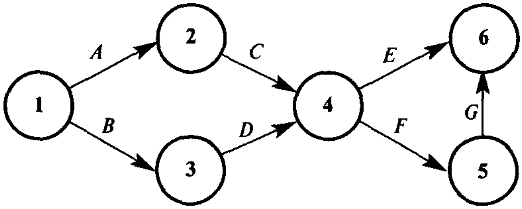
Работа	Непосредственный предшественник	Оптимистическое (a)	Наиболее вероятное (m)	Пессимистическое (b)
A	—	2	5	6
B	—	2,5	3	3,5
C	*A*	6	7	8
D	*A*	5	5,5	9
E	*B*	5	7	9
F	*D*, *E*	2	3	4
G	*D*, *E*	8	10	12
H	*C*, *F*	6	7	14

Какова ожидаемая продолжительность проекта? Какова вероятность того, что проект будет завершен за 21 неделю? Какова вероятность того, что проект будет завершен за 25 недель?

§ 21.5. СТОИМОСТЬ ПРОЕКТА. ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

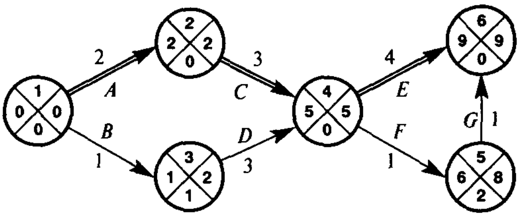
Стоимость выполнения каждой работы плюс дополнительные расходы определяют стоимость проекта. С помощью дополнительных ресурсов можно добиться сокращения времени выполнения критических работ. Тогда стоимость этих работ возрастет, но общее время выполнения проекта уменьшится, что может привести к снижению общей стоимости проекта. Предполагается, что работы можно выполнить либо в стандартные, либо в минимальные сроки, но не в промежутке между ними.

Пример 57.



Работа	Стандартное время, дней	Минимальное время, дней	Затраты на работы	
			при стандартном времени, тыс. руб.	при минимальном времени, тыс. руб.
A	3	2	800	1400
B	2	1	1200	1900
C	5	3	2000	2800
D	5	3	1500	2300
E	6	4	1800	2800
F	2	1	600	1000
G	2	1	500	1000

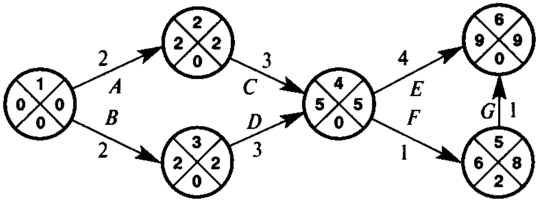
Найдем критический путь при условии, что все работы совершаются в минимальное время. Минимальное время, за которое может быть завершен проект — 9 дней. Критический путь *A–C–E*. Мы видим, что работы *B*, *D*, *F*, *G* не лежат на критическом пути.



Посмотрим, нельзя ли их выполнить в стандартные сроки без увеличения общего времени выполнения проекта (9 дней). Выполнение этих работ в стандартное время дает следующую экономию: 700(*B*), 800(*D*), 400(*F*), 500(*G*). Поэтому порядок рассмотрения будет такой: *D*, *B*, *G*, *F*.

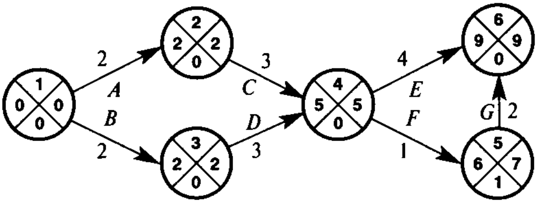
D: мы не можем увеличить продолжительность работы $D = (3, 4)$ с 3 до 5 дней, так как тогда изменится оценка $t_p(4)$ и изменится критический путь, то есть общее время выполнения проекта увеличится.

B: увеличение продолжительности работы $B = (1, 3)$ с 1 до 2 дней возможно.

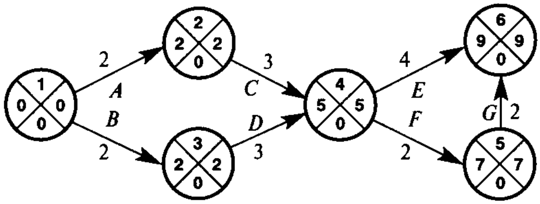


Появятся 2 критических пути: $A–C–E$ и $B–D–E$. Работы A и C мы должны по-прежнему выполнять в минимальное время, иначе изменится критический путь.

G: увеличение продолжительности с 1 дня до 2 дней возможно.



F: увеличение продолжительности с 1 дня до 2 дней возможно.



Мы видим, что работы A, C, D, E выполняются в минимальное время, а работы B, F, G — в стандартное. Общая стоимость проекта составит: 1400(A) + 1200(B) + 2800(C) + 2300(D) + 2800(E) + 600(F) + + 500(G) = 11600 (тыс. руб.).

Таким образом, мы минимизировали общее время выполнения проекта с наименьшими дополнительными затратами.

Задача 57. Минимизировать общее время выполнения проекта с наименьшими дополнительными затратами.

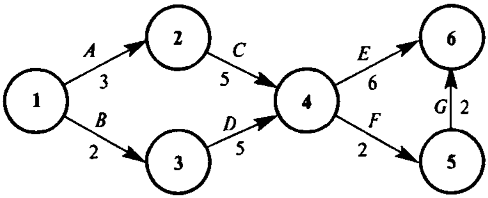
Работа	Непосредственный предшественник	Стандартное время, дней	Минимальное время, дней	Затраты на работы	
				при стандартном времени, тыс. руб.	при минимальном времени, тыс. руб.
A	—	3	1	900	1700
B	—	6	3	2000	4000
C	*A*	2	1	500	1000
D	*B*, *C*	5	3	1800	2400

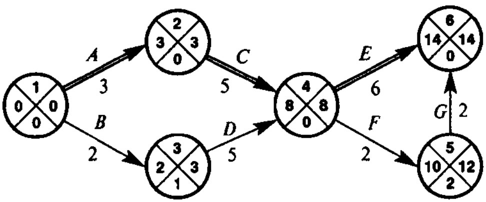
Работа	Непосредственный предшественник	Стандартное время, дней	Минимальное время, дней	Затраты на работы	
				при стандартном времени, тыс. руб.	при минимальном времени, тыс. руб.
E	*D*	4	3	1500	1850
F	*E*	3	1	3000	3900
G	*B*, *C*	9	4	8000	9800
H	*F*, *G*	3	2	1000	2000

§ 21.6. ГРАФИК ГАНТА

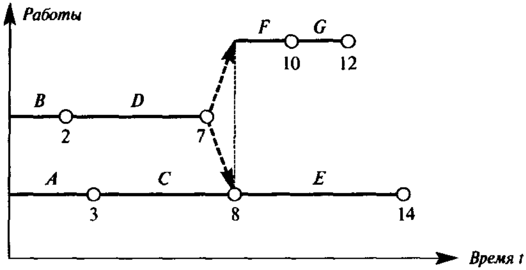
Иногда бывает полезным изобразить наглядно имеющийся в наличии резерв времени. Для этого используется *график Ганта*. На нем каждая работа (i, j) изображается горизонтальным отрезком, длина которого в соответствующем масштабе равна времени ее выполнения. Начало каждой работы совпадает с ранним сроком свершения ее начального события. График Ганта очень полезен при составлении расписания работ. Он показывает рабочее время, время простоев и относительную загрузку системы. Ожидающие выполнения работы могут быть распределены по другим рабочим центрам.

Пример 58. Найдем критический путь и ранние сроки свершения событий.





Теперь строим график Ганта. Так как работа *E* не может начаться до завершения работы *D*, эту зависимость мы изображаем на графике пунктирной линией. Аналогично для *D*, *F* и *C*, *F*.



Задача 58. Построить график Ганта.

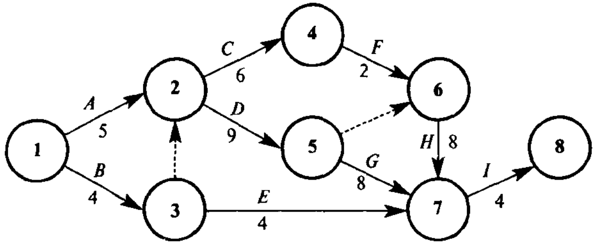


График Ганта используется для управления работами в процессе. Он указывает, какая работа выполняется по расписанию, а какая опережает его или отстает. Существует много возможностей использования графика Ганта на практике.

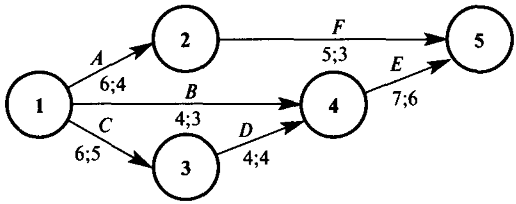
Стоит заметить, что график Ганта не учитывает разнообразия производственных ситуаций (например, поломки или человеческие ошибки, которые требуют повторения работы). График Ганта должен регулярно пересчитываться при появлении новых работ и при пересмотре продолжительности работ.

График Ганта особенно полезен при работе над проектом с не связанными между собой работами. А вот при анализе проекта с тесно взаимосвязанными работами лучше воспользоваться методом критического пути.

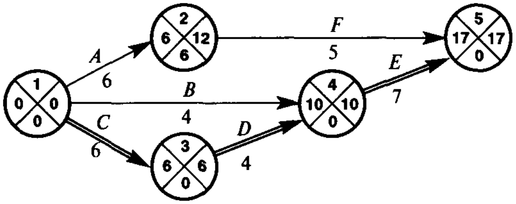
§ 21.7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ. ГРАФИКИ РЕСУРСОВ

До сих пор мы не обращали внимания на ограничения в ресурсах и считали, что все необходимые ресурсы (сырье, оборудование, рабочая сила, денежные средства, производственные площади и т. д.) имеются в достаточном количестве. Рассмотрим один из простейших методов решения проблемы распределения ресурсов — *«метод проб и ошибок»*.

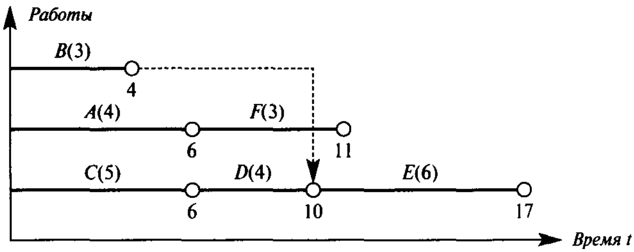
Пример 59. Произведем оптимизацию сетевого графика по ресурсам. Наличный ресурс равен 10 единицам.



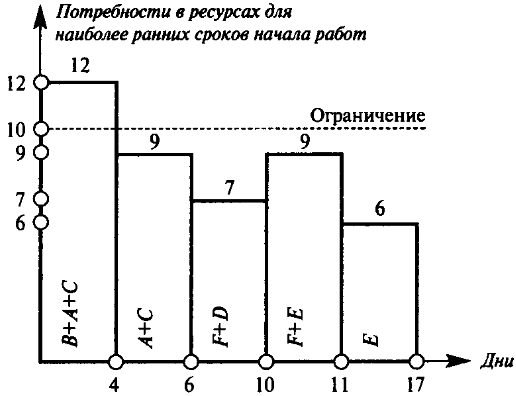
Первое число, приписанное дуге графика, означает время выполнения работы, а второе — требуемое количество ресурса для выполнения работы. Работы не допускают перерыва в их выполнении.



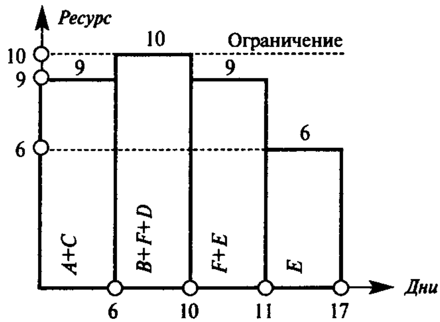
Находим критический путь. Строим график Ганта. В скобках для каждой работы укажем требуемое количество ресурса. По графику Ганта строим график ресурса. На оси абсцисс мы откладываем время, а на оси ординат — потребности в ресурсах.



Считаем, что все работы начинаются в наиболее ранний срок их выполнения. Ресурсы складываются по всем работам, выполняемым одновременно. Также проведем ограничительную линию по ресурсу (в нашем примере это $y = 10$).

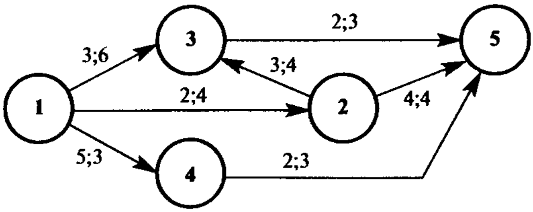


Из графика мы видим, что на отрезке от 0 до 4, когда одновременно выполняются работы *B*, *A*, *C*, суммарная потребность в ресурсах составляет 3 + 4 + 5 = 12, что превышает ограничение 10. Так как работа *C* критическая, то мы должны сдвинуть сроки выполнения или *A*, или *B*.



Запланируем выполнение работы *B* с 6-го по 10-й день. На сроках выполнения всего проекта это не скажется и даст возможность остаться в рамках ресурсных ограничений.

Задача 59. Произвести оптимизацию сетевого графика по ресурсам. Наличный ресурс равен 10.



§ 21.8. ПАРАМЕТРЫ РАБОТ

Напомним обозначения: $t(i,j)$ — продолжительность работы (i,j); $t_р(i)$ — ранний срок свершения события i; $t_п(i)$ — поздний срок свершения события i.

Если в сетевом графике лишь один критический путь, то его легко отыскать по критическим событиям (событиям с нулевыми резервами времени). Ситуация усложняется, если критических путей несколько. Ведь через критические события могут проходить как критические, так и некритические пути. В этом случае нужно использовать критические работы.

Ранний срок начала работы (i,j) совпадает с ранним сроком свершения события i: $t_{рн}(i,j) = t_р(i)$.

Ранний срок окончания работы (i,j) равен сумме $t_р(i)$ и $t(i,j)$: $t_{ро}(i,j) = t_р(i) + t(i,j)$.

Поздний срок начала работы (i,j) равен разности $t_п(j)$ (позднего срока свершения события j) и $t(i,j)$: $t_{пн}(i,j) = t_п(j) - t(i,j)$.

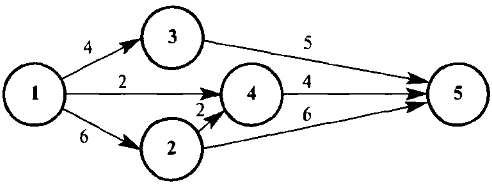
Поздний срок окончания работы (i,j) совпадает с $t_п(j)$: $t_{по}(i,j) = t_п(j)$.

Полный резерв времени $R_п(i,j)$ *работы* (i,j) — это максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность, при условии, что весь комплекс работ будет завершен в критический срок: $R_п(i,j) = t_п(j) - t_р(i) - t(i,j) = t_{по}(i,j) - t_{ро}(i,j)$.

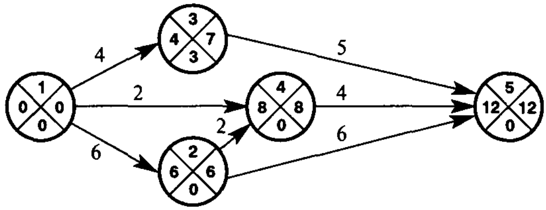
Свободный резерв времени $R_с(i,j)$ *работы* (i,j) — это максимальный запас времени, на которое можно отсрочить или (если она началась в свой ранний срок) увеличить ее продолжительность при условии, что не нарушатся ранние сроки всех последующих работ: $R_с(i,j) = t_р(j) - t_р(i) - t(i,j) = t_р(j) - t_{ро}(i,j)$.

Критические работы, как и критические события, резервов не имеют.

Пример 60. Посмотрим, каковы резервы работ для сетевого графика.



Находим $t_p(i)$, $t_n(i)$ и составляем таблицу. Значения первых пяти колонок берем из сетевого графика, а остальные колонки просчитаем по этим данным.

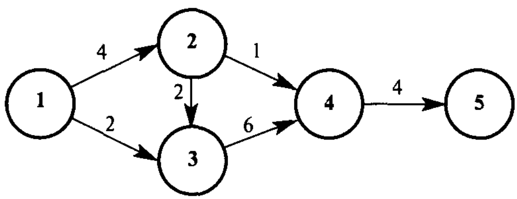


Работа (i,j)	Продолжительность $t(i,j)$	$t_p(i)$	$t_p(j)$	$t_n(j)$	Срок начала работы	
					$t_{рн}(i,j) = t_p(i)$	$t_{пн}(i,j) = t_n(j) - t(i,j)$
(1, 2)	6	0	6	6	0	$6-6=0$
(1, 3)	4	0	4	7	0	$7-4=3$
(1, 4)	2	0	8	8	0	$8-2=6$
(2, 4)	2	6	8	8	6	$8-2=6$
(2, 5)	6	6	12	12	6	$12-6=6$
(3, 5)	5	4	12	12	4	$12-5=7$
(4, 5)	4	8	12	12	8	$12-4=8$

Работа (i,j)	Срок окончания работы		Резервы времени работы	
	$t_{ро}(i,j) = t_p(i) + t(i,j)$	$t_{по}(i,j) = t_n(j)$	Полный $R_n(i,j) = t_{по}(i,j) - t_{ро}(i,j)$	Свободный $R_c(i,j) = t_p(j) - t_{ро}(i,j)$
(1, 2)	$0+6=6$	6	$6-6=0$	$6-6=0$
(1, 3)	$0+4=4$	7	$7-4=3$	$4-4=0$
(1, 4)	$0+2=2$	8	$8-2=6$	$8-2=6$
(2, 4)	$6+2=8$	8	$8-8=0$	$8-8=0$
(2, 5)	$6+6=12$	12	$12-12=0$	$12-12=0$
(3, 5)	$4+5=9$	12	$12-9=3$	$12-9=3$
(4, 5)	$8+4=12$	12	$12-12=0$	$12-12=0$

Критические работы (работы с нулевыми резервами): (1, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 5). У нас два критических пути: 1–2–5 и 1–2–4–5.

Задача 60. Найти резервы работ.



Методы сетевого планирования и управления позволяют сосредоточиться на важнейших для выполнения проекта моментах. При этом требуется, чтобы работы были взаимно независимы, то есть в пределах определенной последовательности работ можно начинать, приостанавливать, исключать работы, а также выполнять одну работу независимо от другой работы. Все работы должны выполняться в определенной последовательности. Поэтому методы сетевого планирования и управления широко применяются в строительстве, самолетостроении и судостроении, а также в промышленных отраслях с быстро меняющимися тенденциями.

Скептическое отношение к методам сетевого планирования и управления часто основывается на их стоимости, которая может составлять около 5% общей стоимости проекта. Но эти расходы обычно полностью компенсируются экономией, достигаемой с помощью более точного и гибкого графика, а также сокращения сроков выполнения проекта.

Глава 22

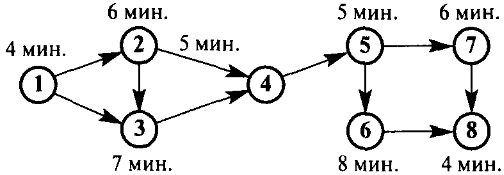
БАЛАНСИРОВКА ЛИНИЙ СБОРКИ

При настройке линий сборки необходимо стремиться минимизировать дисбаланс между трудом и оборудованием. Для обеспечения работы в определенном темпе надо выбрать подходящее оборудование и соответствующую организацию труда. Следует поставить временн*ы*е условия для каждого участка сборки. Необходимо знать последовательность операций по сборке изделий.

Пример 61. Основным продуктом мебельной компании являются стулья повышенной комфортности. За 480-минутный рабочий день необходимо выпустить 50 стульев. Для изготовления одного стула надо выполнить 8 операций. Используя информацию, приведенную в таблице, решить задачу балансировки линий сборки.

Операция	Время выполнения, мин.	Предшествующие операции
1	4	—
2	6	1
3	7	1, 2
4	5	2, 3
5	5	4
6	8	5
7	6	5
8	4	6, 7

Нарисуем граф связности для операций на сборке, для которого работы будут не дугами, а узлами. Дуги показывают последовательность выполнения операций.



Для обеспечения нужного темпа по сборке определенные операции группируются на рабочих местах.

1. Определим *время цикла* — среднее время, в течение которого каждое изделие может быть доступно на любом рабочем месте для выполнения соответствующей операции:

$$\boxed{\textbf{время цикла}} = \boxed{\textbf{рабочее время в течение суток}} : \boxed{\textbf{объем производства в сутки}}.$$

Время цикла = 480 мин./50 шт. = 9,6 мин./шт. ≈ 10 мин./шт.

2. Определим *теоретически минимальное число рабочих мест*:

$$\boxed{\textbf{минимальное число рабочих мест}} = \boxed{\textbf{суммарное время выполнения операций}} : \boxed{\textbf{время цикла}}.$$

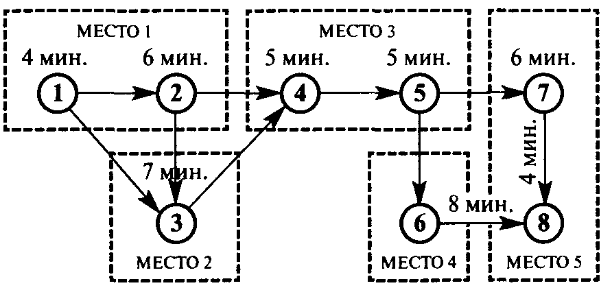
Минимальное число рабочих мест = $(4 + 6 + 7 + 5 + 5 + 8 + 6 + 4)/10 = 45/10 = 4{,}5 \approx 5$.

Заметим, что дробную величину всегда следует округлять до ближайшего большего целого числа.

Следует отметить, что полученная величина — это оценка снизу возможного числа рабочих мест. Может так случиться, что из-за невыполнения определенных условий (на каждом рабочем месте выполняются только смежные операции; на выполнение всех операций, относящихся к любому рабочему месту, отводится время, не превышающее время цикла) рабочих мест будет больше.

Если время выполнения какой-то операции превышает время цикла, то эту операцию надо расщепить на две последовательные операции. В этом случае слегка изменится граф состояний.

3. Обеспечим баланс линий сборки, отнеся определенные операции к конкретным рабочим местам.



На рисунке приведен вариант решения задачи, при котором не нарушается последовательность операций. Точнее, на каждом рабочем месте выполняются только смежные операции. Причем все операции распределены между пятью рабочими местами.

На выполнение всех операций, относящихся к любому рабочему месту, отводится время, не превышающее 10 минут (время цикла). На втором и четвертом рабочих местах возникают простои — 3 мин. и 2 мин. соответственно.

$$\boxed{\textbf{Эффективность балансировки линий}} = \boxed{\textbf{суммарное время выполнения операций}} : \left(\boxed{\textbf{число рабочих мест}} \times \boxed{\textbf{время цикла}}\right).$$

Эффективность балансировки линий = (45 мин.)/(5×10 мин.) = = 45/50 = 0,9, то есть 90%.

Открытие еще одного (шестого) рабочего места снизит эффективность до 75%, так как (45 мин.)/(6×10 мин.) = 0,75.

Задача 61. Заключительная сборка диктофона требует выполнения шести ручных операций. В течение 400 мин. ежедневной работы сборочной линии необходимо выпустить 80 диктофонов. Информация об операциях приведена в таблице.

Операция	Время выполнения, мин.	Предшествующие операции
1	1	—
2	1	1
3	4	1, 2
4	1	2, 3
5	2	4
6	4	5

Решить задачу балансировки линии сборки.

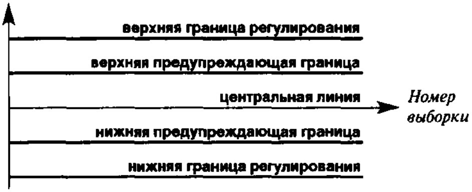
Глава 23

СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА

§ 23.1. КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ

Технологические процессы подвержены изменчивости. Как определить, что технологический процесс находится под контролем? Случайные или неслучайные изменения мы наблюдаем? Ответы на эти вопросы дают контрольные карты.

Контрольные карты, разработанные в 1920-х годах Уолкером Шевардом из *Bell Telephone Company*, привлекают внимание к результатам, которые выходят за границы предельных значений.



Алгоритм работы:

1. Через одинаковые промежутки времени производится выборка объемом *n*, и для нее рассчитывается интересующая нас характеристика. Результат наносится на карту.

2. Если произошел выход за границы регулирования, то следует немедленная остановка процесса.

3. Если мы находимся между предупреждающими границами, то процесс под контролем.

4. Если мы находимся между предупреждающей границей и границей регулирования, то надо немедленно произвести повторную выборку. Если и для повторной выборки мы вышли за предупреждающие границы, то следует немедленная остановка процесса.

5. Процесс не находится под контролем, если не менее восьми последовательных точек расположены по одну сторону от централь-

ной линии или не менее восьми последовательных точек образуют последовательность, направленную либо вверх, либо вниз.

Замечание. Excel позволяет изобразить контрольную карту. В первом столбце укажем интересующую нас характеристику выборки. Следующие два столбца содержат значения предупреждающих границ (многократно повторенные). В двух других столбцах указаны значения границ регулирования (многократно повторенные). Выделив эти пять столбцов, выберем команду *Вставка* → *Мастер диаграмм* или щелкнем по кнопке *Мастер диаграмм*. Откроется диалоговое окно мастера диаграмм.

В списке *Тип* выберем *График*. *Вид графика* выберем *с маркерами, помечающими точки данных*. *Далее*. Нужно указать группировку данных (*ряды в столбцах*). *Далее*. Откроется диалоговое окно *Параметры диаграммы*. Щелкнув на вкладке *Линии сетки*, уберем координатную сетку. Щелкнув на вкладке *Легенда*, снимем флажок *Добавить легенду*. *Готово*. Появится контрольная карта.

§ 23.2. КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПРИ ИЗВЕСТНЫХ a И σ

Технологический процесс подчиняется нормальному распределению $N(a, \sigma)$ с математическим ожиданием a и стандартным отклонением σ. Производится выборка объемом n.

Центральная линия: a. Предупреждающие границы (верхняя и нижняя): $a \pm 2\sigma/\sqrt{n}$. Границы регулирования (верхняя и нижняя): $a \pm 3\sigma/\sqrt{n}$. После этого можно применить алгоритм из § 23.1.

Пример 62. Технологический процесс подчиняется нормальному распределению $N(3,1)$ с математическим ожиданием 3 и стандартным отклонением 1. Производится выборка объемом $n = 6$.

Центральная линия: 3.

Предупреждающие границы: $a \pm 2\sigma/\sqrt{n} = 3 \pm 2\times1/\sqrt{6}$, то есть 2,18 (нижняя) и 3,82 (верхняя).

Границы регулирования: $a \pm 3\sigma/\sqrt{n} = 3 \pm 3\times1/\sqrt{6}$, то есть 1,78 (нижняя) и 4,22 (верхняя).

Задача 62. Технологический процесс подчиняется нормальному распределению $N(4,2)$ с математическим ожиданием 4 и стандартным отклонением 2. Производится выборка объемом $n = 5$. Найти центральную линию, предупреждающие границы и границы регулирования.

§ 23.3. КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ ИЗМЕНЧИВОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПРИ ИЗВЕСТНЫХ a И σ

Для выборки объемом n по специальной таблице определяются числа d_n, r_w, r_A. Центральная линия: $d_n\sigma$. Верхняя предупреждающая граница: $r_w\sigma$. Верхняя граница регулирования: $r_A\sigma$.

Вычисляем значение *размаха выборки* R = (максимальное значение выборки – минимальное значение выборки) и наносим на карту. Так как R неотрицательно, то все границы только верхние.

Пример 63. Вернемся к примеру 62.

Для выборки объемом $n = 6$ по специальной таблице определяются числа $d_n = 2{,}534$, $r_w = 4{,}35$, $r_A = 5{,}6$. Найдем границы для размаха.

Центральная линия: $d_n\sigma = 2{,}534\times1 = 2{,}534$. Верхняя предупреждающая граница: $r_w\sigma = 4{,}35\times1 = 4{,}35$. Верхняя граница регулирования: $r_A\sigma = 5{,}6\times1 = 5{,}6$. Теперь можно применить алгоритм из § 23.1 с поправкой, что все границы только верхние.

Задача 63. В задаче 62 найти границы для размаха. $d_n = 2{,}326$, $r_w = 4{,}2$, $r_A = 5{,}45$.

§ 23.4. КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКОВ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ a И σ

Технологический процесс подчиняется нормальному распределению $N(a, \sigma)$, но a и σ неизвестны. В этом случае строятся только границы регулирования. Производятся m выборок объемом n. Для каждой из них вычисляются средняя $\overline{X}_i$ и размах R_i, $i = 1, ..., m$.

По полученным данным находим $\overline{\overline{X}} = (\overline{X}_1 + ... + \overline{X}_m)/m$ и $\overline{R} = (R_1 + + ... + R_m)/m$.

Для выборки объемом n по специальной таблице определяются числа A, B, C.

Центральная линия для средней: $\overline{\overline{X}}$. Центральная линия для размаха: $\overline{R}$. Границы регулирования для средней: $\overline{\overline{X}} \pm A\overline{R}$. Нижняя и верхняя границы регулирования для размаха: $B\overline{R}$ и $C\overline{R}$ соответственно. Теперь можно применить алгоритм из § 23.1.

Пример 64. Каждые 4 часа производится выборка объемом $n = 7$.

Номер выборки	1	2	3	4	5	6	7
Средняя	63,5	63,6	63,7	63,9	63,4	63	63,2
Размах	2	1	1,7	0,9	1,2	1,6	1,8

Номер выборки	8	9	10	11	12	13	Сумма
Средняя	63,3	63,7	63,5	63,3	63,3	63,6	825
Размах	1,3	1,6	1,3	1,8	1	1,8	19

Найдем границы регулирования и центральные линии для средних и размаха.

Всего $m = 13$ выборок.

Центральная линия для средней: $\overline{\overline{X}} = (\overline{X}_1 + ... + \overline{X}_m)/m = 825/13 \approx$ $\approx 63{,}5$.

Центральная линия для размаха: $\overline{R} = (R_1 + ... + R_m)/m = 19/13 \approx$ $\approx 1{,}5$.

$n = 7$. По специальной таблице определяются числа $A = 0{,}42$, $B = 0{,}08$, $C = 1{,}92$.

Границы регулирования для средней: $\overline{\overline{X}} \pm A\overline{R} = 63{,}5 \pm 0{,}42 \times 1{,}5$, то есть 62,87 (нижняя) и 64,13 (верхняя).

Нижняя граница регулирования для размаха: $B\overline{R} = 0{,}08 \times 1{,}5 =$ $= 0{,}12$. Верхняя граница регулирования для размаха: $C\overline{R} = 1{,}92 \times 1{,}5 =$ $= 2{,}88$.

Задача 64. Каждые 3 часа производится выборка объемом $n = 4$. $A = 0{,}73$, $B = 0$, $C = 2{,}28$.

Найти границы регулирования и центральные линии для средних и размаха.

Номер выборки	1	2	3	4	5	6	7
Средняя	25	24,9	25,2	25,1	24,8	25	25,3
Размах	0,3	0,4	0,5	0,1	0,4	0,2	0,3

§ 23.5. КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ КАЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКОВ

Часто нас интересует не конкретный количественный параметр, а наличие или отсутствие дефектов у изделия. В этом случае используют контрольные карты качественных признаков. Они бывают двух типов: *p-карты* (используется удельный вес бракованных изделий) и *c-карты* (используется число бракованных изделий в выборке).

§ 23.5.1. Р-карты. Аппроксимация нормальным распределением

Производятся выборки объемом n. Оценивается доля бракованных изделий в генеральной совокупности. p = (число бракованных изделий во всех выборках)/(общее число обследованных изделий), $q = 1 - p$. Используется нормальное распределение, если $n \geqslant 30$, $np > 5$, $nq > 5$. По специальным формулам находим границы.

Центральная линия: p.

Предупреждающие границы: $p \pm 2\sqrt{pq/n}$. Границы регулирования: $p \pm 3\sqrt{pq/n}$.

После этого можно применить алгоритм из § 23.1.

Пример 65. Доля бракованных изделий $p = 0{,}011$. Производились выборки объема $n = 1000$ единиц.

Определим границы. $n = 1000 > 30$, $np = 1000\times0{,}011 = 11 > 5$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}011 = 0{,}989$, $nq = 1000\times0{,}989 = 989 > 5$. Все условия выполнены. Используем нормальное распределение.

Центральная линия: $p = 0{,}011$.

Предупреждающие границы: $p \pm 2\sqrt{pq/n} = 0{,}011 \pm 2\sqrt{0{,}011\times0{,}989/1000}$, то есть 0,004 (нижняя) и 0,018 (верхняя).

Границы регулирования: $p \pm 3\sqrt{pq/n} = 0{,}011 \pm 3\sqrt{0{,}011\times0{,}989/1000}$, то есть 0,001 (нижняя) и 0,021 (верхняя).

Задача 65. Доля бракованных изделий $p = 0{,}012$. Производились выборки объема $n = 1000$ единиц. Определить границы.

§ 23.5.2. Р-карты. Аппроксимация распределением Пуассона

Если нижняя граница регулирования при использовании нормального распределения получилась отрицательной, то вычисления надо произвести заново с использованием распределения Пуассона.

Также распределение Пуассона используется при выполнении условий $n \geqslant 30$, $np < 5$, $p < 0{,}1$.

Пример 66. Доля бракованных изделий $p = 0{,}025$. Производились выборки объема $n = 200$ единиц.

Нижняя граница регулирования при использовании нормального распределения получилась равной $-0{,}008$. Воспользуемся распределением Пуассона.

$\lambda = np = 200\times0{,}025 = 5$. Вероятность того, что в выборке k дефектов, равна $p(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k! = 5^k e^{-5}/5!$. Это и есть распределение Пуассона. Здесь $k! = 1 \times 2 \times ... \times k$ (произведение натуральных чисел от 1 до k).

Значения функции $p(k)$ и $k!$ можно посчитать на калькуляторе или воспользоваться мастером функций f_x Excel: $p(k)$ = ПУАССОН(k; λ; 0) и $k!$ = ПЕРЕСТ (k; k).

Заполним таблицу.

Верхняя предупреждающая граница соответствует кумулятивной вероятности 0,975, а верхняя граница регулирования соответствует кумулятивной вероятности 0,999. Мы последовательно перебираем число возможных бракованных изделий в выборке, начиная с нуля.

Кумулятивную вероятность можно вычислять обычным способом, но лучше воспользоваться Excel (ведь нас интересуют только 1-й и 4-й столбцы), а именно, ПУАССОН(k; λ; 1). Как только результат в 4-м столбце превысит 0,999, вычисления прекращаем.

Если в выборке больше 9 бракованных изделий, то мы выходим за верхнюю предупреждающую границу. Если в выборке больше 12 бракованных изделий, то мы выходим за верхнюю границу регулирования. Именно при этих значениях были превышены значения 0,975 и 0,999 соответственно.

Число бракованных изделий в выборке, k	**Доля бракованных изделий, k/n = k/200**	**Вероятность p(k) = ПУАССОН(k; λ; 0)**	**Кумулятивная вероятность ПУАССОН (k; λ; 1)**
Нижняя граница регулирования 0,001			
0	0	0,0067	0,0067
Нижняя предупреждающая граница 0,025			
1	0,005	0,0337	0,0404
2	0,01	0,0843	0,1247
3	0,015	0,1405	0,2652
4	0,02	0,1756	0,4408
5	0,025	0,1756	0,6162
6	0,03	0,1463	0,7628
7	0,035	0,1045	0,8673
8	0,04	0,0653	0,9326
9	0,045	0,0336	0,9689
Верхняя предупреждающая граница 0,975			
10	0,05	0,0181	0,9870
11	0,055	0,0082	0,9953
12	0,06	0,0034	0,9986
Верхняя граница регулирования 0,999			
13	0,065	0,0013	0,9999971

Задача 66. Доля бракованных изделий $p = 0{,}048$. Производились выборки объема $n = 100$ единиц. Найти границы аппроксимацией распределением Пуассона.

§ 23.5.3. С-карты

Бракованное изделие может содержать более одного дефекта. Для контроля числа дефектов на единицу продукции используются *с-карты.*

Среднее число дефектов на единицу продукции c = общее число дефектов/общее число обследованных изделий.

Границы регулирования: $c \pm 3\sqrt{c}$.

Пример 67. Выборка из 100 предметов выявила 200 дефектов.

Среднее число дефектов на единицу продукции c = общее число дефектов/общее число обследованных изделий = 200/100 = 2.

Границы регулирования: $c \pm 3\sqrt{c} = 2 \pm 3\sqrt{2}$. Нас интересует верхняя граница регулирования 6,2.

Задача 67. Выборка из 200 предметов выявила 5000 дефектов. Определить среднее число дефектов на единицу продукции и верхнюю границу регулирования.

§ 23.6. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРИЕМОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА КАЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКОВ

Очень часто приходится проверять качество продукции, закупаемой у внешних поставщиков. Можно применить *схему одноэтапной выборки*:

1) для проверки производится выборка объемом 15 единиц;

2) продукция принимается, если в выборке не более 1 бракованного изделия.

Схема двухэтапной выборки:

1) для проверки производится выборка объемом 20 единиц;

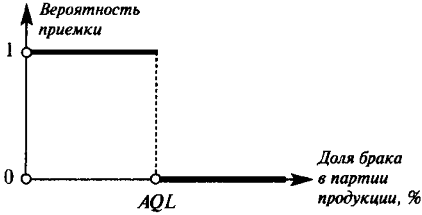
2) продукция принимается, если в выборке не обнаружено бракованных изделий;

3) продукция отклоняется, если в выборке обнаружено более 2 бракованных изделий;

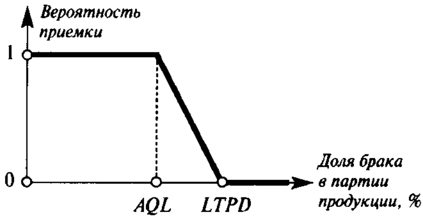
4) если в выборке обнаружено 1 или 2 бракованных изделия, то производится повторная выборка объемом 20 единиц;

5) если в повторной выборке обнаружено не более 1 бракованного изделия, то продукция принимается (иначе отклоняется).

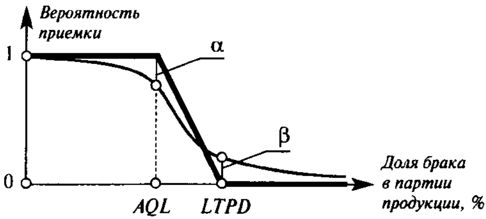
Возможен и другой подход. Потребитель задает *допустимый уровень качества AQL*. Если доля брака в партии продукции не превышает *AQL*, то продукцию принимаем (иначе отклоняем). Получается *кривая оперативной характеристики.*



На практике таких идеальных схем не существует. Поэтому потребитель задает 2 числа: *AQL* и *допустимый процент бракованных изделий в партии LTPD*. Если процент бракованных изделий в партии не превышает *AQL*, то продукцию принимаем. Если процент бракованных изделий в партии превышает *LTPD*, то продукцию отклоняем. Если процент бракованных изделий в партии попадает в промежуток от *AQL* до *LTPD*, то какие-то партии принимаются, какие-то нет.



К сожалению, на практике эта схема искажается. *Риск производителя* α — это вероятность того, что схема забракует приемлемую продукцию. *Риск потребителя* β — это вероятность того, что схема приведет к принятию неприемлемой для потребителя продукции.



Если α и β заданы заранее, построить схему приемки очень сложно.

Пример 68. Из партии в 200 единиц производится выборка $n = 5$ единиц. Если в выборке окажется более одной бракованной единицы, то вся партия в 200 единиц будет отвергнута.

Построим кривую оперативной характеристики.

Число бракованных изделий подчиняется биномиальному распределению. Вероятность k «успехов» в n испытаниях $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k = (n!)/(k!\times(n-k)!)$, p — вероятность «успеха» в одном испытании, $q = 1 - p$.

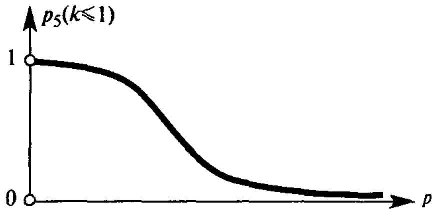
Можно воспользоваться Excel (мастер функций): $p_n(k)$ = БИНОМРАСП(k; n; p; 0). В нашем случае $n = 5$, то есть определяем $p_5(k)$. Мы примем партию продукции, если число бракованных изделий не превысит 1, то есть $k \leqslant 1$. Поэтому $p_5(k \leqslant 1) = p_5(0) + p_5(1)$.

В Excel $p_5(k \leqslant 1)$ = БИНОМРАСП(1; 5; p; 1). Будем задавать различные значения p и вычислять $p_5(k \leqslant 1)$.

p	0,01	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4
$p_5(k\leqslant 1)$	0,999	0,9774	0,9186	0,8352	0,7373	0,6328	0,5283	0,337

Построим график. Это и есть кривая оперативной характеристики.

Если доля брака 0,01, то вероятность приемки 0,999; если доля брака 0,05, то вероятность приемки 0,9774 и т. д.



Задача 68. Из партии в 200 единиц производится выборка $n = 6$ единиц. Если в выборке окажется более одной бракованной единицы, то вся партия в 200 единиц будет отвергнута. Построить кривую оперативной характеристики.

Пример 69. Производитель и потребитель договорились о следующих стандартах: $AQL = 0{,}01$, $LTPD = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}01$. Если в выборке $n = 100$ единиц будет больше двух бракованных единиц, то вся партия бракуется. Выясним, удовлетворяет ли эта схема заявленным параметрам.

$n = 100$. Вероятность приемки партии продукции равна: p_{100}(число бракованных изделий $k \leqslant 2$) $= p_{100}(k \leqslant 2)$ = БИНОМРАСП(2; 100; p; 1). Тогда вероятность отказа в приемке равна $1 - p_{100}(k \leqslant 2) = 1$ – БИНОМРАСП(2; 100; p; 1).

Риск производителя α — это вероятность отказа в приемке партии продукции при $p = AQL$, то есть в нашей схеме α = 1 – БИНОМРАСП(2; 100; AQL; 1) = 1 – БИНОМРАСП(2; 100; 0,01; 1) ≈ 0,0794, что превышает объявленные 0,05.

Риск потребителя β — это вероятность приемки партии продукции при $p = LTPD$, то есть в нашей схеме β = БИНОМРАСП(2; 100; $LTPD$; 1) = БИНОМРАСП(2; 100; 0,05; 1) ≈ 0,1183, что превышает объявленные 0,01.

И с точки зрения производителя, и с точки зрения потребителя выбранная схема плоха и требует замены.

Задача 69. Производитель и потребитель договорились о следующих стандартах: AQL = 0,05, $LTPD$ = 0,25, α = 0,15, β = 0,03. Если в выборке n = 15 единиц будет больше двух бракованных единиц, то вся партия бракуется. Выяснить, удовлетворяет ли эта схема заявленным параметрам.

§ 23.7. КРУЖКИ КАЧЕСТВА И СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЕ КОМАНДЫ

В 1960-х годах в Японии появились *кружки качества*. Это небольшие группы добровольцев (от 3 до 12 человек), регулярно (например, ежемесячно) обсуждающих свои производственные проблемы. Целью таких кружков является сокращение издержек, повышение производительности, сокращение числа ошибок и повышение качества. Это ведет к недопущению появления производственных проблем.

Для решения конкретной производственной проблемы может быть создана *специализированная команда* из работников различных функциональных подразделений предприятия. После решения проблемы деятельность специализированной команды прекращается.

Глава 24

УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

§ 24.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Выбирается промежуток времени 1 год. Рассматривается модель одиночного склада. Считается, что на складе хранится запас однотипных изделий (*однономенклатурный запас*). Спрос на эти изделия может быть постоянным или случайным. Пополняться склад может либо периодически (*циклическая модель*), либо при снижении запасов до некоторого уровня (*уровневая модель*).

Объем заказа — это количество заказываемых изделий. *Уровень повторного заказа* — количество изделий на складе, при котором подается заказ на новые изделия. *Время поставки* может быть либо мгновенным, либо фиксированным, либо случайным. *Штраф за дефицит* — это убытки, связанные с отсутствием запаса.

За хранение каждой единицы запаса берется определенная плата C_h. D — годовой спрос на изделия. *Стоимость подачи заказа* C_0 — это накладные расходы, связанные с реализацией заказа (затраты на подготовительно-заготовочные операции, не зависят от объема заказа). Вся теория будет строиться с целью минимизации суммарных издержек.

§ 24.2. ОСНОВНАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

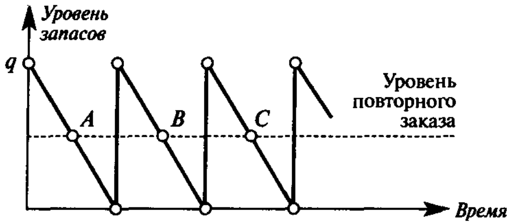
Предпосылки основной модели: 1) спрос равномерный и постоянный; 2) время поставки постоянно; 3) отсутствие запасов недопустимо; 4) каждый раз заказывается постоянное количество — *оптимальный размер заказа*.

Издержки TC = подача заказов + хранение $= \dfrac{C_0 D}{q} + \dfrac{C_h q}{2} \to \min$,

где q — оптимальный размер заказа; $q/2$ — средний объем хранимого запаса.

Решением этой оптимизационной задачи будет значение:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}}.$$



A, *B*, *C* — точки подачи заказа.

Пример 70. Годовой спрос $D = 1500$ единиц, стоимость подачи заказа $C_0 = 150$ рублей/заказ, издержки хранения одной единицы $C_h =$ 45 рублей/год, время доставки 6 дней, 1 год = 300 рабочих дней. Найдем оптимальный размер заказа, издержки, уровень повторного заказа.

Оптимальный размер заказа:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}} = \sqrt{\frac{2\times150\times1500}{45}} = 100 \text{ единиц.}$$

Издержки: $TC(q) = \dfrac{C_0D}{q} + \dfrac{C_hq}{2} = \dfrac{150\times1500}{100} + \dfrac{45\times100}{2} =$
$= 4500$ руб./год.

За 300 рабочих дней реализуется 1500 единиц, за 6 дней доставки — x единиц. $300/6 = 1500/x$. Отсюда $x = 1500\times6/300 = 30$ единиц. Каждый раз, когда на складе остается 30 единиц, подается заказ на 100 единиц.

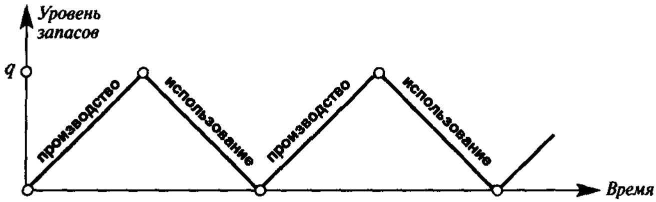
Годовой спрос $D = 1500$ единиц, каждый раз заказывается $q = 100$ единиц. Поэтому всего за год будет подано $D/q = 1500/100 = 15$ заказов. Говорят, что за год пройдет 15 циклов. Расстояние между циклами $1/(D/q) = q/D = 100/1500 = 1/15$ лет $= 300\times(1/15) = 20$ рабочих дней.

Задача 70. Годовой спрос $D = 400$ единиц, стоимость подачи заказа $C_0 = 40$ рублей/заказ, издержки хранения одной единицы

C_h = 250 рублей/год, время доставки 6 дней, 1 год = 250 рабочих дней. Найти оптимальный размер заказа, издержки, уровень повторного заказа, число циклов за год, расстояние между циклами.

§ 24.3. МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧНОГО РАЗМЕРА ПАРТИИ

Технологический процесс может быть организован на основе производства партии продукции: чередование процессов производства и реализации произведенного.



Каким должен быть размер q партии продукции?

Обозначим через C_s *стоимость организации производственного цикла* (фиксированные издержки производства).

Издержки TC = стоимость организации технологического процесса + хранение = $\frac{C_s D}{q} + \frac{C_h q}{2} \to \min$, где q — *экономичный размер партии*.

Решение этой задачи: $q = \sqrt{\frac{2C_s D}{C_h}}$.

Пример 71. Годовой спрос D = 14800 единиц, стоимость организации производственного цикла C_s = 100 рублей, издержки хранения одной единицы C_h = 8 рублей/год.

Экономичный размер партии равен:

$$q = \sqrt{\frac{2C_s D}{C_h}} = \sqrt{\frac{2\times100\times14800}{8}} \approx 608 \text{ единиц.}$$

То есть надо произвести 608 единиц, остановить производство, реализовать всю произведенную продукцию и вновь запустить производство. И т. д.

Издержки TC равны: $TC(608) = \frac{C_s D}{q} + \frac{C_h q}{2} = \frac{100\times14800}{608} + \frac{8\times608}{2} \approx 4866$ руб./год.

Число циклов за год D/q = 14800/608 ≈ 24,3. Расстояние между циклами q/D ≈ 0,04 лет ≈ 15 дней.

Задача 71. Годовой спрос $D = 8000$ единиц, стоимость организации производственного цикла $C_s = 200$ рублей, издержки хранения одной единицы $C_h = 15$ рублей/год. Найти экономичный размер партии, издержки, число циклов за год, расстояние между циклами.

§ 24.4. СКИДКА НА КОЛИЧЕСТВО

Очень часто, если заказываемое количество товара больше определенного числа, предоставляется скидка. В этом случае снижаются расходы на закупку, но увеличиваются затраты на хранение.

Общие издержки = закупка + издержки $TC(q) = CD + \dfrac{C_0 D}{q} + \dfrac{C_h q}{2}$,

где C — закупочная цена.

Необходимо выяснить, стоит ли воспользоваться скидкой.

Пример 72. Годовой спрос $D = 1000$ единиц, стоимость подачи заказа $C_0 = 40$ рублей/заказ, закупочная цена $C = 50$ рублей/единицу, годовая стоимость хранения одной единицы составляет 25% ее цены. Можно получить скидку 3% у поставщиков, если размер заказа будет не меньше 200 единиц (*уровень, нарушающий цену*). Стоит ли воспользоваться скидкой?

Так как годовая стоимость хранения одной единицы составляет 25% ее цены, то $C_h = 0{,}25 \times C = 0{,}25 \times 50 = 12{,}5$ руб./единицу.

Найдем общие издержки в случае основной модели.

$$q = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_h}} = \sqrt{\frac{2 \times 40 \times 1000}{12{,}5}} = 80 \text{ единиц.}$$

Общие издержки равны: $TC = CD + \dfrac{C_0 D}{q} + \dfrac{C_h q}{2} = 50 \times 1000 + {}$

$$+ \frac{40 \times 1000}{80} + \frac{12{,}5 \times 80}{2} = 51000 \text{ руб./год.}$$

Если воспользоваться скидкой, то новая закупочная цена равна: $C = 0{,}97 \times 50 = 48{,}5$ рублей/единицу.

Поэтому $C_h = 0{,}25 \times C = 0{,}25 \times 48{,}5 = 12{,}125$ рублей/единицу.

В этом случае оптимальный размер заказа равен:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_h}} = \sqrt{\frac{2 \times 40 \times 1000}{12{,}125}} \approx 81 \text{ единица.}$$

Но скидка предоставляется, если объем заказа $q \geqslant 200$. Поэтому положим $q = 200$.

Тогда общие издержки равны:

$$TC = CD + \frac{C_0 D}{q} + \frac{C_h q}{2} = 48{,}5\times1000 + \frac{40\times1000}{200} + \frac{12{,}125\times80}{2} =$$
$= 49912{,}5$ руб./год.

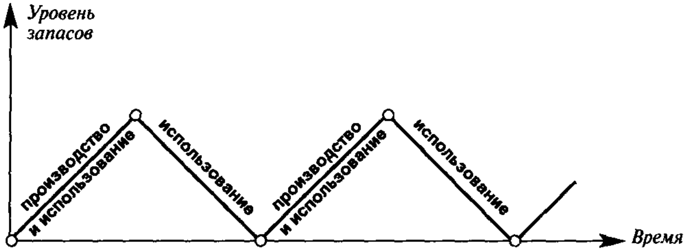
Мы видим, что общие издержки уменьшились. Поэтому следует воспользоваться скидкой, заказывая каждый раз 200 единиц.

Число циклов за год равно $D/q = 1000/200 = 5$, а интервал между циклами $q/D = 200/1000 = 1/5$ лет $= 73$ дня.

Задача 72. Годовой спрос $D = 1200$ единиц, стоимость подачи заказа $C_0 = 50$ рублей/заказ, закупочная цена $C = 60$ рублей/единицу, годовая стоимость хранения одной единицы составляет 35% ее цены. Можно получить скидку 5% у поставщиков, если размер заказа будет не меньше 90 единиц. Стоит ли воспользоваться скидкой?

§ 24.5. МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВА ПАРТИИ ПРОДУКЦИИ

Ранее была рассмотрена модель экономичного размера партии (сначала товар производят, потом используют и т. д.). Разрешим теперь использование товара по мере его производства.



Пусть P — темп производства, D — темп использования. Произведя q единиц продукции, производство прекращаем. Так как мы начинаем использовать произведенную продукцию сразу же, не дожидаясь остановки производства, то в момент этой остановки на складе будет не q единиц (как в модели экономичного размера партии), а меньше.

Издержки TC = стоимость организации технологического процесса + хранение $= \dfrac{C_s D}{q} + \dfrac{C_h (P-D) q}{2P} \to \min$, где q — экономичный размер партии.

Решение этой задачи: $q = \sqrt{\dfrac{2C_sD}{C_h}} \times \sqrt{\dfrac{P}{P-D}}$.

Пример 73. Компания выпускает электрические ножи. Она в среднем может производить 150 ножей/день. Спрос — 40 ножей/день. Годовые издержки хранения $C_h = 8$ руб./нож. Стоимость организации производственного цикла $C_s = 100$ рублей. Найдем экономичный размер партии, издержки, число циклов за год, расстояние между циклами.

$P = 150$ ножей/день $= 54750$ ножей/год, $D = 40$ ножей/день $= 14600$ ножей/год (напомним, что вся теория строится для временного интервала 1 год).

Экономичный размер партии равен:

$$q = \sqrt{\frac{2C_sD}{C_h}} \times \sqrt{\frac{P}{P-D}} = \sqrt{\frac{2\times100\times14600}{8}} \times \sqrt{\frac{54750}{54750-14600}} \approx 705$$

единиц.

Издержки равны: $TC = \dfrac{C_sD}{q} + \dfrac{C_h(P-D)q}{2P} = \dfrac{100\times14600}{705} +$
$+ \dfrac{8\times(54750-14600)\times705}{2\times54750} \approx 4138{,}92$ руб./год.

Таким образом, производим 705 ножей, останавливаем производство. Ножи реализуются сразу, не дожидаясь остановки производства. Как только ножи закончатся, тут же запускаем производственный процесс. Число циклов за год равно $D/q = 14600/705 \approx 20{,}7$, а интервал между циклами $q/D = 705/14600 \approx 0{,}048$ лет ≈ 18 дней.

Задача 73. Темп производства $P = 160$ единиц/день, темп использования $D = 30$ единиц/день. Годовые издержки хранения $C_h = 10$ рублей/единицу. Стоимость организации производственного цикла $C_s = 200$ рублей. Найти экономичный размер партии, издержки, число циклов за год, расстояние между циклами.

§ 24.6. МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ ДЕФИЦИТА

В некоторых случаях издержки хранения являются очень высокими. Поэтому имеет смысл допустить регулярные интервалы времени, когда товар на складе отсутствует.

Издержки TC = подача заказов + хранение + штраф за дефицит.

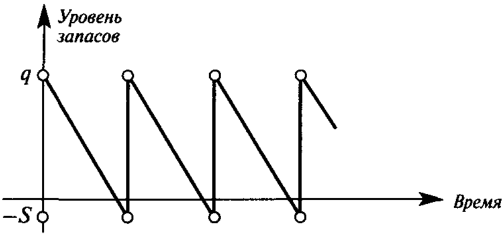
Возможны два подхода:

1) полученная новая продукция не идет на выполнение заявок на товар во время его отсутствия;

2) часть полученной новой продукции идет на погашение всех заявок, оставленных во время отсутствия запасов.

Рассмотрим эти случаи подробнее.

§ 24.6.1. Случай невыполнения заявок



S — *максимальный размер дефицита* (максимально возможное число единиц товара, которое могло бы быть реализовано за время его отсутствия в каждом цикле). На графике периоды дефицита условно изображаются ниже оси времени. C_b — *годовая стоимость отсутствия единицы продукции в запасе* (потеря доверия клиентов, непроданная продукция и т. д.). При использовании моделей управления запасами расходы из-за дефицита вычислить очень трудно.

Издержки TC = подача заказов + хранение + штраф за дефицит = $= \dfrac{C_0 D}{q+S} + \dfrac{C_h q^2}{2(q+S)} + \dfrac{C_b S^2}{2(q+S)} \to \min$, где q — оптимальный размер заказа, S — максимальный размер дефицита.

Решениями этой задачи будут величины:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_h}} \times \sqrt{\frac{C_b}{C_h + C_b}}. \quad S = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_b}} \times \sqrt{\frac{C_h}{C_h + C_b}}.$$

Пример 74. Годовой спрос D = 500 единиц, стоимость подачи заказов C_0 = 40 рублей/заказ, издержки хранения одной единицы C_h = 5 рублей/год, годовая стоимость отсутствия запасов C_b = 100 рублей/единицу.

Сравним 2 модели: основную и с дефицитом (заявки не выполняются).

Основная модель:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_h}} = \sqrt{\frac{2\times 40\times 500}{5}} \approx 89 \text{ единиц.}$$

$$TC = \frac{C_0 D}{q} + \frac{C_h q}{2} = \frac{40\times 500}{89} + \frac{5\times 89}{2} \approx 447 \text{ руб./год.}$$

Модель с дефицитом:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}} \times \sqrt{\frac{C_b}{C_h + C_b}} = 89\sqrt{\frac{100}{5+100}} \approx 87 \text{ единиц.}$$

$$S = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_b}} \times \sqrt{\frac{C_h}{C_h + C_b}} = \sqrt{\frac{2\times 40\times 500}{100}} \times \sqrt{\frac{5}{5+100}} \approx 4 \text{ единицы.}$$

$$TC = \frac{C_0D}{q+S} + \frac{C_hq^2}{2(q+S)} + \frac{C_bS^2}{2(q+S)} = \frac{40\times 500}{87+4} + \frac{5\times 87^2}{2\times(87+4)} +$$

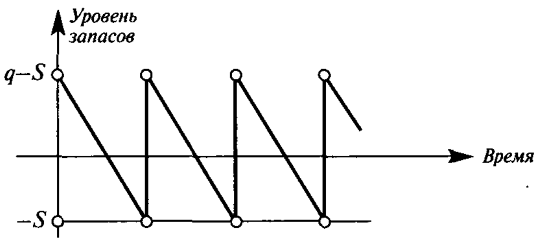
$$+ \frac{100\times 4^2}{2\times(87+4)} \approx 437 \text{ руб./год.}$$

Таким образом, в модели с дефицитом годовые издержки меньше.

Задача 74. Годовой спрос $D = 600$ единиц, стоимость подачи заказов $C_0 = 50$ рублей/заказ, издержки хранения одной единицы $C_h = 6$ рублей/год, годовая стоимость отсутствия запасов $C_b = 110$ рублей/единицу. Сравнить 2 модели: основную и с дефицитом (заявки не выполняются).

§ 24.6.2. Случай выполнения заявок

В случае выполнения заявок максимальный уровень запасов будет равен не q, а $(q - S)$.



Издержки TC = подача заказов + хранение + штраф за дефицит = $= \dfrac{C_0D}{q} + \dfrac{C_h(q-S)^2}{2q} + \dfrac{C_bS^2}{2q} \to \min$, где q — оптимальный размер заказа, S — максимальный размер дефицита. Решение задачи:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}} \times \sqrt{\frac{C_h + C_b}{C_b}}.\ S = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_b}} \times \sqrt{\frac{C_h}{C_h + C_b}}.$$

Пример 75. Годовой спрос $D = 3000$ единиц, стоимость подачи заказов $C_0 = 25$ рублей/заказ, издержки хранения одной единицы $C_h =$

120 рублей/год, годовая стоимость отсутствия запасов $C_b = 225$ рублей/единицу. Модель с дефицитом (заявки выполняются).

Найдем издержки.

$$q=\sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}}\times\sqrt{\frac{C_h+C_b}{C_b}}=\sqrt{\frac{2\times25\times3000}{120}}\times\sqrt{\frac{120+225}{225}}\approx 44 \text{ единицы.}$$

$$S=\sqrt{\frac{2C_0D}{C_b}}\times\sqrt{\frac{C_h}{C_h+C_b}}=\sqrt{\frac{2\times25\times3000}{225}}\times\sqrt{\frac{120}{120+225}}\approx 15 \text{ единиц.}$$

$$TC=\frac{C_0D}{q}+\frac{C_h(q-S)^2}{2q}+\frac{C_bS^2}{2q}=\frac{25\times3000}{44}+\frac{120\times(44-15)^2}{2\times44}+$$

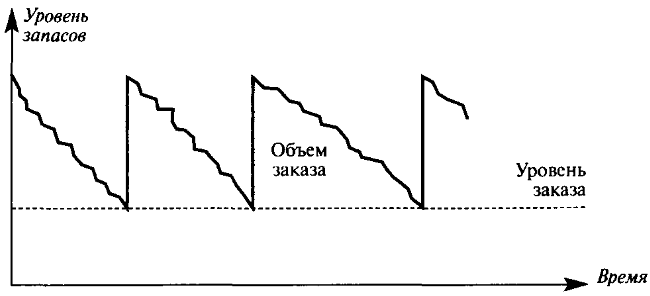
$$+\frac{225\times15^2}{2\times44}\approx 3427 \text{ руб./год.}$$

Задача 75. Годовой спрос $D = 2000$ единиц, стоимость подачи заказов $C_0 = 20$ рублей/заказ, издержки хранения одной единицы $C_h = 100$ рублей/год, годовая стоимость отсутствия запасов $C_b = 220$ рублей/единицу. Модель с дефицитом (заявки выполняются). Найти издержки.

§ 24.7. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И ОСНОВНАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Грубо говоря, основная модель — это заказ постоянного количества единиц в заранее определенные моменты времени, то есть фиксированный заказ в фиксированное время. На практике спрос часто не является постоянным, поэтому основная модель мало приспособлена для практических нужд. Будем ее видоизменять, чтобы учесть непостоянство спроса. Самое простое, что можно сделать, — отказаться от одного из двух заявленных условий.

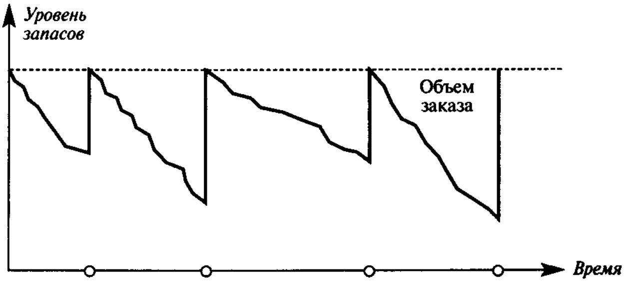
Случай 1. Фиксированный заказ в случайное время. Как только на складе запасы понизятся до некоторого заданного заранее уровня,



подается заказ на фиксированное количество единиц. Это — *уровневая система повторного заказа.*

Уровневая система повторного заказа позволяет реагировать на колебания спроса и подходит для самых разных категорий запасов, но при большом ассортименте продукции действует с перегрузкой.

Случай 2. Случайный заказ в фиксированное время. Заранее определяем, в какие моменты времени будут сделаны заказы. Обычно они выбираются с определенной периодичностью. При наступлении этих моментов подаются заказы, объем которых равен разности между заранее выбранным числом и количеством единиц на складе в тот момент времени. Это — *циклическая система повторного заказа.*



Циклическая система повторного заказа позволяет добиваться скидок за оптовые закупки, способствует ритмичной работе отдела закупок, но не способна реагировать на колебания спроса. Средний размер запаса при использовании циклической системы повторного заказа больше, чем при использовании уровневой системы повторного заказа.

Рассмотрим эти модели подробнее.

§ 24.8. УРОВНЕВАЯ СИСТЕМА ПОВТОРНОГО ЗАКАЗА

§ 24.8.1. Достижение минимальной стоимости

Чтобы учесть непостоянство спроса, вводят резервный запас.

Издержки TC = подача заказов + хранение основного запаса + + хранение резервного запаса + штраф за дефицит.

Сначала считаем, что спрос постоянный. При помощи основной модели находим оптимальный размер заказа q. Именно такое количество мы и будем заказывать каждый раз. Когда заказывать? Оптимальный размер заказа q позволяет вычислить первые два слагаемых в выражении для издержек. Как выбрать резервный запас? Чем больше (меньше) резервный запас, тем меньше (больше) штраф за дефицит и тем больше (меньше) стоимость хранения резервного запаса. Методом проб и ошибок мы должны подобрать резервный запас, минимизирующий два последних слагаемых в выражении для издержек.

Пример 76. Средний годовой спрос $D = 150$ единиц за 300 рабочих дней, стоимость подачи заказов $C_0 = 50$ рублей/заказ, издержки хранения одной единицы $C_h = 12$ рублей/год, годовая стоимость отсутствия запасов $C_b = 20$ рублей/единицу. Время поставки 4 дня.

Спрос на товар в течение поставки, шт.	0	1	2	3	4	5	6	Сумма
Частота	2	8	13	10	7	5	5	50

За время поставки спрос 6 единиц наблюдался 5 раз, спрос 5 единиц наблюдался 5 раз и т. д. Всего было 50 наблюдений. Минимизируем общую стоимость запасов.

Из основной модели оптимальный размер заказа равен:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}} = \sqrt{\frac{2\times50\times150}{12}} \approx 35 \text{ единиц.}$$

Таков объем заказа. Когда заказывать?

Издержки TC = подача заказов + хранение основного запаса + + хранение резервного запаса + штраф за дефицит = $\frac{C_0D}{q} + \frac{C_hq}{2} +$ + $C_h\times$(резервный запас) + $C_b\times$(математическое ожидание числа единиц, составляющих годовую нехватку запасов) = $\frac{50\times150}{35} + \frac{12\times35}{2} +$ + $12\times$(резервный запас) + $20\times$(математическое ожидание) $\approx 424{,}29$ + + $12\times$(резервный запас) + $20\times$(математическое ожидание).

Надо подобрать резервный запас, минимизирующий два последних слагаемых.

Число циклов за год $D/q = 150/35 \approx 4{,}3$.

Средний спрос за день $150/300 = 0{,}5$, время поставки 4 дня. Поэтому средний спрос в течение поставки $4\times0{,}5 = 2$ (если бы получилось дробное число, то его надо округлить до ближайшего меньшего целого числа). Найдем вероятность (относительную частоту) для каждого значения спроса за время поставки. Для этого частоту каждого значения спроса разделим на 50 (общее число наблюдений).

Спрос на товар в течение поставки, шт.	0	1	2	3	4	5	6	Сумма
Частота	2	8	13	10	7	5	5	50
Вероятность	0,04	0,16	0,26	0,20	0,14	0,10	0,10	1

С помощью основной модели мы учитываем спрос 0, 1, 2 изделия за время поставки, так как средний спрос в течение поставки равен 2. Чтобы учесть спрос 3, 4, 5, 6 (а свыше 6 спрос за время поставки не наблюдался), необходим резервный запас (соответственно 1, 2, 3, 4). Мы начнем с наибольшего значения резервного запаса 4. Вычислим сумму двух последних слагаемых в выражении для издержек. После этого каждый раз мы будем понижать резервный запас на 1 и пересчитывать сумму двух последних слагаемых в выражении для издержек. Сначала сумма будет понижаться, а затем возрастать. Смена убывания на возрастание говорит о том, что резервный запас найден. Составим таблицу.

Резервный запас	Покрытый спрос	Математическое ожидание числа нехваток запасов в течение		Стоимость, рублей/год		
		цикла	года	резервного запаса 12×(резервный запас)	нехватки запасов 20×(матожидание)	общая
4	6	0	0	12×4=48	0	48+0=48
3	5	1×0,1=0,1	4,3×0,1= =0,43	12×3=36	20×0,43= =8,6	36+8,6= =44,6
2	4	2×0,1+ 1×0,1=0,3	4,3×0,3= =1,29	12×2=24	20×1,29= =25,8	25,8+24= =49,8

Поясним, как заполняется таблица.

Второй столбец. Покрытый спрос = резервный запас + 2 (средний спрос за время поставки).

Третий столбец. Если покрытый спрос равен 6, то нехватки запасов не возникает. Если покрытый спрос равен 5, то возникает нехватка в 1 единицу при спросе 6. Вероятность спроса 6 равна 0,1 (см. предыдущую таблицу). Поэтому математическое ожидание нехватки 1×0,1 = 0,1. Если покрытый спрос равен 4, то возникает нехватка 2 при спросе 6 и 1 при спросе 5. Поэтому математическое ожидание нехватки 1×0,1 + 2×0,1 = 0,3. Это числа для одного цикла.

Число циклов за год — 4,3. Поэтому числа третьего столбца умножим на 4,3 и результаты запишем в четвертом столбце. Числа четвертого столбца умножим на 20 и результаты запишем в шестом столбце.

Числа первого столбца умножаем на 12 и результаты пишем в пятом столбце. Седьмой столбец равен сумме пятого и шестого столбцов.

Итоговая сумма в седьмом столбце сначала понизилась с 48 до 44,6, а затем начала повышаться. Поэтому целесообразно иметь резервный запас равный 3 (покрытый спрос 5) и нет необходимости исследовать резервный запас 1.

Издержки $TC = 424{,}29 + 12\times$(резервный запас) $+ 20\times$(математическое ожидание) $= 424{,}29 + 44{,}6 = 468{,}89$ руб./год.

Таким образом, каждый раз, когда на складе остаются 5 единиц, надо заказывать 35 единиц.

Задача 76. Средний годовой спрос $D = 140$ единиц за 300 рабочих дней, стоимость подачи заказов $C_0 = 45$ рублей/заказ, издержки хранения одной единицы $C_h = 15$ рублей/год, годовая стоимость отсутствия запасов $C_b = 18$ рублей/единицу. Время поставки 4 дня.

Спрос на товар в течение поставки, шт.	0	1	2	3	4	5	6	Сумма
Частота	5	5	5	11	12	7	5	50

Сколько нужно заказывать и когда, если цель — минимизировать общую стоимость запасов?

§ 24.8.2. Достижение минимального уровня обслуживания

Задается *вероятность нехватки запасов в течение цикла*. Тогда *минимальный уровень обслуживания* = 1 – вероятность нехватки запасов. По уровню обслуживания находим необходимый резервный запас.

Более высокий уровень обслуживания означает более высокий резервный запас. Но издержки на поддержание большого резервного запаса могут быть очень высокими.

Издержки TC = подача заказов + хранение основного запаса + хранение резервного запаса $= \dfrac{C_0 D}{q} + \dfrac{C_h q}{2} + C_h\times$(резервный запас).

Пример 77. Вернемся к примеру 76.

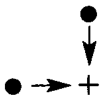
Разрешается 1 нехватка запасов в 5 циклов. Тогда вероятность нехватки запасов в течение цикла равна $1/5 = 0{,}2$.

Минимальный уровень обслуживания равен: 1 – вероятность нехватки запасов $= 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

$q = 35$ единиц, средний спрос в течение поставки = 2 (см. пример 76). Заполним таблицу.

Спрос	Вероятность	Кумулятивная вероятность
0	0,04	0,04
1	0,16	0,20
2	0,26	0,46
3	0,20	0,66
4	0,14	0,80
5	0,10	0,90
6	0,10	1,00

Порядок заполнения последнего столбца: двигаемся сверху вниз и вычисляем значения по правилу:



Для получения числа данной строки 3-го столбца к числу предыдущей строки 3-го столбца прибавляем число данной строки 2-го столбца: 0,04; 0,04 + 0,16 = 0,20; 0,20 + 0,26 = 0,46 и т. д. Это — *кумулятивная (накопленная) вероятность.* Для проверки: последнее число всегда равно 1. Смотрим, куда в последнем столбце попадает наш уровень обслуживания 0,8. Он соответствует спросу 4, то есть резервный запас = 4 – 2 = 2. Каждый раз, когда на складе остаются 4 единицы, надо заказывать 35 единиц. Издержки TC = 424,29 + + 12×(резервный запас) = 424,29 + 12×2 = 448,29 рублей/год.

Задача 77. Решить задачу 76 при условии, что разрешается 1 нехватка запасов в 10 циклов.

Замечание. Методы, рассмотренные в примерах 76 и 77, можно применять и в случае, когда спрос подчиняется какому-либо распределению (например, нормальному или распределению Пуассона).

§ 24.9. ЦИКЛИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ПОВТОРНОГО ЗАКАЗА

Пусть T — интервал повторного заказа.

Издержки $TC = \dfrac{C_0}{T} + \dfrac{C_h D T}{2} \to \min$. $T = \sqrt{\dfrac{2C_0}{C_h D}}$.

После этого надо задать уровень запасов, который определяет размер подаваемого заказа. Например, если взять за уровень 120 единиц, а на момент подачи заказа на складе 45 единиц, то надо заказывать 120 – 45 = 75 единиц.

Пример 78. Для данных примера 76 найдем интервал повторного заказа.

$$T=\sqrt{\frac{2C_0}{C_hD}}=\sqrt{\frac{2\times50}{12\times150}}\approx0{,}24\text{ года}=0{,}24\times300=72\text{ дня, то есть}$$

заказы надо подавать через 72 дня.

Задача 78. Для данных задачи 76 найти интервал повторного заказа.

В циклической системе можно также использовать один из двух критериев: достижение минимального уровня обслуживания и достижение минимальной стоимости.

§ 24.10. ДРУГИЕ ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Целью построенной нами теории была минимизация издержек. Можно было строить теорию с целью максимизации прибыли. Мы считали, что склад был безграничным. Но, скорее всего, надо вводить ограничение на площадь склада.

Запас у нас был однономенклатурным. В реальной жизни запас всегда многономенклатурный. Для упрощения ситуации здесь можно воспользоваться *эффектом Парето*: 20% товаров контролируют 80% стоимости запасов.

Сокращение номенклатуры продукции может обеспечить существенную экономию средств. ***Активное сокращение номенклатуры*** достигается за счет использования стандартных компонентов. ***Реактивное сокращение номенклатуры*** осуществляется периодически. Все это позволяет уменьшить расходы на содержание запасов и сократить число поставщиков.

Бывают ситуации (например, плохой урожай зерновых), когда предприятию требуется максимально увеличить свои запасы. Иногда расходы на поддержание запасов сырья могут оказаться гораздо ниже затрат на закупку из-за роста цен на сырье. В таких случаях не следует слепо полагаться на формулы, а необходимо воспользоваться опытом специалистов, отвечающих за снабжение предприятия.

Построенные модели — очень упрощенные. Если мы хотим рассмотреть более сложные ситуации, то следует воспользоваться имитационным моделированием.

Глава 25

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Рассмотрим одно из направлений имитационного моделирования. Моделируется некоторая случайная величина. Сначала из опытных данных определяются частоты появления возможных значений этой величины. По частотам вычисляются вероятности, по вероятностям — кумулятивные вероятности. Зная кумулятивные вероятности, устанавливаем соответствие между случайными числами и значениями случайной величины. Берем несколько случайных чисел из специальной таблицы, восстанавливаем по ним значения случайной величины и определяем нужные нам характеристики.

Пример 79. Известно количество машин, приезжавших на мойку автомашин в течение последних 200 часов.

Число машин в час	Частота
4	20
5	30
6	50
7	60
8	40

Будем имитировать прибытие машин в течение 10 часов. Заполним таблицу.

Число машин в час	Частота	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
4	20	0,10	0,10	00—09
5	30	0,15	0,25	10—24
6	50	0,25	0,50	25—49
7	60	0,30	0,80	50—79
8	40	0,20	1,00	80—99
Сумма	200			

Поясним, как заполняется таблица.

Как заполнять 4-й и 3-й столбцы, было рассказано раньше. Так как у чисел в столбце «Кумулятивная вероятность» после запятой меняются 2 знака, то случайные числа группируем по два. Заполняется последний столбец сверху вниз. Берем числа после запятой из 1-й строки 4-го столбца. Это 10. Поэтому с 10 начнем 2-ю строку последнего столбца, а числом 10 – 1 = 09 завершим 1-ю строку. Начинаем же 1-ю строку с 00. Берем числа после запятой из 2-й строки 4-го столбца. Это 25. Поэтому с 25 начнем 3-ю строку последнего столбца, а числом 25 – 1 = 24 завершим 2-ю строку. И т. д.

Полученная таблица используется следующим образом. Берем подряд из любой строки или любого столбца случайные числа из таблицы случайных чисел. Определяем, в какой интервал нашей таблицы они попадают, и находим соответствующие значения в 1-м столбце.

Час	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайное число	69	02	36	49	71	99	32	10	75	21
Прибыло машин	7	4	6	6	7	8	6	5	7	5

69 попадает в интервал 50—79, что соответствует 7 машинам, 02 попадает в интервал 00—09, что соответствует 4 машинам, и т. д.

Замечание. Математическая функция *СЛЧИС* мастера формул f_x пакета Excel возвращает случайное число: f_x → ***математические*** → → *СЛЧИС* → *ОК*. У этой функции нет аргументов. *ОК*. После этого в ячейке появится десятичная дробь из интервала (0, 1). Исследователь берет нужное число знаков после запятой. После нажатия клавиши F9 десятичная дробь в ячейке изменится.

Задача 79. Известно количество машин, приезжающих на мойку автомашин в течение последних 200 часов.

Число машин в час	Частота
4	20
5	40
6	40
7	70
8	30

Используя случайные числа 67, 57, 84, 00, 32, 35, 91, 66, 37, 99, смоделировать прибытие автомашин в течение 10 часов.

§ 25.1. ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Пример 80. Начальный запас — 10 единиц, стоимость подачи заказов $C_0 = 10$ рублей/заказ, стоимость хранения $C_h = 5$ рублей/единицу в день, одна упущенная продажа $C_b = 80$ рублей. При наличии на складе не более 5 единиц подается заказ на 10 единиц. Считаем, что все заказы подаются и выполняются в начале рабочего дня.

Спрос в день	Частота	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
0	15	0,05	0,05	00—04
1	30	0,10	0,15	05—14
2	60	0,20	0,35	15—34
3	120	0,40	0,75	35—74
4	45	0,15	0,90	75—89
5	30	0,10	1,00	90—99
Сумма	300			

Время выполнения заказа, дни	Частота	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
1	10	0,2	0,2	0—1
2	25	0,5	0,7	2—6
3	15	0,3	1,0	7—9
Сумма	50			

Во второй таблице сгруппируем случайные числа по одному, так как после запятой в столбце «Кумулятивная вероятность» меняется только 1 знак. Оценим общие издержки за день. Смоделируем работу склада за 10 дней.

День	Запас в начале дня	Случайное число	Спрос	Запас на конец дня	Повторный заказ да/нет	Случайное число	Время выполнения	Дефицит
1	10	06	1	9				
2	9	63	3	6				
3	6	57	3	3				
4	3	94	5	0	да	0	1	2
5	10	52	3	7				
6	7	69	3	4				
7	4	32	2	2	да	2	2	
8	2	30	2	0				
9	10	48	3	7				
10	7	88	4	3				
Сумма				41				2

Начальный запас — 10 единиц. Случайное число для спроса в 1-й день — 06, что соответствует по таблице спросу 1. Поэтому запас на конец 1-го дня равен 10 – 1 = 9. Это число и запишем в запас на начало 2-го дня.

Случайное число для спроса во 2-й день — 63, что соответствует по таблице спросу 3. Поэтому запас на конец 2-го дня равен 9 – 3 = 6. Это число и запишем в запас на начало 3-го дня.

Запас на начало 4-го дня — $3 \leqslant 5$. Поэтому подаем заказ (да). Случайное число — 0, что соответствует по таблице времени выполнения заказа 1 день, то есть заказ выполняется весь 4-й день, и в начале 5-го дня мы получим 10 единиц. Спрос в 4-й день был 5 единиц, а начальный запас 3. Поэтому 5 – 3 = 2 упущенные продажи запишем в столбец «Дефицит».

Запас на начало 7-го дня — $4 \leqslant 5$. Поэтому подаем заказ (да). Случайное число — 2, что соответствует по таблице времени выполнения заказа 2 дня, то есть заказ выполняется в течение 7-го и 8-го дней, и в начале 9-го дня мы получим 10 единиц.

Средний запас = суммарный конечный запас/общее число дней = = 41/10 = 4,1 единицы/день.

Среднее число упущенных продаж = общее число упущенных продаж/общее число дней = 2/10 = 0,2 продажи/день.

Среднее число заказов = общее число заказов/общее число дней = = 2/10 = 0,2 заказа/день.

Общие издержки = подача заказов + хранение + штраф за дефицит = $C_0 \times$(среднее число заказов) + $C_h \times$(средний запас) + $C_b \times$(среднее число упущенных продаж) = $10 \times 0{,}2 + 5 \times 4{,}1 + 80 \times 0{,}2 = 38{,}5$ рублей/день.

Задача 80. Начальный запас 11 единиц, стоимость подачи заказов $C_0 = 15$ рублей/заказ, стоимость хранения $C_h = 6$ рублей/единицу в день, одна упущенная продажа $C_b = 70$ рублей. При наличии на складе не более 5 единиц подается заказ на 11 единиц. Считаем, что все заказы подаются и выполняются в начале рабочего дня. Оценить общие издержки за день, смоделировав работу склада за 10 дней.

Спрос в день	0	1	2	3	4	5
Частота	10	15	25	20	20	10

Время выполнения заказа, дни	1	2	3
Частота	5	30	15

Случайные числа для спроса	35	90	92	94	25	57	34	30	90	01
Случайные числа для времени выполнения заказа	7	0	7	9	6	5	1	6	4	5

Глава 26

ОЦЕНКА ЗАПАСОВ ТОВАРНО-МАТЕРИАЛЬНЫХ ЦЕННОСТЕЙ

Для расчета себестоимости проданной продукции нужно уметь оценивать *запасы товарно-материальных ценностей.* Большинство запасов оценивается по себестоимости. Это не лучшее решение проблемы. Предприятие может располагать крупными запасами продукции одного типа, которая могла быть закуплена в разные периоды и по разной цене. Поэтому практически невозможно установить себестоимость каждой единицы запаса.

В настоящий момент существуют три основных метода оценки запасов:

- ФИФО (*англ.* First In First Out — FIFO);
- ЛИФО (*англ.* Last In First Out — LIFO);
- по средневзвешенной.

Рассмотрим основные методы оценки запасов товарно-материальных ценностей подробнее.

§ 26.1. МЕТОД ОЦЕНКИ ЗАПАСОВ ФИФО

В этом методе оценки стоимости запасов предполагается, что партия товара, первой поступившая в запасы, первой и реализуется.

Пример 81. Начальные запасы отсутствуют. В марте закуплены для реализации 500 единиц продукции по цене 10 руб. В апреле закуплены для реализации 300 единиц продукции по цене 11 руб. В мае проданы 400 единиц продукции по цене 20 руб. В июне проданы 200 единиц продукции по цене 21 руб. В июле закуплены для реализации 150 единиц продукции по цене 11,5 руб. В августе проданы 100 единиц продукции по цене 21,5 руб.

Определим стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов ФИФО.

Заполним таблицу.

Месяц	Закупка, руб. (по закупочным ценам)	Продажа, руб. (по оценочной стоимости)	Запасы после операции купли-продажи, руб. (по оценочной стоимости)
март	500×10		500×10
апрель	300×11		500×10
			300×11
май		400×10	100×10
			300×11
июнь		100×10	200×11
		100×11	
июль	150×11,5		200×11
			150×11,5
август		100×11	100×11
			150×11,5

Поясним, как заполняется таблица.

Во 2-м столбце указаны закупки соответствующего месяца. В 3-м столбце указаны продажи соответствующего месяца. В 4-м столбце указан уровень запасов после операции купли-продажи соответствующего месяца.

После мартовских закупок на складе находятся 500 единиц продукции, а после апрельских — 500 единиц (мартовских) и 300 единиц (апрельских). В мае проданы 400 единиц продукции.

В методе оценки запасов ФИФО при продаже делается предположение, что запасы, закупленные первыми, первыми и реализуются. Поэтому считаем, что в мае были проданы 400 единиц (мартовских), а на складе остаются 100 единиц (мартовских) и 300 единиц (апрельских).

В июне проданы 200 единиц продукции: 100 единиц (мартовских) и 100 единиц (апрельских). После этой продажи на складе находятся 200 единиц (апрельских), а после июльских закупок — 200 единиц (апрельских) и 150 единиц (июльских).

В августе были проданы 100 единиц (апрельских). Поэтому после этого на складе находятся 100 единиц (апрельских) и 150 единиц (июльских).

Оценка стоимости запасов на конец августа методом оценки запасов ФИФО равна 100×11 + 150×11,5 = 2825 руб.

Задача 81. Начальные запасы отсутствуют. В марте закуплены для реализации 300 единиц продукции по цене 15 руб. В апреле закуплены для реализации 400 единиц продукции по цене 16 руб. В мае проданы 500 единиц продукции по цене 30 руб. В июне проданы 100 единиц продукции по цене 31 руб. В июле закуплены для реализации 200 единиц продукции по цене 16,5 руб. В августе проданы 50 единиц продукции по цене 31,5 руб.

Определить стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов ФИФО.

§ 26.2. МЕТОД ОЦЕНКИ ЗАПАСОВ ЛИФО

В этом методе оценки стоимости запасов предполагается, что партия товара, поступившая в запасы последней, реализуется первой. Это предположение имеет место только на бумаге.

Пример 82. В примере 81 определим стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов ЛИФО.

Заполним таблицу.

Месяц	Закупка, руб. (по закупочным ценам)	Продажа, руб. (по оценочной стоимости)	Запасы после операции купли-продажи, руб. (по оценочной стоимости)
март	500×10		500×10
апрель	300×11		500×10
			300×11
май		300×11	400×10
		100×10	
июнь		200×10	200×10
июль	150×11,5		200×10
			150×11,5
август		100×11,5	200×10
			50×11,5

Поясним, как заполняется таблица.

В методе оценки запасов ЛИФО при продаже делается предположение, что запасы, закупленные последними, реализуются первыми. Поэтому считаем, что в мае были проданы 300 единиц (апрельских) и 100 единиц (мартовских), а на складе остаются 400 единиц (мартовских).

В июне были проданы 200 единиц (мартовских). После этой продажи на складе находятся 200 единиц (мартовских), а после июльских закупок — 200 единиц (мартовских) и 150 единиц (июльских).

В августе были проданы 100 единиц (июльских). Поэтому после этого на складе находятся 200 единиц (мартовских) и 50 единиц (июльских).

Оценка стоимости запасов на конец августа методом оценки запасов ЛИФО равна $200 \times 10 + 50 \times 11{,}5 = 2575$ руб.

Задача 82. В задаче 81 определить стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов ЛИФО.

§ 26.3. МЕТОД ОЦЕНКИ ЗАПАСОВ ПО СРЕДНЕВЗВЕШЕННОЙ

В этом методе оценки стоимости запасов для продукции, находящейся в запасе, вычисляется средняя стоимость. Метод средневзвешенной часто применяется там, где имеются большие количества относительно мелких трудноразличимых единиц продукции, каждая из которых имеет низкую стоимость и которые трудно идентифицировать с конкретной ценой (например, гвозди).

Пример 83. В примере 81 определим стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов по средневзвешенной.

Заполним таблицу.

Месяц	Закупка, руб. (по закупочным ценам)	Продажа, руб. (по себестоимости)	Запасы после операции купли-продажи, руб. (по оценочной стоимости)
март	500×10		500×10
апрель	300×11		$800\times\frac{500\times10+300\times11}{800}\approx$ $\approx 800\times10{,}38$
май		$400\times10{,}38$	$400\times10{,}38$
июнь		$200\times10{,}38$	$200\times10{,}38$
июль	$150\times11{,}5$		$350\times\frac{200\times10{,}38+150\times11{,}5}{350}=$ $=350\times10{,}86$
август		$100\times10{,}86$	$250\times10{,}86$

Поясним, как заполняется таблица.

После апрельских закупок на складе находятся 800 единиц продукции: 500 единиц (мартовских) и 300 единиц (апрельских).

Определим их среднюю себестоимость. Для этого суммарную стоимость запасов $500\times10+300\times11$ нужно разделить на общее число единиц продукции в запасе (800 единиц), то есть $\frac{500\times10+300\times11}{800}\approx$ $\approx 10{,}38$ руб. Поэтому оценочная стоимость запасов после апрельских закупок равна $800\times10{,}38$ руб.

Из этих запасов в мае и июне продано 400 и 200 единиц продукции соответственно.

После июльских закупок на складе находятся 350 единиц продукции: 200 единиц по цене 10,38 руб. и 150 единиц по цене 11,5 руб.

Определим их среднюю себестоимость. Для этого суммарную стоимость запасов $200\times10{,}38+150\times11{,}5$ нужно разделить на общее число единиц продукции в запасе (350 единиц), то есть $\frac{200 \times 10{,}38 + 150 \times 11{,}5}{350} = 10{,}86$ руб. Поэтому оценочная стоимость запасов после июльских закупок равна 350×10,86 руб.

После продажи в августе 100 единиц продукции на складе остаются 250 единиц.

Оценка стоимости запасов на конец августа методом оценки запасов по средневзвешенной равна 250×10,86 = 2715 руб.

Задача 83. В задаче 81 определить стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов по средневзвешенной.

§ 26.4. ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ ЗАПАСОВ НА РАСЧЕТ ПРИБЫЛИ

Валовая прибыль вычисляется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{валовая прибыль}} = \boxed{\text{объем продаж (по ценам реализации)}} - \boxed{\text{себестоимость проданной продукции}},$$

где

$$\boxed{\text{себестоимость проданной продукции}} = \boxed{\text{запас на начало периода}} + \boxed{\text{закупки (по закупочной стоимости)}} - \boxed{\text{запас на конец периода (оценочная стоимость)}}.$$

В период колебания цен все три метода оценки запасов показывают различную стоимость запасов на конец периода. Следовательно, величина валовой прибыли для каждого из этих методов различна.

Пример 84. Определим валовую прибыль в примерах 81–83.

В каждом из примеров объем продаж равен 400×20 + 200×21 + + 100×21,5 = 14350 руб., запас на начало периода равен 0, а закупки — 500×10 + 300×11 + 150×11,5 = 10025 руб. Заполним таблицу.

	ФИФО, руб.	ЛИФО, руб.	Метод средневзвешенной, руб.
Объем продаж	14350	14350	14350
Запас на начало марта	0	0	0
Закупки	10025	10025	10025
Запас на конец августа	2825	2575	2715
Себестоимость проданной продукции	7200	7450	7310
Валовая прибыль	7150	6900	7040

Поясним, как заполняется таблица. Запас на конец августа найден в примерах 81–83.

В каждом столбце из суммы чисел 2-й и 3-й строк (Запас на начало марта + Закупки) вычитаем число 4-й строки (Запас на конец августа) и результат пишем в 5-й строке (Себестоимость проданной продукции).

В каждом столбце из числа 1-й строки (Объем продаж) вычитаем число 5-й строки (Себестоимость проданной продукции) и результат пишем в 6-й строке (Валовая прибыль).

Мы видим, что в условиях повышения цен значение валовой прибыли выше при применении метода оценки запасов ФИФО.

Задача 84. Определить валовую прибыль в задачах 81–83.

Глава 27

ПРЕДУПРЕДИТЕЛЬНОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ ОБОРУДОВАНИЯ

С течением времени оборудование и сооружения стареют. Все чаще наблюдаются поломки, выпускаемая продукция имеет больше брака, ее качество снижается. Существует способ замедлить этот процесс с помощью предупредительного обслуживания оборудования.

При проведении *предупредительного обслуживания оборудования* детали, у которых возможна поломка через какой-то период времени, заменяют независимо от их текущего состояния. Это дает возможность поддерживать оборудование на уровне, позволяющем постоянно показывать неплохие результаты.

Как часто следует проводить подобное обслуживание? При слишком частых обследованиях затраты на обслуживание очень высоки. Если подобное обслуживание проводить редко, то затраты на него будут низкими, но оборудование часто выходит из строя. Рассмотрим эту проблему подробнее на следующем примере.

Пример 85. Предприятие решает вопрос о том, как часто проводить предупредительное обслуживание оборудования. Проведение такого обслуживания стоит 40000 руб. Дополнительная информация приведена в таблице.

Число месяцев после проведения обслуживания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Затраты, связанные с поломками, за последний месяц	0	2000	6000	8000	64000	120000
Амортизационные отчисления	4000	8000	12000	16000	20000	24000

Предупредительное обслуживание позволяет технически довести оборудование до состояния нового оборудования. Определим оптимальный промежуток времени для проведения такого обслуживания и среднемесячные минимальные затраты. Заполним таблицу.

Число месяцев после проведения обслуживания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Затраты на обслуживание	40000	40000	40000	40000	40000	40000
Затраты, связанные с поломками, за последний месяц	0	2000	6000	8000	64000	120000
Общие затраты, связанные с поломками	0	2000	8000	16000	80000	200000
Амортизационные отчисления	4000	8000	12000	16000	20000	24000
Общие затраты	44000	50000	60000	72000	140000	264000
Среднемесячные затраты	44000	25000	20000	18000	28000	44000

Поясним, как заполняется таблица.

Общие затраты, связанные с поломками, за n месяцев равны сумме затрат за $(n - 1)$ месяцев и затрат за n-й месяц. Поэтому в 4-й строке каждое число, начиная со 2-го столбца, равно сумме предыдущего числа 4-й строки и числа из этого же столбца 3-й строки: $0 + 2000 = 2000$, $2000 + 6000 = 8000$, $8000 + 8000 = 16000$ и т. д. 6-я строка равна сумме 2-й, 4-й и 5-й строк. Каждое число 6-й строки делим на соответствующее число 1-й строки и результат пишем в седьмой строке.

Находим минимум в последней строке. Это 18000. Поэтому предупредительное обслуживание оборудования нужно проводить раз в 4 месяца. Тогда среднемесячные минимальные затраты равны 18000 руб.

Задача 85. Предприятие решает вопрос о том, как часто проводить предупредительное обслуживание оборудования. Проведение такого обслуживания стоит 50000 руб. Дополнительная информация приведена в таблице.

Число месяцев после проведения обслуживания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Затраты, связанные с поломками, за последний месяц	0	4000	8000	10000	60000	110000
Амортизационные отчисления	6000	12000	18000	24000	30000	36000

Предупредительное обслуживание позволяет технически довести оборудование до состояния нового оборудования. Определить оптимальный промежуток времени для проведения такого обслуживания и среднемесячные минимальные затраты.

Глава 28

КРАТКОСРОЧНЫЕ ГРАФИКИ

Краткосрочные графики дают подробные указания по видам работ, сотрудникам, материалам, оборудованию и другим видам ресурсов. Они позволяют определить последовательность выполнения видов деятельности и время выполнения. Цель таких графиков — минимизация затрат.

Разработка краткосрочных графиков — одна из наиболее часто встречающихся задач на любом предприятии. Число возможных вариантов огромно. Каждый из вариантов имеет свои характеристики и позволяет получить высокие результаты по одним критериям, но плохие по другим. Необходимо сбалансировать все показатели и учесть сложность возникающих проблем.

§ 28.1. ВОЗМОЖНЫЕ ПОДХОДЫ К СОСТАВЛЕНИЮ ГРАФИКОВ

Для последовательности работ, которые ожидают выделения для них оборудования, необходимо определить порядок их выполнения. Существуют два основных способа решения этой задачи.

При *обратном составлении графика* известно, когда каждая работа должна быть завершена. Двигаясь от этой даты назад и учитывая продолжительность каждой работы, можно определить время начала выполнения каждой работы.

При *прямом составлении графика* известно, когда каждая работа может начаться. Поэтому можно определить, когда работа будет завершена.

Оба эти подходы задают общие принципы. Для определения наилучшего порядка выполнения работ используют правила составления графиков.

§ 28.2. ПРАВИЛО «ПЕРВЫМ ПРИШЕЛ, ПЕРВЫМ ОБСЛУЖЕН»

Работы выполняются по мере их поступления. При этом никаких приоритетов, никакой срочности и никаких других параметров относительной важности не устанавливается. Поэтому неотложные работы могут ожидать своего выполнения.

Пример 86. Работы, обозначенные буквами в порядке их поступления, ожидают своего выполнения. Время выполнения работ и дата их завершения относительно момента расчета указаны в таблице.

Работа	Время выполнения, дни	Срок завершения, дни
A	5	7
B	4	6
C	3	9
D	7	10

Определим порядок выполнения работ с помощью правила «первым пришел, первым обслужен», а также показатели эффективности полученного расписания.

Работы выполняются по мере их поступления: $A - B - C - D$.

Заполним таблицу.

Работа	Время выполнения	Время ожидания	Время в системе	Срок завершения	Запаздывание
A	5	0	5	7	0
B	4	5	9	6	3
C	3	9	12	9	3
D	7	12	19	10	9
Сумма	19	—	45	—	15

Поясним, как заполняется таблица.

1-й, 2-й и 5-й столбцы взяты из условия задачи.

Время ожидания — это время, которое работа ожидает начала выполнения. Поэтому в 1-й строке 3-го столбца пишем 0, а каждое число 3-го столбца, начиная со 2-й строки, есть сумма чисел из предыдущей строки 2-го и 3-го столбцов.

4-й столбец равен сумме 2-го и 3-го столбцов.

Запаздывание указывает, на сколько дней окончание работы отстает от расписания. Поэтому из числа 4-го столбца вычитаем соответствующее число 5-го столбца и в последнем столбце пишем максимум из полученной разности и 0.

В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Среднее время завершения = (время в системе)/(число работ) = = 45/4 = 11,25 дня.

Среднее число работ в системе = (время в системе)/(время выполнения) = 45/19 ≈ 2,4.

Среднее ожидание = (запаздывание)/(число работ) = 15/4 = 3,75 дня.

Задача 86. Работы, обозначенные буквами в порядке их поступления, ожидают своего выполнения. Время выполнения работ и дата их завершения относительно момента расчета указаны в таблице.

Работа	Время выполнения, дни	Срок завершения, дни
A	6	8
B	5	5
C	2	7
D	8	11

Определить порядок выполнения работ с помощью правила «первым пришел, первым обслужен», а также показатели эффективности полученного расписания.

§ 28.3. ПРАВИЛО КРАТЧАЙШЕГО ВРЕМЕНИ ВЫПОЛНЕНИЯ

Руководствуясь этим правилом, минимизируют время в системе. Работы выполняются в порядке увеличения их продолжительности. Это позволяет тем работам, которые можно сделать быстро, оперативно перемещаться по системе. А вот более продолжительные работы надолго остаются в ней.

Пример 87. Ответим на вопросы примера 86, руководствуясь правилом кратчайшего времени выполнения.

Работы выполняются в порядке увеличения их продолжительности: *C* – *B* – *A* – *D*.

Заполним таблицу.

Работа	Время выполнения	Время ожидания	Время в системе	Срок завершения	Запаздывание
C	3	0	3	9	0
B	4	3	7	6	1
A	5	7	12	7	5
D	7	12	19	10	9
Сумма	19	—	41	—	15

Среднее время завершения = (время в системе)/(число работ) = = 41/4 = 10,25 дня.

Среднее число работ в системе = (время в системе)/(время выполнения) = 41/19 ≈ 2,2.

Среднее ожидание = (запаздывание)/(число работ) = 15/4 = 3,75 дня.

Задача 87. Ответить на вопросы задачи 86, руководствуясь правилом кратчайшего времени выполнения.

§ 28.4. ПРАВИЛО РАННИХ ПО ДАТЕ ИСПОЛНЕНИЯ

Руководствуясь этим правилом, все работы сортируются по требуемому времени их завершения. При этом работы, нужные быстрее всего, выполняются первыми. Хотя это и позволяет минимизировать максимальную задержку работ, но некоторые работы надолго остаются в очереди.

Пример 88. Ответим на вопросы примера 86, руководствуясь правилом ранних по дате исполнения.

Работы выполняются в порядке увеличения времени их завершения: *B* – *A* – *C* – *D*.

Заполним таблицу.

Работа	Время выполнения	Время ожидания	Время в системе	Срок завершения	Запаздывание
B	4	0	4	6	0
A	5	4	9	7	2
C	3	9	12	9	3
D	7	12	19	10	9
Сумма	19	—	44	—	14

Среднее время завершения = (время в системе)/(число работ) = = 44/4 = 11 дней.

Среднее число работ в системе = (время в системе)/(время выполнения) = 44/19 ≈ 2,3.

Среднее ожидание = (запаздывание)/(число работ) = 14/4 = 3,5 дня.

Задача 88. Ответить на вопросы задачи 86, руководствуясь правилом ранних по дате исполнения.

§ 28.5. ПРАВИЛО НАИБОЛЕЕ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ВЫПОЛНЕНИЯ

Наиболее продолжительные работы часто очень важны и выполняются первыми.

Пример 89. Ответим на вопросы примера 86, руководствуясь правилом наиболее продолжительного времени выполнения.

Так как наиболее продолжительные работы выполняются первыми, то получаем следующее расписание: $D - A - B - C$.

Заполним таблицу.

Работа	Время выполнения	Время ожидания	Время в системе	Срок завершения	Запаздывание
D	7	0	7	10	0
A	5	7	12	7	5
B	4	12	16	6	10
C	3	16	19	9	10
Сумма	19	—	54	—	25

Среднее время завершения = (время в системе)/(число работ) = = 54/4 = 13,5 дня.

Среднее число работ в системе = (время в системе)/(время выполнения) = 54/19 ≈ 2,8.

Среднее ожидание = (запаздывание)/(число работ) = 25/4 = 6,25 дня.

Задача 89. Ответить на вопросы задачи 86, руководствуясь правилом наиболее продолжительного времени выполнения.

§ 28.6. ПРАВИЛО САМЫХ СРОЧНЫХ РАБОТ

Каждой работе присваивается показатель важности. Все работы выполняются в порядке от наиболее срочных к наименее срочным. Самые важные работы получают самый высокий приоритет. Работы с низким приоритетом могут оставаться в конце очереди очень долго.

При составлении графика выполнения работ важно избежать субоптимизации плана, когда комфортные условия для одной части предприятия создают проблемы для потребителей или для другой части предприятия. После анализа правил составления графика выполнения работ мы видим, что применение правила кратчайшего времени выполнения работ более выгодно по сравнению с другими правилами. Поэтому правило кратчайшего времени выполнения работ иногда даже называют важнейшей концепцией задачи определения последовательности работ.

§ 28.7. КРИТИЧЕСКОЕ ОТНОШЕНИЕ

Критическое отношение CR определяет порядок выполнения работ. Оно вычисляется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{CR}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{время, оставшееся до}\\ \text{завершения работы по плану}\end{array}} : \boxed{\begin{array}{c}\text{остающееся время}\\ \text{на выполнение работы}\end{array}},$$

где
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{время, оставшееся до}\\ \text{завершения работы по плану}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{дата}\\ \text{окончания}\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{текущая}\\ \text{дата}\end{array}}.$$

Критическое отношение может быть получено на любую дату. Оно дает приоритет тем работам, которые должны быть выполнены, чтобы не нарушить расписания.

В случае $CR < 1$ ($CR > 1$) работа отстает от расписания (опережает расписание). При $CR = 1$ работа находится в графике расписания.

Пример 90. Идет 20-й день производственного расписания. Задан определенный порядок выполнения работ.

Работа	Срок завершения	Оставшиеся рабочие дни
A	23	3
B	22	4
C	26	5

Определим критические отношения и приоритет работ.

Критическое отношение $CR(A) = (23 - 20)/3 = 1$. Работа A находится в графике расписания.

Критическое отношение $CR(B) = (22 - 20)/4 = 0{,}5 < 1$. Работа B отстает от расписания.

Критическое отношение $CR(C) = (26 - 20)/5 = 1{,}2 > 1$. Работа C опережает расписание.

Приоритет работ: $B - A - C$.

Задача 90. Идет 15-й день производственного расписания. Задан определенный порядок выполнения работ.

Работа	Срок завершения	Оставшиеся рабочие дни
A	18	6
B	20	5
C	19	2

Определить критические отношения и приоритет работ.

§ 28.8. ЗАДАЧА О ДВУХ СТАНКАХ

Пусть есть два станка A и B. Каждая деталь должна быть обработана и на станке A (причем в первую очередь), и на станке B (во вторую очередь). Известны времена обработки каждой детали на каждом станке. Для разных деталей эти времена, вообще говоря, различные.

На каждом из станков можно обрабатывать только одну деталь. Процесс обработки деталей не может прерываться. Нужно определить вариант плана запуска деталей, при котором общее время их обработки будет минимальным.

Алгоритм решения этой задачи следующий.

1. На k-шаге для $n - k + 1$ деталей ($k = 1, 2, ..., n$) просматриваются времена обработки деталей на каждом станке и среди них определяется минимум.

2. Если этот минимум относится к станку A, то соответствующая деталь занимает очередное место в начале плана запуска деталей и исключается из дальнейшего рассмотрения.

3. Если этот минимум относится к станку B, то соответствующая деталь занимает очередное место в конце плана запуска деталей и исключается из дальнейшего рассмотрения.

4. Если время обработки двух разных деталей на одном станке совпадает и это время меньше времени обработки на другом станке, то порядок обработки этих деталей произволен.

Пример 91. Есть два станка A и B. Каждая деталь должна быть обработана и на станке A (причем в первую очередь), и на станке B (во вторую очередь). Известны времена обработки каждой детали на каждом станке (в минутах). На каждом из станков можно обрабатывать только одну деталь. Процесс обработки деталей не может прерываться. Определим вариант плана запуска деталей, при котором общее время их обработки будет минимальным.

Деталь	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Время обработки на станке A	3	4	2	1	3
Время обработки на станке B	5	2	5	3	4

Находим минимальное число во 2-й и 3-й строках. Это минимальное число равно 1 и показывает время обработки 4-й детали на станке A. Поэтому деталь 4 исключаем из дальнейшего рассмотрения, а план запуска деталей после 1-го шага имеет следующий вид: 4 — ...

Получаем таблицу:

Деталь	**1**	**2**	**3**	**5**
Время обработки на станке A	3	4	2	3
Время обработки на станке B	5	2	5	4

Для полученной таблицы находим минимальное число во 2-й и 3-й строках. Таких чисел два: 2 (деталь 3, станок A) и 2 (деталь 2, станок B). Предпочтение отдается станку A. Поэтому деталь 3 исключаем из дальнейшего рассмотрения, а план запуска деталей после 2-го шага имеет следующий вид: 4 — 3 — ...

Получаем таблицу:

Деталь	1	2	5
Время обработки на станке *A*	3	4	3
Время обработки на станке *B*	5	2	4

После 3-го шага план запуска деталей имеет следующий вид: 4 — 3 — ... — 2.

Окончательный вариант: 4 — 3 — 5 — 1 — 2.

Найдем минимальное суммарное время обработки деталей на двух станках.

Деталь	Станок А		Станок В	
	начало	окончание	начало	окончание
4	0	0 + 1 = 1	1	1 + 3 = 4
3	1	1 + 2 = 3	4	4 + 5 = 9
5	3	3 + 3 = 6	9	9 + 4 = 13
1	6	6 + 3 = 9	13	13 + 5 = 18
2	9	9 + 4 = 13	18	18 + 2 = 20

Поясним, как заполняется таблица. Время начала обработки очередной детали равно времени окончания обработки предыдущей детали на этом же станке. Время окончания обработки детали = время начала обработки детали + время обработки детали на соответствующем станке.

Минимальное суммарное время обработки деталей на двух станках равно 20 минут.

Задача 91. Есть два станка *A* и *B*. Каждая деталь должна быть обработана и на станке *A* (причем в первую очередь), и на станке *B* (во вторую очередь). Известны времена обработки каждой детали на каждом станке (в минутах). На каждом из станков можно обрабатывать только одну деталь. Процесс обработки деталей не может прерываться. Определить вариант плана запуска деталей, при котором общее время их обработки будет минимальным. Чему равно минимальное суммарное время обработки деталей на двух станках?

Деталь	1	2	3	4	5
Время обработки на станке *A*	4	2	1	2	3
Время обработки на станке *B*	1	3	4	2	2

Глава 29

ПЛАНИРОВАНИЕ ПОТРЕБНОСТИ В МАТЕРИАЛАХ

На практике очень часто наблюдается *зависимый спрос*, то есть спрос на определенное изделие оказывает влияние на спрос на другое изделие. В этом случае в управлении запасами используется так называемое *планирование потребности в материалах MRP* (*англ.* material requirements planning).

При применении этого подхода запасы обычно низкие, но повышаются, когда заказы доставляются непосредственно перед началом выполнения операций. После этого запас расходуется во время производства и снова снижается до обычного низкого уровня.

Цель модели MRP — сокращение запасов, поддержка высокого процента оказания услуг и координация графика доставки и деятельности по производству и закупке.

Использование модели MRP требует наличия производственного графика (что должно быть сделано и когда), учетной документации по запасам (что на складе), материалов в заявке (что заказано), времени (как много его требуется для получения компонентов).

Точный перечень сырья для каждого конечного продукта указывается в виде *структурного дерева*.

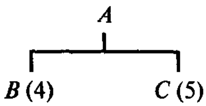
Структурное дерево делится на *уровни* и наглядно демонстрирует черты зависимой потребности. Каждая единица имеет свой номер в зависимости от уровня детализованности, показывающего, когда он включается в процесс.

Готовый продукт имеет уровень 0. Уровень 1 — это составляющие, из которых непосредственно можно произвести единицу уровня 0. Составляющие уровня 2 используются для производства составляющих уровня 1 и т. д. Цифры в скобках указывают число составляющих этого вида, необходимое для производства единицы продукции предыдущего уровня.

Рассмотрим модель MRP на следующем примере.

Пример 92. Предприятие получило заказ на поставку через 5 недель 40 изделий *A*. Для производства одного изделия *A* требуется 4 изделия *B* и 5 изделий *C*. Время выполнения заказов на изделия *B* и *C* равно соответственно 2 и 3 недели. Производство изделий *A* занимает одну неделю. В настоящее время у предприятия есть 6 изделий *A*, 10 изделий *B* и 7 изделий *C*. Изобразим структурное дерево и определим, когда предприятие следует отправить заказы на поставку изделий *B* и *C*.

Структурное дерево процесса имеет следующий вид:



Заполним таблицу.

Уровень 0 — изделие *A*.

Неделя	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Валовая потребность					40
Запас	6	6	6	6	6
Чистая потребность					34
Окончание производства					34
Начало производства				34	

Поясним, как заполняется таблица.

Чистая потребность = валовая потребность – запас. Полученное значение запишем в строке «Окончание производства». Так как производство изделий *A* занимает одну неделю, то число 34 запишем в строке «Начало производства» на 4-й неделе.

Заполним таблицу.

Уровень 1 — изделие *B*.

Неделя	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Валовая потребность				34×4 = 136	
Запас	10	10	10	10	
Чистая потребность				126	
Выполнение заказа				126	
Подача заказа		126			

Поясним, как заполняется таблица.

На 4-й неделе нужно произвести 34 изделия *A*. Для производства одного изделия *A* требуется 4 изделия *B*. Поэтому валовая потребность в изделиях *B* на 4-й неделе равна 34×4 = 136.

Из-за наличия в запасе 10 изделий *B* чистая потребность в изделиях *B* на 4-й неделе равна 136 – 10 = 126. Так как время выполнения заказа на изделия *B* равно 2 недели, то эти изделия нужно заказать на 2-й неделе.

Заполним таблицу.

Уровень 1 — изделие *C*.

Неделя	1	2	3	4	5
Валовая потребность				34×5 = 170	
Запас	7	7	7	7	
Чистая потребность				163	
Выполнение заказа				163	
Подача заказа	163				

Получаем окончательное расписание. Подача заказа на 163 изделия *C* на 1-й неделе. Подача заказа на 126 изделий *B* на 2-й неделе. Производство 34 изделий *A* на 5-й неделе.

Задача 92. Предприятие получило заказ на поставку через 6 недель 30 изделий *A*. Для производства одного изделия *A* требуется 5 изделий *B* и 7 изделий *C*. Время выполнения заказов на изделия *B* и *C* равно соответственно 4 и 2 недели. Производство изделий *A* занимает одну неделю. В настоящее время у предприятия есть 10 изделий *A*, 15 изделий *B* и 20 изделий *C*. Изобразить структурное дерево и определить, когда предприятие следует отправить заказы на поставку изделий *B* и *C*.

Применение модели MRP позволяет добиться уменьшения объема запасов, повышения скорости оборачиваемости запасов, качества обслуживания потребителей (нет задержек из-за нехватки материалов). Если графики MRP показывают, что отдельные материалы поступят слишком поздно, предприятие может ускорить их доставку или изменить свои производственные планы.

Обычно модель MRP применяется при сборочных работах или при поточном методе производства, когда спрос на предметы является зависимым. На основе прогноза спроса составляется график производства. Поэтому модель MRP относится к системам типа «толкай», в которых материал проталкивается через всю производственную линию.

Модель MRP применима к серийному производству, когда заказы потребителей преобразуются в график производства с учетом времени выполнения заказов. Как правило, производство крупных и дорогих продуктов осуществляется с помощью модели MRP.

К основным недостаткам модели MRP следует отнести невозможность оперативно реагировать на внешние изменения, а также большой объем подробной и точной информации. Иногда говорят, что модель MRP — это система хорошего планирования и плохого выполнения.

Глава 30

СИСТЕМА «ТОЧНО В СРОК»

Система «точно в срок» JIT (*англ.* just in time) — это еще один способ планирования. Все виды деятельности организуются таким образом, чтобы они совершались точно в то время, когда необходимы.

Цель системы JIT — обеспечить доставку материалов непосредственно ко времени выполнения конкретных операций, благодаря чему запас фактически устраняется.

Предприятие, работающее по системе JIT, в полной мере полагается на своих поставщиков. В этом случае заказчики и поставщики должны работать на основе долгосрочных партнерских соглашений, преследуя общие цели. При наличии эффективной программы сертификации поставщиков отпадает необходимость входного контроля продукции поставщиков.

В основе системы JIT лежит непрерывное постоянное производство. Поэтому все операции должны выполняться надежно.

Одна из проблем системы JIT состоит в том, что она хорошо работает только на определенных типах предприятий (например, на сборочных заводах большой мощности). Для системы JIT необходим производственный процесс с постоянной мощностью и в течение длительного времени. Из-за отсутствия страховых запасов следует исключить любой брак материалов. Иначе система «точно в срок» превратится в систему «уже поздно». Система JIT требует привлечения профессионально подготовленных и гибко действующих работников, умеющих отыскать причину сбоев, предпринять действия для устранения ошибок и удостовериться, что подобных нарушений больше не будет.

Система JIT — это пример *вытягивающей системы*, когда предыдущая операция отправляет обрабатываемую единицу дальше только тогда, когда получает на это запрос от последующей операции.

Конечно, в реально действующей системе материалы доставляются малыми партиями, а не непрерывным потоком, да и сообщения о потребности в материалах отправляются с некоторым опережением. Так что справедливее было бы сказать, что система JIT скорее минимизирует запасы, чем полностью устраняет их.

Система JIT упрощает планирование и сокращает объем бумажной работы.

Одна из основных проблем системы JIT — это неспособность справляться с непредвиденными обстоятельствами. Да и за большинство выгод системы JIT приходится платить более высокую цену (покупка более качественного и более дорогого оборудования, повышение затрат на производство, увеличение затрат на подготовку сотрудников, наличие резервных мощностей и т. д.).

Преимущества закупок оптом по более низкой цене могут перевесить выгоды от использования системы JIT.

Как правило, система JIT используется на сборочной линии с большим количеством типовых деталей и программой сборки, определенной на несколько месяцев вперед. А вот для продуктов с коротким жизненным циклом и частыми конструкторскими изменениями эта система не подходит.

У системы JIT ограниченные возможности планирования, но отличная реализация. Поэтому предприятие должно взвесить все плюсы и минусы перед возможным введением системы JIT.

Глава 31

АВС-АНАЛИЗ

Любая система контроля запасов требует усилий для работы без сбоев. Для одних продуктов (например, болты и гайки) эти усилия себя не оправдывают. Другие же продукты (например, двигатели для самолетов) требуют особого внимания.

АВС-анализ распределяет продукты по категориям, показывающим степень важности контроля запасов:

✧ *категория А* (дорогостоящие продукты, требуют особого внимания, составляют 10% общего объема единиц и 70% общей стоимости запаса);

✧ *категория В* (обычные продукты, требуют обычного отношения, составляют 30% общего объема единиц и 20% общей стоимости запаса);

✧ *категория С* (дешевые продукты, требуют небольшого внимания, составляют 60% общего объема единиц и 10% общей стоимости запаса).

Прогнозирование запасов категории *А* должно проводиться более тщательно.

Пример 93. Небольшой магазин имеет 8 видов продуктов. Затраты и годовой спрос на них указаны в таблице.

Продукт	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*K*	*M*	*N*
Цена, руб.	4	2	4	10	2	10	1	20
Годовой спрос	250	2000	1000	7000	1500	2000	10000	100

Проведем АВС-анализ. Заполним таблицу.

Продукт	Цена	Годовой спрос	Годовое потребление, руб.	Доля от общей стоимости
D	4	250	1000	0,009
E	2	2000	4000	0,035
F	4	1000	4000	0,035
G	10	7000	70000	0,614
H	2	1500	3000	0,026
K	10	2000	20000	0,175
M	1	10000	10000	0,088
N	20	100	2000	0,018
Сумма	—	—	114000	1

Поясним, как заполняется таблица.

Числа первых трех столбцов взяты из условия. 4-й столбец — это произведение 2-го и 3-го столбцов. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца. Каждое число 4-го столбца делим на итоговую сумму чисел этого столбца, результат округляем до трех цифр после запятой и пишем в последнем столбце.

Заполним таблицу, отсортировав продукты по убыванию доли от общей стоимости.

Продукт	Доля от общей стоимости	Кумулятивная доля от общей стоимости	Категория
G	0,614	0,614	*A*
K	0,175	0,789	*B*
M	0,088	0,877	*B*
E	0,035	0,912	*B*
F	0,035	0,947	*C*
H	0,026	0,973	*C*
N	0,018	0,991	*C*
D	0,009	1,000	*C*

Поясним, как заполняется таблица.

Каждое число 3-го столбца равно сумме предыдущего числа 3-го столбца и числа из этой же строки 2-го столбца.

Границы между категориями часто бывают расплывчатыми. В столбце «Кумулятивная доля от общей стоимости» интервал (0; 0,65) отнесем к категории *A*, интервал (0,65; 0,93) отнесем к категории *B*, а интервал (0,93; 1) отнесем к категории *C*. Тип категории указан в последнем столбце.

Если ресурсы для контроля за запасами ограничены, то категории *C* (продукты *F*, *H*, *N*, *D*) следует уделить меньше всего внимания.

Задача 93. Небольшой магазин имеет 8 видов продуктов. Затраты и годовой спрос на них указаны в таблице.

Продукт	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*K*	*M*	*N*
Цена, руб.	3	1	4	9	3	11	1	25
Годовой спрос	200	4000	1000	8000	1000	4000	20000	200

Провести ABC-анализ.

При проведении ABC-анализа следует быть очень осторожным. Годовая стоимость используемого материала часто служит плохим показателем его важности.

Например, необходимое оборудование для обеспечения безопасности должно присутствовать всегда. Линия сборки будет работать, если на нее будут подаваться все материалы независимо от их стоимости.

Возможно, менеджер по закупкам сам решит, как провести границы между категориями *A*, *B* и *C*.

Целью ABC-анализа является достижение максимальной эффективности при закупке товаров за счет уделения основного внимания продуктам с высоким годовым потреблением. Такой подход представляется более правильным, чем подход, при котором все продукты считаются одинаковыми важными.

Глава 32

СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Для того чтобы понять, как решаются задачи массового обслуживания, вначале рассмотрим основные понятия и определения.

§ 32.1. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайная величина X подчиняется *показательному (или экспоненциальному) закону* распределения вероятностей, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \mu e^{-\mu x}, x \geqslant 0, \end{cases}$ где $\mu = \text{const} > 0$.

Тогда функция распределения $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1 - e^{-\mu x}, x \geqslant 0. \end{cases}$ Для такой случайной величины математическое ожидадание $M(X)$ = стандартное отклонение $\sigma(X) = 1/\mu$, дисперсия $D(X) = 1/\mu^2$.

Пример 94. Случайная величина X распределена по показательному закону, ее плотность распределения вероятностей имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 5e^{-5x}, x \geqslant 0. \end{cases}$

Тогда $\mu = 5$, математическое ожидание $M(X)$ = стандартное отклонение $\sigma(X) = 1/\mu = 1/5 = 0{,}2$, дисперсия $D(X) = 1/\mu^2 = 1/25 = 0{,}04$.

Задача 94. Случайная величина X распределена по показательному закону, ее плотность распределения вероятностей имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 2e^{-2x}, x \geqslant 0. \end{cases}$ Найти математическое ожидание, стандартное отклонение, дисперсию.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel содержит среди статистических функций функции $f(x)$ и $F(x)$ случайной величины X, распределенной по показательному закону с параметром μ.

$f(x)$ = ЭКСПРАСП (x; μ; 0) и $F(x)$ = ЭКСПРАСП (x; μ; 1).

§ 32.2. ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК

Поток событий — это последовательность событий, которые наступают в некоторые случайные моменты времени. Примеры потоков: поступления вызовов на АТС, на пункт неотложной медицинской помощи, прибытие самолетов в аэропорт.

Интенсивность потока λ — это среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Простейший (пуассоновский) поток событий — это такой поток событий, для которого вероятность $p_t(k)$ появления k событий за время t определяется формулой Пуассона $p_t(k) = (\lambda t)^k e^{-\lambda t}/k!$, где $k! = 1\times 2\times \ldots \times k$.

Пример 95. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 минуту, равно 3. Найдем вероятность того, что за $t = 5$ минут прибудут: а) 6 самолетов; б) не менее двух самолетов. Считаем, что поток простейший.

а) $\lambda = 3$. $p_t(k) = p_5(6) = (\lambda t)^k e^{-\lambda t}/k! = (3\times 5)^6 e^{-3\times 5}/6! = 15^6 e^{-15}/720 \approx$ $\approx 0{,}005$.

б) События A = {прибыло не менее двух самолетов} и B = {прибыло менее двух самолетов} — это противоположные события. Поэтому сумма их вероятностей равна 1. Событие B есть сумма несовместных событий C = {не прибыло ни одного самолета} и D = {прибыл один самолет}.

Тогда $p_5(k \geqslant 2) = 1 - p_5(k < 2) = 1 - (p_5(0) + p_5(1)) = 1 - ((3\times 5)^0 e^{-3\times 5}/0! +$ $+ (3\times 5)^1 e^{-3\times 5}/1!) = 1 - (e^{-15} + 15e^{-15}) = 1 - 16e^{-15} \approx 0{,}999995$.

Задача 95. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за $t = 4$ минуты прибудут а) 3 самолета; б) не менее трех самолетов. Поток предполагается простейшим.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel позволяет быстро вычислить $k!$, $p_t(k)$ и $p_t(k \leqslant k_2)$. $k!$ = ПЕРЕСТ (k; k); $p_t(k)$ = ПУАССОН (k; λt; 0); $p_t(k \leqslant k_2)$ = ПУАССОН (k_2; λt; 1).

Простейший поток обладает следующими свойствами:

1) *стационарностью* (постоянное число событий в единицу времени);

2) *отсутствием последействия* (независимость числа событий после любого момента времени от числа событий до него);

3) *ординарностью* (практически невозможно одновременное наступление нескольких событий).

§ 32.3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Теория массового обслуживания (или *теория очередей*) имеет дело с процессами, для которых характерна следующая структура.

В *систему массового обслуживания* (СМО) (это могут быть линии связи, приемные пункты, подъездные пути, технологические агрегаты, ремонтные бригады и т. д.) в случайные моменты времени поступают заявки (или требования). Заявки на обслуживание образуют *входной поток*.

Если есть свободные каналы обслуживания, то требование выполняется. Если все каналы обслуживания заняты, то требование становится в очередь по определенным правилам или без обслуживания покидает систему. Выполненные требования образуют *выходной поток*.

В настоящее время теоретически наиболее разработаны и удобны в практических приложениях методы решения задач, в которых поток требований является простейшим с интенсивностью λ (среднее число требований, поступающих в единицу времени).

СМО состоит из определенного числа обслуживающих единиц — *каналов обслуживания*. Различают *одноканальные СМО* и *многоканальные СМО*.

Дисциплина очереди задает порядок прохождения заявки через очередь. Заявки из очереди могут выполняться в порядке поступления, с приоритетом, в случайном порядке и т. д. Очередь может быть конечной или бесконечной. СМО с очередями называют также *СМО с ожиданием*. Очереди могут ограничиваться по длине (по числу находящихся в ней заявок) или по времени ожидания обслуживания. В *СМО с отказом* очередь не предусмотрена, то есть заявка, пришедшая в момент, когда заняты все обслуживающие каналы, получает отказ.

Время обслуживания требований в системе является случайной величиной и обычно описывается экспоненциальным (показательным) законом распределения (то есть распределение длительности оставшейся части работ по обслуживанию не зависит от того, сколько оно уже продолжалось) с интенсивностью μ (среднее число требований, выполняемых в единицу времени). Это обусловлено рядом причин:

1) отсутствием последействия;
2) простотой и удобством аналитических выражений;
3) именно так устроены многие реальные системы.

Формально показательное распределение времени обслуживания имеет вид: $P_t = \mu e^{-\mu t}$ ($t \geqslant 0$). Тогда среднее время обслуживания одним каналом одного требования $t_{обсл} = 1/\mu$.

Коэффициент загрузки СМО (среднее число каналов, которое должно быть для обслуживания в единицу времени всех поступающих требований) $\rho = \lambda/\mu$.

§ 32.4. ГРАФ СОСТОЯНИЙ

Процесс работы СМО — это *случайный процесс*, то есть состояния системы меняются в соответствии с вероятностными закономерностями.

Мы будем рассматривать только *процессы с дискретными состояниями*: все возможные состояния S_0, S_1, S_2, ... системы известны заранее, а переход из одного возможного состояния в другое происходит скачком в момент, когда происходит какое-то случайное событие (появление новой заявки, начало или окончание обслуживания, уход заявки из очереди и т. д.).

Если моменты возможных переходов системы из состояния в состояние не фиксированы заранее, а случайны, то это *процесс с непрерывным временем*.

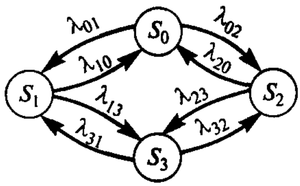
Таким образом, процесс работы СМО — это случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Для СМО с простейшим входным потоком и экспоненциальным временем обслуживания характерно *отсутствие последействия*, то есть будущее развитие процесса зависит только от текущего состояния и не зависит того, как происходило развитие в прошлом.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться специальной схемой — *графом состояний*. Состояния системы S_i обозначают кругами, а возможные переходы из состояния S_i в состояние S_j — стрелкой, соединяющей эти состояния. Очень часто на стрелках указывают *интенсивности соответствующих переходов* (среднее число переходов в единицу времени). Такой граф состояний называют *размеченным графом состояний*.

Пример 96. Система состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время. Построим граф состояний этой системы.

Возможные состояния: S_0 (оба узла работают), S_1 (1-й узел работает, 2-й узел ремонтируется), S_2 (2-й узел работает, 1-й узел ремонтируется), S_3 (оба узла ремонтируются). Тогда искомый граф состояний выглядит следующим образом:



Здесь λ_{ij} — интенсивность перехода из состояния S_i в состояние S_j.

Задача 96. Построить граф состояний системы из примера 96 при условии, что ремонт узлов не производится в процессе функционирования системы.

§ 32.5. УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА

Пусть S_0, S_1, ..., S_n — все возможные состояния СМО. При исследовании СМО нужно уметь находить вектор вероятностей $(p_0(t), p_1(t), ..., p_n(t))$ состояний системы в любой момент времени, где $p_i(t)$ — вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_i.

Используя граф состояний, можно составить систему уравнений Колмогорова. При составлении i-го уравнения ($i = 0, ..., n$) этой системы, нужно рассмотреть состояние S_i на размеченном графе состояний. В левой части уравнения находится производная по времени $\frac{dp_i(t)}{dt}$. Каждой входящей в состояние S_i из состояния S_j стрелке (на ней указана интенсивность λ_{ji}) в правой части уравнения соответствует слагаемое $\lambda_{ji}p_j(t)$ со знаком «+». Каждой выходящей из состояния S_i в состояние S_k стрелке (на ней указана интенсивность λ_{ik}) в правой части уравнения соответствует слагаемое $\lambda_{ik}p_i(t)$ со знаком «–». Кроме этого, надо задать начальные условия, то есть вероятности состояний в момент времени $t = 0$.

Пример 97. Запишем уравнения Колмогорова для системы из примера 96.

Считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ система находилась в состоянии S_0. Тогда $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = 0$, ..., $p_n(0) = 0$.

Рассмотрим состояние S_0. В состояние S_0 входят стрелки из состояний S_1 и S_2 с интенсивностями λ_{10} и λ_{20} соответственно. Им соответствуют слагаемые $\lambda_{10}p_1(t) + \lambda_{20}p_2(t)$. Из состояния S_0 выходят стрелки в состояния S_1 и S_2 с интенсивностями λ_{01} и λ_{02} соответственно. Им соответствуют слагаемые $-\lambda_{01}p_0(t) - \lambda_{02}p_0(t) = -(\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0(t)$.

Тогда уравнение Колмогорова для состояния S_0 будет $\dfrac{dp_0(t)}{dt} =$ $= \lambda_{10}p_1(t) + \lambda_{20}p_2(t) - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0(t)$.

Рассмотрим состояние S_1. В состояние S_1 входят стрелки из состояний S_0 и S_3 с интенсивностями λ_{01} и λ_{31} соответственно. Им соответствуют слагаемые $\lambda_{01}p_0(t) + \lambda_{31}p_3(t)$. Из состояния S_1 выходят стрелки в состояния S_0 и S_3 с интенсивностями λ_{10} и λ_{13} соответственно. Им соответствуют слагаемые $-\lambda_{10}p_1(t) - \lambda_{13}p_1(t) = -(\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1(t)$.

Тогда уравнение Колмогорова для состояния S_1 будет $\dfrac{dp_1(t)}{dt} =$ $= \lambda_{01}p_0(t) + \lambda_{31}p_3(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1(t)$. И т. д.

Получаем систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = \lambda_{10}p_1(t) + \lambda_{20}p_2(t) - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0(t), \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{01}p_0(t) + \lambda_{31}p_3(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{02}p_0(t) + \lambda_{32}p_3(t) - (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2(t), \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{13}p_1(t) + \lambda_{23}p_2(t) - (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3(t), \\ p_0(0) = 1,\ p_i(0) = 0,\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Задача 97. Записать уравнения Колмогорова для системы из задачи 96. В начальный момент времени $t = 0$ оба узла исправны.

§ 32.6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

Уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как функции времени. Особый интерес представляет случай при $t \to \infty$. В этом случае получают *предельные (или финальные) вероятности состояний*. Существование предельных вероятностей означает, что с течением времени в системе наступает *стационарный режим*: она случайным образом меняет свои состояния, но вероятность p_i каждого из них уже не зависит от времени.

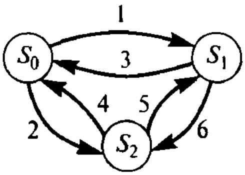
Предельная вероятность p_i — это среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_i (сколько процентов времени система проводит в состоянии S_i).

Так как предельные вероятности p_i не зависят от времени, то $\frac{dp_i(t)}{dt} = 0$ $(i = 0, ..., n)$, то есть в левой части уравнений Колмогорова получаем 0. Для решения этой системы удобно отрицательные слагаемые перенести из правой части исходной системы в левую.

При составлении i-го уравнения системы уравнений Колмогорова для предельных вероятностей нужно рассмотреть состояние S_i на размеченном графе состояний. В левой части уравнения указана сумма интенсивностей всех выходящих из S_i стрелок, умноженная на предельную вероятность p_i. Каждой входящей в S_i из S_j стрелке (на ней указана интенсивность λ_{ji}) в правой части уравнения соответствует слагаемое $\lambda_{ji}p_j$. В полученной системе уравнений одно уравнение будет выражаться через другие.

Поэтому какое-то одно уравнение этой системы нужно заменить уравнением $p_0 + p_1 + ... + p_n = \sum_{i=0}^{n} p_i = 1$.

Пример 98. Найдем предельные вероятности для следующей системы.



Составим уравнения Колмогорова.

Из состояния S_0 выходят стрелки с интенсивностями 2 и 1. Поэтому в левой части соответствующего уравнения Колмогорова будет $(2 + 1)p_0$. В состояние S_0 входят стрелка с интенсивностью 3 из состояния S_1 (ей соответствует слагаемое $3p_1$ в правой части уравнения Колмогорова) и стрелка с интенсивностью 4 из состояния S_2 (ей соответствует слагаемое $4p_2$ в правой части уравнения Колмогорова). Получаем уравнение $(2 + 1)p_0 = 3p_1 + 4p_2$.

Из состояния S_1 выходят стрелки с интенсивностями 3 и 6. Поэтому в левой части соответствующего уравнения Колмогорова будет

$(3 + 6)p_1$. В состояние S_1 входят стрелка с интенсивностью 1 из состояния S_0 (ей соответствует слагаемое $1 \times p_0$ в правой части уравнения Колмогорова) и стрелка с интенсивностью 5 из состояния S_2 (ей соответствует слагаемое $5p_2$ в правой части уравнения Колмогорова). Получаем уравнение $(3 + 6)p_1 = 1p_0 + 5p_2$. И т. д.

Система уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} (2+1)p_0 = 3p_1 + 4p_2, \\ (3+6)p_1 = 1p_0 + 5p_2, \\ (4+5)p_2 = 2p_0 + 6p_1. \end{cases} \to \begin{cases} 3p_0 = 3p_1 + 4p_2, \\ 9p_1 = p_0 + 5p_2, \\ 9p_2 = 2p_0 + 6p_1. \end{cases}$$

Мы видим, что последнее уравнение есть сумма двух предыдущих уравнений. Поэтому вместо него включим в систему уравнение $p_0 + p_1 + p_2 = 1$:

$$\begin{cases} 3p_0 = 3p_1 + 4p_2, \\ 9p_1 = p_0 + 5p_2, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \to \begin{cases} 3p_0 - 3p_1 - 4p_2 = 0, \\ 9p_1 - p_0 - 5p_2 = 0, \\ p_2 = 1 - p_0 - p_1. \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} 3p_0 - 3p_1 - 4(1 - p_0 - p_1) = 0, \\ 9p_1 - p_0 - 5(1 - p_0 - p_1) = 0, \\ p_2 = 1 - p_0 - p_1. \end{cases} \to \begin{cases} 7p_0 + p_1 = 4, \\ 4p_0 + 14p_1 = 5, \\ p_2 = 1 - p_0 - p_1. \end{cases}$$

К первым двум уравнениям системы применим правило Крамера. Тогда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 7 \times 14 - 1 \times 4 = 94;$$

$$\Delta p_0 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} = 4 \times 14 - 1 \times 5 = 51;$$

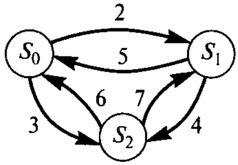
$$\Delta p_1 = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7 \times 5 - 4 \times 4 = 19;$$

$$p_0 = \Delta p_0 / \Delta = 51/94 \approx 0{,}543;$$
$$p_1 = \Delta p_1 / \Delta = 19/94 \approx 0{,}202;$$
$$p_2 = 1 - p_0 - p_1 = 1 - 0{,}543 - 0{,}202 = 0{,}255.$$

Полученные результаты говорят о том, что в предельном стационарном режиме система в среднем 54,3% времени будет находиться в состоянии S_0, 20,2% времени будет находиться в состоянии S_1 и 25,5% времени будет находиться в состоянии S_2.

Если в состояниях S_0, S_1 и S_2 система приносит 10, 8 и 6 денежных единиц дохода соответственно, то средняя эффективность системы равна сумме произведений предельных вероятностей состояний и доходов в этих состояниях: $0{,}543 \times 10 + 0{,}202 \times 8 + 0{,}255 \times 6 = 8{,}576$ денежных единиц.

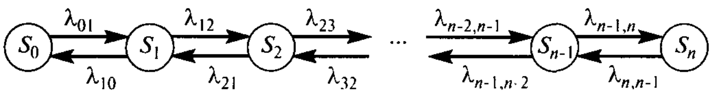
Задача 98. Найти предельные вероятности для следующей системы.



Оценить среднюю эффективность системы, если в состояниях S_0, S_1 и S_2 система приносит 11, 7 и 5 денежных единиц дохода соответственно.

§ 32.7. ПРОЦЕСС ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ

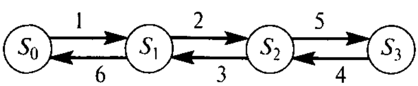
В теории массового обслуживания широкое распространение получил специальный класс случайных процессов — *процесс гибели и размножения*. Его размеченный граф состояний имеет следующий вид:



Здесь λ_{ij} — это интенсивность перехода из состояния S_i в состояние S_j. Крайние состояния S_0 и S_n имеют только одно соседнее состояние (S_1 и S_{n-1} соответственно). Каждое из других состояний S_i связано прямой связью с состоянием S_{i+1} (верхняя стрелка с интенсивностью $\lambda_{i,i+1}$) и обратной связью с состоянием S_{i-1} (нижняя стрелка с интенсивностью $\lambda_{i,i-1}$), $i = 1, ..., n-1$.

В биологических задачах такие процессы описывают изменение численности особей в популяции. Предполагается, что все потоки простейшие. Вместо запоминания общих громоздких формул для предельных вероятностей p_i можно очень просто найти p_i из размеченного графа состояний для конкретной задачи.

Пример 99. Найдем предельные вероятности для процесса гибели и размножения, размеченный граф состояний которого имеет следующий вид:



Двигаемся по этому графу слева направо. Вероятность p_0 — предельная вероятность состояния S_0.

Следующее состояние — S_1. Оно связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями 1 и 6. Пусть p_1 — предельная вероятность состояния S_1. Имеем $p_1 = \frac{1}{6}p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе).

Следующее состояние S_2. Оно связано с состоянием S_1 двумя стрелками с интенсивностями 2 и 3. Пусть p_2 — предельная вероятность состояния S_2. Имеем $p_2 = \frac{2}{3}p_1$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, нижней стрелки — в знаменателе) $= \frac{2}{3} \times \frac{1}{6}p_0 = \frac{1}{9}p_0$.

Следующее состояние S_3. Оно связано с состоянием S_2 двумя стрелками с интенсивностями 5 и 4. Пусть p_3 — предельная вероятность состояния S_3. Имеем $p_3 = \frac{5}{4}p_2$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, нижней стрелки — в знаменателе) $= \frac{5}{4} \times \frac{1}{9}p_0 = \frac{5}{36}p_0$.

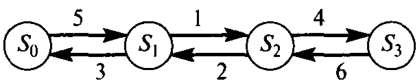
Так как $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$, то $1 = p_0 + \frac{1}{6}p_0 + \frac{1}{9}p_0 + \frac{5}{36}p_0 = \frac{51}{36}p_0$.

Отсюда $p_0 = \frac{36}{51} \approx 0{,}706$.

Тогда $p_1 = \frac{1}{6}p_0 \approx 0{,}118$, $p_2 = \frac{1}{9}p_0 \approx 0{,}078$, $p_3 = \frac{5}{36}p_0 \approx 0{,}098$.

Эту же схему будем применять при анализе других СМО.

Задача 99. Найти предельные вероятности для процесса гибели и размножения, размеченный граф состояний которого имеет следующий вид:



§ 32.8. ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ

СМО содержит один обслуживающий канал. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Образование очереди не допускается. Если заявка застала обслуживающий канал занятым, то она покидает систему.

Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{обсл} = 1/\mu$.

Возможные состояния СМО S_0 (канал свободен) и S_1 (канал занят).

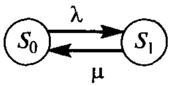
Нас интересуют следующие показатели эффективности работы СМО:

1) абсолютная пропускная способность A (среднее число заявок, которое СМО может обслужить в единицу времени);

2) относительная пропускная способность Q (отношение среднего числа обслуживаемых в единицу времени заявок к среднему числу поступивших за это время заявок);

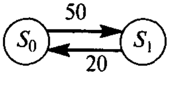
3) вероятность отказа $p_{отк}$ (вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной).

Размеченный граф состояний одноканальной СМО с отказами имеет следующий вид:



Пример 100. Одноканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда линия занята, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью $\lambda = 50$ звонков/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора $t_{обсл} = 3$ мин. Определим показатели эффективности работы СМО.

Данная телефонная линия — это одноканальная СМО с отказами. Время обслуживания $t_{обсл} = 3$ мин $= 3/60$ ч $= 0{,}05$ ч. Тогда интенсивность обслуживания $\mu = 1/t_{обсл} = 1/0{,}05 = 20$ звонков/ч. Размеченный граф состояний имеет следующий вид:



Пусть p_0 — предельная вероятность состояния S_0. Состояние S_1 связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями 50 и 20.

Пусть p_1 — предельная вероятность состояния S_1. Тогда $p_1 = \dfrac{50}{20}p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе) $= 2{,}5p_0$.

Так как $p_0 + p_1 = 1$, то $1 = p_0 + 2{,}5p_0 = 3{,}5p_0$. Отсюда $p_0 = 1/3{,}5 \approx$ $\approx 0{,}286$. Тогда $p_1 = 2{,}5p_0 \approx 0{,}714$.

Вероятность отказа $p_{отк}$ — это вероятность того, что линия занята, то есть предельная вероятность состояния S_1. Поэтому $p_{отк} = p_1 \approx 0{,}714$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - p_{отк} = 1 - 0{,}714 = 0{,}286$. Это вероятность того, что заявка будет обслужена.

Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = 50 \times 0{,}286 = 14{,}3$ звонка/ч, то есть в среднем в час СМО обслуживает 14,3 звонка.

Мы видим, что номинальная пропускная способность телефонной линии $\mu = 20$ звонков/ч отличается от абсолютной пропускной способности $A = 14{,}3$ звонка/ч из-за случайного характера потока звонков и случайности времени обслуживания.

Задача 100. Одноканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда линия занята, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью $\lambda = 60$ звонков/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора $t_{обсл} = 2{,}5$ мин. Определить показатели эффективности работы СМО.

§ 32.9. МНОГОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ (ЗАДАЧА ЭРЛАНГА)

СМО содержит n обслуживающих каналов. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Образование очереди не допускается. Если заявка застала все обслуживающие каналы занятыми, то она покидает систему. Если в момент поступления требования имеется свободный канал, то он немедленно приступает к обслуживанию поступившего требования. Каждый канал может одновременно обслуживать только одно требование. Все каналы функционируют независимо.

Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{обсл} = 1/\mu$.

Возможные состояния СМО S_0 (все каналы свободны), S_1 (один канал занят, остальные свободны), S_2 (два канала заняты, остальные свободны), ..., S_n (все каналы заняты).

Приведенная интенсивность потока заявок (интенсивность нагрузки канала) $\rho = \lambda/\mu$.

Нас интересуют следующие показатели эффективности работы СМО:

1) абсолютная пропускная способность A (среднее число заявок, которое СМО может обслужить в единицу времени);

2) относительная пропускная способность Q (отношение среднего числа обслуживаемых в единицу времени заявок к среднему числу поступивших за это время заявок);

3) вероятность отказа $p_{отк}$ (вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной);

4) p_0 (вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны);

5) p_k (вероятность того, что в системе k требований);

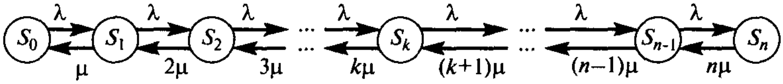
6) среднее число свободных от обслуживания каналов N_0;

7) коэффициент простоя каналов $K_{пр}$;

8) среднее число занятых обслуживанием каналов $N_{зан}$;

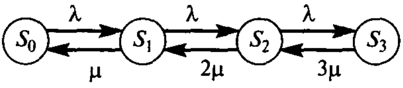
9) коэффициент загрузки каналов $K_{зан}$.

Размеченный граф состояний многоканальной СМО с отказами имеет следующий вид:



Пример 101. Трехканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда все $n = 3$ канала заняты, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью $\lambda = 60$ звонков/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора $t_{обсл} = 3$ мин. Определим показатели эффективности работы СМО.

Данная телефонная линия — это многоканальная СМО с отказами. $t_{обсл} = 3$ мин $= 3/60$ ч $= 0{,}05$ ч. Тогда интенсивность обслуживания $\mu = 1/t_{обсл} = 1/0{,}05 = 20$ звонков/ч. Приведенная интенсивность потока заявок $\rho = \lambda/\mu = 60/20 = 3$. Размеченный граф состояний имеет следующий вид:



p_0 — предельная вероятность состояния S_0. Состояние S_1 связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями λ и μ.

Пусть p_1 — предельная вероятность состояния S_1. Имеем $p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе) $= \rho p_0 = 3p_0$. Аналогично $p_2 = \dfrac{\lambda}{2\mu} p_1 = \dfrac{\rho}{2} p_1 = \dfrac{3}{2} \times 3p_0 = 4{,}5p_0$; $p_3 = \dfrac{\lambda}{3\mu} p_2 = \dfrac{\rho}{3} p_2 = \dfrac{3}{3} \times 4{,}5p_0 = 4{,}5p_0$.

Так как $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$, то $1 = p_0 + 3p_0 + 4{,}5p_0 + 4{,}5p_0 = 13p_0$. Отсюда $p_0 = 1/13 \approx 0{,}077$ (вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны). Тогда $p_1 = 3p_0 = 0{,}231$, $p_2 = 4{,}5p_0 \approx 0{,}346$, $p_3 = 4{,}5p_0 \approx \approx 0{,}346$. Мы нашли вероятности того, что в системе k требований, $k = 0, 1, 2, 3$.

Вероятность отказа $p_{отк}$ — это вероятность того, что все каналы заняты, то есть предельная вероятность состояния S_3. Поэтому $p_{отк} = p_3 \approx 0{,}346$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - p_{отк} = 1 - 0{,}346 = 0{,}654$. Это вероятность того, что заявка будет обслужена.

Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = 60 \times 0{,}654 = 39{,}24$ звонка/ч, то есть в среднем в час СМО обслуживает 39,24 звонка.

Среднее число свободных от обслуживания каналов N_0 есть математическое ожидание числа свободных каналов, то есть число свободных каналов в каждом состоянии надо умножить на предельную вероятность этого состояния и полученные произведения сложить: $N_0 = 3 \times p_0 + 2 \times p_1 + 1 \times p_2 + 0 \times p_3 = 3 \times 0{,}077 + 2 \times 0{,}231 + 1 \times 0{,}346 + 0 \times 0{,}346 = 1{,}039$.

Коэффициент простоя каналов $K_{пр} = N_0/n = 1{,}039/3 \approx 0{,}346$.

Среднее число занятых обслуживанием каналов $N_{зан} = A/\mu = \lambda Q/\mu = \rho Q = 3 \times 0{,}654 = 1{,}962$. Мы видим, что из-за ошибок округления $n = N_0 + N_{зан} = 1{,}039 + 1{,}962 = 3{,}001$.

Коэффициент загрузки каналов $K_{зан} = N_{зан}/n = 1{,}962/3 = 0{,}654$.

Задача 101. Трехканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда все $n = 3$ канала заняты, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью $\lambda = 50$ звонков/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора $t_{обсл} = 2{,}5$ мин. Определить показатели эффективности работы СМО.

Для снижения вероятности отказа нужно увеличить число каналов обслуживания.

Замечание. Предельную вероятность состояния S_k можно определить по следующей формуле: $p_k = \dfrac{\rho^k}{k!} p_0$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

При больших n (число каналов обслуживания) можно воспользоваться приближенной формулой:

$$p_k \approx \frac{\Phi\left(\dfrac{k + 0{,}5 - \rho}{\sqrt{\rho}}\right) - \Phi\left(\dfrac{k - 0{,}5 - \rho}{\sqrt{\rho}}\right)}{0{,}5 + \Phi\left(\dfrac{n + 0{,}5 - \rho}{\sqrt{\rho}}\right)},$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа.

Мастер функций f_x пакета Excel позволяет вычислить функцию Лапласа: $\Phi(x)$ = НОРМРАСП (x; 0; 1; 1) – 0,5.

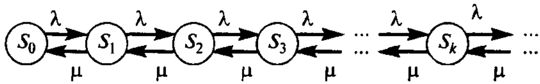
§ 32.10. ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

СМО содержит один обслуживающий канал. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Если заявка застала обслуживающий канал занятым, то она встает в очередь и ожидает начала обслуживания.

Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{обсл} = 1/\mu$.

Возможные состояния СМО S_0 (канал свободен), S_1 (канал занят, очереди нет), S_2 (канал занят, в очереди одна заявка), S_3 (канал занят, в очереди две заявки) и т. д.

Размеченный граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью имеет следующий вид:



При $\rho = \lambda/\mu < 1$ существуют предельные вероятности. Найдем их.

p_0 — предельная вероятность состояния S_0. Состояние S_1 связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями λ и μ.

Пусть p_1 — предельная вероятность состояния S_1. Как и раньше $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе) $= \rho p_0$. Аналогично $p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \rho \times \rho p_0 = \rho^2 p_0$; $p_3 = \frac{\lambda}{\mu} p_2 = \rho \times \rho^2 p_0 = \rho^3 p_0$. И т. д. $p_k = \rho^k p_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Так как $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1$, то $1 = p_0 + \rho p_0 + \rho^2 p_0 + \rho^3 p_0 + \ldots =$ $= p_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots)$. В скобках указана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым элементом $b_1 = 1$

и знаменателем $q = \rho < 1$. Эта сумма равна $\frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\rho}$. Тогда $1 = p_0 \times \frac{1}{1-\rho}$, то есть $p_0 = 1 - \rho$. Это вероятность того, что канал свободен.

Тогда вероятность состояния S_k (канал занят, в очереди $k - 1$ заявка) равна $p_k = \rho^k p_0 = \rho^k(1-\rho)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Вероятность того, что канал занят, равна $p_{зан} = 1 - p_0 = 1 - (1-\rho) = \rho$.

Найдем среднее число заявок в системе $L_{сист}$ по формуле математического ожидания: число требований в каждом состоянии S_k надо умножить на предельную вероятность этого состояния и полученные произведения суммировать.

$$L_{сист} = 0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3 + \ldots = 1 \times \rho(1-\rho) + 2 \times \rho^2(1-\rho) + 3 \times \rho^3(1-\rho) + \ldots = \rho(1-\rho)(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \ldots) = \rho(1-\rho)\left(\frac{d\rho}{d\rho} + \frac{d\rho^2}{d\rho} + \frac{d\rho^3}{d\rho} + \ldots\right) = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}(\rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots).$$

Мы предполагаем, что выполнены условия, при которых возможно поменять местами операции дифференцирования и суммирования.

В скобках указана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым элементом $b_1 = \rho$ и знаменателем $q = \rho < 1$. Эта сумма равна $\frac{b_1}{1-q} = \frac{\rho}{1-\rho}$. Отсюда $L_{сист} = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) =$

$$= \rho(1-\rho)\frac{\frac{d\rho}{d\rho}(1-\rho) - \rho\frac{d(1-\rho)}{d\rho}}{(1-\rho)^2} = \rho(1-\rho)\frac{1-\rho+\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Тогда среднее время пребывания заявки в системе $T_{сист} = L_{сист}/\lambda$ (*формула Литтла*). В $T_{сист}$ входят время обслуживания заявки и время в очереди.

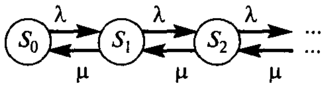
Найдем $L_{обсл}$ — среднее число заявок, находящихся под обслуживанием. Канал либо свободен с вероятностью p_0, либо занят с вероятностью $1 - p_0$. Поэтому $L_{обсл} = 0 \times p_0 + 1 \times (1 - p_0) = 1 - p_0 = \rho$. Тогда среднее число заявок в очереди $L_{оч} = L_{сист} - L_{обсл} = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$.

Отсюда среднее время пребывания заявки в очереди $T_{оч} = L_{оч}/\lambda$ (этот результат также называют формулой Литтла).

Пример 102. Магазин с одним продавцом. Предполагается, что простейший поток покупателей поступает с интенсивностью $\lambda = 20$ человек/ч. Время обслуживания заявки — случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\mu = 25$ человек/ч. Определим:

1) среднее время пребывания покупателя в очереди;
2) среднюю длину очереди;
3) среднее число покупателей в магазине;
4) среднее время пребывания покупателя в магазине;
5) вероятность того, что в магазине не окажется покупателей;
6) вероятность того, что в магазине окажется ровно 4 покупателя.

Данный магазин — одноканальная СМО с неограниченной очередью. Размеченный граф состояний имеет следующий вид:



Так как $\rho = \lambda/\mu = 20/25 = 0{,}8 < 1$, то существуют предельные вероятности.

Вероятность того, что в магазине не окажется покупателей, равна $p_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Вероятность того, что в магазине окажется ровно 4 покупателя, равна $p_4 = \rho^4 p_0 = 0{,}8^4 \times 0{,}2 \approx 0{,}082$.

Средняя длина очереди $L_{оч} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{0{,}8^2}{1-0{,}8} = 3{,}2$.

Среднее время пребывания покупателя в очереди $T_{оч} = L_{оч}/\lambda = 3{,}2/20 = 0{,}16$ ч $= 0{,}16 \times 60$ мин $= 9{,}6$ мин.

Среднее число покупателей в магазине $L_{сист} = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{0{,}8}{1-0{,}8} = 4$.

Среднее время пребывания покупателя в магазине $T_{сист} = L_{сист}/\lambda = 4/20 = 0{,}2$ ч $= 0{,}2 \times 60$ мин $= 12$ мин.

Задача 102. Магазин с одним продавцом. Предполагается, что простейший поток покупателей поступает с интенсивностью $\lambda = 10$ человек/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\mu = 15$ человек/ч. Определить:

1) среднее время пребывания покупателя в очереди;
2) среднюю длину очереди;
3) среднее число покупателей в магазине;
4) среднее время пребывания покупателя в магазине;
5) вероятность того, что в магазине не окажется покупателей;
6) вероятность того, что в магазине окажется ровно 4 покупателя.

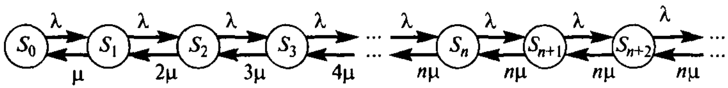
§ 32.11. МНОГОКАНАЛЬНАЯ СМО С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

СМО содержит n обслуживающих каналов. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Если в момент поступления требования имеется свободный канал, то он немедленно приступает к обслуживанию поступившего требования. Каждый канал может одновременно обслуживать только одно требование. Все каналы функционируют независимо. Если заявка застала все обслуживающие каналы занятыми, то она встает в очередь и ожидает начала обслуживания.

Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{обсл} = 1/\mu$.

Возможные состояния СМО S_0 (все каналы свободны), S_1 (один канал занят, остальные свободны), S_2 (два канала заняты, остальные свободны), ..., S_n (все каналы заняты), S_{n+1} (все каналы заняты, в очереди одна заявка), S_{n+2} (все каналы заняты, в очереди две заявки) и т. д.

Приведенная интенсивность потока заявок $\rho = \lambda/\mu$. Размеченный граф состояний многоканальной СМО с неограниченной очередью имеет следующий вид:



При $\rho/n \geqslant 1$ очередь растет до бесконечности. При $\rho/n < 1$ существуют предельные вероятности. Найдем их.

p_0 — предельная вероятность состояния S_0. Состояние S_1 связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями λ и μ.

Пусть p_1 — предельная вероятность состояния S_1. Тогда $p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки — в знаменателе) $= \rho p_0$.

Аналогично $p_2 = \dfrac{\lambda}{2\mu} p_1 = \dfrac{\rho}{2} \times \rho p_0 = \dfrac{\rho^2}{2!} p_0$;

$$p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{\rho}{3} \times \frac{\rho^2}{2!} p_0 = \frac{\rho^3}{3!} p_0, \ldots,$$

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \; p_{n+1} = \frac{\lambda}{n\mu} p_n = \frac{\rho}{n} \times \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

$$p_{n+2}=\frac{\lambda}{n\mu}p_{n+1}=\frac{\rho}{n}\times\frac{\rho}{n}\times\frac{\rho^n}{n!}p_0=\left(\frac{\rho}{n}\right)^2\frac{\rho^n}{n!}p_0,$$

$$p_{n+3}=\frac{\lambda}{n\mu}p_{n+2}=\frac{\rho}{n}\times\left(\frac{\rho}{n}\right)^2\times\frac{\rho^n}{n!}p_0=\left(\frac{\rho}{n}\right)^3\frac{\rho^n}{n!}p_0 \text{ и т. д.}$$

Так как $p_0+p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n+p_{n+1}+p_{n+2}+p_{n+3}+\ldots=1$, то $1=p_0+\rho p_0+\frac{\rho^2}{2!}p_0+\frac{\rho^3}{3!}p_0+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}p_0+\frac{\rho}{n}\times\frac{\rho^n}{n!}p_0+\left(\frac{\rho}{n}\right)^2\frac{\rho^n}{n!}p_0+$ $+\left(\frac{\rho}{n}\right)^3\frac{\rho^n}{n!}p_0+\ldots=p_0\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho}{n}\times\frac{\rho^n}{n!}+\right.$ $\left.+\left(\frac{\rho}{n}\right)^2\frac{\rho^n}{n!}+\left(\frac{\rho}{n}\right)^3\frac{\rho^n}{n!}+\ldots\right)=p_0\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho}{n}\times\frac{\rho^n}{n!}\times\right.$ $\left.\times\left(1+\frac{\rho}{n}+\left(\frac{\rho}{n}\right)^2+\left(\frac{\rho}{n}\right)^3+\ldots\right)\right).$

Во внутренних скобках указана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым элементом $b_1=1$ и знаменателем $q=\rho/n<1$. Эта сумма равна $\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-\rho/n}=\frac{n}{n-\rho}$.

Тогда $1=p_0\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho}{n}\times\frac{\rho^n}{n!}\times\frac{n}{n-\rho}\right)$, то есть $p_0=\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\times\frac{\rho}{n-\rho}\right)^{-1}$. Это вероятность того, что все каналы свободны.

Вероятность того, что заявка окажется в очереди, равна $p_n+p_{n+1}+$ $+p_{n+2}+p_{n+3}+\ldots=\frac{\rho^n}{n!}p_0+\frac{\rho}{n}\times\frac{\rho^n}{n!}p_0+\left(\frac{\rho}{n}\right)^2\frac{\rho^n}{n!}p_0+\left(\frac{\rho}{n}\right)^3\frac{\rho^n}{n!}p_0+\ldots=$ $=\frac{\rho^n}{n!}\times\frac{p_0}{1-\rho/n}$ (см. рассуждения выше).

Найдем среднее число заявок $L_{оч}$ в очереди по формуле математического ожидания: число требований в очереди в каждом состоянии S_{n+k} надо умножить на предельную вероятность этого состояния и полученные произведения суммировать: $L_{оч}=1\times p_{n+1}+2\times p_{n+2}+3\times p_{n+3}+$ $+\ldots=\frac{\rho}{n}\times\frac{\rho^n}{n!}p_0+2\times\left(\frac{\rho}{n}\right)^2\frac{\rho^n}{n!}p_0+3\times\left(\frac{\rho}{n}\right)^3\frac{\rho^n}{n!}p_0+\ldots=\rho\frac{\rho^n}{n!}p_0\left(\frac{1}{n}+\right.$ $\left.+2\frac{1}{n}\times\frac{\rho}{n}+3\frac{1}{n}\times\left(\frac{\rho}{n}\right)^2+\ldots\right)=\rho\frac{\rho^n}{n!}p_0\left(\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{n}\right)+\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{n}\right)^2+\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{n}\right)^3+\ldots\right)=$ $=\rho\frac{\rho^n}{n!}p_0\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{n}+\left(\frac{\rho}{n}\right)^2+\left(\frac{\rho}{n}\right)^3+\ldots\right).$

Мы предполагаем, что выполнены условия, при которых возможно поменять местами операции дифференцирования и суммирования.

В скобках указана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым элементом $b_1 = \rho/n$ и знаменателем $q = \rho/n < 1$.

Эта сумма равна $\dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{\rho/n}{1-\rho/n} = \dfrac{\rho}{n-\rho}$.

Отсюда $L_{оч} = \rho\dfrac{\rho^n}{n!}p_0\dfrac{d}{d\rho}\left(\dfrac{\rho}{n-\rho}\right) = \rho\dfrac{\rho^n}{n!}p_0\dfrac{\dfrac{d\rho}{d\rho}(n-\rho)-\rho\dfrac{d(n-\rho)}{d\rho}}{(n-\rho)^2} =$

$= \rho\dfrac{\rho^n}{n!}p_0\dfrac{n-\rho+\rho}{(n-\rho)^2} = \dfrac{\rho^n}{n!}\times\dfrac{n\rho}{(n-\rho)^2}p_0 = \dfrac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2}p_0.$

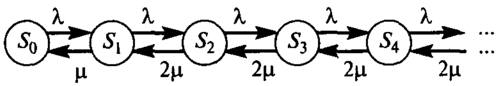
Тогда среднее время пребывания заявки в очереди $T_{оч} = L_{оч}/\lambda$ (*формула Литтла*).

Среднее число занятых каналов $N_{зан} = \lambda/\mu = \rho$ (это справедливо для любой СМО с неограниченной очередью).

Среднее число заявок в системе $L_{сист} = L_{оч} + N_{зан} = \dfrac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2}p_0 + \rho.$

Среднее время пребывания заявки в системе $T_{сист} = L_{сист}/\lambda$ (*формула Литтла*). В $T_{сист}$ входят время обслуживания заявки и время ожидания в очереди.

Пример 103. В примере 102 в магазине теперь $n = 2$ продавца. Это двухканальная СМО с неограниченной очередью. Размеченный граф состояний имеет следующий вид:



Так как $\rho/n = 0{,}8/2 = 0{,}4 < 1$, то существуют предельные вероятности.

$$p_0 = \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\times\frac{\rho}{n-\rho}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^2}{2!}\times\frac{\rho}{2-\rho}\right)^{-1} = \left(1+0{,}8+\frac{0{,}8^2}{2!}+\frac{0{,}8^2}{2!}\times\frac{0{,}8}{2-0{,}8}\right)^{-1} \approx$$

$\approx 0{,}429$. Это вероятность того, что в магазине не окажется покупателей.

Вероятность того, что в магазине окажется ровно 4 покупателя (то есть 2 покупателя обслуживаются и еще 2 покупателя в очереди), равна $p_{n+2} = \left(\dfrac{\rho}{n}\right)^2\dfrac{\rho^n}{n!}p_0 = p_{2+2} = \left(\dfrac{0{,}8}{2}\right)^2\dfrac{0{,}8^2}{2!}\times 0{,}429 \approx 0{,}022.$

Средняя длина очереди $L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} p_0 =$
$= \frac{0{,}8^{2+1}}{(2-1)!(2-0{,}8)^2} \times 0{,}429 \approx 0{,}153.$

Среднее время пребывания покупателя в очереди $T_{оч} = L_{оч}/\lambda =$ $= 0{,}153/20 \approx 0{,}008$ ч $= 0{,}008 \times 60$ мин $= 0{,}48$ мин.

Среднее число покупателей в магазине $L_{сист} = L_{оч} + \rho = 0{,}153 +$ $+ 0{,}8 = 0{,}953$.

Среднее время пребывания покупателя в магазине $T_{сист} = L_{сист}/\lambda = 0{,}953/20 \approx 0{,}048$ ч $= 0{,}048 \times 60$ мин $= 2{,}88$ мин.

Задача 103. Ответить на вопросы задачи 22 при условии, что в магазине теперь $n = 2$ продавца.

§ 32.12. СМО С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Некоторые СМО имеют постоянное, а не экспоненциальное распределение времени обслуживания. В таких системах заявки обслуживаются в течение фиксированного периода времени $t_{обсл}$. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность выходного потока $\mu = 1/t_{обсл}$. Каковы параметры такой системы? Ограничимся рассмотрением одноканальной СМО.

Средняя длина очереди $L_{оч} = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$.

Среднее время ожидания в очереди $T_{оч} = L_{оч}/\lambda$.

Среднее число заявок в системе $L_{сист} = L_{оч} + \lambda/\mu$.

Среднее время пребывания заявки в системе $T_{сист} = L_{сист}/\lambda =$ $= (L_{оч} + \lambda/\mu)/\lambda = L_{оч}/\lambda + (\lambda/\mu)/\lambda = T_{оч} + 1/\mu = T_{оч} + t_{обсл}$.

Пример 104. На склад для разгрузки поступает простейший поток грузовиков с интенсивностью $\lambda = 6$ грузовиков/ч. Разгрузка одного грузовика занимает $t_{обсл} = 6$ мин $= 0{,}1$ ч. Найдем параметры этой одноканальной СМО с фиксированным временем обслуживания.

Здесь $\mu = 1/t_{обсл} = 1/0{,}1 = 10$ грузовиков/ч.

Средняя длина очереди $L_{оч} = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)} = \frac{6^2}{2 \times 10(10-6)} = 0{,}45$ грузовика.

Среднее время ожидания в очереди $T_{оч} = L_{оч}/\lambda = 0{,}45/6 = 0{,}075$ ч $=$ $= 0{,}075 \times 60$ мин $= 4{,}5$ мин.

Среднее число грузовиков в системе $L_{сист} = L_{оч} + \lambda/\mu = 0{,}45 + 6/10 = 1{,}05$.

Среднее время пребывания грузовика на складе $T_{сист} = T_{оч} + t_{обсл} = 4{,}5$ мин + 6 мин = 10,5 мин.

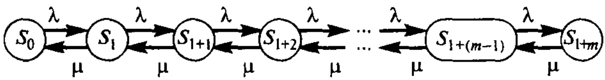
Задача 104. На склад для разгрузки поступает простейший поток грузовиков с интенсивностью $\lambda = 3$ грузовика/ч. Разгрузка одного грузовика занимает $t_{обсл} = 15$ мин = 0,25 ч. Найти параметры этой одноканальной СМО с фиксированным временем обслуживания.

§ 32.13. ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

СМО содержит один обслуживающий канал. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Если заявка застала обслуживающий канал занятым, то она встает в очередь и ожидает начала обслуживания. Число мест в очереди ограничено и равно m. Если заявка застала обслуживающий канал занятым и в очереди нет свободных мест, то она покидает систему необслуженной.

Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{обсл} = 1/\mu$.

Возможные состояния СМО S_0 (канал свободен), S_1 (канал занят, очереди нет), S_{1+1} (канал занят, в очереди одна заявка), S_{1+2} (канал занят, в очереди две заявки), ..., S_{1+m} (канал занят, в очереди m заявок). Размеченный граф состояний одноканальной СМО с ограниченной очередью имеет следующий вид:



Положим $\rho = \lambda/\mu$. Так как число состояний конечно, то существуют предельные вероятности. Найдем их.

Пусть p_0 — предельная вероятность состояния S_0. Состояние S_1 связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями λ и μ.

Пусть p_1 — предельная вероятность состояния S_1. Тогда $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки — в знаменателе) $= \rho p_0$.

Аналогично $p_{1+1} = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \rho \times \rho p_0 = \rho^2 p_0$;

$p_{1+2} = \frac{\lambda}{\mu} p_2 = \rho \times \rho^2 p_0 = \rho^3 p_0$. И т. д.

$p_{1+k} = \rho^{1+k} p_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Так как $p_0 + p_1 + p_{1+1} + p_{1+2} + \ldots + p_{1+m} = 1$, то $1 = p_0 + \rho p_0 + \rho^2 p_0 + \rho^3 p_0 + \ldots + \rho^{1+m} p_0 = p_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^{1+m})$.

В скобках указана сумма $m + 2$ элементов геометрической прогрессии с первым элементом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = \rho$.

Эта сумма равна $\frac{b_1(q^{m+2} - 1)}{q - 1} = \frac{1 \times (\rho^{m+2} - 1)}{\rho - 1} = \frac{\rho^{m+2} - 1}{\rho - 1}$. Отсюда $1 = p_0 \frac{\rho^{m+2} - 1}{\rho - 1} = p_0 \frac{1 - \rho^{m+2}}{1 - \rho}$, то есть $p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}$. Это вероятность того, что канал свободен.

Тогда вероятность состояния S_{1+k} (канал занят, в очереди k заявок) равна $p_{1+k} = \rho^{1+k} p_0 = \rho^{1+k} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Вероятность отказа $p_{\text{отк}} = p_{1+m} = \rho^{1+m} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}$ (канал занят, в очереди нет свободных мест).

Относительная пропускная способность $Q = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - \rho^{1+m} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}$. Это вероятность того, что заявка будет обслужена. Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \rho^{1+m} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}\right)$.

Найдем среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ по формуле математического ожидания: число требований в очереди в каждом состоянии S_{1+k} надо умножить на предельную вероятность этого состояния и полученные произведения суммировать. $L_{\text{оч}} = 1 \times p_{1+1} + 2 \times p_{1+2} + \ldots + m \times p_{1+m} = \rho^2 p_0 + 2\rho^3 p_0 + \ldots + m\rho^{m+1} p_0 = \rho^2 p_0 (1 + 2\rho + \ldots + m\rho^{m-1}) = \rho^2 p_0 \left(\frac{d}{d\rho}\rho + \frac{d}{d\rho}\rho^2 + \ldots + \frac{d}{d\rho}\rho^m\right) = \rho^2 p_0 \frac{d}{d\rho}\left(\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^m\right)$.

Мы можем поменять местами операции дифференцирования и суммирования, так как сумма конечная.

В скобках указана сумма m элементов геометрической прогрессии с первым элементом $b_1 = \rho$ и знаменателем $q = \rho$. Эта сумма равна $\frac{b_1(q^m - 1)}{q - 1} = \frac{\rho \times (\rho^m - 1)}{\rho - 1} = \frac{\rho^{m+1} - \rho}{\rho - 1}$. Тогда $L_{\text{оч}} = \rho^2 p_0 \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho^{m+1} - \rho}{\rho - 1}\right) =$

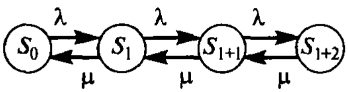
$$= \rho^2 p_0 \frac{\dfrac{d(\rho^{m+1}-\rho)}{d\rho}(\rho-1) - (\rho^{m+1}-\rho)\dfrac{d(\rho-1)}{d\rho}}{(\rho-1)^2} =$$

$$= \rho^2 \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \times \frac{((m+1)\rho^m - 1)(\rho-1) - (\rho^{m+1}-\rho)}{(\rho-1)^2} = \rho^2 \frac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}.$$

Отсюда среднее время пребывания заявки в очереди $T_{оч} = L_{оч}/\lambda$. Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием (среднее число занятых каналов) $L_{обсл} = 0 \times p_0 + 1 \times (1 - p_0) = 1 - p_0$. Тогда среднее число заявок в системе $L_{сист} = L_{оч} + L_{обсл}$. Отсюда среднее время пребывания заявки в системе $T_{сист} = L_{сист}/\lambda$. В $T_{сист}$ входят время обслуживания заявки и время в очереди.

Пример 105. Автозаправочная станция имеет $n = 1$ бензоколонку с площадкой, допускающей пребывание в очереди на заправку не более двух автомашин одновременно. Если в очереди находятся $m = 2$ автомашины, то очередная прибывшая автомашина проезжает мимо автозаправочной станции. Предполагается, что простейший поток автомашин поступает на станцию с интенсивностью $\lambda = 10$ автомашин/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\mu = 12$ автомашин/ч. Определим параметры системы.

Данная автозаправочная станция — это одноканальная СМО с ограниченной очередью. Размеченный граф состояний имеет следующий вид:



Положим $\rho = \lambda/\mu = 10/12 = 5/6$. Вероятность того, что на станции нет автомашин (предельная вероятность состояния S_0), равна $p_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \dfrac{1-5/6}{1-(5/6)^{2+2}} \approx 0{,}322$.

Состояние S_1 связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями λ и μ. Пусть p_1 — предельная вероятность состояния S_1. Тогда $p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе) $= \rho p_0 = (5/6) \times 0{,}322 \approx 0{,}268$.

Аналогично $p_{1+1} = \dfrac{\lambda}{\mu} p_1 = \rho p_1 = (5/6) \times 0{,}268 \approx 0{,}224$. Вероятность отказа $p_{отк} = p_{1+2} = \dfrac{\lambda}{\mu} p_2 = (5/6) \times 0{,}224 \approx 0{,}186$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - p_{отк} = 1 - 0,186 = 0,814$. Это вероятность того, что заявка будет обслужена.

Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = 10 \times 0,814 = 8,14$ автомашин/ч.

Среднее число заявок в очереди $L_{оч} = \rho^2 \dfrac{1 - \rho^m(m + 1 - m\rho)}{(1 - \rho^{m+2})(1 - \rho)} =$
$= (5/6)^2 \dfrac{1 - (5/6)^2(2 + 1 - 2\times 5/6)}{(1 - (5/6)^{2+2})(1 - 5/6)} \approx 0,596$ автомашины.

Отсюда среднее время пребывания заявки в очереди $T_{оч} = L_{оч}/\lambda = 0,596/10 = 0,0596$ ч $= 0,0596\times 60$ мин $= 3,576$ мин.

Среднее число автомашин под обслуживанием (среднее число занятых каналов) $L_{обсл} = 1 - p_0 = 1 - 0,322 = 0,678$. Тогда среднее число автомашин на станции $L_{сист} = L_{оч} + L_{обсл} = 0,596 + 0,678 = 1,274$ автомашины.

Отсюда среднее время пребывания заявки в системе $T_{сист} = L_{сист}/\lambda = 1,274/10 = 0,1274$ ч $= 0,1274\times 60$ мин $= 7,644$ мин. В $T_{сист}$ входят время обслуживания автомашины и время в очереди.

Задача 105. Автозаправочная станция имеет $n = 1$ бензоколонку с площадкой, допускающей пребывание в очереди на заправку не более трех автомашин одновременно. Если в очереди находятся $m = 3$ автомашины, то очередная прибывшая автомашина проезжает мимо автозаправочной станции. Предполагается, что простейший поток автомашин поступает на станцию с интенсивностью $\lambda = 8$ автомашин/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\mu = 10$ автомашин/ч. Определить параметры системы.

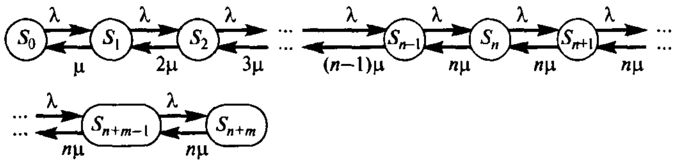
§ 32.14. МНОГОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

СМО содержит n обслуживающих каналов. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Если в момент поступления требования имеется свободный канал, то он немедленно приступает к обслуживанию поступившего требования. Каждый канал может одновременно обслуживать только одно требование. Все каналы функционируют независимо. Если заявка застала все обслуживающие каналы занятыми, то она встает в очередь и ожидает начала обслуживания. Число мест в очереди ограничено и равно m. Если заявка застала все обслуживающие каналы занятыми и в очереди нет свободных мест, то она покидает систему необслуженной.

Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{обсл} = 1/\mu$.

Возможные состояния СМО S_0 (все каналы свободны), S_1 (один канал занят, остальные свободны), S_2 (два канала заняты, остальные свободны), ..., S_n (все каналы заняты), S_{n+1} (все каналы заняты, в очереди одна заявка), S_{n+2} (все каналы заняты, в очереди две заявки), ..., S_{n+m} (все каналы заняты, в очереди m заявок).

Приведенная интенсивность потока заявок $\rho = \lambda/\mu$. Размеченный граф состояний многоканальной СМО с ограниченной очередью имеет следующий вид:



Так как число возможных состояний конечно, существуют предельные вероятности. Все формулы получаются, как в § 32.13.

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^n}{n!}\times\frac{1-(\rho/n)^{m+1}}{1-\rho/n}\right)^{-1} =$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!}\times\frac{1-(\rho/n)^{m+1}}{1-\rho/n}\right)^{-1}.$$

Вероятность того, что в системе находится k требований, в случае, когда их число не превосходит числа каналов обслуживания, равна $p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Вероятность того, что в очереди находится k требований, равна $p_{n+k} = \frac{\rho^n}{n!}(\rho/n)^k p_0$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Вероятность отказа $p_{отк} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \times n!}p_0$ (все обслуживающие каналы заняты, в очереди нет свободных мест).

Вероятность того, что все обслуживающие каналы заняты, равна $p_{зан} = \frac{\rho^n}{n!}\times\frac{1-(\rho/n)^{m+1}}{1-\rho/n}p_0$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - p_{отк}$. Это вероятность того, что заявка будет обслужена.

Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q$.

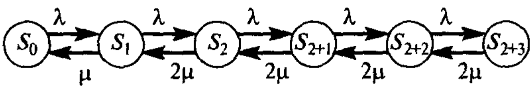
Среднее число свободных от обслуживания каналов равно $N_0 = np_0 + (n-1)p_1 + (n-2)p_2 + \ldots + 1 \times p_{n-1} = \sum_{k=0}^{n}(n-k)p_k$. Среднее число заявок в очереди равно $L_{оч} = \dfrac{\rho^{n+1}p_0(1-(\rho/n)^n(m+1-m\rho/n))}{n \times n!(1-\rho/n)^2}$.

Среднее число заявок под обслуживанием (среднее число занятых каналов) $L_{обсл} = \rho(1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m \times n!}p_0)$.

Тогда среднее число заявок в системе $L_{сист} = L_{оч} + L_{обсл}$. В большинстве практических задач $\rho/n < 1$.

Пример 106. Автозаправочная станция имеет $n = 2$ бензоколонки с площадкой, допускающей пребывание в очереди на заправку не более трех автомашин одновременно. Если в очереди находятся $m = 3$ автомашины, то очередная прибывшая автомашина проезжает мимо автозаправочной станции. Предполагается, что простейший поток автомашин поступает на станцию с интенсивностью $\lambda = 10$ автомашин/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\mu = 12$ автомашин/ч. Определим параметры системы.

Данная автозаправочная станция — это многоканальная СМО с ограниченной очередью. Размеченный граф состояний имеет следующий вид:



Положим $\rho = \lambda/\mu = 10/12 = 5/6 \approx 0{,}833$. Вероятность того, что на станции нет автомашин (предельная вероятность состояния S_0), равна p_0.

Состояние S_1 связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями λ и μ. Предельная вероятность состояния S_1: $p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе) $= \rho p_0 \approx 0{,}833p_0$.

Аналогично $p_2 = \dfrac{\lambda}{2\mu}p_1 = \dfrac{\rho}{2}p_1 \approx \dfrac{5/6}{2} \times 0{,}833p_0 \approx 0{,}347p_0$;

$$p_{2+1} = \frac{\lambda}{2\mu}p_2 = \frac{\rho}{2}p_2 \approx \frac{5/6}{2} \times 0{,}347p_0 \approx 0{,}145p_0;$$

$$p_{2+2} = \frac{\lambda}{2\mu}p_{2+1} = \frac{\rho}{2}p_{2+1} \approx \frac{5/6}{2} \times 0{,}145p_0 \approx 0{,}060p_0;$$

$$p_{2+3} = \frac{\lambda}{2\mu}p_{2+2} = \frac{\rho}{2}p_{2+2} \approx \frac{5/6}{2} \times 0{,}060p_0 = 0{,}025p_0.$$

Так как $1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_{2+1} + p_{2+2} + p_{2+3}$, то $1 = p_0 + 0{,}833p_0 + 0{,}347p_0 + 0{,}145p_0 + 0{,}060p_0 + 0{,}025p_0 = 2{,}41p_0$.

Отсюда $p_0 = 1/2{,}41 \approx 0{,}415$, $p_1 \approx 0{,}833p_0 \approx 0{,}833\times0{,}415 \approx 0{,}346$, $p_2 \approx 0{,}347p_0 \approx 0{,}347\times0{,}415 \approx 0{,}144$, $p_{2+1} \approx 0{,}145p_0 \approx 0{,}145\times0{,}415 \approx 0{,}060$, $p_{2+2} \approx 0{,}060p_0 \approx 0{,}060\times0{,}415 \approx 0{,}025$, $p_{2+3} \approx 0{,}025p_0 \approx 0{,}025\times0{,}415 \approx 0{,}010$.

Вероятность отказа $p_{\text{отк}} = p_{2+3} \approx 0{,}010$ (обе бензоколонки заняты, в очереди нет свободных мест).

Вероятность того, что обе бензоколонки заняты, равна $p_{\text{зан}} = \dfrac{\rho^n}{n!}\times\dfrac{1-(\rho/n)^{m+1}}{1-\rho/n}p_0 \approx \dfrac{(5/6)^2}{2!}\times\dfrac{1-((5/6)/2)^{3+1}}{1-(5/6)/2}\times0{,}415 \approx 0{,}240$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$. Это вероятность того, что заявка будет обслужена.

Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = 10\times0{,}99 = 9{,}9$ автомашин/ч.

Среднее число свободных от обслуживания каналов $N_0 = 2\times p_0 + 1\times p_1 = 2\times0{,}415 + 1\times0{,}346 = 1{,}176$.

Среднее число заявок в очереди равно:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}p_0(1-(\rho/n)^n(m+1-m\rho/n))}{n\times n!(1-\rho/n)^2} =$$

$$= \frac{(5/6)^{2+1}\times0{,}415(1-((5/6)/2)^3(3+1-3(5/6)/2))}{2\times2!\times(1-(5/6)/2)^2} \approx 0{,}141.$$

Среднее число автомашин под обслуживанием равно:

$$L_{\text{обсл}} = \rho\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m\times n!}p_0\right) = (5/6)\left(1 - \frac{(5/6)^{2+3}}{2^3\times2!}\times0{,}415\right) \approx 0{,}825.$$

Тогда среднее число автомашин на станции $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{обсл}} = 0{,}141 + 0{,}825 = 0{,}966$.

Задача 106. Автозаправочная станция имеет $n = 3$ бензоколонки с площадкой, допускающей пребывание в очереди на заправку не более двух автомашин одновременно. Если в очереди находятся $m = 2$ автомашины, то очередная прибывшая автомашина проезжает мимо автозаправочной станции. Предполагается, что простейший поток автомашин поступает на станцию с интенсивностью $\lambda = 30$ автомашин/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\mu = 20$ автомашин/ч. Определить параметры системы.

§ 32.15. ЗАМКНУТАЯ СМО

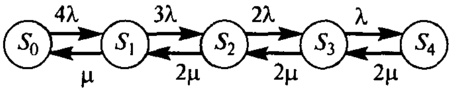
СМО содержит n обслуживающих каналов. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Если в момент поступления требования имеется свободный канал, то он немедленно приступает к обслуживанию поступившего требования. Каждый канал может одновременно обслуживать только одно требование. Все каналы функционируют независимо. Если заявка застала все обслуживающие каналы занятыми, то она встает в очередь и ожидает начала обслуживания. Требования на обслуживание поступают от m обслуживаемых объектов, то есть поток поступающих требований ограничен.

Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{\text{обсл}} = 1/\mu$.

Существует взаимосвязь между длиной очереди и темпом поступления заявок: чем длиннее очередь на обслуживание, тем ниже темп поступления новых заявок.

Пример 107. Бригада ремонтников из $n = 2$ человек обслуживает $m = 4$ станка. Предполагается, что поломки станков образуют простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0{,}1$ раз/ч. Время ремонта каждого станка есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\mu = 0{,}5$ станка/ч. Определим параметры системы.

Это замкнутая СМО. Приведенная интенсивность потока заявок $\rho = \lambda/\mu = 0{,}1/0{,}5 = 0{,}2$. Размеченный граф состояний этой замкнутой СМО имеет следующий вид:



Так как число возможных состояний конечно, существуют предельные вероятности.

Вероятность того, что все станки исправны (предельная вероятность состояния S_0), равна p_0.

Состояние S_1 связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями 4λ и μ. p_1 — предельная вероятность состояния S_1. $p_1 = \dfrac{4\lambda}{\mu} p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе) $= 4\rho p_0 = 4\times 0{,}2 p_0 =$ $= 0{,}8 p_0$.

Аналогично $p_2 = \dfrac{3\lambda}{2\mu} p_1 = 1{,}5\rho p_1 = 1{,}5\times 0{,}2\times 0{,}8 p_0 = 0{,}24 p_0$;

$p_3 = \dfrac{2\lambda}{2\mu} p_2 = \rho p_2 = 0{,}2\times 0{,}24 p_0 = 0{,}048 p_0$;

$$p_4 = \frac{\lambda}{2\mu} p_3 = 0{,}5\rho p_3 = 0{,}5\times0{,}2\times0{,}048 p_0 = 0{,}0048 p_0.$$

Так как $1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, то $1 = p_0 + 0{,}8p_0 + 0{,}24p_0 + 0{,}048p_0 + 0{,}0048p_0 = 2{,}0928p_0$.

Отсюда $p_0 = 1/2{,}0928 \approx 0{,}478$, $p_1 = 0{,}8p_0 \approx 0{,}8\times0{,}478 \approx 0{,}382$, $p_2 = 0{,}24p_0 \approx 0{,}24\times0{,}478 \approx 0{,}115$, $p_3 = 0{,}048p_0 \approx 0{,}048\times0{,}478 \approx 0{,}023$, $p_4 = 0{,}0048p_0 \approx 0{,}0048\times0{,}478 \approx 0{,}002$.

Средняя длина очереди $L_{оч} = 1\times p_3 + 2\times p_4 = 1\times0{,}023 + 2\times0{,}002 = 0{,}027$.

Среднее число заявок в системе $L_{сист} = 1\times p_1 + 2\times p_2 + 3\times p_3 + 4\times p_4 = 1\times0{,}382 + 2\times0{,}115 + 3\times0{,}023 + 4\times0{,}002 = 0{,}689$.

Среднее число свободных от обслуживания ремонтников $N_0 = 2\times p_0 + 1\times p_1 = 2\times0{,}478 + 1\times0{,}382 = 1{,}338$.

Задача 107. Бригада ремонтников из $n = 3$ человек обслуживает $m = 5$ станков. Предполагается, что поломки станков образуют простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0{,}2$ раз/ч. Время ремонта каждого станка есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\mu = 0{,}4$ станка/ч. Определить параметры системы.

§ 32.16. СМО С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОЖИДАНИЯ

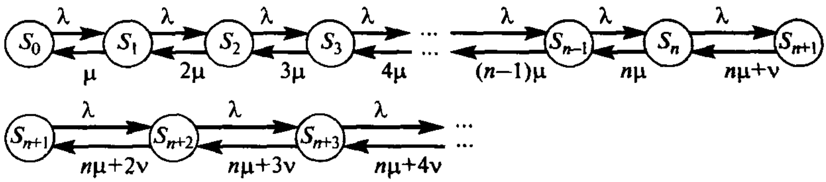
Очень часто встречаются СМО с нетерпеливыми заявками. Такие заявки могут уйти из очереди, если время ожидания превышает некоторую величину. Например, срочные сообщения теряют смысл, если не поступят на обслуживание в течение определенного времени.

Предполагается, что заявка может находиться в очереди случайное время, которое подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром ν, то есть ν — среднее количество требований, покидающих очередь в единицу времени, вызванное появлением в очереди одного требования. Среднее время ожидания в очереди $t_{ожидания} = 1/\nu$.

СМО содержит n обслуживающих каналов. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Если в момент поступления требования имеется свободный канал, то он немедленно приступает к обслуживанию поступившего требования. Каждый канал может одновременно обслуживать только одно требование. Все каналы функционируют независимо. Если заявка застала все обслуживающие каналы занятыми, то она встает в очередь и ожидает начала обслуживания.

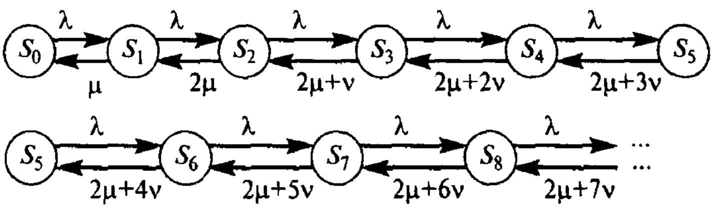
Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{обсл} = 1/\mu$.

Возможные состояния СМО S_0 (все каналы свободны), S_1 (один канал занят, остальные свободны), S_2 (два канала заняты, остальные свободны), ..., S_n (все каналы заняты), S_{n+1} (все каналы заняты, в очереди одна заявка), S_{n+2} (все каналы заняты, в очереди две заявки) и т. д. Размеченный граф состояний многоканальной СМО с ограниченным временем ожидания имеет следующий вид:



Пример 108. В пункте химчистки имеется $n = 2$ аппарата для чистки. Поток посетителей предполагается простейшим с интенсивностью $\lambda = 5$ человек/ч. Время обслуживания каждого посетителя есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\mu = 4$ человека/ч. Среднее число посетителей, покидающих очередь, не дождавшись обслуживания, равно $\nu = 3$ человека/ч. Определим предельные вероятности этой СМО, среднюю длину очереди, среднее число заявок в системе, абсолютную и относительную пропускные способности, среднее число занятых аппаратов.

Размеченный граф состояний этой многоканальной СМО с ограниченным временем ожидания имеет следующий вид:



Вероятность того, что оба аппарата свободны (предельная вероятность состояния S_0), равна p_0.

Состояние S_1 связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями λ и μ. p_1 — предельная вероятность состояния S_1. $p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0$

(интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе) $= \frac{5}{4}p_0 = 1{,}25p_0$.

Аналогично $p_2 = \frac{\lambda}{2\mu}p_1 = \frac{5}{2\times 4}\times 1{,}25p_0 \approx 0{,}781p_0$;

$p_3 = \frac{\lambda}{2\mu + \nu}p_2 = \frac{5}{2\times 4 + 3}\times 0{,}781p_0 \approx 0{,}355p_0$;

$p_4 = \frac{\lambda}{2\mu + 2\nu}p_3 = \frac{5}{2\times 4 + 2\times 3}\times 0{,}355p_0 \approx 0{,}127p_0$;

$p_5 = \frac{\lambda}{2\mu + 3\nu}p_4 = \frac{5}{2\times 4 + 3\times 3}\times 0{,}127p_0 \approx 0{,}037p_0$;

$p_6 = \frac{\lambda}{2\mu + 4\nu}p_5 = \frac{5}{2\times 4 + 4\times 3}\times 0{,}037p_0 \approx 0{,}009p_0$;

$p_7 = \frac{\lambda}{2\mu + 5\nu}p_6 = \frac{5}{2\times 4 + 5\times 3}\times 0{,}009p_0 \approx 0{,}002p_0$;

$p_8 = \frac{\lambda}{2\mu + 6\nu}p_7 = \frac{5}{2\times 4 + 6\times 3}\times 0{,}002p_0 \approx 0{,}000p_0$ (мы округляем до трех цифр после запятой).

Поэтому $1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + \ldots \approx p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 \approx p_0 + 1{,}25p_0 + 0{,}781p_0 + 0{,}355p_0 + 0{,}127p_0 + 0{,}037p_0 + 0{,}009p_0 + 0{,}002p_0 = 3{,}561p_0$.

Отсюда $p_0 = 1/3{,}561 \approx 0{,}281$, $p_1 = 1{,}25p_0 \approx 1{,}25\times 0{,}281 \approx 0{,}351$, $p_2 = 0{,}781p_0 \approx 0{,}781\times 0{,}281 \approx 0{,}219$, $p_3 = 0{,}355p_0 \approx 0{,}355\times 0{,}281 \approx 0{,}100$, $p_4 = 0{,}127p_0 \approx 0{,}127\times 0{,}281 \approx 0{,}036$, $p_5 = 0{,}037p_0 \approx 0{,}037\times 0{,}281 \approx 0{,}010$, $p_6 = 0{,}009p_0 \approx 0{,}009\times 0{,}281 \approx 0{,}003$, $p_7 = 0{,}002p_0 \approx 0{,}002\times 0{,}281 \approx 0{,}000$. Остальные предельные вероятности также полагаются равными нулю.

Средняя длина очереди — это математическое ожидание числа посетителей, находящихся в очереди: $L_{оч} \approx 1\times p_3 + 2\times p_4 + 3\times p_5 + 4\times p_6 = 1\times 0{,}100 + 2\times 0{,}036 + 3\times 0{,}010 + 4\times 0{,}003 = 0{,}214$.

Среднее число заявок в системе — это математическое ожидание числа заявок в системе: $L_{сист} \approx 0\times p_0 + 1\times p_1 + 2\times p_2 + 3\times p_3 + 4\times p_4 + 5\times p_5 + 6\times p_6 = 1\times 0{,}351 + 2\times 0{,}219 + 3\times 0{,}100 + 4\times 0{,}036 + 5\times 0{,}010 + 6\times 0{,}003 = 1{,}301$.

Некоторые посетители, не дождавшись обслуживания, уходят из очереди с интенсивностью ν. Поэтому без обслуживания систему покидают в среднем $\nu L_{сист}$ человек/ч, то есть из λ посетителей будет обслужено лишь $A = \lambda - \nu L_{сист} = 5 - 3\times 1{,}301 = 1{,}097$ человек/ч. Это абсолютная пропускная способность. Относительная пропускная способность $Q = A/\lambda = 1{,}097/5 = 0{,}2194$.

Среднее число занятых аппаратов $N_{зан} = A/\mu = 1{,}097/4 \approx 0{,}274$.

Задача 108. В пункте химчистки имеется $n = 4$ аппарата для чистки. Поток посетителей предполагается простейшим с интенсивностью $\lambda = 6$ человек/ч. Время обслуживания каждого посетителя есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\mu = 5$ человек/ч. Среднее число посетителей, покидающих очередь, не дождавшись обслуживания, равно $\nu = 4$ человека/ч.

Определить предельные вероятности этой СМО, среднюю длину очереди, среднее число заявок в системе, абсолютную и относительную пропускные способности, среднее число занятых аппаратов.

§ 32.17. ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Пример 109.

Время, назначенное пациентам 20 мая	Предполагаемое время обслуживания, мин.
A 9.30	15
B 9.45	20
C 10.15	15
D 10.30	10
E 10.45	30
F 11.15	15
G 11.30	15
H 11.45	15

Из прошлого опыта известно:

Приход	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
на 20 мин раньше	0,20	0,20	00—19
на 10 мин раньше	0,10	0,30	20—29
вовремя	0,40	0,70	30—69
на 10 мин позже	0,25	0,95	70—94
на 20 мин позже	0,05	1,00	95—99

Обслуживание	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
на 20% времени меньше	0,15	0,15	00—14
по плану	0,50	0,65	15—64
на 20% времени больше	0,25	0,90	65—89
на 40% времени больше	0,10	1,00	90—99

Определим, когда 20 мая закончится прием пациентов.

Пациент	Приход		Обслуживание			
	Случайное число	Время	Случайное число	Время, мин.	Начало	Окончание
A 9.30	52	9.30	06	12	9.30	9.42
B 9.45	50	9.45	88	24	9.45	10.09
C 10.15	53	10.15	30	15	10.15	10.30
D 10.30	10	10.10	47	10	10.30	10.40
E 10.45	99	11.05	37	30	11.05	11.35
F 11.15	66	11.15	91	21	11.35	11.56
G 11.30	35	11.30	32	15	11.56	12.11
H 11.45	00	11.25	84	18	12.11	12.29

Предполагается, что пациенты обслуживаются в порядке записи. По случайным числам из 2-го и 4-го столбцов определяем приход пациентов и время обслуживания соответственно.

Задача 109. Как изменится ответ в примере 109, если случайные числа для прихода пациентов и времени обслуживания будут следующими:

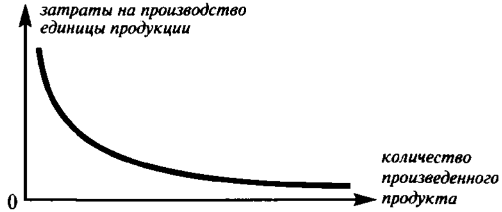
Приход	98	52	1	77	67	14	90	56
Время обслуживания	11	80	50	54	31	39	80	82

Глава 33

ОБУЧАЕМОСТЬ В ПРОИЗВОДСТВЕ

§ 33.1. КРИВЫЕ ОБУЧЕНИЯ

Предполагается, что организация или отдельный индивидуум с каждым разом выполняет одни и те же задания лучше и быстрее.



$Y_n = Y_1 n^k$, где Y_1 и Y_n — время на производство первой и n-й единиц продукции соответственно, $k < 0$. Со старта некоторого производственного процесса идет активное накопление опыта, издержки сокращаются быстрыми темпами.

С течением времени процесс выходит на уровень максимальных возможностей производства, издержки на производство последних единиц продукции практически не снижаются.

§ 33.2. УРОВЕНЬ ОБУЧЕНИЯ

Оценка уровня обучения базируется на удвоении производительности. Если уровень обучения составляет $L\%$, то:

1) время на производство второй единицы продукции составляет $L\%$ от времени изготовления первой единицы продукции;

2) время на производство четвертой единицы продукции составляет $L\%$ от времени изготовления второй единицы продукции;

3) время на производство восьмой единицы продукции составляет $L\%$ от времени изготовления четвертой единицы продукции и т. д.

Найдем связь кривой обучения $Y_n = Y_1 n^k$ с оценкой уровня обучения L (L — десятичная дробь): $\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Y_1 2^k}{Y_1} = 2^k$. Но $\frac{Y_2}{Y_1} = L$.

Отсюда $L = 2^k$, $\lg L = \lg 2^k$, $\lg L = k \times \lg 2$ и $k = \frac{\lg L}{\lg 2}$.

Поэтому $Y_n = Y_1 n^{\frac{\lg L}{\lg 2}}$.

Пример 110. На изготовление первой единицы продукции потребовалось $Y_1 = 16$ ч. Уровень обучения $L = 80\%$. Определим, сколько времени потребуется на изготовление пятой единицы продукции.

Здесь $n = 5$. Тогда $Y_5 = Y_1 5^{\frac{\lg L}{\lg 2}} = 16 \times 5^{\frac{\lg 0,8}{\lg 2}} \approx 9,5$ ч.

Задача 110. На изготовление первой единицы продукции потребовалось $Y_1 = 18$ ч. Уровень обучения $L = 85\%$. Определить, сколько времени потребуется на изготовление седьмой единицы продукции.

§ 33.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАТРАТ НА ПРОИЗВОДСТВО ПРОДУКЦИИ

Известны затраты Y_m на производство m-й единицы продукции, уровень обучения L. Нужно определить затраты на производство n-й единицы продукции.

$Y_m = Y_1 m^k$. Отсюда $Y_1 = \frac{Y_m}{m^k}$. Тогда $Y_n = Y_1 n^k = (Y_m/m^k)n^k = Y_m(n/m)^k$.

Но $k = \frac{\lg L}{\lg 2}$. Получаем $Y_n = Y_m(n/m)^{\frac{\lg L}{\lg 2}}$.

Пример 111. На изготовление пятой единицы продукции потребовалось $Y_5 = 14$ ч. Уровень обучения $L = 75\%$. Определим, сколько времени потребуется на изготовление восьмой единицы продукции.

Здесь $m = 5$, $n = 8$. Тогда $Y_8 = Y_5(8/5)^{\frac{\lg L}{\lg 2}} = 14 \times 1,6^{\frac{\lg 0,75}{\lg 2}} \approx 11,5$ ч.

Задача 111. На изготовление шестой единицы продукции потребовалось $Y_6 = 15$ ч. Уровень обучения $L = 70\%$. Определить, сколько времени потребуется на изготовление девятой единицы продукции.

§ 33.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРОВНЯ ОБУЧЕНИЯ

Если есть основания считать уровень обучения постоянной величиной при данной технологии, то ее можно найти, зная Y_1 и Y_n (время на производство первой и n-й единиц продукции соответственно):

$Y_n = Y_1 n^k$. Отсюда $n^k = \dfrac{Y_n}{Y_1} \Rightarrow \lg n^k = \lg \dfrac{Y_n}{Y_1} \Rightarrow k \times \lg n = \lg \dfrac{Y_n}{Y_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \dfrac{\lg (Y_n/Y_1)}{\lg n}$.

Но $k = \dfrac{\lg L}{\lg 2}$. Получаем $\dfrac{\lg L}{\lg 2} = \dfrac{\lg (Y_n/Y_1)}{\lg n}$.

Отсюда $\lg L = \dfrac{\lg (Y_n/Y_1) \lg 2}{\lg n} \Rightarrow 10^{\lg L} = 10^{\frac{\lg (Y_n/Y_1) \lg 2}{\lg n}} \Rightarrow L = (Y_n/Y_1)^{\frac{\lg 2}{\lg n}}$.

Пример 112. На изготовление первой и третьей единиц продукции потребовалось $Y_1 = 50$ мин и $Y_3 = 45$ мин соответственно. Определим уровень обучения. Здесь $n = 3$.

Уровень обучения $L = (Y_3/Y_1)^{\frac{\lg 2}{\lg 3}} = (45/50)^{\frac{\lg 2}{\lg 3}} \approx 0{,}936$ (= 93,6%).

Задача 112. На изготовление первой и четвертой единиц продукции потребовалось $Y_1 = 55$ мин и $Y_4 = 40$ мин соответственно. Определить уровень обучения.

Кривые обучения очень полезны при анализе затрат на производство дорогой продукции, требующей большого количества труда.

Когда производство автоматизировано, а при выполнении работы используется небольшое количества человеческого труда, то кривые обучения бесполезны.

Глава 34

ЛИЗИНГ

§ 34.1. ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ ЛИЗИНГА

Лизинг — это один из способов ускоренного обновления основных средств. Он позволяет предприятию получить в свое распоряжение средства производства, не покупая их и не становясь их собственником. Недостаток лизинга — это его более высокая стоимость по сравнению с банковскими кредитами, так как уплачиваемые лизинговые платежи предприятия-лизингополучателя лизинговому учреждению покрывают амортизацию имущества, стоимость вложенных денег и вознаграждение за обслуживание лизингополучателя.

Преимущества лизинга для арендатора:

1. Пользователь освобождается от необходимости инвестирования крупной единовременной суммы, а временно высвобожденные суммы денежных средств могут использоваться на пополнение собственного оборотного капитала, что повышает его финансовую устойчивость.

2. Деньги, заплаченные за аренду, учитываются как текущие расходы, включаемые в себестоимость продукции, в результате чего на данную сумму уменьшается налогооблагаемая прибыль.

3. Арендатор получает гарантийное обслуживание оборудования на весь срок аренды.

4. Появляется возможность быстрого наращивания производственной мощности, внедрения достижений научно-технического прогресса, что способствует конкурентоспособности предприятия.

5. Лизинг можно рассматривать как средство хеджирования против инфляции, так как использование оборудования начинается немедленно, а лизинговые платежи осуществляются из будущих доходов и в реальных деньгах, исходя из реальной стоимости, которая с течением времени уменьшается.

§ 34.2. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛИЗИНГА И БАНКОВСКОГО КРЕДИТОВАНИЯ ПОКУПКИ ОСНОВНЫХ СРЕДСТВ

В качестве альтернативного финансового приема лизинг заменяет источники долгосрочного и среднесрочного финансирования, поэтому преимущества и недостатки лизинга сравнивают с преимуществами и недостатками долгосрочных и среднесрочных кредитов.

Пусть n — срок реализации проекта, $K_н$ — ставка налога на прибыль, E_0 — предоплата, r — процентная ставка по кредиту, Q — остаточная стоимость объекта, L_i — периодический лизинговый платеж, S_i — периодический платеж по погашению кредита, P_i — проценты по кредиту в соответствующем периоде, A_i — амортизационные начисления в соответствующем периоде, $i = 1, 2, ..., n$.

Тогда чистая приведенная стоимость посленалоговых платежей в случае лизинга равна $L = E_0 + (1 - K_н)\sum_{i=1}^{n} L_i/(1 + r)^i$.

Если периодические лизинговые платежи постоянны ($L_i = L_0 = \text{const}$), то мы получаем простую ренту постнумерандо*. Тогда чистая приведенная стоимость посленалоговых лизинговых платежей равна $L = E_0 + (1 - K_н)L_0\dfrac{1 - 1/(1 + r)^n}{r}$.

В случае покупки за счет кредита чистая приведенная стоимость посленалоговых платежей равна:

$$S = E_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{S_i}{(1 + r)^i} + (1 - K_н)\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(1 + r)^i} - K_н\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{(1 + r)^i} - \frac{Q}{(1 + r)^n}.$$

Если периодические платежи по погашению кредита постоянны ($S_i = S_0 = \text{const}$), а амортизационные начисления равны ($A_i = A_0 = \text{const}$), то чистая приведенная стоимость посленалоговых платежей в случае покупки за счет кредита равна:

$$S = E_0 + (S_0 - K_н A_0)\frac{1 - 1/(1 + r)^n}{r} + (1 - K_н)\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(1 + r)^i} - \frac{Q}{(1 + r)^n}.$$

Если $L < S$, то выгоднее лизинг. Если $L > S$, то выгоднее покупка за счет кредита.

Пример 113. Предприятие рассматривает вопрос о приобретении оборудования. Первый вариант — лизинг за 600 тыс. руб. с рассрочкой платежа в течение четырех лет. Второй вариант — покупка на

---

* Подробнее см.: *Просветов Г. И.* Анализ хозяйственной деятельности предприятия: Задачи и решения. 5-е изд. — М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

заводе-изготовителе за 480 тыс. руб. Ставка налога на прибыль равна $K_н = 40\%$. Предоплата E_0 и остаточная стоимость оборудования Q равны нулю. Можно получить кредит в банке под $r = 12\%$ годовых. Используется равномерное начисление износа. Сравним эти варианты.

В случае лизинга ежегодный лизинговый платеж равен $L_0 = 600/4 = 150$ тыс. руб. Тогда чистая приведенная стоимость посленалоговых лизинговых платежей L равна $L = E_0 + (1 - K_н)L_0\dfrac{1 - 1/(1+r)^n}{r} =$

$$= 0 + (1 - 0{,}4)\times 150\times\frac{1 - 1/(1+0{,}12)^4}{0{,}12} \approx 273{,}36 \text{ тыс. руб.}$$

Определим график погашения кредита при покупке оборудования. Заполним таблицу.

Показатели, тыс. руб.	**Год 0**	**Год 1**	**Год 2**	**Год 3**	**Год 4**
Возврат кредита S_0	–	120	120	120	120
Остаток долга	480	360	240	120	0
Проценты по кредиту P_i	–	57,6	43,2	28,8	14,4

Поясним, как заполняется таблица. Ежегодный возврат кредита $S_0 = 480/4 = 120$ тыс. руб. Каждое число 2-й строки, начиная с 3-го столбца, есть разность предыдущего числа 2-й строки и числа из этого же столбца предыдущей строки. Каждое число 2-й строки умножаем на 0,12 и результат пишем в следующем столбце 3-й строки.

Ежегодные амортизационные начисления равны A_0 = (первоначальная стоимость – остаточная стоимость)/4 = (480 – 0)/4 = 120 тыс. руб.

Тогда чистая приведенная стоимость посленалоговых платежей в случае покупки за счет кредита равна:

$$S = E_0 + (S_0 - K_нA_0)\frac{1 - 1/(1+r)^n}{r} + (1 - K_н)\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(1+r)^i} - \frac{Q}{(1+r)^n} = 0 +$$

$$+ (120 - 0{,}4\times 120)\frac{1 - 1/(1+0{,}12)^4}{0{,}12} + (1 - 0{,}4)\times\left(\frac{57{,}6}{1{,}12} + \frac{43{,}2}{1{,}12^2} + \frac{28{,}8}{1{,}12^3} +\right.$$

$$\left. + \frac{14{,}4}{1{,}12^4}\right) - 0 = 288 \text{ тыс. руб.}$$

Так как 273,36 тыс. руб. < 288 тыс. руб., то выгоднее лизинг.

Задача 113. Предприятие рассматривает вопрос о приобретении оборудования. Первый вариант — лизинг за 720 тыс. руб. с рассрочкой платежа в течение четырех лет. Второй вариант — покупка на заводе-изготовителе за 600 тыс. руб. Ставка налога на прибыль равна $K_н = 35\%$. Предоплата E_0 и остаточная стоимость оборудования Q равны нулю. Можно получить кредит в банке под $r = 11\%$ годовых. Используется равномерное начисление износа. Сравнить эти варианты.

Глава 35

МЕТОДЫ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

§ 35.1. УСТАНОВЛЕНИЕ ЦЕНЫ НА ОСНОВЕ ЦЕННОСТИ ТОВАРА

Все большее число предприятий при расчете цены исходят из ощущаемой ценности своих товаров. Основным фактором ценообразования они считают покупательское восприятие. Для формирования в сознании потребителей представления о ценности товара используются неценовые приемы воздействия. Цена призвана соответствовать ощущаемой ценностной значимости товара.

При установлении цены на основе ценности товара необходимо выявить ценностные представления в сознании потребителей о товарах конкурентов.

Если продавец запросит больше признаваемой покупателем ценностной значимости товара, то объем продаж окажется ниже возможного. При назначении цены ниже признаваемой покупателем ценностной значимости товара денежные поступления предприятия ниже возможных.

§ 35.2. УСТАНОВЛЕНИЕ ЦЕНЫ НА ОСНОВЕ УРОВНЯ ТЕКУЩИХ ЦЕН

При назначении цены с учетом уровня текущих цен предприятие отталкивается от цен конкурентов и меньше внимания обращает на показатели собственных издержек или спроса. Оно может назначить цену выше или ниже уровня цен своих основных конкурентов.

Метод ценообразования на основе уровня текущих цен довольно популярен. В случаях, когда эластичность спроса трудно определима, предприятию кажется, что уровень текущих цен олицетворяет собой коллективную мудрость отрасли и залог получения справедливой нормы прибыли. Оно чувствует, что, придерживаясь уровня текущих цен, сохраняет равновесие в рамках отрасли.

§ 35.3. ПСИХОЛОГИЯ ЦЕНОВОСПРИЯТИЯ

Многие потребители смотрят на цену как на показатель качества. Многие продавцы считают, что цена должна обязательно выражаться нечетным числом. Товар по цене 399 руб. для многих потребителей будет товаром в 300 с лишним рублей, а не в 400 рублей и выше. В газетной рекламе в основном указываются цены, выраженные нечетным числом.

§ 35.4. УСТАНОВЛЕНИЕ ЦЕН ПО ГЕОГРАФИЧЕСКОМУ ПРИНЦИПУ

Географический подход к ценообразованию — это установление разных цен для потребителей в разных частях страны. Есть пять основных вариантов установления цены по географическому принципу.

При *установлении цены ФОБ* (*англ.* free on board) в месте происхождения товара товар передается перевозчику на условиях франко-вагон, после чего все права на товар и ответственность за него переходят к заказчику, который оплачивает все расходы по транспортировке. Достоинством метода является то, что каждый заказчик платит сам за себя. Недостаток метода — дороговизна продукции предприятия для удаленных потребителей.

В *методе установления единой цены с включенными в нее расходами по доставке* предприятие взимает единую цену с включением в нее одной и той же суммы независимо от удаленности потребителя. Плата за перевозку равна средней сумме транспортных расходов. Достоинства метода — относительная простота и возможность рекламировать единую цену в общенациональном масштабе. Для потребителей, находящихся неподалеку от предприятия, суммарная цена повышается, для отдаленных потребителей эта цена снижается.

В *методе установления зональных цен* предприятие выделяет несколько зон. Все потребители из одной зоны платят одинаковую цену, которая увеличивается по мере удаленности зоны.

В *методе установления цены применительно к базисному пункту* предприятие выбирает некоторый город в качестве базисного и взимает со всех заказчиков транспортные расходы, равные стоимости доставки из этого города до места назначения. Для достижения большей гибкости выбирают в качестве базисных несколько городов. Тогда транспортные расходы вычисляются от ближайшего к потребителю базисного пункта.

Предприятие, заинтересованное в поддержке деловых отношений с конкретным потребителем или с определенным географическим районом, может воспользоваться *методом установления цен с принятием на себя расходов по доставке.* Этим методом пользуются для проникновения на новые рынки или удержания своего положения на рынках с обостряющейся конкуренцией.

§ 35.5. УСТАНОВЛЕНИЕ ЦЕН СО СКИДКАМИ

В качестве вознаграждения потребителей за определенные действия (ранняя оплата счетов, закупки большого объема, внесезонные закупки) многие предприятия готовы изменять свои исходные цены.

Скидка за платеж наличными — это уменьшение цены для потребителей, которые оперативно оплачивают счета.

Скидка за количество закупаемого товара — это уменьшение цены для покупателей, приобретающих большое количество товара. Такая скидка служит для потребителя стимулом делать закупки у одного продавца.

Функциональные скидки производители предлагают службам товародвижения, выполняющим определенные функции по продаже товара, его хранению, ведению учета.

Сезонные скидки — это уменьшение цены для потребителей, делающих внесезонные покупки. Они позволяют предприятию поддерживать более стабильный уровень производства в течение всего года.

Зачеты — это другие виды скидок с прейскурантной цены. Например, *товарообменный зачет* — это уменьшение цены нового товара при условии сдачи старого (очень часто применяется компаниями, продающими автомобили).

§ 35.6. УСТАНОВЛЕНИЕ ЦЕН ДЛЯ СТИМУЛИРОВАНИЯ СБЫТА

Иногда цены временно назначаются даже ниже себестоимости товара. Магазины устанавливают на некоторые товары цены как на «убыточных лидеров» ради привлечения покупателей в надежде, что покупатели заодно купят и другие товары с обычными наценками.

§ 35.7. ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ПО СХЕМЕ ДВОЙНОГО ТАРИФА

При *ценообразовании по схеме двойного тарифа* с потребителей взимается фиксированная «входная» плата за доступ к потреблению данного товара и одинаковая плата за каждую потребленную единицу.

Пример 114. Администрация парка культуры и отдыха очень часто использует ценообразование по схеме двойного тарифа. С посетителей взимается фиксированная входная плата, а за каждое посещение аттракционов посетитель платит дополнительно.

Задача 114. Привести примеры ценообразования по схеме двойного тарифа.

§ 35.8. СОГЛАШЕНИЯ О ЦЕНЕ

Во время переговоров о цене поставщик и покупатель должны обсудить ряд вопросов, чтобы прийти к единой цене.

Поставщик стремится учитывать свое положение на рынке (монополия, конкуренция и т. д.), характер спроса на продукт (эластичность, есть ли заменители продукта и т. д.), цены конкурентов, объем заказа (скидка за количество и т. д.), репутацию покупателя (постоянные заказы, своевременная оплата и т. д.).

Покупатель обращает внимание на положение поставщика на рынке, риск закупки и методы ценообразования.

Соглашение с твердой ценой выгодно для покупателя, так как все риски берет на себя поставщик. Правда, не слишком добросовестный поставщик может попытаться сократить свои потери, понизив качество продукции.

Ценообразование по принципу «затраты + прибыль», когда к себестоимости продукта добавляется фиксированный процент, невыгодно для покупателя. В этом случае покупатель принимает на себя все финансовые риски, а проконтролировать расчет себестоимости достаточно сложно.

Глава 36

СКЛАДИРОВАНИЕ И ГРУЗОПЕРЕРАБОТКА

§ 36.1. НАЗНАЧЕНИЕ СКЛАДА

Все предприятия хранят запасы. Эти запасы могут возникнуть в любой точке цепи поставок, где тормозится или нарушается материальный поток. В большинстве случаев запасы хранятся на складах.

Склад — это место, где хранятся запасы при прохождении через цепь поставок. Чаще всего на складах хранят сырье и готовую продукцию. Но в некоторых случаях склады используют для хранения незавершенного производства и запасных частей.

Склады дороги для управления и нуждаются в тщательном планировании. При выборе оптимального размера склада учитывают следующие условия:

✧ количество и разновидность хранящихся на складе продуктов;

✧ динамика изменения спроса на каждый продукт;

✧ средний объем заказа каждого продукта;

✧ габаритные и весовые характеристики продуктов;

✧ специальные условия хранения (температура, влажность, упаковка и т. д.);

✧ экономия на масштабах;

✧ оборудование для грузопереработки материалов;

✧ обещанное потребителям время выполнения заказов поставщиками.

§ 36.2. СКЛАДСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Основная функция склада — это хранение товаров. Различают следующие виды складской деятельности:

✧ приемка грузов от поставщиков, проверка количества и качества доставленных грузов, а также условий заказа;

- нанесение штрих-кодов на материалы для идентификации;
- сортировка товаров;
- хранение товаров;
- управление запасами;
- комплектация материалов из запаса для выполнения заказов;
- упаковывание товаров;
- погрузка товаров на транспортные средства для доставки заказчику.

Традиционно склад рассматривался как место для долгосрочного хранения товаров. Но в настоящее время предприятия пытаются быстро перемещать материалы по цепи поставок. Поэтому изменилась и роль склада. Сейчас это лишь пункт на пути быстрого перемещения материалов. Теперь склад — это лучшее место для сортировки, упаковывания и объединения материалов.

Пример 115. Если заказчику требуется несколько доставок с неполной загрузкой (например, полконтейнера или часть полного фургона), то он может получить все неполные загрузки на складе возле поставщиков, объединить эти неполные загрузки до полной и оплатить их доставку в нужное место по тарифам полной загрузки. Дополнительные затраты на объединение покрываются снижением затрат на перевозку.

Пример 116. Производитель, выпускающий или покупающий комплектующие готовой продукции в разных местах, может поручить доставить все комплектующие на один склад, где из них собирается готовый продукт и организуется доставка до потребителя.

Пример 117. Поставщик может отправить весь заказ для конкретной территории одной доставкой на местный склад, который разбивает эту партию на отдельные заказы и отправляет их конкретному потребителю.

Иногда на складах выполняют некоторые виды работ, но при этом материалы не попадают на хранение. Такой вариант называется *перевалкой*. Поступление материалов на склад координируется с момента отправки их заказчикам, чтобы эти материалы передавались непосредственно из зоны поступления в зону погрузки и тут же отправлялись для доставки потребителям.

Многие предприятия имеют собственные склады и сами управляют их работой.

Собственные склады — это склады, которыми предприятие владеет или которые предприятие арендует для использования в своей цепи поставок. Таким образом обеспечивается полный контроль над основными логистическими функциями, что позволяет увязать складскую деятельность с другими видами деятельности. Расположение в нужном месте, требуемый размер, соответствие характеру обслуживания потребителей — все это позволяет складу учитывать запросы предприятия.

Но для небольших предприятий такой вариант может быть достаточно дорогим. Поэтому они используют склады общего пользования.

Склад общего пользования взимает с пользователей плату за свои услуги. Существует множество разновидностей складов общего пользования: таможенные, холодные для бестарных товаров, танкеры, склады специального назначения и т. д. Эти сооружения действуют настолько гибко, что предприятие может получить в разумных пределах любые сооружения и любые условия, в которых оно нуждается.

Основное преимущество складов общего пользования — их гибкость, позволяющая учитывать изменяющийся спрос. Но одновременно утрачивается контроль над складированием. У складов общего пользования низкие постоянные затраты, но высокие переменные затраты. У собственных складов высокие постоянные затраты, но низкие переменные затраты.

Многие предприятия используют комбинацию складов общего пользования и собственных складов. Для своих ключевых потребностей (75–85% времени) предприятие использует собственные склады и дополняет их в периоды пикового спроса складами общего пользования.

§ 36.3. ПЛАНИРОВКА

Планировка склада очень важна для его управления. Она определяет размещение полок для хранения, зон погрузки и отгрузки, тип оборудования, характеристики помещений.

Каждый склад имеет следующие основные элементы:

✧ зона приемки (сюда поступают товары от поставщиков, здесь они проверяются и сортируются);

✧ зона хранения;

✧ зона отгрузки (здесь комплектуются и отсюда отправляются заказы для потребителей);

✧ система переработки (для перемещения грузов по территории склада);

✧ информационная система (учитывает расположение всех товаров, всех доставок от поставщиков и всех отгрузок потребителям).

В большинстве складов материалы хранятся на полках или стеллажах той или иной формы.

На практике характеристики планировки определяются текущими строительными нормативами, физическими ограничениями (например, высота), наличием места. В пределах этих ограничений стараются выбрать наилучший вариант размещения стеллажей. В значительной степени этот выбор зависит от типа хранимых товаров и оборудования, используемого для грузопереработки.

Затраты на складирование часто растут с увеличением площадей. Поэтому выгодны высокие здания при условии, что дополнительная высота рационально используется.

Многие виды затрат, связанных со складированием, относятся к постоянным (арендная плата, налоги, оплата коммунальных услуг и амортизация). Переменные затраты связаны с характеристиками размещения.

Когда на складе имеются тысячи единиц хранения, то даже небольшие изменения в расположении приводят к существенному улучшению качества обслуживания и сокращению затрат.

В *складах обратной Т-образной формы* зоны приемки и отгрузки товаров расположены с одной и той же стороны здания, а наиболее востребованные материалы размещаются вблизи зон приемки и отгрузки товаров. Это позволяет оптимально загрузить зоны приемки и отгрузки товаров, задействовать механизированное погрузочное оборудование и облегчает задачу сохранности материалов. Но при такой планировке центральный проход перегружен товарными потоками.

В *складах с товародвижением в перпендикулярных направлениях* поток материалов движется только в одну сторону. Зоны приемки и отгрузки товаров разделены стеллажами. Объединение на одном складе навалочных и штучных сортируемых товаров облегчает управление запасами, но при значительной доле навалочных грузов это объединение становится нерациональным.

В *складах с угловым расположением ворот* зоны приемки и отгрузки товаров находятся на смежных сторонах здания. Это сокращает число транспортных заторов, но затрудняет охрану товаров.

В *складах со сквозным движением грузопотоков* зоны приемки и отгрузки товаров располагаются с противоположных торцов здания. Такая планировка склада пригодна в ситуации, когда требования к разгрузке и погрузке товаров различны (например, отличаются форматы грузовых единиц).

§ 36.4. ГРУЗОПЕРЕРАБОТКА

Значительная часть складских работ связана с перемещением материалов из одного места в другое. *Грузопереработка* — это перемещение материалов в пределах самого склада или между зонами хранения транспортными средствами.

Эффективно работающие склады сокращают перемещения до минимума, а все необходимые перемещения делают максимально эффективными. Оборудование для грузопереработки существенно влияет на скорость перемещения, тип перемещаемых грузов, схему размещения, число сотрудников и т. д.

Склады с ручными операциями пригодны для хранения легкой продукции небольшого размера, с которой удобно работать.

На *механизированных складах* часть мускульной силы замещают машинами (например, грузоподъемниками и кранами). На таких складах можно хранить более тяжелые грузы.

На традиционных складах (даже механизированных) очень высоки операционные издержки. *Автоматизация* позволяет сократить эти издержки и значительно повысить уровень обслуживания. Но из-за очень больших инвестиций в оборудование этим стоит заниматься только очень крупным складам, перемещающим большой объем материалов.

При выборе уровня автоматизации склада следует обратить внимание на следующие факторы:

- физические характеристики грузов (вес, размер и т. д.);
- число перемещаемых грузов;
- расстояния перемещений;
- скорость перемещения.

§ 36.5. УПАКОВЫВАНИЕ

Перевозить гораздо легче стандартные грузы, чем грузы самых разных размеров и форм. *Упаковывание* позволяет добиться более легкой грузопереработки. Упаковка также защищает продукт во время его перемещения по цепи поставок и может оказывать помощь маркетингу, продвижению и рекламе продукта.

Потребительская упаковка разрабатывается для пользователей и включает материалы маркетингового и стимулирующего характера. Здесь часто встречаются яркие цвета и рекламные сообщения.

Промышленная упаковка разрабатывается для защиты продукта и более удобной его грузопереработки.

При проектировании упаковки нужно внимательно изучить особенности продукта. Из материалов, применяемых для упаковки, можно указать дерево, картон, металл, пластик, стекло. Выбор материала для упаковки зависит от типа продукта, характера перемещения и необходимой степени защиты продукта.

В мире нарастает озабоченность количеством упаковочного материала, затратами на его производство и проблемами, связанными с уничтожением или переработкой этого материала. Серьезные штрафы стимулируют многие предприятия отказаться от упаковки, выбрасываемой конечным потребителем, и использовать упаковку повторно. Это способствует поддержанию чистоты окружающей среды.

Глава 37

ПЕРЕВОЗКА

Перевозка — это физическое перемещение материалов между участками цепи поставок. Перевозка является одним из основных компонентов логистики.

Цена перемещения единицы продукции между двумя точками определяется *тарифом*, который устанавливается на основе затрат на предоставляемые услуги, получаемой потребителем ценности, расстояния перемещения, сложности поездки, а также веса размеров и стоимости груза. Эти тарифы оказывают влияние на логистику и могут изменить весь тип перемещения грузов. Например, при относительно дешевом транспорте предприятие охватывает более широкую территорию, действуя из одного места.

Те, кто пользуется услугами транспортных предприятий, имеют мало возможностей влиять на тарифы перевозок. Но зато очень часто имеют возможность выбрать способ перевозки.

§ 37.1. СПОСОБ ПЕРЕВОЗКИ

Способ перевозки задает тип используемых транспортных средств. Существуют пять основных типов транспортных средств: железная дорога, автомобильный транспорт, водный транспорт, воздушный транспорт и трубопроводный транспорт. Выбор типа используемых транспортных средств в конкретных обстоятельствах зависит от вида перевозимого груза, пунктов отправки и назначения, стоимости груза и ряда других факторов.

§ 37.1.1. Железная дорога

Железнодорожный транспорт обычно выбирают для перевозки тяжелых и крупных грузов на большие расстояния. Поезда могут передвигаться с постоянной и достаточно высокой скоростью.

Одно из преимуществ железной дороги заключается в том, что после создания инфраструктуры дорога имеет очень высокую мощность и низкие затраты на перемещение единицы груза. На железнодорожный транспорт в меньшей степени влияют погодные условия, чем на другие виды транспорта. При использовании контейнеров или закрытых вагонов достигается относительно высокая степень безопасности грузов.

Один из основных недостатков железной дороги — ее негибкость. Все перевозки должны осуществляться по заранее составленному расписанию, так как для них используются одни и те же транспортные пути. Да и поезда могут перемещаться только по определенным маршрутам и между станциями, не останавливаясь в промежуточных точках.

Большой уклон железнодорожного полотна может вызвать проблемы для тяжелых составов.

§ 37.1.2. Автомобильный транспорт

Наиболее распространен автомобильный транспорт, он участвует практически во всех цепях поставок. Основное преимущество автомобильного транспорта — гибкость, так как он способен оказывать услуги «от двери до двери».

Автомобильный транспорт может использовать развитую инфраструктуру уже созданных дорог. Автомобилям не требуется строгой привязки к заранее составленному расписанию, поэтому они могут отправляться в поездку по необходимости. Для автомобильного транспорта характерно наличие множества перевозчиков, работающих на одних и тех же территориях.

Использование автомобильного транспорта не предъявляет строгих требований к упаковке груза и обеспечивает высокую безопасность груза. Но низкие мощности автомобильного транспорта по сравнению с железной дорогой и баржами, а также экологические издержки (загрязнение воздуха, шум, вибрации, повреждение дорог и т. д.) сказываются на использовании автомобильного транспорта.

Введение во многих странах ограничений по весу и габаритам грузов приводит к тому, что автомобильный транспорт чаще применяется для перевозки относительно небольших и легких грузов. Из-за удорожания перевозки грузовики обычно применяются для перевозок на более короткие расстояния. Частые дорожные пробки становятся причиной задержки доставки продукции.

§ 37.1.3. Водный транспорт

Из-за того, что большинство цепей поставок предусматривают отправку грузов через моря и океаны, свыше 90% мировой торговли связано с перевозками продукции водным транспортом. Различают три основных типа водного транспорта:

✧ *речной* (используется на реках и каналах);

✧ *каботажный* (для перевозки из одного порта в другой вдоль побережья);

✧ *морской* (по основным морям).

Морские перевозки предусматривают длительные маршруты. При этом для перевозки разных грузов используют самые разные типы судов, обеспечивающие существенную экономию на масштабах. Это позволяет добиваться низких затрат на единицу перевозимой продукции.

Использование водного транспорта ограничено наличием портов. Отсюда негибкость водного транспорта. Перевозки от поставщика к заказчику требуют смены транспортного средства, даже если и поставщик, и заказчик располагаются недалеко от портов.

Другие проблемы морских перевозок — их относительно небольшая скорость, долгое время объединения грузов и перевозки грузов в порты.

§ 37.1.4. Воздушный транспорт

Значительная часть воздушного транспорта занимается перевозкой пассажиров. Авиаперевозки также используют для доставки документов, посылок и тех грузов, скорость доставки которых важнее затрат.

Благодаря воздушному транспорту были созданы совершенно новые отрасли (например, экспорт тропических фруктов). Воздушный транспорт более безопасен для сохранности грузов.

Так как груз требуется доставить в аэропорт и забрать из аэропорта, то вокруг аэропортов располагаются разнообразные сооружения, предназначенные для перемещения продукции. Из-за этих трансферов общие выгоды воздушных перевозок снижаются.

Для воздушного транспорта характерны высокие постоянные затраты (самолеты очень дорого покупать) и высокие переменные затраты (оплата топлива, услуги аэропортов и т. д.).

Самолеты обслуживают далеко не все места, где ведется бизнес. А хранение грузов в аэропортах дорого обходится. Ограничения по весу и размерам перевозимых грузов, экологические факторы (большой шум, значительные выбросы газообразных веществ и т. д.) говорят не в пользу воздушного транспорта.

§ 37.1.5. Трубопроводный транспорт

Трубопроводы используют для передачи нефти и газа, а также в коммунальном хозяйстве для подачи воды и отвода канализации. Их основное преимущество — это перемещение больших количеств продукции на большие расстояния.

Трубопроводные системы закрыты, могут действовать независимо от погодных условий и очень дешевы в эксплуатации.

Недостатки трубопроводного транспорта: низкая скорость перемещения (не выше 10 км/ч), негибкость (транспортировка осуществляется между фиксированными точками), огромные первоначальные инвестиции для строительства трубопроводов и перемещение только определенных типов жидкостей.

§ 37.1.6. Выбор способа перевозки

Выбор способа перевозки зависит от следующих факторов:

- ✧ характеристики перевозимого груза, его весогабаритные параметры;
- ✧ стоимость продукции (в случае дорогой продукции из-за повышения затрат на запасы выбирают быстрый способ перевозки);
- ✧ расстояние перевозки;
- ✧ время в пути (недопустимо использовать для доставки важной продукции медленный способ доставки);
- ✧ надежность поставщиков (иногда она важнее времени в пути);
- ✧ затраты;
- ✧ гибкость перевозки.

Самые дешевые перевозки одновременно и наименее гибкие. Конечно, предприятие не обязано использовать один способ по всей цепи поставок. Оно может разбить весь маршрут на отдельные участки, на каждом из которых выбрать наилучший вариант перевозки.

§ 37.2. ИНТЕРМОДАЛЬНАЯ ПЕРЕВОЗКА

Интермодальная перевозка — это использование в цепи поставок нескольких способов перевозки. Ее цель — получение комбинации преимуществ нескольких способов перевозки, избегая при этом их недостатков.

Успех интермодальной перевозки зависит от того, насколько удастся минимизировать задержки между способами перевозки и затраты, связанные с дополнительной грузопереработкой. Этого можно достичь, помещая все виды продукции в стандартные контейнеры и используя оборудование для работы с такими контейнерами (например, крупные контейнерные порты и терминалы).

Использование контейнеров повышает гибкость перевозки, стандартизирует переработку грузов, уменьшает число мелких хищений. При этом возрастают расходы на покупку или аренду контейнера, а крупные хищения становятся более легкими.

§ 37.3. ПЕРЕВОЗКА И ВОПРОСЫ СОБСТВЕННОСТИ

Когда речь идет о перевозках, предприятие оказывается перед выбором. Что лучше: иметь свой собственный транспорт, воспользоваться услугами перевозчиков третьей стороны или какой-то комбинацией первых двух вариантов?

Если предприятие для перевозки своей продукции пользуется собственным подвижным составом, то говорят, что оно использует *собственный транспорт*. Собственный транспорт обеспечивает гибкость, контроль и тесную интеграцию логистических видов деятельности за счет удобных графиков доставки. Но покупка и содержание собственного транспорта достаточно дороги. Один из способов, позволяющих избежать подобных затрат, — это лизинг.

Перевозчики третьей стороны — это специализированные транспортные предприятия, предлагающие клиентам широкий ассортимент услуг. Используя свою квалификацию и накопленный опыт, транспортные предприятия могут предоставить более качественные услуги и сделать затраты ниже, чем в случае собственного транспорта.

При выборе между собственным транспортом и перевозчиками третьей стороны необходимо учитывать ряд факторов:

- операционные издержки;
- капитальные затраты;

- ✧ уровень обслуживания потребителей;
- ✧ степень контроля за перевозками;
- ✧ гибкость перевозок;
- ✧ затраты на персонал.

В настоящее время наблюдается тенденция использования услуг перевозчиков третьей стороны.

Возможна комбинация собственного транспорта с услугами перевозчиков третьей стороны. Для обеспечения ключевых видов деятельности предприятие использует собственный транспорт, а при резком и неожиданном росте спроса привлекает перевозчиков третьей стороны.

Глава 38

КАНАЛЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 38.1. ФУНКЦИИ КАНАЛОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Ценообразование должно дополняться выбором канала распределения. Каналы распределения играют ключевую роль в стратегии ценообразования предприятия. Каналы распределения выполняют несколько функций.

1. В большинстве случаев потребители — это большая рассеянная группа. Поэтому при поиске необходимых товаров и услуг издержки потребителей очень высоки. Каналы распределения облегчают поиск и снижают издержки потребителей.

2. Производители обычно отгружают товары крупными партиями, существенно превышающими потребность индивидуального потребителя. Каналы распределения «разбивают объем», предлагая товары потребителю в необходимом количестве.

3. Производители обычно «специализируются» на предоставлении ограниченного набора товаров. Каналы распределения собирают весь необходимый потребителям широкий ассортимент.

4. Каналы распределения трансформируют непрерывный выпуск товаров производителем в дискретный спрос потребителей, используя систему управления запасами.

5. Каналы распределения позволяют производителю эффективно и выгодно достичь конечного потребителя.

Прямой канал распределения взаимодействует непосредственно с сегментом целевых потребителей. *Косвенный канал распределения* использует посредников. Некоторые предприятия продают свою продукцию непосредственно крупным покупателям (прямой канал распределения), а услуги посредников используют для охвата всех остальных потребителей (косвенный канал распределения).

Для товаров, привлекающих покупателей низкой ценой, затраты на канал распределения должны быть минимальны. Дорогие товары, привлекающие покупателей своими исключительными характеристиками, распространяются через эксклюзивные каналы, ограничивающие доступ для розничных торговцев, что облегчает исполнение стратегии ценообразования.

Одна из главных задач предприятия, взаимодействующего с независимыми каналами распределения, — это оказание влияния на ценовые решения. Высокая оптовая цена не оставляет розничным торговцам с низким уровнем обслуживания возможностей варьирования скидками.

Распределение товаров через независимые каналы распределения обычно обходится производителям существенно дешевле, чем прямые продажи. Розничные торговцы объективно заинтересованы в завышении цен. Производитель должен в ответ на это предпринять определенные действия, стимулируя конкуренцию между розничными торговцами и ограничивая их возможности устанавливать завышенные цены.

§ 38.2. СТРАТЕГИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Существуют две стратегии распределения. *Стратегия проталкивания* предназначена для работы с ближайшими к предприятию посредниками. Например, некоторые производители безрецептурных лекарств не продвигают свою продукцию непосредственно конечным потребителям, а концентрируют свои усилия на розничных торговцах, которые и должны реализовать их товары. Эта стратегия относительно недорога в исполнении.

Стратегия притягивания фокусируется на предоставлении информации конечным потребителям.

Выбор между стратегиями проталкивания и притягивания весьма затруднителен. Для массового рынка предпочтительнее стратегия притягивания, которая позволяет контролировать объем предоставляемой покупателям информации о товаре. Эта стратегия позволяет торговцам сэкономить на маркетинговых расходах. Выгодна она и по издержкам для производителей товаров, рассчитанных на широкий круг потребителей.

Но стратегия притягивания требует применения изощренного маркетинга, опыта, которым обладает далеко не каждый производитель. Выбирая эту стратегию, производитель должен знать «в лицо» потенциальных потребителей и понимать их мотивы. Стратегия проталкивания позволяет экономно провести рекламную кампанию. Эта стратегия используется также на рынках, где спрос является рассеянным. Главный недостаток стратегии проталкивания — это зависимость от каналов распределения, которые призваны донести информацию производителя до конечных потребителей.

§ 38.3. КАНАЛЫ ЭЛЕКТРОННОЙ КОММЕРЦИИ

Каналы электронной коммерции предоставляют новые возможности распределения товаров.

Каналы электронной коммерции позволяют конечным потребителям быстро и с относительно низкими затратами получить информацию о возможных предложениях, а также позволяют сравнить цены. Но тщательное исследование покупателями торговых предложений затруднено. Это приводит к однородности торговых предложений. Поэтому производители должны внимательно подходить к разработке стратегии ценообразования. Очень часто потребители воспринимают «электронную» цену как новый рыночный ориентир.

Глава 39

ОПТОВАЯ И РОЗНИЧНАЯ ТОРГОВЛЯ

Торговые предприятия — это предприятия оптовой и розничной торговли, которые покупают готовые продукты для перепродажи.

§ 39.1. ОПТОВАЯ ТОРГОВЛЯ

Предприятия оптовой торговли приобретают у производителя крупные партии товара и продают этот товар частями предприятиям розничной торговли, другим оптовикам или частным лицам. Оптовой торговлей могут заниматься и сами производители товаров.

Неспециализированные торговые предприятия предлагают широкий ассортимент товаров. *Специализированные торговые предприятия* делают ставку на продукты определенного типа. *Мелкие оптовые торговцы* поставляют в крупные магазины товары для реализации.

Возможна продажа покупателю товара по принципу *«плати и уноси»*, когда покупателю за наличный расчет приобретает товар на складе и сам занимается доставкой этого товара. Прямые поставки предусматривают выполнение заказов от предприятий розничной торговли.

§ 39.2. РОЗНИЧНАЯ ТОРГОВЛЯ

Предприятия розничной торговли предоставляют продукты и услуги конечному потребителю для личного пользования. Такие предприятия доводят до потребителя информацию о продукте.

Специализированные магазины располагают широким ассортиментом товаров определенного назначения (книги, одежда, обувь и т. д.). В *универмагах* широкий ассортимент товаров продается в специализированных отделах. *Супермаркеты* — это большие магазины самообслуживания. *Гипермаркет* отличается от супермаркета площадью торгового зала.

Некоторые предприятия розничной торговли специализируются на *предоставлении услуг* (банки, рестораны, турфирмы, химчистки и т. д.). *Интернет-магазин* использует веб-сайты для прямой продажи товаров. Продажа сигарет, напитков, газет и т. д. может осуществляться через *автоматы*. Еще один тип розничной торговли — это *продажа через агентов* (например, система продаж косметики фирмы *Avon*).

Розничная торговля является последним звеном в цепочке сбыта товаров.

Глава 40

ИЗЛИШКИ

Излишки — это материалы и оборудование, запасы которых превосходят потребности предприятия, а также не используемые по прямому назначению и морально устаревшие. Среди причин возникновения излишков можно отметить следующие:

1) избыточная закупка (закупка товара по сниженным ценам в период распродаж без учета затрат на хранение);

2) затоваривание (ошибочная оценка спроса привела к большим закупкам сырья);

3) резервирование (предприятие создает запасы готовой продукции в ожидании роста цен на нее);

4) плохая система управления запасами;

5) порча изделий;

6) ошибочное решение о покупке оборудования (надо было воспользоваться лизингом);

7) дублирование наименований (одной товарной позиции присвоено два разных наименования) и т. д.

Неиспользуемые материалы можно пустить во вторичную переработку или разобрать на запчасти. Старое оборудование следует отремонтировать и продать на рынке. Часть излишков можно распродать персоналу предприятия по сниженным ценам.

Глава 41

КОДИРОВАНИЕ

Кодирование — это система символов для работы с рассортированными единицами товара. Такая система позволяет отказаться от длинных и подробных описаний единиц хранения, облегчает процедуру нахождения на складе требуемого товара, способствует точной и безошибочной идентификации товара.

На практике используют буквенную, буквенно-цифровую и цифровую кодировки. Изобретенные в 1950-х годах штрих-коды существенно ускорили движение потоков продуктов и информации.

Штрих-кодирование работает аналогично коду азбуки Морзе. Только вместо точек и тире здесь используются широкие и узкие штрихи, а также промежутки между ними. Каждому отдельному продукту соответствует своя последовательность линий и промежутков между ними. Для прочтения кода используют специальное устройство, называемое *сканером*. Перемещая сканер над поверхностью штрих-кода, можно получить данные, занесенные в компьютер.

Существует несколько систем штрих-кодов. В каждой из них свои правила кодирования, декодирования и проверки ошибок. Наиболее широко применяется код *EAN 13*, который содержит 12 элементов, сгруппированных в две комбинации по 6 цифр, разделенных центральным звеном. По обоим концам кода располагаются контрольные разряды. Первые две цифры идентифицируют код страны, цифры с 3-й по 7-ю указывают предприятие, цифры с 8-й по 12-ю — продукт. 13-я цифра служит для контроля.

Штрих-кодирование позволяет ускорить ввод данных, обеспечивая при этом очень высокую точность (1 ошибка на 3 миллиона вводов данных).

Глава 42

МЕТОДЫ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

§ 42.1. ЗАЧЕМ НУЖНЫ ЭКСПЕРТНЫЕ ОЦЕНКИ?

Обычно при получении прогноза происходит обработка наблюдаемых данных. Во всех методах, рассмотренных в предыдущих главах, для обработки этих данных привлекался математический аппарат, а мнение самого прогнозиста не учитывалось. Но использование верной объективной оценки — это важнейший элемент всех методик прогнозирования. Правильная оценка особенно важна при интерпретации результатов анализа данных.

Очень часто на практике наблюдаются случаи, когда не существует исторических данных, относящихся к прогнозируемому процессу. В таких случаях прогнозы строятся исключительно на мнении экспертов, привлекаемых для создания этих прогнозов и разработки возможных сценариев будущих событий.

Привлечение к работе группы экспертов, осведомленных во многих областях знаний, позволяет:

1) всесторонне проанализировать количественные и качественные аспекты сложной проблемы, решение которой ищется;

2) компенсировать смещение индивидуальных оценок;

3) увеличить рассматриваемую группу факторов, имеющих отношение к данной проблеме;

4) дает возможность использовать интуицию и жизненный опыт экспертов.

Число публикаций, цитируемость трудов, ученая степень, способность к нестандартным подходам при решении проблем, умение вести дискуссию, самокритичность эксперта — вот далеко не полный перечень характеристик, принимаемых во внимание при подборе экспертов.

Конечно, экспертные методы далеки от совершенства. И все же они дают более надежные результаты, чем традиционные совещания и комиссии.

Экспертизы бывают индивидуальными и коллективными, одноэтапными и многоэтапными, с обменом информацией между экспертами и без, анонимными и открытыми. Причем далеко не всегда можно уложиться в какую-либо широко известную и часто используемую схему. Мы ограничимся рассмотрением метода Дельфи и метода написания сценария.

§ 42.2. МЕТОД ДЕЛЬФИ

Когда эксперты собираются вместе и начинают обсуждать проблему, нельзя исключить влияния групповой динамики на оценки прогнозистов. С целью исключения этого влияния был создан *метод Дельфи* (по названию древнегреческого города Дельфы, чьи оракулы славились умением предсказывать будущее). Применительно к разработке научно-технических прогнозов использование метода Дельфи выглядит так.

В первом раунде обсуждения эксперты отвечают в письменном виде на вопросы, поставленные перед ними исследовательской группой. Вопросы должны допускать ответы в виде чисел. Каждый ответ эксперта должен быть им обоснован. Первая анкета может допускать любые ответы. Цель такой анкеты — составление перечня событий для прогноза в какой-то области науки и техники. Организатор экспертизы объединяет прогнозы, и полученный перечень событий становится основой второй анкеты.

Во втором раунде эксперты оценивают сроки реализации событий и приводят соображения, по которым они считают свои оценки верными. По сделанным оценкам и их обоснованиям организатор экспертизы проводит статистическую обработку полученных данных, группирует мнения экспертов, изучает крайние точки зрения. Результаты этой работы организатора сообщаются экспертам, и они могут изменить свое мнение (причем работа экспертов идет анонимно).

Анкета третьего раунда содержит перечень событий, статистических характеристик, дат наступления событий, сводных данных (аргументов) о причинах более ранних или более поздних оценок. Экспертам надо рассмотреть аргументы; сформулировать новые оценки предполагаемой даты наступления каждого события; обосновать свою точку зрения при ее значительном отклонении от групповой; анонимно прокомментировать противоположные мнения. Пересмотренные оценки и новые аргументы возвращаются к организатору экспертизы, который вновь их обрабатывает, суммирует все аргументы и подготавливает на этой основе новый прогноз.

В четвертом раунде эксперты знакомятся с новым групповым прогнозом, аргументами, критикой и составляют новый прогноз. Если группа не может прийти к единому мнению и организатор экспертизы заинтересуется аргументами различных сторон, то он может собрать экспертов для очного обсуждения.

Число раундов опроса может варьироваться в зависимости от целей оценок, располагаемых средств текущих результатов, опыта предыдущего применения метода Дельфи. Практика показывает, что после 3–5 раундов оценки экспертов становятся стабильными, что является сигналом для прекращения опроса.

Метод Дельфи позволяет получить достаточно хорошие оценки будущих перспектив.

Особенно полезен метод Дельфи для технологического прогнозирования, то есть как метод оценки изменений в технологии и их возможного воздействия на предприятие. Например, цель прогноза по методу Дельфи может заключаться в том, чтобы предсказать, когда вакцина от болезни будет разработана и готова для массового распространения. Это долгосрочные одноразовые прогнозы, сбор данных для которых является очень дорогостоящим.

Метод Дельфи имеет ряд довольно серьезных недостатков. Уровень компетенции участников может оказаться недостаточным. Возможно ложное согласие участников опроса из-за неоднозначного толкования вопросов. Сохранение анонимности снижает надежность информации и ответственность участников опроса. Прогнозы, полученные методом Дельфи, редко достигают высокой степени точности.

§ 42.3. МЕТОД НАПИСАНИЯ СЦЕНАРИЯ

Метод написания сценария предусматривает выяснение деталей неопределенного будущего с помощью написания «сценария будущего» для окружения предприятия на многие годы вперед.

Обычно создается один наиболее вероятный сценарий развития событий, дополняемый несколькими менее вероятными возможными сценариями. Это дает возможность правильно реагировать на реальные изменения.

§ 42.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Аналитическая служба обеспечивает работу по подготовке, обоснованию и формированию механизмов реализации наиболее важных и ответственных решений.

Основными целями и задачами аналитической службы, определяющими потребность в проведении соответствующих экспертиз, являются:

1) выявление приоритетных направлений и целей деятельности лица, принимающего решение;

2) сбор, систематизация, классификация и анализ информации по основным направлениям деятельности лица, принимающего решение;

3) анализ ситуаций, которые являются областью активной деятельности лица, принимающего решение, и оказывают существенное влияние на достижение поставленных целей;

4) разработка и оценка альтернативных вариантов решений, выявление их сильных и слабых сторон;

5) формирование и использование коллективных механизмов принятия решений, конкурсов, тендеров при принятии ответственных решений;

6) определение механизма реализации выбранного решения;

7) мониторинг динамики развития ситуации с выявлением кризисных и предкризисных ситуаций, отслеживание хода реализации ранее принятых решений.

Аналитическая служба должна использовать современные технологии анализа ситуации и поддержки принятия решений. Это означает наличие потребности в широком использовании экспертного оценивания.

В работе экспертных комиссий, организуемых аналитической службой, очень велика доля качественной (неколичественной) информации. Это требует использования соответствующих экспертных методов.

Очень важна квалифицированная экспертиза при определении факторов, оказывающих существенное влияние на развитие анализируемой ситуации при прогнозировании вероятных возможностей развития процессов как без учета управляющих воздействий, так и с их учетом. Для обеспечения нужного уровня качества работы экспертной комиссии в настоящий момент широко используются методы организации информационного взаимодействия экспертов.

Важной особенностью работы аналитической службы при использовании экспертных оценок является корректное применение результатов экспертизы в оптимизационном моделировании. Проблема проста: экспертные оценки, как правило, имеют большую или меньшую погрешность, и их использование в высокоточных моделях и расчетах должно быть аккуратным, точность результатов на выходе таких моделей нужно соотносить с точностью входной информации.

Аналитическая служба должна заранее подготовить необходимый аналитический материал, который помогал бы экспертам в концентрированном виде получать информацию, полезную для их работы. В поле зрения аналитической службы также должны быть вопросы формирования коллективного мнения по частным оценкам, вопросы компетентности экспертов и т. д. Особенностью работы в данном случае является то, что аналитическая служба проводит экспертное оценивание не столько для себя, сколько для лица, принимающего решение.

Методы, рассмотренные в этой главе, являются хорошим дополнением к арсеналу прогнозиста. Однако нередко применение экспертных оценок в тех случаях, когда могут быть использованы математические методы, обусловлено неумением использовать математические методы.

§ 42.5. ЭКСПЕРТНЫЕ СИСТЕМЫ

Экспертные системы — это компьютерные программы, используемые для решения задач из конкретных областей с привлечением исходных данных из базы знаний, накопленных экспертами. Пользователь отвечает на вопросы компьютера и получает сообщение о возможном решении задачи. Часто экспертные системы применяются при поиске производственных ошибок.

Глава 43

ОЦЕНКА ПОСТАВЩИКОВ

Необходимость оценки поставщика возникает тогда, когда закупщик желает убедиться, что данный поставщик отвечает всем требованиям, предъявляемым закупщиком. Оценка поставщика требует значительных затрат времени и средств.

Финансовая оценка поставщика должна снизить риск сотрудничества с предприятием, чья финансовая жизнеспособность находится под вопросом.

При оценке производственного оборудования следует обратить внимание на способность поставщика самостоятельно осуществлять весь технологический цикл. При этом оборудование должно быть современным и поддерживаться в надлежащем состоянии. Какой статистический контроль применяется для гарантии качества? Какое оборудование есть у поставщика для утилизации отходов?

Необходимо получить сведения о человеческих ресурсах поставщика. Ведь персонал предприятия — это особая ценность предприятия.

Для выбора поставщика можно воспользоваться *методом взвешивания*.

Составляется список факторов, влияющих на выбор поставщика. Для определения относительной значимости этих факторов каждому фактору приписывается *вес* — число из отрезка [0, 1]. Сумма всех весов должна равняться единице.

Выбирается шкала для измерения каждого фактора (например, от 1 до 10 или от 1 до 100 очков). Для каждого поставщика нужно оценить все факторы по принятой шкале измерения. Умножим оценки факторов на соответствующие веса и суммируем полученные числа для поставщика. Поставщик с наибольшей суммой является наилучшим.

Изменяя оценки или веса факторов, можно исследовать устойчивость полученного решения, а также степень влияния факторов на конечный результат. Те факторы, которые практически не влияют на решение, можно исключить из рассмотрения и использовать в процессе качественного анализа при принятии решений.

Пример 118. Предприятие рассматривает вопрос о выборе одного поставщика из поставщиков *A*, *B*, *C*. Все данные отражены в таблице.

Фактор	Вес	A	B	C
Качество	0,4	8	7	6
Цена	0,2	7	6	8
Соблюдение условий поставки	0,4	5	7	6

Выберем поставщика с помощью метода взвешивания. Заполним таблицу.

Фактор	Вес	A	B	C	Вес× A	Вес× B	Вес× C
Качество	0,4	8	7	6	3,2	2,8	2,4
Цена	0,2	7	6	8	1,4	1,2	1,6
Соблюдение условий поставки	0,4	5	7	6	2	2,8	2,4
Сумма	1	—	—	—	6,6	6,8	6,4

Поясним, как заполняется таблица.

Числа 2-го столбца умножаем на числа 3-го (4-го) столбца соответственно и результат пишем в 6-м (7-м) столбце. 8-й столбец равен произведению 2-го и 5-го столбцов. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Вариант с наибольшей суммой (6,8) — это поставщик *B*.

Задача 115. Предприятие рассматривает вопрос о выборе одного поставщика из поставщиков *A*, *B*, *C*. Все данные отражены в таблице.

Фактор	Вес	A	B	C
Качество	0,3	9	7	8
Цена	0,2	7	9	6
Соблюдение условий поставки	0,5	5	6	8

Выбрать поставщика с помощью метода взвешивания.

Сами по себе рейтинги создают видимость научной точности, хотя они не более точны, чем те предпосылки, на которых строятся. Часто на деятельность поставщика влияют обстоятельства, находящиеся вне поля зрения закупщика.

Мелкие поставщики более внимательны к требованиям покупателя. Но у крупных поставщиков больше возможностей для решения срочных проблем в чрезвычайных ситуациях.

Глава 44

ОБОСНОВАНИЕ РЕШЕНИЯ «ПРОИЗВОДИТЬ ИЛИ ПОКУПАТЬ»

Минимизации затрат и увеличению прибыли содействует оптимизация выбора между собственным производством и приобретением комплектующих деталей, запасных частей, полуфабрикатов, услуг и т. д.

Пример 119. Для ремонта техники требуются соответствующие детали. При их изготовлении собственными силами постоянные затраты на содержание оборудования составят 150000 руб./год, а переменные расходы на единицу продукции — 120 руб./ед. Готовые детали можно в неограниченном количестве приобрести по цене 140 руб./ед. Определим наименее затратный вариант.

Пусть x – требуемое количество деталей в год. Затраты при собственном производстве равны $150000 + 120x$ руб. Затраты при покупке деталей равны $140x$ руб. Приравняем затраты по обоим вариантам: $150000 + 120x = 140x$. Тогда $x = 7500$ деталей. При годовой потребности не более 7500 деталей выгодно их покупать. При годовой потребности свыше 7500 деталей выгодно собственное производство.

Задача 116. Для ремонта техники требуются соответствующие детали. При их изготовлении собственными силами постоянные затраты на содержание оборудования составят 140000 руб./год, а переменные расходы на единицу продукции — 125 руб./ед. Готовые детали можно в неограниченном количестве приобрести по цене 145 руб./ед. Определить наименее затратный вариант.

Естественно, возникает вопрос о стабильности более низкой цены внешнего производителя. А вдруг внешний производитель изделий просто пытается проникнуть на рынок с помощью низкой цены, чтобы затем резко поднять цены на следующие заказы?

Качество закупаемых изделий и своевременность поставок также способны повлиять на выбор между собственным производством и закупкой у внешнего производителя.

Если предприятие целиком полагается на внешнего производителя, то все нововведения этого производителя могут быть доступны для конкурентов предприятия.

Размещение производства комплектующих у внешнего производителя позволяет предприятию сконцентрироваться на основных видах деятельности. За последнее время в связи с ростом конкуренции, снижением издержек, разукрупнением предприятий многие предприятия взяли курс на поиск внешних производителей. Развитие связей между предприятиями, близость к потребителям, конкурентоспособность и производительность также говорят в пользу внешних производителей.

Совершенно невероятно, чтобы какое-то предприятие превосходило остальные предприятия по всем производственным вопросам. Поэтому предприятия все охотнее идут на взаимовыгодное сотрудничество.

Из-за трудностей со сбором данных для проведения полномасштабного анализа у многих предприятий нет четко выраженной позиции по вопросу «производить или покупать». Снижение затрат, минимизация издержек, сокращение производственного цикла, повышение производительности говорят в пользу закупок у внешних производителей. Незащищенность от рисков поставщиков и увольнение сотрудников при размещении заказа вне предприятия склоняют предприятие к собственному производству.

Глава 45

КОНКУРЕНТНЫЕ ПРЕИМУЩЕСТВА

В этой главе мы подробно рассмотрим конкурентные преимущества предприятия. Именно конкурентные преимущества и определяют специфику применяемых предприятием стратегий ценообразования.

Выделяют два типа конкурентных преимуществ, обеспечивающих прибыли даже при самых высоких уровнях конкуренции: конкурентные преимущества по издержкам и конкурентные товарные преимущества.

§ 45.1. КОНКУРЕНТНЫЕ ПРЕИМУЩЕСТВА ПО ИЗДЕРЖКАМ

Если предприятие удерживает преимущество по издержкам, то конкуренты не имеют возможности снижения цен. Эффективное использование ресурсов — это условие получения устойчивых преимуществ по издержкам.

Многие предприятия продают множество различных товаров. *Достигаемая в результате обобществления издержек производства различных товаров экономия* — это одно из конкурентных преимуществ предприятия.

Эффект масштаба (то есть сокращение издержек по мере увеличения объема выпуска) — это еще одно конкурентное преимущество предприятия. Высокие начальные издержки производственных операций и продвижения товара при небольшом объеме производства обеспечивают надежную защиту от конкурентов.

Иногда наблюдается *экономия, обусловленная опытом.* Возможно сокращение издержек предприятия за счет накопленного производственного опыта.

Очень часто значительной экономии позволяет достичь предприятию фокусирование маркетинговых усилий на одном-двух товарах или рыночных сегментах. Это *экономия, обусловленная фокусированием на покупателе.* Такая экономия особенно важна для небольших предприятий, ведь оно вступает в конкуренцию с крупными соперниками, обладающими преимуществами по издержкам, обусловленными разнообразием товаров, эффектом масштаба и накопленными знаниями.

Многие предприятия вкладывают значительные средства в разработку и развитие вспомогательной инфраструктуры. Координация доставки товаров позволяет минимизировать издержки хранения запасов, координация спецификаций — потребности в дополнительной обработке закупаемых компонентов, а координация ценовых решений обеспечивает повышение конкурентоспособности и прибыльности и предприятия, и его поставщиков. Это *экономия, обусловленная логистической интеграцией.*

Достигнутое за счет экономии сокращение издержек является одним из наиболее устойчивых преимуществ.

§ 45.2. КОНКУРЕНТНЫЕ ТОВАРНЫЕ ПРЕИМУЩЕСТВА

Если товар мало чем отличается от конкурирующих продуктов, то основным фактором принятия решения о его закупке становится его цена. Рассмотренные нами преимущества частично защищают прибыль предприятия от сокращения цен конкурентами. *Дифференцированное товарное предложение* позволяет свести к минимуму ценовую чувствительность покупателей.

Понимание покупателей, их товарных потребностей, соответствие их требованиям и предпочтительным способам закупок — это условия успешного предложения дифференцированного товара.

Один из путей дифференцированного товара — непрерывные инновации. Для предприятий, способных осуществлять дорогостоящие исследования и разрабатывать подлежащие патентной защите товары, преимущество уникальности товара является неограниченным.

К сожалению, большинство товарных преимуществ недолговечно. Предприятие, первым внесшее усовершенствование в товарное предложение, имеет возможность пользоваться устойчивым в отношении конкурентов *преимуществом первопроходца* занять устойчивые позиции. Первопроходец первым получает доступ к ограниченным ресурсам. Инновационные качества первопроходца формируют определенный имидж в глазах покупателей, воспроизвести который гораздо труднее, чем скопировать собственно товар. Первопроходец получает преимущество и в каналах распределения.

Цель дифференцирования многих товаров — привлечь ограниченный сегмент покупателей и занять определенную рыночную нишу. А в силу эффекта масштаба ***нишевые товарные преимущества*** становятся весьма устойчивыми даже при относительно небольшой экономии. Рынок может быть недостаточно крупным для существования множества предприятий, обслуживающих достаточно малые сегменты рынка.

Глава 46

ПРИНЯТИЕ КРАТКОСРОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Для большинства предприятий получение прибыли — одна из важнейших задач. Как выбрать ту последовательность действий, которая приведет к получению максимальной прибыли? Между получением прибыли в краткосрочном плане и процветанием предприятия в долгосрочном плане должен быть баланс.

С точки зрения затрат целесообразно делать различие между краткосрочными и долгосрочными решениями. В краткосрочном периоде наиболее важна валовая прибыль, и для принятия решений необходимо использовать методы калькуляции себестоимости по дифференцированным затратам. В долгосрочном периоде должны быть покрыты все затраты предприятия.

В краткосрочном периоде изменяются только переменные затраты. Принятие краткосрочных решений направлено на текущую «настройку» бизнеса. В краткосрочных решениях не затрагиваются вопросы о базовых инвестициях и структуре постоянных затрат. При принятии краткосрочного решения нужно учитывать только те доходы, которые являются прямым следствием данного решения, и сопоставлять их с теми затратами, которые также есть следствие данного решения.

Прямые затраты напрямую связаны с изготовлением продукта. Это затраты на оплату основных производственных материалов, труда производственных рабочих и накладные расходы для обеспечения непосредственно производственного процесса (например, электроэнергия для оборудования).

Косвенные затраты — это все иные затраты, имеюшие отношение к производственному процессу (вспомогательные материалы; труд инспекторов, контролеров, испытателей; накладные расходы на освещение, отопление и т. д.).

Прямые затраты обычно являются переменными затратами, а косвенные затраты — постоянными. Хотя бывают и исключения (например, труд производственного персонала часто относят к постоянным затратам, если работникам не платят сдельно или не нанимают временно).

Дифференцированные затраты — это затраты, связанные с продажей дополнительных единиц продукции. Сюда могут входить как переменные, так и постоянные затраты.

Затраты прошлого периода (то есть затраты, относящиеся к прошлому) являются необратимыми. Поэтому они не должны влиять на принятие решений.

Пример 120. Лаборатория приобрела оборудование. Прошел год, гарантийный срок работы оборудования истек, оно начинает давать сбои, счета за его ремонт увеличиваются, персонал раздражен. Уплаченная за оборудование сумма — это затраты прошлого периода. Никакие будущие решения по поводу оборудования не могут возвратить этой суммы. Будущие решения должны касаться будущих затрат (например, счетов за ремонт оборудования).

Задача 117. Привести примеры затрат прошлого периода.

Альтернативные затраты — это потенциальные выгоды, упущенные в результате непринятия альтернативного курса действий. При принятии краткосрочного решения их следует учитывать. А вот *косвенные затраты* (затраты, сохраняющие свою величину независимо от курса действий) учитывать не следует.

Пример 121. Если театр и кино — два возможных варианта проведения вечера, то альтернативные затраты посещения кинотеатра — это упущенное удовольствие от пребывания в театре.

Задача 118. Привести примеры альтернативных затрат.

Особо нужно сказать об учете амортизации. Начислять амортизацию можно различными способами в зависимости от целей предприятия. Увеличение амортизации приводит к уменьшению налоговых обязательств. При назначении цен или принятии других управленческих решений амортизационные отчисления должны основываться на прогнозах реального уменьшения текущей рыночной стоимости активов в результате их использования.

Глава 47

ФЬЮЧЕРСНЫЕ КОНТРАКТЫ

Фьючерсный контракт (сокращенно *фьючерс*) — это контракт на покупку определенной партии товара по цене, устраивающей обе стороны в момент заключения сделки, а сам товар поставляется продавцом спустя довольно продолжительное время. Фьючерс — это ценная бумага второго порядка, которая является объектом сделок на фондовом рынке.

Лиц, покупающих и продающих фьючерсные контракты, можно определить как хеджеров или спекулянтов. *Хеджеры* участвуют во фьючерсных сделках в основном для уменьшения риска, так как данные лица или производят, или используют актив в рамках своего бизнеса. *Спекулянты* заключают фьючерсные контракты в целях получения прибыли в короткие сроки.

Основными товарами, по которым заключаются фьючерсные контракты, являются зерно, драгоценные и цветные металлы, нефть и нефтепродукты.

С семидесятых годов двадцатого века на основных биржах были внедрены финансовые фьючерсные контракты на иностранную валюту, ценные бумаги с фиксированным доходом и рыночные индексы. По объему торговли они сейчас имеют гораздо более важное значение, чем базисные активы и традиционные фьючерсные контракты.

Фьючерсный контракт на рынке финансовых активов — это договор между двумя инвесторами, согласно которому один из них берет на себя обязательство по окончании срока договора продать другому инвестору (или купить у него) определенное количество ценных бумаг по заранее оговоренной цене.

Основное отличие фьючерса от опциона состоит в том, что во фьючерсном контракте реализуется не право, а безоговорочное обязательство лица, заключившего договор, в любом случае исполнить контракт в указанный в нем срок. Поэтому и финансовый риск, связанный с фьючерсом, гораздо выше, чем при операции с опционом.

Целью фьючерсных сделок является страхование (хеджирование) от финансовых потерь в связи с неблагоприятной конъюнктурой на рынке, а также увеличение прибыли в результате спекулятивных операций на бирже. Торговля фьючерсами позволяет снизить риск финансовых потерь в случае резких колебаний цен, уменьшить размер резервного фонда, необходимого для покрытия убытков, ускорить возврат в налично-денежной форме авансированного капитала, снизить издержки обращения.

Ответы

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

6. Да.

13. 25 руб.

14. Вариант *C*.

15. Вариант *C*.

16. (6,7; 6,5).

17. (5; 7).

18. *B* и *D*.

19.1. *B*–1 (длина 35), *B*–2 (длина 20), *B*–3 (длина 20), *B*–4 (длина 30), *B*–3–5 (длина 55), *B*–3–6 (длина 50), *B*–3–8–7 (длина 100), *B*–3–8 (длина 80), *B*–4–10–9 (длина 85), *B*–4–10 (длина 70).

20. 1–4–6–9–10 или 1–2–6–9–10. Длина маршрутов равна 16.

21. 1–4–6–7–8–9–11–10, 4–5, 4–3–2 (длина 28).

22. 6. Увеличится на 2.

23. 1.

24. 1.

25. 1 → 5 → 3 → 2 → 4 → 1. Длина маршрута равна 10.

26.

	70	100	110
50	50		
100	20	80	
130		20	110

27.

	70	100	110
50	50		
100	20		80
130		100	30

28.

	30	20	50
50	30	20	
30			30
20			20

29. Затраты 910. Один из возможных вариантов.

	70	100	110
50			50
100	70		30
130		100	30

30. Затраты 720. Один из возможных вариантов.

	30	40	60
40			40
60	20		20
50	10	40	

31. Затраты 470. Один из возможных вариантов.

	20	30	50
10			10
40	20		20
30		30	

32. См. задачу 29.

33. У поставщиков 1, 2 и 4 есть 50, 100 и 130 единиц груза соответственно. Потребителям 3, 5 и 6 требуется 70, 110 и 100 единиц груза соответственно. На ребрах указана стоимость перевозки единицы груза от соответствующего поставщика до соответствующего потребителя. Суммарная мощность поставщиков равна 280, суммарный спрос потребителей равен 280. Это закрытая модель.

34. Один из возможных первоначальных планов поставок. Потребитель 3 получает 20 единиц груза от поставщика 4 и 50 единиц груза от поставщика 2. Потребитель 5 получает 110 единиц груза от поставщика 4. Потребитель 6 получает 50 единиц груза от поставщика 1 и 50 единиц груза от поставщика 2. Затраты 1160.

35. Первоначальный план поставок, указанный в решении задачи 34, не является оптимальным.

36. Один из возможных оптимальных планов поставок. Потребитель 3 получает 20 единиц груза от поставщика 4 и 50 единиц груза от поставщика 1. Потребитель 5 получает 110 единиц груза от поставщика 4. Потребитель 6 получает 100 единиц груза от поставщика 2. Затраты 1110.

37. Один из возможных оптимальных планов поставок. Потребитель 2 получает 30 единиц груза от поставщика 6. Потребитель 4 получает 40 единиц груза от поставщика 3. Потребитель 5 получает 40 единиц груза от поставщика 1 и 20 единиц груза от поставщика 6. 20 единиц груза остаются у поставщика 3. Затраты 740.

38. Один из возможных оптимальных планов поставок. Потребитель 1 получает 20 единиц груза от поставщика 4. Потребитель 3 получает 20 единиц груза от поставщика 2 и 10 единиц груза от поставщика 5. Потребитель 6 получает 20 единиц груза от поставщика 2 и 10 единиц груза от поставщика 4. Затраты 470.

39. Затраты 11.

40. Доход 43.

41. См. задачу 39.

42. *E*.

43. Заказать исследование. При благоприятном прогнозе — открыть большой магазин, при неблагоприятном прогнозе — открыть маленький магазин. 22,92 млн. руб.

44. Нужно строить большой завод. 272,5 тысяч долларов.

45-49. Возможные решения: 1 (максимин), 3 (минимакс, правило максимальной вероятности, максимизация ожидаемого дохода), 4 (максимакс, критерий Гурвица при $a = 0{,}4$ и $b = 0{,}6$). 8 руб./день.

50. 14,3 тыс. руб. и 17,7 тыс. руб.

51. 123 тыс. руб. и 71,6 тыс. руб.

52. 15,3 тыс. руб.

53. 17,2 тыс. руб.

54. Константу сглаживания нужно изменить.

55. *B–D–E–F–H*. Длина 21.

56. 21,67 недели; 0,3446; 0,9772.

57. Все работы выполняются в минимальные сроки. Продолжительность 12 дней. Затраты 25,65 млн. руб.

59.

Работа	(1,3)	(1,4)	(1,2)	(2,3)	(3,5)	(2,5)	(4,5)
Выполнение	0–3	3–8	0–2	2–5	5–7	5–9	8–11

60.

Работа	$t_{рн}$	$t_{пн}$	$t_{ро}$	$t_{по}$	$R_п$	R_C
(1,2)	0	0	4	4	0	0
(1,3)	0	4	2	6	4	4
(2,3)	4	4	6	6	0	0
(2,4)	4	11	5	12	7	7
(3,4)	6	6	12	12	0	0
(4,5)	12	12	16	16	0	0

61. 5 мин./единицу, 4 рабочих места, 65%.

62. 4; 2,21 и 5,79; 1,32 и 6,68.

63. 4,652; 8,4 и 10,9.

64. Для средней 25,04; 24,81 и 25,27. Для размаха 0,31; 0 и 0,71.

65. 0,012; 0,005 и 0,019; 0,002 и 0,022.

66. Верхняя предупреждающая граница — 9 бракованных изделий в выборке. Верхняя граница регулирования — 12 бракованных изделий в выборке.

67. 25 и 40.

68.

p	0,01	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4
$p_6(k \leqslant 1)$	0,9985	0,9672	0,8857	0,7765	0,6554	0,5339	0,4202	0,2333

69. Для потребителя схема очень плоха.

70. 11 единиц; 7 единиц; 2830 руб.; 36 циклов; 7 дней.

71. 462 единицы; 6928 руб.; 17,3 цикла; 21 день.

72. 90 единиц.

73. 734 единицы; 5966 руб.; 14,9 цикла; 24,5 дня.

74. Лучше модель с дефицитом.

75. Лучше модель с дефицитом.

76. 29 единиц; 5 единиц; 503 руб.

77. 29 единиц; 5 единиц; 495 руб.

78. 62 дня.

79. 7, 7, 7, 4, 6, 6, 8, 7, 6, 8.

80. 91 руб./день.

81. 4100 руб.

82. 3975 руб.

83. 4047,5 руб.

84. 9575 руб., 9450 руб. и 9522,5 руб.

85. Раз в четыре месяца.

86. $A–B–C–D$; 12,75; 2,4; 5,5.

87. $C–B–A–D$; 10,75; 2; 4,25.

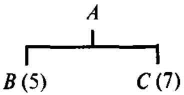
88. $B–C–A–D$; 11,5; 2,2; 3,75.

89. $D–A–B–C$; 15,5; 3; 8,75.

90. 0,5; 1; 2.

91. $3 \to 4 \to 2 \to 5 \to 1$; 13 минут.

92.



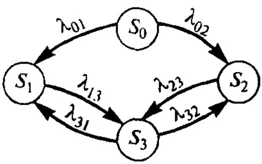
1-я неделя (заказ 85 изделий B), 2-я неделя (заказ 120 изделий C), 5-я неделя (производство 20 изделий A).

93. A (G, K), B (M, N), C (E, F, H, D).

94. $M(X) = \sigma(X) = 0{,}5$; $D(X) = 0{,}25$.

95. 0,03 и 0,99.

96.



97.
$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -(\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0(t), \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{01}p_0(t) + \lambda_{31}p_3(t) - \lambda_{13}p_1(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{02}p_0(t) + \lambda_{32}p_3(t) - \lambda_{23}p_2(t), \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{13}p_1(t) + \lambda_{23}p_2(t) - (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3(t), \\ p_0(0) = 1,\ p_i(0) = 0,\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

98. Предельные вероятности 0,52; 0,27; 0,21. Эффективность системы 8,66.

99. Предельные вероятности 0,254; 0,423; 0,211; 0,112.

100. Предельные вероятности 0,286 и 0,714. Абсолютная пропускная способность 17,16 заявки/ч, относительная пропускная способность 0,286; вероятность отказа 0,714.

101. Предельные вероятности 0,133; 0,277; 0,289; 0,301. Абсолютная пропускная способность 34,95 звонка/ч, относительная пропускная способность 0,699; вероятность отказа 0,301; вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны, равна 0,133; среднее число свободных от обслуживания каналов 1,242; коэффициент простоя каналов 0,414; среднее число занятых обслуживанием каналов 1,456; коэффициент загрузки каналов 0,485.

102. Вероятность того, что в магазине не окажется покупателей, равна 0,333; вероятность того, что в магазине окажется ровно 3 покупателя, равна 0,099. Среднее число покупателей в магазине 2; среднее время пребывания покупателя в магазине 12 мин. Средняя длина очереди 1,333; среднее время пребывания покупателя в очереди 0,888 мин.

103. Вероятность того, что в магазине не окажется покупателей, равна 0,5; вероятность того, что в магазине окажется ровно 3 покупателя, равна 0,037. Среднее число покупателей в магазине 0,75; среднее время пребывания покупателя в магазине 4,5 мин. Средняя длина очереди 0,083; среднее время пребывания покупателя в очереди 0,498 мин.

104. Средняя длина очереди 1,125. Среднее время ожидания в очереди 22,5 мин. Среднее число грузовиков на складе 1,875. Среднее время пребывания грузовика на складе 37,5 мин.

105. Предельные вероятности 0,297; 0,238; 0,191; 0,152; 0,122. Абсолютная пропускная способность 7,024 автомашины/ч, относительная пропускная способность 0,878; вероятность отказа 0,122. Вероятность того, что на станции не окажется автомашин, равна 0,297. Средняя длина очереди 0,861. Среднее время ожидания в очереди 6,48 мин. Среднее число автомашин под обслуживанием 0,703. Среднее число автомашин на станции 1,564. Среднее время пребывания автомашин на станции 11,76 мин.

106. Предельные вероятности 0,217; 0,325; 0,244; 0,122; 0,061; 0,031. Абсолютная пропускная способность 29,07 автомашины/ч, относительная пропускная способность 0,969; вероятность отказа 0,031. Вероятность того, что все бензоколонки заняты, равна 0,214. Среднее число свободных от обслуживания каналов 1,545. Средняя длина очереди 0,054. Среднее число автомашин под обслуживанием 1,454. Среднее число автомашин на станции 1,508.

107. Предельные вероятности 0,129; 0,323; 0,323; 0,162; 0,054; 0,009. Средняя длина очереди 0,072. Среднее число заявок в системе 1,716. Среднее число свободных от обслуживания ремонтников 1,356.

108. Ненулевые предельные вероятности 0,297; 0,356; 0,214; 0,092; 0,031; 0,008; 0,002. Абсолютная пропускная способность 1,056 человек/ч, относительная пропускная способность 0,176. Среднее число занятых аппаратов 0,211. Средняя длина очереди 0,012. Среднее число посетителей, находящихся в пункте химчистки, равно 1,236.

109. 12.16.

110. 11,4 ч.

111. 12,2 ч.

112. 85,3%.

113. Выгоднее лизинг.

115. *C*.

116. При годовой потребности не более 7000 деталей выгодно их покупать. При годовой потребности свыше 7000 деталей выгодно собственное производство.

Программа учебного курса «Математические методы в логистике»

1. Что такое логистика? Задачи, стоящие перед логистикой. Материальный поток. Цепь поставок. Три направления развития логистики («тощая» логистика, динамичная логистика и интеграция). Общие логистические издержки. Две базовые логистические стратегии («тощая» и динамичная). Факторы, учитываемые при разработке логистической стратегии. Реализация логистической стратегии. Ширина цепи поставок. Непрерывное совершенствование.

2. Основные понятия теории графов. Вершины, ребра, граф, орграф, дуги, начальная и конечная вершины дуги. Петля, кратные ребра, изолированная вершина. Изоморфизм графов. Маршрут, замкнутый маршрут, цепь, простая цепь, цикл, простой цикл. Путь, контур. Матричный способ задания графов. Матрицы смежности и инцидентности для графа и орграфа. Связный граф, дерево. Сеть, узел, дуга.

3. Факторы производства и затраты. Постоянные и переменные факторы производства. Классификация затрат. Постоянные, переменные и полупеременные затраты. Совокупные затраты. Средние затраты на единицу проданной продукции. Эффект масштаба. Специализация. Отрицательный эффект масштаба.

4. Задачи размещения производства. Метод взвешивания.

5. Метод размещения производства с учетом полных затрат.

6. Размещение производства. Гравитационный метод. Центр гравитации.

7. Метод калькуляции затрат.

8. Размещение объектов сервиса. Эвристический метод Ардолана.

9. Задача определения кратчайшего пути. Метод присвоения меток. Помеченные и непомеченные узлы. Постоянные и временные метки.

10. Задача о кратчайшем пути между двумя пунктами.

11. Построение коммуникационной сети минимальной длины.

12. Задача определения максимального потока. Источник, сток, мощность дуги. Алгоритм решения.

13. Задача единого среднего.

14. Задача охвата.

15. Задача коммивояжера. Метод ветвей и границ. Константы приведения.

16. Экономико-математическая модель транспортной задачи. Закрытая модель транспортной задачи.

17. Метод северо-западного угла.

18. Метод минимальной стоимости (наименьших затрат) в транспортной задаче.

19. Особый случай при решении транспортной задачи. Нулевая поставка.

20. Матрица оценок в транспортной задаче. Оценка клетки. Отмеченные и пустые клетки.

21. Распределительный метод решения транспортной задачи. Цикл пересчета.

22. Открытая модель. Фиктивный потребитель.

23. Фиктивный поставщик.

24. Транспортная задача и Excel.

25. Транспортная задача в сетевой постановке. Тип модели. Алгоритм решения. Особый случай.

26. Транспортная задача в сетевой постановке. Первоначальный план поставок.

27. Транспортная задача в сетевой постановке. Проверка плана поставок на оптимальность. Потенциал вершины, характеристика ребра.

28. Транспортная задача в сетевой постановке. Улучшение плана поставок.

29. Открытая модель транспортной задачи в сетевой постановке (случай фиктивного потребителя).

30. Открытая модель транспортной задачи в сетевой постановке (случай фиктивного поставщика).

31. Задача о назначениях. Венгерский метод. Минимизация целевой функции.

32. Максимизация целевой функции в задаче о назначениях.

33. Задача о назначениях и Excel.

34. Анализ размещения завода и складов.

35. Принятие решений, дерево решений, ожидаемая стоимостная оценка.

36. Максимаксное и максиминное решения.

37. Минимаксное решение.

38. Критерий Гурвица.

39. Правило максимальной вероятности.

40. Максимизация ожидаемого дохода. Минимизация ожидаемых потерь.

41. Ожидаемая стоимость полной информации.

42. Временные ряды. Элементы временного ряда (тренд, сезонная вариация, ошибки MAD и MSE).

43. Расчет сезонной вариации в аддитивной модели. Центрированная скользящая средняя.

44. Десезонализация данных в аддитивной модели.

45. Расчет уравнения тренда в аддитивной модели.

46. Расчет ошибок в аддитивной модели.

47. Прогнозирование в аддитивной модели.

48. Расчет сезонной вариации в мультипликативной модели. Центрированная скользящая средняя.

49. Десезонализация данных в мультипликативной модели.

50. Расчет уравнения тренда в мультипликативной модели.

51. Расчет ошибок в мультипликативной модели.

52. Прогнозирование в мультипликативной модели.

53. Экспоненциальное сглаживание. Простая модель экспоненциального сглаживания. Константа сглаживания. Экспоненциальное сглаживание с поправкой на тренд.

54. Контролируемый прогноз. Трекинг-сигнал. Итоговая сумма ошибок. Среднее абсолютное отклонение. Верхняя и нижняя границы контроля. Жесткий контроль. Слабый контроль.

55. Сетевое планирование и управление (СПУ). Сетевой график и основные его элементы. Событие. Работа. Исходное событие. Завершающее событие. Правила построения сетевых графиков.

56. Метод критического пути. Параметры событий. Ранний срок свершения события. Поздний срок свершения события. Резерв события. Критические события.

57. Управление проектами с неопределенным временем выполнения работ. Метод PERT. Оптимистическое время. Пессимистическое время. Наиболее вероятное время. Ожидаемое время выполнения работы. Дисперсия ожидаемой продолжительности. Вероятность завершения проекта в срок.

58. Стоимость проекта. Оптимизация сетевого графика. Минимизация общей продолжительности проекта с минимальными дополнительными расходами.

59. График Ганта, его достоинства и недостатки.

60. Распределение ресурсов. Графики ресурса.

61. Параметры работ. Ранний и поздний сроки начала работы. Ранний и поздний сроки окончания работы. Полный и свободный резервы времени работы.

62. Балансировка линий сборки. Граф связности для операций на сборке. Время цикла. Минимальное число рабочих мест. Эффективность балансировки линий.

63. Статистический контроль качества. Изменчивость технологического процесса. Контрольные карты. Центральная линия. Предупреждающие границы. Границы регулирования. Алгоритм работы.

64. Контрольные карты средних арифметических технологического процесса при известных a и σ.

65. Контрольные карты изменчивости технологического процесса при известных a и σ. Размах вариации.

66. Контрольные карты количественных признаков при неизвестных a и σ.

67. Контрольные карты качественных признаков. p-карты. Аппроксимация нормальным распределением.

68. p-карты. Аппроксимация распределением Пуассона.

69. Контрольные карты качественных признаков. c-карты. Среднее число дефектов на единицу продукции. Границы регулирования.

70. Статистический приемочный контроль качества качественных признаков. Схема одноэтапной выборки. Схема двухэтапной выборки. Допустимый уровень качества. Кривая оперативной характеристики. Допустимый процент бракованных изделий. Риски производителя и потребителя.

71. Основные понятия теории управления запасами.

72. Основная модель управления запасами. Оптимальный размер заказа.

73. Модель экономичного размера партии.

74. Скидка на количество. Уровень, нарушающий цену.

75. Модель производства партии продукции.

76. Модель планирования дефицита. Случай невыполнения заявок.

77. Модель планирования дефицита. Случай выполнения заявок.

78. Неопределенность и основная модель управления запасами.

79. Уровневая система повторного заказа (достижение минимальной стоимости).

80. Уровневая система повторного заказа (достижение минимального уровня обслуживания).

81. Циклическая система повторного заказа.

82. Другие вопросы управления запасами (максимизация прибыли, ограничение на площадь склада, многономенклатурный запас, эффект Парето).

83. Имитационное моделирование.

84. Применение имитационных моделей в теории управления запасами.

85. Оценка запасов товарно-материальных ценностей. Метод оценки запасов ФИФО.

86. Метод оценки запасов ЛИФО.

87. Метод оценки запасов по средневзвешенной.

88. Влияние различных методов оценки запасов на расчет прибыли.

89. Предупредительное обслуживание оборудования.

90. Краткосрочные графики. Возможные подходы к составлению графиков. Обратное составление графика. Прямое составление графика. Правило «первым пришел, первым обслужен».

91. Правило кратчайшего времени выполнения.

92. Правило ранних по дате исполнения.

93. Правило наиболее продолжительного времени выполнения. Правило самых срочных работ.

94. Критическое отношение. Время, оставшееся до срока завершения работы по плану. Приоритет работ.

95. Задача о двух станках. Постановка задачи и алгоритм решения.

96. Планирование потребности в материалах (MRP). Структурное дерево. Уровни. Достоинства и недостатки модели MRP.

97. Система «точно в срок», ее достоинства и недостатки. Вытягивающая система.

98. ABC-анализ, его достоинства и недостатки. Категории *A*, *B* и *C*.

99. Показательный закон распределения вероятностей. Плотность распределения вероятностей, функция распределения, математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение.

100. Поток событий. Интенсивность потока. Простейший поток событий, его свойства (стационарность, отсутствие последействия и ординарность).

101. Основные понятия теории массового обслуживания. Классификация систем массового обслуживания (СМО).

102. Случайный процесс. Процесс с дискретными состояниями. Процесс с непрерывным временем. Граф состояний. Размеченный граф состояний.

103. Уравнения Колмогорова.

104. Предельные вероятности состояний.

105. Процесс гибели и размножения.

106. Одноканальная СМО с отказами. Размеченный граф состояний, предельные вероятности состояний, показатели эффективности работы (абсолютная и относительная пропускные способности, вероятность отказа).

107. Многоканальная СМО с отказами (задача Эрланга). Размеченный граф состояний, предельные вероятности состояний, показатели эффективности работы (абсолютная и относительная пропускные способности; вероятность отказа; вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны; вероятность того, что в системе k требований; среднее число свободных от обслуживания каналов; коэффициент простоя каналов; среднее число занятых обслуживанием каналов; коэффициент загрузки каналов).

108. Одноканальная СМО с неограниченной очередью. Размеченный граф состояний, предельные вероятности состояний, показатели эффективности работы (вероятность того, что обслуживающий канал свободен; среднее число заявок в системе; среднее время пребывания заявки в системе; среднее число заявок под обслуживанием; среднее число заявок в очереди, среднее время пребывания заявки в очереди). Формула Литтла.

109. Многоканальная СМО с неограниченной очередью. Размеченный граф состояний, предельные вероятности состояний, показатели эффективности работы (вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны; вероятность того, что заявка окажется в очереди; среднее число заявок в системе; среднее время пребывания заявки в системе; среднее число занятых каналов; среднее число заявок в очереди; среднее время пребывания заявки в очереди).

110. СМО с фиксированным временем обслуживания. Показатели эффективности работы (среднее число заявок в очереди, среднее время пребывания заявки в очереди, среднее число заявок в системе, среднее время пребывания заявки в системе).

111. Одноканальная СМО с ограниченной очередью. Размеченный граф состояний, предельные вероятности состояний, показатели эффективности работы (вероятность того, что обслуживающий канал свободен; вероятность того, что в очереди k заявок; вероятность отказа; абсолютная и относительная пропускные способности; среднее число заявок в очереди; среднее время пребывания заявки в очереди; среднее число заявок под обслуживанием; среднее число заявок в системе; среднее время пребывания заявки в системе).

112. Многоканальная СМО с ограниченной очередью. Размеченный граф состояний, предельные вероятности состояний. Показатели эффектив-

ности работы (вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны; вероятность того, что в очереди k заявок; вероятность отказа; абсолютная и относительная пропускные способности; среднее число свободных от обслуживания каналов; среднее число заявок в очереди; среднее число заявок под обслуживанием; среднее число заявок в системе).

113. Замкнутая СМО. Размеченный граф состояний, предельные вероятности состояний, показатели эффективности работы (вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны; среднее число заявок в очереди; среднее число заявок в системе; среднее число свободных от обслуживания каналов).

114. СМО с ограниченным временем ожидания. Размеченный граф состояний, предельные вероятности состояний, показатели эффективности работы (вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны; среднее число заявок в очереди; абсолютная и относительная пропускные способности; среднее число занятых каналов).

115. Применение имитационных моделей в системах массового обслуживания.

116. Обучаемость в производстве. Кривые обучения (кривые опыта). Уровень обучения.

117. Обучаемость в производстве. Определение затрат различного вида на производство продукции.

118. Обучаемость в производстве. Определение уровня обучения.

119. Лизинг. Преимущества и недостатки лизинга.

120. Сравнительный анализ эффективности лизинга и банковского кредитования покупки основных средств.

121. Методы ценообразования. Установление цены на основе ценности товара. Установление цены на основе уровня текущих цен. Психология ценовосприятия.

122. Методы ценообразования. Установление цен по географическому принципу: установление цены ФОБ, установление единой цены с включенными в нее расходами по доставке, установление зональных цен, установление цены применительно к базисному пункту, установление цены с принятием на себя расходов по доставке.

123. Установление цен со скидками и зачетами. Скидка за платеж наличными. Скидка за количество закупаемого товара. Функциональные скидки. Сезонные скидки. Товарообменный зачет.

124. Установление цен для стимулирования сбыта. Ценообразование по схеме двойного тарифа.

125. Складирование. Назначение склада. Условия, учитываемые при выборе оптимального размера склада. Виды складской деятельности. Перевалка. Собственные склады, их достоинства и недостатки. Склады общего пользования, их достоинства и недостатки. Разновидности складов общего пользования. Комбинация складов общего пользования и собственных складов.

126. Планировка склада. Основные элементы склада: зона приемки, зона хранения, зона отгрузки, система переработки, информационная систе-

ма. Факторы, влияющие на планировку склада. Затраты, связанные со складированием.

127. Грузопереработка. Склады с ручными операциями. Механизированные склады. Автоматизированные склады. Факторы, влияющие на выбор уровня автоматизации склада.

128. Упаковывание. Потребительская упаковка. Промышленная упаковка. Материалы, применяемые для упаковывания. Выбор упаковки.

129. Перевозка. Тариф. Факторы, определяющие тариф. Способ перевозки. Выбор способа перевозки. Факторы, влияющие на выбор способа перевозки. Интермодальная перевозка.

130. Железная дорога, ее преимущества и недостатки.

131. Автомобильный транспорт, его преимущества и недостатки.

132. Водный транспорт, его преимущества и недостатки. Речные, каботажные и морские перевозки.

133. Воздушный транспорт, его преимущества и недостатки.

134. Трубопроводный транспорт, его преимущества и недостатки.

135. Перевозка и вопросы собственности. Собственный транспорт. Перевозчики третьей стороны. Факторы, влияющие на выбор между собственным транспортом и услугами перевозчиков третьей стороны. Комбинация собственного транспорта с услугами перевозчиков третьей стороны.

136. Кружки качества и специализированные команды. Когда и где появились первые кружки качества? Что явилось целью создания таких кружков? С какой целью создаются специализированные команды? Чем специализированная команда отличается от кружка качества? Что происходит со специализированной командой после решения производственной проблемы?

137. Соглашения о цене. На что обращает внимание поставщик при ведении переговоров о цене? Что интересует покупателя на переговорах о цене? Соглашение с твердой ценой. Кому и почему выгодно соглашение с твердой ценой? Ценообразование по принципу «затраты + прибыль». Почему ценообразование по принципу «затраты + прибыль» невыгодно для покупателя?

138. Склады обратной Т-образной формы, их достоинства и недостатки. Склады с товародвижением в перпендикулярных направлениях, их достоинства и недостатки. Склады с угловым расположением ворот, их достоинства и недостатки. Склады со сквозным движением грузопотоков.

139. Каналы распределения, их функции. Прямой и косвенный каналы распределения. Стратегии проталкивания и притягивания, их достоинства и недостатки. Каналы электронной коммерции.

140. Оптовая торговля. Типы предприятий оптовой торговли. Неспециализированные торговые предприятия. Специализированные торговые предприятия. Мелкие оптовые торговцы. Продажа товара по принципу «плати и уноси». Прямые поставки.

141. Розничная торговля. Типы предприятий розничной торговли. Специализированные магазины. Универмаги. Супермаркеты. Гипермаркет. Приведите примеры предприятий розничной торговли, специализирующих-

ся на предоставлении услуг. Интернет-магазин. Какие товары можно продавать через автоматы? Продажа через агентов. Место предприятий розничной торговли в цепочке сбыта товаров.

142. Излишки, причины их возникновения. Избыточная закупка. Затоваривание. Резервирование. Дублирование наименований. Возможные решения по сокращению излишков.

143. Кодирование. Для чего используется кодирование? Какие кодировки используются на практике? Штрих-кодирование. Сканер. Код EAN 13. Какую точность обеспечивает штрих-кодирование?

144. Методы экспертных оценок. Метод Дельфи, его достоинства и недостатки. Метод написания сценария. Использование экспертных оценок в аналитической деятельности. Экспертные системы.

145. Оценка поставщика. Когда возникает необходимость оценки поставщика? Зачем проводится финансовая оценка поставщика? На что нужно обратить внимание при оценке производственного оборудования поставщика? Зачем проводится оценка персонала поставщика? Оценка поставщика методом взвешивания. Вес. Нужно ли безоговорочно доверять рейтингу поставщиков? Преимущество сотрудничества с мелкими поставщиками. Преимущество сотрудничества с крупными поставщиками.

146. Обоснование решения «производить или покупать». Вопрос о стабильности цены внешнего производителя. Какие факторы говорят в пользу собственного производства? Какие доводы можно привести в пользу закупок у внешнего производителя?

147. Конкурентные преимущества. Конкурентные преимущества по издержкам. Экономия, достигаемая в результате обобществления издержек производства различных товаров. Эффект масштаба. Экономия, обусловленная опытом. Экономия, обусловленная фокусированием на покупателе. Экономия, обусловленная логистической интеграцией. Конкурентные товарные преимущества. Дифференцированное товарное предложение. Преимущества первопроходца. Нишевые товарные преимущества.

148. Принятие краткосрочных решений. Прямые затраты. Дифференцированные затраты. Затраты прошлого периода. Альтернативные затраты. Косвенные затраты.

149. Фьючерсные контракты (фьючерсы). Хеджеры и спекулянты. Основные товары, по которым заключаются фьючерсные контракты. Фьючерсный контракт на рынке финансовых активов. Основное отличие фьючерса от опциона. Цель фьючерсных сделок.

Задачи для контрольной работы по курсу «Математические методы в логистике»

1–10. На изготовление первой единицы продукции потребовалось Y_1 ч. Уровень обучения $L\%$. Определить, сколько времени потребуется на изготовление k-ой единицы продукции.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Y_1	11	19	12	17	9	10	15	8	13	14
L	75	90	95	72	88	92	82	94	71	73
k	3	9	4	8	6	3	9	4	8	6

11–20. На изготовление m-ой единицы продукции потребовалось Y_m ч. Уровень обучения $L\%$. Определить, сколько времени потребуется на изготовление n-ой единицы продукции.

	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
m	3	9	4	8	6	3	9	4	8	6
L	75	90	95	72	88	92	82	94	71	73
n	7	12	8	11	10	9	13	10	14	13
Y_m	11	19	12	17	9	10	15	8	13	14

21–30. На изготовление m-ой и n-ой единиц продукции потребовалось Y_m мин и Y_n мин соответственно. Определить уровень обучения.

	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
m	3	9	4	8	6	3	9	4	8	6
Y_m	75	90	95	72	88	92	82	94	71	73
n	7	12	8	11	10	9	13	10	14	13
Y_n	61	79	72	57	69	70	65	78	53	54

31–40. Рассматривается вопрос о строительстве поликлиники. Три возможных района строительства: A, B, C. Все данные отражены в таблице.

Фактор	Вес	A	B	C
Доступность для пациентов	d	g	h	k
Арендная плата	e	m	n	p
Удобство персонала	f	q	r	s

Дать рекомендации о месте строительства, используя метод взвешивания.

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
d	0,3	0,25	0,15	0,2	0,25	0,3	0,15	0,5	0,45	0,4
e	0,3	0,35	0,5	0,4	0,45	0,35	0,4	0,25	0,3	0,4
f	0,4	0,4	0,35	0,4	0,3	0,35	0,45	0,25	0,25	0,2
g	3	2	1	7	9	2	9	7	8	7
h	1	4	2	5	5	5	2	9	7	3
k	6	7	7	7	8	6	7	4	3	1
m	7	1	5	7	6	9	2	3	4	6
n	1	4	6	2	1	1	7	4	5	2
p	4	1	5	9	5	6	6	1	8	7
q	4	3	9	2	4	2	3	1	9	5
r	7	5	3	7	9	4	4	1	9	2
s	6	5	4	1	4	3	1	7	5	8

41–50. Рассматривается вопрос о строительстве завода в одном из трех городов: A, B, C. Исследование показало, что постоянные затраты (за год) в этих городах равны d, e и f рублей соответственно, а переменные затраты — g, h и k рублей/единицу соответственно. Ожидаемый годовой объем выпуска m единиц. Определить место строительства с учетом полных затрат.

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
d	30000	55000	75000	70000	60000	90000	80000	90000	85000	72000
e	50000	35000	25000	50000	80000	70000	60000	60000	65000	62000
f	60000	45000	55000	30000	40000	50000	45000	70000	55000	42000
g	70	60	45	40	65	35	40	20	15	20
h	40	80	80	55	45	55	50	65	35	35
k	20	75	55	70	80	70	75	40	50	50
m	6000	5500	7500	7000	8000	9000	8000	9000	8500	7200

51–60. а) Предполагается создать новое почтовое отделение для обслуживания почтовых отделений A, B, C, D.

Почтовое отделение	Координаты	Число поездок почтового фургона в день
A	(d, e)	*f*
B	(g, h)	*k*
C	(m, n)	*p*
D	(q, r)	*s*

Определить координаты центра гравитации для размещения нового почтового отделения.

б) Выбрать расположение нового почтового отделения из двух возможных вариантов: (a, b) и (c, t).

в) Определить с помощью эвристического метода Ардолана место расположения двух поликлиник для обслуживания жителей пунктов *B*, *C*, *D*, *E* с наименьшими затратами на преодоление расстояний. В таблице указаны расстояния между пунктами, население пунктов (тыс. человек) и относительная важность обслуживания.

Пункт	Расстояние до поликлиники в пункте				Население пункта (тыс. человек)	Относительная важность обслуживания
	B	C	D	E		
B	0	*d*	*e*	*f*	*m*	0,8
C	*d*	0	*g*	*h*	*n*	0,9
D	*e*	*g*	0	*k*	*p*	1,2
E	*f*	*h*	*k*	0	*q*	1,1

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
d	1	9	7	3	2	5	3	3	7	6
e	5	2	1	3	5	8	6	3	4	6
f	7	3	5	4	8	7	6	8	9	5
g	3	2	1	7	9	2	9	7	8	7
h	1	4	2	5	5	5	2	9	7	3
k	6	7	7	7	8	6	7	4	3	1
m	7	1	5	7	6	9	2	3	4	6
n	1	4	6	2	1	1	7	4	5	2
p	4	1	5	9	5	6	6	1	8	7
q	4	3	9	2	4	2	3	1	9	5
r	7	5	3	7	9	4	4	1	9	2
s	6	5	4	1	4	3	1	7	5	8
a	5	4	8	7	6	1	9	7	3	2
b	9	2	3	4	6	5	4	8	7	6
c	4	1	4	3	1	7	7	7	8	6
t	8	7	6	8	9	5	3	7	9	4

61–70. а) Годовой спрос D единиц, стоимость подачи заказа C_0 рублей/заказ, закупочная цена C рублей/единицу, годовая стоимость хранения одной единицы составляет $a\%$ ее цены. Время доставки 6 дней, 1 год = 300 рабочих дней. Найти оптимальный размер заказа, издержки, уровень повторного заказа, число циклов за год, расстояние между циклами. Можно получить скидку $b\%$ у поставщиков, если размер заказа будет не меньше d единиц. Стоит ли воспользоваться скидкой? Годовая стоимость отсутствия запасов C_b рублей/единицу. Сравнить 2 модели: основную и с дефицитом (заявки выполняются).

б) Годовой спрос D единиц, стоимость организации производственного цикла C_s рублей, издержки хранения одной единицы C_h рублей/год. Найти экономичный размер партии, издержки, число циклов за год, расстояние между циклами.

в) Темп производства P единиц/день, темп использования D единиц/день. Годовые издержки хранения C_h рублей/единицу. Стоимость организации производственного цикла C_s рублей. Найти экономичный размер партии, издержки, число циклов за год, расстояние между циклами.

г) Годовой спрос D единиц за 300 рабочих дней, стоимость подачи заказов C_0 рублей/заказ, издержки хранения одной единицы C_h рублей/год, годовая стоимость отсутствия запасов C_b рублей/единицу. Время поставки 4 дня.

Спрос на товар в течение поставки, шт.	0	1	2	3	4	5	6
Частота	f	g	h	k	m	n	q

Сколько единиц нужно заказывать и когда, если цель – минимизировать общую стоимость запасов?

	D	C_0	C	a	b	d	C_b	C_s	C_h
61	400	50	40	20	3	80	10	350	18
62	500	50	50	25	5	70	15	360	19
63	600	70	60	20	6	80	15	370	16
64	700	80	70	25	7	80	10	380	17
65	450	90	80	30	8	60	20	362	15
66	550	45	85	20	9	70	10	375	18
67	650	55	75	25	2	70	20	365	19
68	750	65	55	30	4	90	15	356	16
69	800	75	65	25	2	100	20	385	17
70	900	95	45	30	7	125	20	390	15

	P	f	g	h	k	m	n	q
61	1180	3	5	4	6	4	7	8
62	1230	4	2	6	8	7	8	9
63	1370	6	3	5	7	6	9	6
64	1440	5	4	7	5	5	4	7
65	1090	7	5	5	6	4	3	5
66	1970	5	4	6	8	6	7	8
67	1870	6	3	8	7	4	8	9
68	1770	4	5	7	7	5	9	6
69	1620	3	6	5	9	7	4	7
70	1580	2	2	6	8	5	3	5

71–80. Известно количество машин, приезжающих на мойку автомашин в течение последних 100 часов.

Число машин в час	Частота
4	10
5	12
6	15
7	23
8	40

Используя случайные числа, смоделировать прибытие автомашин в течение 10 часов.

	Случайные числа									
71	67	60	77	49	76	95	51	16	14	85
72	57	17	36	72	85	31	44	30	26	09
73	84	55	25	71	34	57	50	44	95	64
74	00	59	09	97	69	98	93	49	51	92
75	32	73	41	38	73	01	09	64	34	55
76	35	90	92	94	25	57	34	30	90	01
77	91	85	87	90	21	90	89	29	40	85
78	66	74	90	95	29	72	17	55	15	36
79	37	60	79	21	85	71	48	39	31	35
80	99	29	27	75	89	78	68	64	62	30

81–90. Дать прогноз объема продаж на следующие три дня.

	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вск
81	1	3	2	9	2	8	5
	3	3	1	6	4	10	3
82	3	4	2	6	7	12	5
	1	3	2	7	3	6	9
83	9	4	7	5	4	2	3
	13	6	8	6	7	5	2
84	1	5	3	5	4	10	5
	2	3	2	7	5	9	4
85	1	5	2	6	2	9	8
	1	4	3	7	7	11	6

	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вск
86	8	3	5	4	3	9	2
	9	7	8	8	5	4	6
87	2	6	4	6	7	9	10
	2	5	1	7	5	11	15
88	15	5	8	6	3	8	4
	10	6	9	6	5	6	6
89	1	3	4	7	3	6	9
	2	3	1	7	2	9	10
90	1	4	2	5	5	11	17
	2	7	9	6	4	9	7`

91–100. В таблице указан объем продаж (тыс. руб.) за последние 10 недель.

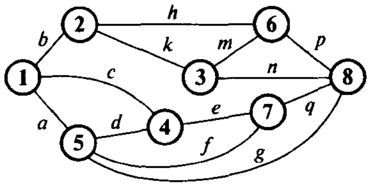
Неделя	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Объем продаж	4	5	5	6	9	9	8	10	11	13

Дать прогноз объема продаж на 11-ю неделю методами простого экспоненциального сглаживания и экспоненциального сглаживания с поправкой на тренд. Прогноз объема продаж на 1-ю неделю равен F_1. $T_1 = 0$. Определить трекинг-сигналы по результатам первых шести кварталов. Границы контроля равны ± 4. Нужно ли менять константу сглаживания?

	91	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**
α	0,7	0,8	0,9	0,75	0,85	0,4	0,6	0,3	0,2	0,65
b	0,4	0,3	0,2	0,5	0,4	0,3	0,2	0,5	0,4	0,3
F_1	3	2	2	3	2	3	4	2	2	3

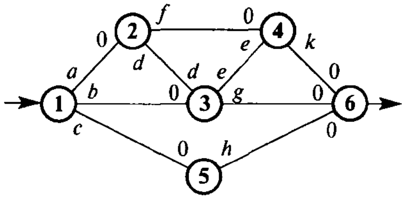
101–110. а) Для матрицы $\begin{pmatrix} \infty & a & b & c & d \\ e & \infty & f & g & h \\ k & m & \infty & n & p \\ q & r & s & \infty & t \\ x & y & z & w & \infty \end{pmatrix}$ методом ветвей и границ решить задачу коммивояжера.

б) Найти кратчайший путь от вершины 1 до любой другой вершины.



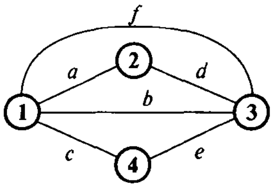
в) Построить коммуникационную сеть минимальной длины в пункте б).

г) Чему равен максимальный поток между пунктами 1 и 6?



д) В таблице указана масса грузов, которые необходимо перевезти. Решить задачу единого среднего.

Пункт	1	2	3	4
Груз (т)	*a*	*b*	*c*	*d*



е) Для схемы пункта д) решить задачу охвата.

ж) Работы, обозначенные буквами в порядке их поступления, ожидают своего выполнения. Время выполнения работ и дата их завершения относительно момента расчета указаны в таблице.

Работа	**Время выполнения, дни**	**Срок завершения, дни**
A	*e*	*k*
B	*f*	*m*
C	*g*	*n*
D	*h*	*p*

Определить порядок выполнения работ и показатели эффективности полученного расписания с помощью правила:

1) «первым пришел, первым обслужен»;
2) кратчайшего времени выполнения;
3) ранних по дате исполнения;
4) наиболее продолжительного времени выполнения.

	101	**102**	**103**	**104**	**105**	**106**	**107**	**108**	**109**	**110**
a	9	8	5	2	1	7	7	6	7	1
b	4	9	5	6	8	7	1	6	7	2
c	2	1	4	9	5	5	8	6	9	7
d	9	3	4	3	3	1	1	8	3	4
e	5	5	4	3	1	8	9	8	8	2
f	7	7	3	2	5	7	2	5	6	8
g	2	4	8	2	9	4	5	2	4	2
h	1	8	3	4	5	2	9	9	6	3
k	4	6	2	8	8	9	8	8	3	1
m	3	7	4	6	7	7	8	1	8	4
n	7	4	6	1	8	8	6	8	5	4
p	3	2	1	7	9	2	9	7	8	7
q	1	4	2	5	5	5	2	9	7	3
r	6	7	7	7	8	6	7	4	3	1
s	7	1	5	7	6	9	2	3	4	6
t	1	4	6	2	1	1	7	4	5	2
x	4	1	5	9	5	6	6	1	8	7
y	4	3	9	2	4	2	3	1	9	5
z	7	5	3	7	9	4	4	1	9	2
w	6	5	4	1	4	3	1	7	5	8

111–120. Случайная величина X распределена по показательному закону, ее плотность распределения вероятностей имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ ae^{-ax}, x \geqslant 0. \end{cases}$ Найти математическое ожидание, стандартное отклонение, дисперсию.

	111	**112**	**113**	**114**	**115**	**116**	**117**	**118**	**119**	**120**
a	9	8	6	3	4	7	10	12	14	11

121–130. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 минуту, равно a. Найти вероятность того, что за $t = b$ минут прибудут:

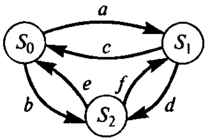
а) c самолетов;

б) не менее трех самолетов.

Поток предполагается простейшим.

	121	**122**	**123**	**124**	**125**	**126**	**127**	**128**	**129**	**130**
a	9	8	5	4	6	7	8	6	4	5
b	4	9	5	6	8	7	5	6	7	2
c	2	7	4	9	5	5	8	6	9	7

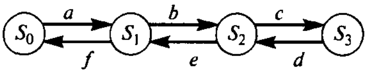
131–140. Найти предельные вероятности для следующей системы:



Оценить среднюю эффективность системы, если в состояниях S_0, S_1 и S_2 система приносит g, h и k денежных единиц дохода соответственно.

	131	**132**	**133**	**134**	**135**	**136**	**137**	**138**	**139**	**140**
a	9	8	5	2	1	7	7	6	7	1
b	4	9	5	6	8	7	1	6	7	2
c	2	1	4	9	5	5	8	6	9	7
d	9	3	4	3	3	1	1	8	3	4
e	5	5	4	3	1	8	9	8	8	2
f	7	7	3	2	5	7	2	5	6	8
g	2	4	8	2	9	4	5	2	4	2
h	3	8	3	4	5	2	9	9	6	3
k	4	6	2	8	8	9	8	8	3	5

141–150. Найти предельные вероятности для процесса гибели и размножения, размеченный граф состояний которого имеет следующий вид:



	141	**142**	**143**	**144**	**145**	**146**	**147**	**148**	**149**	**150**
a	1	4	2	5	5	5	2	9	7	3
b	6	7	7	7	8	6	7	4	3	1
c	7	1	5	7	6	9	2	3	4	6
d	1	4	6	2	1	1	7	4	5	2
e	4	1	5	9	5	6	6	1	8	7
f	4	3	9	2	4	2	3	1	9	5

151–160. а) Одноканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда линия занята, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью λ звонков/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора $t_{обсл}$ мин. Изобразить размеченный граф состояний, найти предельные вероятности состояний. Определить абсолютную и относительную пропускные способности, вероятность отказа.

б) Трехканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда все $n = 3$ канала заняты, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью λ звонков/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора $t_{обсл}$ мин. Изобразить размеченный граф состояний, найти предельные вероятности состояний. Определить абсолютную и относительную пропускные способности; вероятность отказа; вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны; среднее число свободных от обслуживания каналов; коэффициент простоя каналов; среднее число занятых обслуживанием каналов; коэффициент загрузки каналов.

	151	**152**	**153**	**154**	**155**	**156**	**157**	**158**	**159**	**160**
λ	10	40	20	30	70	75	20	90	70	30
$t_{обсл}$	6	7	7	7	8	6	5	4	3	2

161–170. а) Маленький магазин с одним продавцом. Предполагается, что простейший поток покупателей поступает с интенсивностью λ человек/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ человек/ч. Изобразить размеченный граф состояний, найти предельные вероятности состояний. Определить: среднее время пребывания покупателя в очереди; среднюю длину очереди; среднее число покупателей в магазине; среднее время пребывания покупателя в магазине; вероятность того, что в магазине не окажется покупателей; вероятность того, что в магазине окажется ровно 4 покупателя.

б) Ответить на вопросы п. а) при условии, что в магазине теперь $n = 2$ продавца.

	161	**162**	**163**	**164**	**165**	**166**	**167**	**168**	**169**	**170**
λ	11	14	9	12	7	5	8	7	10	13
μ	16	17	15	19	10	8	14	15	13	18

171–180. На склад для разгрузки поступает простейший поток грузовиков с интенсивностью λ грузовиков/ч. Разгрузка одного грузовика занимает $t_{обсл}$ мин. Найти показатели эффективности работы этой одноканальной СМО с фиксированным временем обслуживания: среднее число грузовиков в очереди, среднее время пребывания грузовика в очереди, среднее число грузовиков на складе, среднее время пребывания грузовика на складе.

	171	**172**	**173**	**174**	**175**	**176**	**177**	**178**	**169**	**180**
λ	10	9	7	5	12	15	11	8	4	14
$t_{обсл}$	5	6	9	10	8	2	5	4	13	3

181–190. Автозаправочная станция имеет $n = 1$ бензоколонку с площадкой, допускающей пребывание в очереди на заправку не более m автомашин одновременно. Если в очереди находятся m автомашин, то очередная прибывшая автомашина проезжает мимо автозаправочной станции. Предполагается, что простейший поток автомашин поступает на станцию с интенсивностью λ автомашин/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ автомашин/ч. Изобразить размеченный граф состояний, найти предельные вероятности состояний. Определить показатели эффективности работы этой СМО: вероятность того, что обслуживающий канал свободен; вероятность того, что в очереди k заявок; вероятность отказа; абсолютная и относительная пропускные способности; среднее число заявок в очереди; среднее время пребывания заявки в очереди; среднее число заявок под обслуживанием; среднее число заявок в системе; среднее время пребывания заявки в системе.

	181	**182**	**183**	**184**	**185**	**186**	**187**	**188**	**189**	**190**
k	1	2	2	1	2	3	1	2	2	2
m	2	3	4	2	3	4	2	3	4	3
λ	11	14	9	12	7	5	8	7	10	13
μ	16	17	15	19	10	8	14	15	13	18

191–200. Автозаправочная станция имеет n бензоколонок с площадкой, допускающей пребывание в очереди на заправку не более m автомашин одновременно. Если в очереди находятся m автомашин, то очередная прибывшая автомашина проезжает мимо автозаправочной станции. Предполагается, что простейший поток автомашин поступает на станцию с интенсивностью λ автомашин/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ автомашин/ч. Изобразить размеченный граф состояний, найти предельные вероятности состояний. Определить показатели эффективности работы этой СМО: вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны; вероятность того, что в очереди *k* заявок; вероятность отказа; абсолютная и относительная пропускные способности; среднее число свободных от обслуживания каналов; среднее число заявок в очереди; среднее число заявок под обслуживанием; среднее число заявок в системе.

	191	**192**	**193**	**194**	**195**	**196**	**197**	**198**	**199**	**200**
k	1	2	3	1	2	2	1	2	2	2
n	3	2	3	3	2	2	3	2	3	2
m	2	3	4	2	3	4	2	3	4	3
λ	31	24	19	22	17	15	18	17	20	23
μ	16	17	15	19	10	8	14	15	13	18

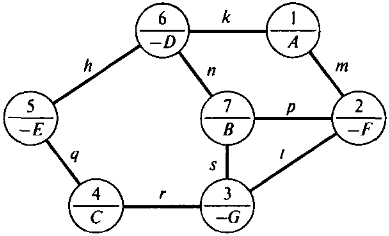
201–210. Бригада ремонтников из *n* человек обслуживает *m* станков. Предполагается, что поломки станков образуют простейший поток заявок с интенсивностью λ раз/ч. Время ремонта каждого станка есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ станков/ч. Изобразить размеченный граф состояний, найти предельные вероятности состояний. Определить показатели эффективности работы этой СМО: вероятность того, что все ремонтники свободны; среднее число заявок в очереди; среднее число заявок в системе; среднее число свободных от обслуживания ремонтников.

	201	**202**	**203**	**204**	**205**	**206**	**207**	**208**	**209**	**210**
n	3	2	3	4	2	2	3	2	3	2
m	4	5	6	5	6	7	7	3	6	6
λ	0,3	0,4	0,5	0,15	0,25	0,6	0,7	0,35	0,45	0,8
μ	0,5	0,6	0,7	0,2	0,3	0,7	0,8	0,5	0,6	0,9

211–220. В пункте химчистки имеется *n* аппаратов для чистки. Поток посетителей предполагается простейшим с интенсивностью λ человек/ч. Время обслуживания каждого посетителя есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ человек/ч. Среднее число посетителей, покидающих очередь, не дождавшись обслуживания, равно ν человек/ч. Изобразить размеченный граф состояний этой СМО, определить предельные вероятности, среднюю длину очереди, среднее число заявок в системе, абсолютную и относительную пропускные способности, среднее число занятых аппаратов.

	211	**212**	**213**	**214**	**215**	**216**	**217**	**218**	**219**	**220**
n	3	2	3	3	2	2	3	2	3	2
λ	6	7	8	9	7	5	8	9	6	7
μ	4	5	6	5	3	3	4	7	3	4
ν	2	3	3	3	2	2	3	2	2	2

221–230. Решить транспортную задачу в сетевой постановке.



	221	**222**	**223**	**224**	**225**	**226**	**227**	**228**	**229**	**230**
A	45	90	50	35	25	30	20	80	40	30
B	35	50	40	30	30	20	30	50	60	35
C	40	40	40	40	20	35	45	70	50	40
$-D$	−10	−30	−20	−25	−5	−15	−35	−60	−25	−20
$-E$	−30	−20	−60	−10	−15	−20	−5	−75	−60	−40
$-F$	−25	−60	−40	−20	−30	−25	−30	−35	−15	−25
$-G$	−55	−70	−10	−50	−25	−25	−25	−30	−50	−20
h	1	8	3	4	5	2	9	9	6	3
k	4	6	2	8	8	9	8	8	3	1
m	3	7	4	6	7	7	8	1	8	4
n	7	4	6	1	8	8	6	8	5	4
p	3	2	1	7	9	2	9	7	8	7
q	1	4	2	5	5	5	2	9	7	3
r	6	7	7	7	8	6	7	4	3	1
s	7	1	5	7	6	9	2	3	4	6
t	1	4	6	2	1	1	7	4	5	2

231–240. Совокупные затраты равны a руб., а число проданных единиц продукции — b. Определить средние затраты на единицу проданной продукции.

	a	b
231	220000	600
232	270000	500
233	280000	700
234	290000	800
235	225000	900

	a	b
236	240000	300
237	260000	450
238	235000	250
239	265000	850
240	275000	750

241–250. Компания рассматривает вопрос о строительстве завода. Возможны три варианта действий.

а) Построить большой завод стоимостью M_1 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере R_1 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью p_1 и низкий спрос (ежегодные убытки R_2 тысяч долларов) с вероятностью p_2.

б) Построить маленький завод стоимостью M_2 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере T_1 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью p_1 и низкий спрос (ежегодные убытки T_2 тысяч долларов) с вероятностью p_2.

в) Отложить строительство завода на один год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной с вероятностью p_3 и p_4 соответственно. В случае позитивной информации можно построить заводы по указанным выше расценкам, а вероятности большого и низкого спроса меняются на p_5 и p_6 соответственно. Доходы на последующие четыре года остаются прежними. В случае негативной информации компания заводы строить не будет.

Все расчеты выражены в текущих ценах и не должны дисконтироваться. Нарисовать дерево решений. Определить наиболее эффективную последовательность действий, основываясь на ожидаемых доходах. Какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения?

	M_1	M_2	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	R_1	R_2	T_1	T_2
241	600	350	0,7	0,3	0,8	0,2	0,9	0,1	250	50	150	25
242	605	345	0,65	0,35	0,75	0,25	0,91	0,09	245	45	145	20
243	610	340	0,75	0,25	0,85	0,15	0,92	0,08	240	40	140	15
244	615	335	0,7	0,3	0,85	0,15	0,93	0,07	235	35	135	10
245	620	330	0,65	0,35	0,8	0,2	0,94	0,06	230	30	130	5
246	625	325	0,75	0,25	0,75	0,25	0,95	0,05	255	55	155	30
247	630	320	0,7	0,3	0,75	0,25	0,94	0,06	260	60	160	35
248	635	315	0,65	0,35	0,85	0,15	0,93	0,07	265	65	165	40
249	640	310	0,75	0,25	0,8	0,2	0,92	0,08	270	70	170	45
250	645	305	0,7	0,3	0,75	0,25	0,91	0,09	275	75	175	50

251–260. Владелец небольшого магазина в начале каждого рабочего дня закупает для реализации некий скоропортящийся продукт по цене *a* рублей за единицу. Цена реализации этого продукта — *b* рублей за единицу. Из наблюдений известно, что спрос на этот продукт за день может быть равен 1, 2, 3 или 4 единицы. Если продукт за день не продан, то в конце дня его всегда покупают по цене *c* рублей за единицу.

Возможные исходы	**1**	**2**	**3**	**4**
Частота	*d*	*e*	*f*	*g*

Пользуясь правилами максимакса, максимина, минимакса, максимальной вероятности, критерием Гурвица и максимизируя ожидаемый доход, определить, сколько единиц этого продукта должен закупать владелец каждый день. Чему равна ожидаемая стоимость полной информации?

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
251	50	80	30	10	20	30	40
252	70	90	60	20	20	30	30
253	50	90	30	15	25	40	20
254	50	70	20	40	10	25	25
255	60	80	40	35	30	10	25
256	40	60	20	15	50	20	15
257	30	70	10	25	30	20	25
258	20	50	10	50	15	15	20
259	30	80	20	40	10	10	40
260	40	70	10	30	30	30	10

261–270. Предприятие рассматривает вопрос о приобретении оборудования. Первый вариант — лизинг за *a* тыс. руб. с рассрочкой платежа в течение четырех лет. Второй вариант — покупка на заводе-изготовителе за *m* тыс. руб. Ставка налога на прибыль равна $K_н$%. Предоплата E_0 и остаточная стоимость оборудования *Q* равны нулю.

	a	*m*	$K_н$	*r*
261	700	560	30	11
262	800	630	35	12
263	900	720	40	13
264	600	420	30	14
265	500	350	35	15

	a	*m*	$K_н$	*r*
266	750	630	40	11
267	850	700	30	12
268	930	710	35	13
269	650	490	40	14
270	550	420	30	15

Можно получить кредит в банке под r% годовых. Используется равномерное начисление износа. Сравнить эти варианты.

271–280. Начальные запасы отсутствуют. В марте закуплены для реализации a единиц продукции по цене f руб. В апреле закуплены для реализации b единиц продукции по цене g руб. В мае проданы c единиц продукции по цене h руб. В июне проданы d единиц продукции по цене k руб. В июле закуплены для реализации e единиц продукции по цене m руб. В августе проданы t единиц продукции по цене n руб.

а) Определить стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов ФИФО.

б) Определить стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов ЛИФО.

в) Определить стоимость запасов на конец периода методом средневзвешенной.

г) Определить валовую прибыль в пунктах а), б), в).

	f	g	h	m	k	n	a	c	b	d	e	t
271	25	26	36	27	37	38	220	115	210	120	60	30
272	26	28	38	29	39	40	270	125	220	170	50	20
273	27	28	39	30	40	41	280	135	230	180	70	40
274	29	31	41	32	42	43	290	145	250	190	80	40
275	28	29	39	30	41	42	225	105	265	125	90	30
276	22	24	34	26	35	36	240	195	270	140	30	20
277	21	23	33	24	34	35	260	185	210	160	45	30
278	23	25	35	26	36	37	235	175	255	135	25	20
279	24	26	36	27	38	39	265	165	235	165	85	40
280	20	21	31	23	32	33	275	155	285	175	75	30

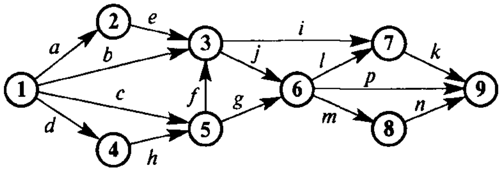
281–290. Предприятие решает вопрос о том, как часто проводить предупредительное обслуживание оборудования. Проведение такого обслуживания стоит a руб. Дополнительная информация приведена в таблице.

Число месяцев после проведения обслуживания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Затраты, связанные с поломками, за последний месяц	0	b	c	d	e	f
Амортизационные отчисления	g	$2g$	$3g$	$4g$	$5g$	$6g$

Предупредительное обслуживание позволяет технически довести оборудование до состояния нового оборудования. Определить оптимальный промежуток времени для проведения такого обслуживания и среднемесячные минимальные затраты.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
281	60000	3000	6000	8000	50000	100000	7000
282	70000	5000	10000	12000	60000	120000	8000
283	80000	6000	12000	14000	70000	140000	8500
284	90000	7000	14000	16000	80000	160000	6500
285	65000	8000	16000	18000	90000	180000	5500
286	55000	8500	17000	19000	100000	200000	3500
287	45000	7500	15000	17000	90000	170000	7500
288	75000	6500	13000	15000	80000	150000	4500
289	85000	5500	11000	13000	70000	150000	7000
290	95000	3500	7000	10000	50000	120000	9000

291–300. а) Задан сетевой график.



Вычислить все основные характеристики работ и событий. Найти критический путь и его продолжительность. Построить график Ганта.

б) Заключительная сборка диктофона требует выполнения шести ручных операций. В течение 400 мин. ежедневной работы сборочной линии необходимо выпустить 40 диктофонов. Информация об операциях приведена в таблице.

Операция	Время выполнения, мин.	Предшествующие операции
1	*a*	—
2	*b*	1
3	*c*	1, 2
4	*d*	2, 3
5	*e*	4
6	*f*	5

Решить задачу балансировки линии сборки.

в) Минимизировать целевую функцию в задаче о назначениях для матрицы $A = \begin{pmatrix} a & e & i & m \\ b & f & j & n \\ c & g & k & p \\ d & h & l & q \end{pmatrix}$.

г) Есть два станка A и B. Каждая деталь должна быть обработана и на станке A (причем в первую очередь), и на станке B (во вторую очередь). Известны времена обработки каждой детали на каждом станке (в минутах). На каждом из станков можно обрабатывать только одну деталь. Процесс обработки деталей не может прерываться.

Определить вариант плана запуска деталей, при котором общее время их обработки будет минимальным. Чему равно минимальное суммарное время обработки деталей на двух станках?

Деталь	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Время обработки на станке A	a	b	c	d	e
Время обработки на станке B	f	g	h	i	j

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q
291	9	3	4	3	3	1	1	8	2	9	3	9	4	4	8	2
292	5	5	4	3	1	8	9	8	1	3	8	7	2	7	4	3
293	7	7	3	2	5	7	2	5	4	1	6	8	8	3	3	8
294	2	4	8	2	9	4	5	2	10	4	4	2	2	1	7	3
295	1	8	3	4	5	2	9	9	5	7	6	5	3	6	3	2
296	4	6	2	8	8	9	8	8	3	2	3	1	1	2	1	4
297	3	7	4	6	7	7	8	1	6	10	8	8	4	7	7	6
298	7	4	6	1	8	8	6	8	8	5	5	7	4	5	4	3
299	3	2	1	7	9	2	9	7	7	6	8	4	7	2	2	1
300	1	4	2	5	5	5	2	9	9	8	7	2	3	8	9	4

301–310. а) Технологический процесс подчиняется нормальному распределению $N(a, \sigma)$ с математическим ожиданием a и стандартным отклонением σ. Производится выборка объемом n. Найти центральную линию, предупреждающие границы и границы регулирования.

б) Из партии в m единиц производится выборка n единиц. Если в выборке окажется более одной бракованной единицы, то вся партия продукции будет отвергнута. Построить кривую оперативной характеристики.

в) Выборка из m предметов выявила b дефектов. Определить среднее число дефектов на единицу продукции и верхнюю границу регулирования.

	301	**302**	**303**	**304**	**305**	**306**	**307**	**308**	**309**	**310**
a	7	8	9	7	11	12	10	14	18	15
σ	0,2	0,3	0,4	0,3	0,2	0,3	0,4	0,2	0,4	0,2
n	5	6	7	5	6	7	5	7	6	8
m	200	300	400	500	250	350	450	550	150	275
b	3500	4500	5500	1500	2750	2000	3000	4000	5000	2500

311–320. Доля бракованных изделий p. Производились выборки объемом n единиц. Определить границы. Если нижняя граница регулирования при использовании нормального распределения получилась отрицательной, то произвести вычисления заново с использованием распределения Пуассона.

	311	**312**	**313**	**314**	**315**	**316**	**317**	**318**	**319**	**320**
p	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,2
n	100	800	600	500	400	300	700	200	900	150

321–330. Производитель и потребитель договорились о следующих стандартах: AQL, $LTPD$, α, β. Если в выборке n единиц будет больше двух бракованных единиц, то вся партия бракуется. Выяснить, удовлетворяет ли эта схема заявленным условиям.

	321	**322**	**323**	**324**	**325**	**326**	**327**	**328**	**329**	**330**
AQL	0,04	0,06	0,07	0,03	0,02	0,08	0,09	0,04	0,06	0,07
$LTPD$	0,15	0,20	0,22	0,23	0,18	0,14	0,16	0,17	0,12	0,24
α	0,10	0,09	0,08	0,10	0,09	0,08	0,09	0,08	0,10	0,08
β	0,12	0,14	0,16	0,16	0,14	0,12	0,12	0,14	0,16	0,12
n	35	45	55	18	27	20	30	40	50	25

331–340. Предприятие получило заказ на поставку через 6 недель f изделий A. Для производства одного изделия A требуется i изделий B и x изделий C. Время выполнения заказов на изделия B и C равно соответственно p и s недель. Производство изделий A занимает одну неделю. В настояшее время у предприятия есть g изделий A, h изделий B и n изделий C. Изобразить структурное дерево и определить, когда предприятие следует отправить заказы на поставку изделий B и C.

	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
f	28	27	29	21	21	17	19	14	21	27
g	26	25	26	17	15	14	10	10	15	13
h	16	15	20	22	12	20	12	16	12	19
n	20	20	18	20	14	15	13	15	13	11
i	2	3	5	3	4	2	8	4	2	4
p	3	2	4	2	3	4	4	3	1	2
s	2	1	4	3	4	3	1	2	3	3
x	7	5	7	7	7	3	4	3	8	6

341–350. Небольшой магазин имеет 8 видов продуктов. Затраты и годовой спрос на них указаны в таблице.

Продукт	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*K*	*M*	*N*
Цена, руб.	*a*	*b*	*c*	*f*	*g*	*h*	*m*	*n*
Годовой спрос	*i*	*p*	*s*	*w*	*x*	*k*	*q*	*t*

Провести ABC-анализ.

	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350
a	4	4	5	3	3	5	2	2	2	2
b	3	9	4	3	2	2	5	5	3	3
c	4	5	4	7	2	3	2	7	5	3
f	2	2	4	1	2	7	9	4	1	7
g	6	5	6	7	5	4	1	10	15	13
h	16	5	2	12	12	10	10	16	12	19
m	18	10	12	15	13	19	11	10	14	15
n	20	20	28	20	14	15	13	15	13	11
i	200	300	500	300	400	200	800	400	200	400
p	3000	1000	5000	2000	8000	4000	7000	9000	1000	5000
s	6000	1000	4000	9000	3000	6000	1000	2000	3000	5000
w	8000	4000	9000	1000	2000	8000	2000	5000	3000	1000
x	7000	5000	7000	7000	7000	3000	4000	3000	8000	6000
k	50000	60000	40000	20000	90000	90000	10000	40000	70000	50000
q	900	300	400	300	300	100	100	800	200	900
t	5000	5000	4000	3000	1000	8000	9000	8000	1000	3000

351–360. Есть три поставщика с мощностями a, b, c и пять потребителей (их спрос f, g, h, m, n соответственно). Стоимость доставки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю задается матрицей $\begin{pmatrix} i & p & s & w & x \\ k & q & t & e & y \\ l & r & v & d & z \end{pmatrix}$. Найти оптимальный план поставок.

	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
a	40	40	50	35	30	35	20	23	20	20
b	35	90	40	33	25	20	25	25	30	35
c	45	50	40	27	20	30	20	17	25	30
f	20	20	24	21	21	17	19	14	21	27
g	26	25	26	17	15	14	10	10	15	13
h	16	65	20	22	12	20	12	16	12	19
m	38	50	32	15	13	19	11	10	14	15
n	20	20	28	20	14	15	13	15	13	11
i	2	3	5	3	4	2	8	4	2	4
p	3	1	5	2	8	4	7	9	1	5
s	6	1	4	9	3	6	1	2	3	5
w	8	4	9	1	2	8	2	5	3	1
x	7	5	7	7	7	3	4	3	8	6
k	5	6	4	2	9	9	1	4	7	5
q	9	3	4	3	3	1	1	8	2	9
t	5	5	4	3	1	8	9	8	1	3
e	7	7	3	2	5	7	2	5	4	1
y	2	4	8	2	9	4	5	2	10	4
l	1	8	3	4	5	2	9	9	5	7
r	4	6	2	8	8	9	8	8	3	2
v	3	7	4	6	7	7	8	1	6	10
d	7	4	6	1	8	8	6	8	8	5
z	3	2	1	7	9	2	9	7	7	6

361–370. Для ремонта техники требуются соответствующие детали. При их изготовлении собственными силами постоянные затраты на содержание оборудования составят *d* руб./год, а переменные расходы на единицу продукции — *e* руб./ед. Готовые детали можно в неограниченном количестве приобрести по цене *b* руб./ед. Определить наименее затратный вариант.

	d	*e*	*b*
361	111000	116	144
362	113700	117	143
363	113800	118	141
364	113900	119	134
365	113650	113	139

	d	*e*	*b*
366	113750	114	154
367	113775	112	155
368	113675	121	150
369	113850	122	152
370	113950	123	153

371–380. Предприятие рассматривает вопрос о выборе одного поставщика из поставщиков *A*, *B*, *C*. Все данные отражены в таблице.

Фактор	**Вес**	**A**	**B**	**C**
Качество	*a*	*d*	*f*	*g*
Цена	*b*	*h*	*k*	*m*
Соблюдение условий поставки	*1 – a – b*	*n*	*p*	*r*

Выбрать поставщика с помощью метода взвешивания.

	d	*f*	*g*	*h*	*k*	*m*	*n*	*p*	*r*	*a*	*b*
371	9	8	5	2	1	7	7	6	7	0,26	0,32
372	4	9	5	6	8	7	1	6	7	0,25	0,33
373	2	1	4	9	5	5	8	6	9	0,24	0,34
374	9	3	4	3	3	1	1	8	3	0,23	0,35
375	5	5	4	3	1	8	9	8	8	0,22	0,37
376	7	7	3	2	5	7	2	5	6	0,21	0,36
377	2	4	8	2	9	4	5	2	4	0,28	0,38
378	1	8	3	4	5	2	9	9	6	0,27	0,39
379	4	6	2	8	8	9	8	8	3	0,29	0,31
380	3	7	4	6	7	7	8	1	8	0,27	0,32

Литература

Козловский В. А., Козловская Э. А., Савруков Н. Т. Логистический менеджмент. СПб.: Лань, 2002.

Лайсонс К., Джилленгем М. Управление закупочной деятельностью и цепью поставок. М.: ИНФРА-М, 2005.

Линдерс М., Фирон Х. Управление снабжением и запасами. Логистика. СПб.: Виктория плюс, 2002.

Просветов Г. И. Анализ хозяйственной деятельности предприятия: Задачи и решения. 5-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Бизнес-планирование: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Математика в экономике: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство РДЛ, 2005.

Просветов Г. И. Математические методы и модели в экономике. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2012.

Просветов Г. И. Прогнозирование и планирование: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Управленческий учет: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Финансовый анализ: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2009.

Просветов Г. И. Финансовый менеджмент: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2013.

Просветов Г. И. Цены и ценообразование: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2007.

Просветов Г. И. Эконометрика: Задачи и решения. 5-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Трояновский В. М. Математическое моделирование в менеджменте. М.: Издательство РДЛ, 2003.

Уотерс Д. Логистика. Управление цепью поставок. М.: ЮНИТИ, 2003.

Чейз Р., Эквилайн Н., Якобс Р. Производственный и операционный менеджмент. М.: Вильямс, 2004.

Содержание

Учебно-практическое пособие

Просветов Георгий Иванович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЛОГИСТИКЕ: ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Подписано в печать 16.10.17 г.
Бумага офсетная. Формат 60×84/16.
Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная.
Печ. л. 19,0. Тираж 1000 экз.
Зак. № 826

ООО «Издательство «Альфа-Пресс»

117574, Москва, а/я 117
Тел.: (495) 777-40-60, 926-73-03
www.bestbook.ru
e-mail: book@bestbook.ru

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 6