Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пермская государственная сельскохозяйственная академия
имени академика Д. Н. Прянишникова»

Н. В. Деменева

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Сборник задач

Пермь
ИПЦ «Прокростъ»
2016

УДК 511.11
ББК 22.141
Д 30

Рецензенты:

В. В. Аюпов − кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Пермская государственная сельскохозяйственная академия им. академика Д.Н. Прянишникова»;

В. И. Карпова – кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой математических и естественнонаучных дисциплин Пермского института железнодорожного транспорта – филиала ФГБОУ ВПО «Уральский государственный университет путей сообщения» в г. Перми.

Д 30 Деменева, Н. В.
Комплексные числа : сборник задач / Н. В. Деменева; М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего. образов. «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2016. – 32 с.
ISBN 978-5-94279-294-7

Сборник содержит индивидуальные задания, направленные на формирование и проверку умения выполнять действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме, решать алгебраические уравнения на множестве комплексных чисел и строить области в комплексной плоскости.

Каждому заданию предшествует справочный материал теоретического характера и образец решения. Задания дифференцированы по трём уровням сложности.

Сборник задач предназначен для организации самостоятельной работы студентов направлений подготовки: экономика, менеджмент, торговое дело, агроинженерия, эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, техносферная безопасность, землеустройство и кадастры, строительство, информационные системы и технологии, прикладная информатика и другие.

УДК 511.11
ББК 22.141

Печатается по решению методической комиссии инженерного факультета ФГБОУ ВО «Пермская государственная сельскохозяйственная академия». (Протокол № 01 от 20 октября 2015 г.).

ISBN 978-5-94279-294-7

Содержание

Введение

Термин «комплексные числа» появился в 19 веке благодаря К. Гауссу. В переводе с латинского *complexus* обозначает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений. Ранее существовал термин «мнимые числа», предложенный в 17 веке французским математиком и философом Р. Декартом. Позднее в 18 веке для обозначения числа $\overline{-1}$ (мнимая единица) Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire*.

В настоящее время комплексные числа имеют широкое применение в науке и технике. Достаточно перечислить такие области как электротехника, радиотехника, самолётостроение, теория упругости, квантовая теория, компьютерное программирование, картография, экономика, фракталы, потребности самой математики.

Данный сборник представляет математический аппарат комплексных чисел: содержит задания на выполнение действий над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме, решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел и построение областей в комплексной плоскости. Сборник состоит из трёх частей, различающихся по уровню сложности.

Первая часть содержит стандартные задания на выполнение отдельных действий над комплексными числами в алгебраической форме, на представление комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах и на решение квадратных уравнений с привлечением понятия мнимой единицы.

Вторая часть содержит более сложные задания на выполнение отдельных действий над комплексными числами в тригонометрической форме и на решение алгебраических уравнений с привлечением операции извлечения корня из комплексного числа.

Третья часть содержит сложные задания на преобразование выражений в алгебраической и тригонометрической формах, требующих одновременного выполнения нескольких действий; задания на решение биквадратных уравнений на множестве комплексных чисел и построение областей в комплексной области по заданным условиям.

Трёхуровневая структура сборника позволяет преподавателю использовать данный сборник при обучении студентов различной степени математической подготовки. Например, при работе со студентами небольшой степени подготовки можно ограничиться заданиями только первого уровня, с более высокой подготовкой – заданиями первого и второго уровней, с высокой подготовкой – можно использовать задания всех трёх уровней.

Сборник содержит 11 заданий, каждое из которых рассчитано на 36 типовых варианта. В помощь студенту каждому заданию предшествует справочный материал теоретического характера и подробное решение примера.

Сборник задач предназначен для организации самостоятельной работы студентов направлений подготовки: экономика, менеджмент, торговое дело, агроинженерия, эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, техносферная безопасность, землеустройство и кадастры, строительство, информационные системы и технологии, прикладная информатика и другие.

Часть I

Сумма, разность, произведение и частное комплексных чисел в алгебраической форме

Справочный материал.

Комплексным числом z называется выражение вида $z = a + ib$, где a и b – действительные числа; i – мнимая единица, определяемая как $i = \sqrt{-1}$ и соответственно $i^2 = -1$. Число a называется действительной частью комплексного числа, b – мнимой частью. Обозначение: $a = Re\, z$, $b = Im\, z$. Запись $z = a + ib$ называется *алгебраической*.

Над комплексными числами в алгебраической форме можно выполнять следующие действия: сложение, вычитание, умножение, деление.

Сложение. Суммой двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$, то есть при сложении комплексных чисел в алгебраической форме складывают действительные и мнимые части.

Вычитание. Разностью двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$, то есть при вычитании комплексных чисел в алгебраической форме вычитают действительные и мнимые части.

Произведение. Произведением двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$, то есть при умножении комплексных чисел в алгебраической форме скобки раскрывают как при обычном умножении.

Частное. Частным двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2} + i\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2}$, то есть при делении комплексных чисел в алгебраической форме числитель и знаменатель умножают на число, сопряжённое знаменателю.

<u>Пример.</u> Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел $z_1 = -9 - 7i$ и $z_2 = -1 + i$ в алгебраической форме.

<u>Решение.</u>

Сумма: $z_1 + z_2 = \ -9 - 7i \ + \ -1 + i \ =$
$= \ -9 + \ -1 \ \ + i \ -7 + 1 \ = -10 - 6i.$

Разность: $z_1 - z_2 = \ -9 - 7i \ — \ -1 + i \ =$
$= \ -9 - \ -1 \ \ + i \ -7 - 1 \ = -8 - 8i.$

Произведение: $z_1 z_2 = \ -9 - 7i \ \ -1 + i \ =$
$= 9 - 9i + 7i - 7i^2 = 16 - 2i.$

Частное: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-9-7i}{-1+i} = \frac{-9-7i \ \ -1-i}{-1+i \ \ -1-i} = \frac{9+9i+7i+7i^2}{-1 \ ^2 - i^2} =$
$= \frac{2+16i}{2} = 1 + 8i.$

Ответ: $z_1 + z_2 = -10 - 6i$, $z_1 - z_2 = -8 - 8i$,
$z_1 z_2 = 16 - 2i$, $\frac{z_1}{z_2} = 1 + 8i$.

<u>Задание 1.</u> Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел в алгебраической форме.

1.$z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 + i$.
2. $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 - i$.
3. $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -1 + i$.
4. $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = -1 - i$.
5. $z_1 = 3 - 8i$, $z_2 = 2 + i$.
6. $z_1 = 3 - 7i$, $z_2 = 2 - i$.
7. $z_1 = 2 + 6i$, $z_2 = -2 + i$.
8. $z_1 = 4 + 2i$, $z_2 = -2 - i$.
9. $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = 3 + i$.
10. $z_1 = 6 - 2i$, $z_2 = 3 - i$.
11. $z_1 = 7 + 9i$, $z_2 = -3 + i$.
12. $z_1 = 3 - 7i$, $z_2 = -3 - i$.
13. $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 4 + i$.
14. $z_1 = 8 + 3i$, $z_2 = 4 - i$.
15. $z_1 = 8 - 2i$, $z_2 = -4 + i$.
16. $z_1 = 9 + 2i$, $z_2 = -4 - i$.
17. $z_1 = 7 + 3i$, $z_2 = 5 + i$.
18. $z_1 = 6 - 4i$, $z_2 = 5 - i$.

19. $z_1 = 5 + 4i, \qquad z_2 = -5 + i.$
20. $z_1 = 3 + 7i, \qquad z_2 = -5 - i.$
21. $z_1 = 2 - 4i, \qquad z_2 = 6 + i.$
22. $z_1 = 3 + 5i, \qquad z_2 = 6 - i.$
23. $z_1 = 6 + 5i, \qquad z_2 = -6 + i.$
24. $z_1 = 7 + 2i, \qquad z_2 = -6 - i.$
25. $z_1 = 8 + 3i, \qquad z_2 = 7 + i.$
26. $z_1 = 9 - 2i, \qquad z_2 = 7 - i.$
27. $z_1 = 5 + 6i, \qquad z_2 = -7 + i.$
28. $z_1 = -3 + 2i, \qquad z_2 = -7 - i.$
29. $z_1 = 6 + 2i, \qquad z_2 = 8 + i.$
30. $z_1 = -6 + 7i, \qquad z_2 = 8 - i.$
31. $z_1 = -2 + 5i, \qquad z_2 = -8 - i.$
32. $z_1 = 8 + 3i, \qquad z_2 = 9 + i.$
33. $z_1 = -7 - 2i, \qquad z_2 = 9 - i.$
34. $z_1 = 5 + 8i, \qquad z_2 = -9 + i.$
35. $z_1 = -2 + 4i, \qquad z_2 = -9 - i.$
36. $z_1 = -5 - 4i, \qquad z_2 = 10 + i.$

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Справочный материал.

Геометрическое представление комплексного числа. В координатной плоскости Oxy комплексному числу $z = a + ib$ соответствует точка $M(a;b)$ или вектор OM (рис. 1). Модуль вектора OM называется *модулем* комплексного числа:

$$r = |z| = |OM| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Угол между вектором OM и осью Ox называется *аргументом* комплексного числа:

$\varphi = Arg\, z = arg\, z + 2\pi k, \ \ -\pi < arg\, z \leq \pi$,

где

$$arg\, z = \begin{cases} arctg\,\frac{b}{a},\ z \in I \text{ или } IV \text{ четвертям}, \\ \pi + arctg\,\frac{b}{a},\ z \in II \text{ четверти}, \\ -\pi + arctg\,\frac{b}{a},\ z \in III \text{ четверти}. \end{cases}$$

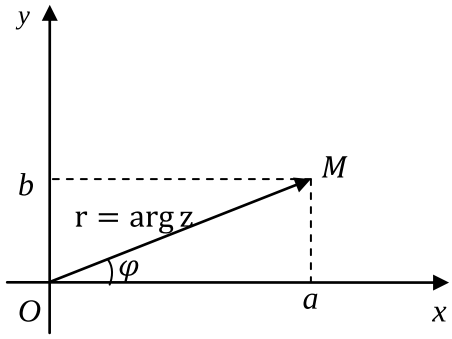

Рис. 1

Тригонометрическая форма комплексного числа:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Показательная форма комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$.

Пример. Представить комплексное число $z = -4\sqrt{3} - 4i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение.

Найдём модуль комплексного числа:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-4\sqrt{3}\right)^2 + (-4)^2} = 8.$$

Данному числу в координатной плоскости соответствует точка $M\left(-4\sqrt{3}; -4\right)$ (рис. 2):

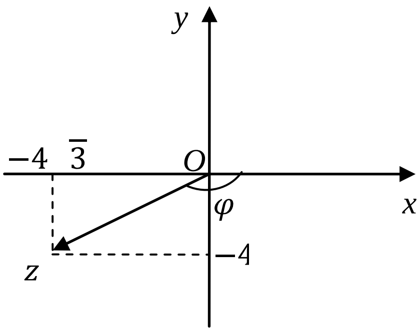

Рис. 2

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в III четверти:

$$\varphi = -\pi + arctg\,\frac{b}{a} = -\pi + arctg\,\frac{-4}{-4\sqrt{3}} =$$

$$= -\pi + arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа: $z = 8\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$, показательная форма: $z = 8e^{-\frac{5\pi}{6}i}$.

Ответ:

$z = 8\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ – тригонометрическая форма комплексного числа;

$z = 8e^{-\frac{5\pi}{6}i}$ – показательная форма комплексного числа.

Задание 2. Представить комплексное число в тригонометрической и показательной формах.

1. $z = 2 + 2i$. **2.** $z = 2 - 2i$.
3. $z = -2 + 2i$. **4.** $z = -2 - 2i$.
5. $z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$. **6.** $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$.
7. $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$. **8.** $z = -2 - 2\sqrt{3}\,i$.
9. $z = 2\sqrt{3} + 2i$. **10.** $z = 2\sqrt{3} - 2i$.
11. $z = -2\sqrt{3} + 2i$. **12.** $z = -2\sqrt{3} - 2i$.
13. $z = 3 + 3i$. **14.** $z = 3 - 3i$.
15. $z = -3 + 3i$. **16.** $z = -3 - 3i$.
17. $z = 3 + \sqrt{3}\,i$. **18.** $z = 3 - \sqrt{3}\,i$.
19. $z = -3 + \sqrt{3}\,i$. **20.** $z = -3 - \sqrt{3}\,i$.
21. $z = \sqrt{3} + 3i$. **22.** $z = \sqrt{3} - 3\,i$.
23. $z = -\sqrt{3} + 3\,i$. **24.** $z = -\sqrt{3} - 3i$.
25. $z = 1 + i$. **26.** $z = 1 - i$.
27. $z = -1 + i$. **28.** $z = -1 - i$.
29. $z = 1 + \sqrt{3}\,i$. **30.** $z = 1 - \sqrt{3}i$.
31. $z = -1 + \sqrt{3}\,i$. **32.** $z = -1 - \sqrt{3}\,i$.
33. $z = \sqrt{3} + i$. **34.** $z = \sqrt{3} - i$.
35. $z = -\sqrt{3} + i$. **36.** $z = -\sqrt{3} - i$.

Решение квадратных уравнений на множестве комплексных чисел

Справочный материал. Уравнения решаются как обычные квадратные уравнения с учётом понятия мнимой единицы: $i = \sqrt{-1}$.

Пример. Решить уравнения на множестве комплексных чисел: а) $6x^2 + 7 = 0$; б) $3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Решение.

а) $6x^2+7=0$. Выразим x, учитывая, что $\sqrt{-1}=i$:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{7}{6}}=\pm\sqrt{\frac{7}{6}}\cdot\sqrt{-1}=\pm\sqrt{\frac{7}{6}}\,i.$$

б) $3x^2+3x+1=0$. Найдём корни квадратного уравнения, учитывая, что $\sqrt{-1}=i$:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{-3}}{6}=\frac{-3\pm\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}}{6}=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{6}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{6}i.$$

Ответ: а) $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{7}{6}}\,i$; б) $x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{6}i$.

<u>Задание 3.</u> Решить уравнения на множестве комплексных чисел.

1. а) $x^2+1=0$. б) $x^2+3x+4=0$.
2. а) $x^2+2=0$. б) $x^2-2x+3=0$.
3. а) $x^2+3=0$. б) $x^2-5x+7=0$.
4. а) $x^2+4=0$. б) $x^2+x+2=0$.
5. а) $x^2+5=0$. б) $x^2+3x+3=0$.
6. а) $x^2+6=0$. б) $x^2+x+1=0$.
7. а) $x^2+7=0$. б) $x^2+4x+5=0$.
8. а) $x^2+8=0$. б) $x^2-2x+2=0$.
9. а) $x^2+9=0$. б) $3x^2-x+1=0$.
10. а) $2x^2+1=0$. б) $2x^2+2x+1=0$.
11. а) $3x^2+1=0$. б) $x^2+2x+9=0$.
12. а) $4x^2+1=0$. б) $x^2-3x+5=0$.
13. а) $5x^2+1=0$. б) $x^2+x+6=0$.
14. а) $6x^2+1=0$. б) $3x^2+x+2=0$.
15. а) $7x^2+1=0$. б) $2x^2-5x+4=0$.
16. а) $8x^2+1=0$. б) $x^2+x+3=0$.
17. а) $9x^2+1=0$. б) $5x^2-x+1=0$.
18. а) $2x^2+3=0$. б) $4x^2+2x+1=0$.
19. а) $2x^2+5=0$. б) $x^2+2x+5=0$.
20. а) $2x^2+7=0$. б) $x^2-3x+6=0$.
21. а) $2x^2+9=0$. б) $7x^2+x+1=0$.
22. а) $3x^2+2=0$. б) $4x^2-x+1=0$.
23. а) $3x^2+4=0$. б) $3x^2+x+2=0$.
24. а) $3x^2+5=0$. б) $5x^2+2x+1=0$.

25. а) $3x^2 + 7 = 0$. б) $2x^2 - 3x + 2 = 0$.
26. а) $3x^2 + 8 = 0$. б) $3x^2 + 2x + 1 = 0$.
27. а) $4x^2 + 1 = 0$. б) $4x^2 + 3x + 1 = 0$.
28. а) $4x^2 + 3 = 0$. б) $5x^2 - 2x + 1 = 0$.
29. а) $4x^2 + 5 = 0$. б) $6x^2 - 3x + 1 = 0$.
30. а) $4x^2 + 7 = 0$. б) $x^2 + 2x + 5 = 0$.
31. а) $4x^2 + 9 = 0$. б) $2x^2 - x + 1 = 0$.
32. а) $5x^2 + 1 = 0$. б) $3x^2 - x + 2 = 0$.
33. а) $5x^2 + 2 = 0$. б) $2x^2 + x + 2 = 0$.
34. а) $5x^2 + 3 = 0$. б) $4x^2 + x + 3 = 0$.
35. а) $5x^2 + 4 = 0$. б) $x^2 - x + 2 = 0$.
36. а) $5x^2 + 6 = 0$. б) $5x^2 + x + 2 = 0$.

Часть II.

Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме

Справочный материал.

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = r_1\ \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$ и $z_2 = r_2\ \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$ называется комплексное число:

$z_1 z_2 = r_1 r_2\ \cos\ \varphi_1 + \varphi_2\ \ + i\sin\ \varphi_1 + \varphi_2$,

то есть при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули умножают, а аргументы складывают.

Частным двух комплексных чисел $z_1 = r_1\ \cos\varphi_1 + +i\sin\varphi_1$ и $z_2 = r_2\ \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$ называется комплексное число:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ \cos\ \varphi_1 - \varphi_2\ \ + i\sin\ \varphi_1 - \varphi_2$,

то есть при делении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули делят, а аргументы вычитают.

Пример. Найти произведение и частное двух комплексных чисел $z_1 = -4 + 4i$ и $z_2 = 9\ \overline{3} - 9i$ в тригонометрической форме.

Решение. Представим каждое число в тригонометрической форме.

Найдём модуль первого числа:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}.$$

Первому числу в координатной плоскости соответствует точка $M_1(-4;\ 4)$ (рис. 2):

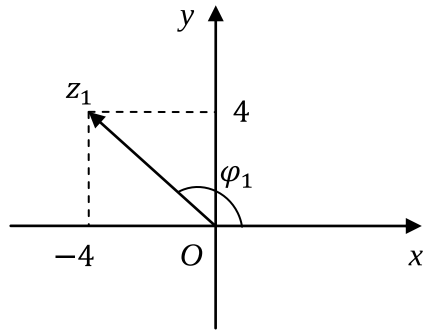

Рис. 3

Найдём аргумент первого числа, учитывая, что точка M_1 лежит во II четверти:

$$\varphi_1 = \pi + arctg\ \frac{b}{a} = \pi + arctg\ \frac{4}{-4} =$$

$$= \pi + arctg\ (-1) = \pi - arctg\ 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма первого числа:

$$z_1 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Найдём модуль второго числа:

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{\left(9\sqrt{3}\right)^2 + (-9)^2} = 18.$$

Второму числу в координатной плоскости соответствует точка $M_2(9\sqrt{3};\ -9)$ (рис. 4):

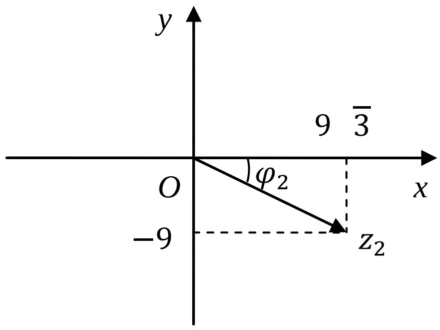

Рис. 4

Найдём аргумент второго числа, учитывая, что точка M_2 лежит в IV четверти:

$$\varphi_2 = arctg\ \frac{b}{a} = arctg\ \frac{-9}{9\sqrt{3}} = arctg\ \frac{-1}{\sqrt{3}} =$$
$$= -arctg\ \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

Тогда тригонометрическая форма второго числа:

$$z_2 = 18\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Найдём произведение чисел:

$$z_1 z_2 =$$
$$= 4\sqrt{2}\cdot 18\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) =$$
$$= 72\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Найдём частное чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\sqrt{2}}{18}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) =$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{9}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right).$$

Ответ:

$$z_1 z_2 = 72\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right);\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{9}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right).$$

<u>Задание 4.</u> Найти произведение и частное двух комплексных чисел в тригонометрической форме.

1. $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i,\qquad z_2 = -5\sqrt{3} - 5i.$
2. $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i,\qquad z_2 = -5\sqrt{3} + 5i.$
3. $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}\,i,\qquad z_2 = 5\sqrt{3} - 5i.$
4. $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\,i,\qquad z_2 = 5\sqrt{3} + 5i.$
5. $z_1 = 2 + 2i,\qquad z_2 = -5 - 5\sqrt{3}\,i.$
6. $z_1 = 2 - 2i,\qquad z_2 = -5 + 5\sqrt{3}\,i.$
7. $z_1 = -2 + 2i,\qquad z_2 = 5 - 5\sqrt{3}\,i.$
8.$z_1 = -2 - 2i,\qquad z_2 = 5 + 5\sqrt{3}\,i.$
9. $z_1 = 3 + \sqrt{3}\,i,\qquad z_2 = -7\sqrt{3} - 7\,i.$
10. $z_1 = 3 - \sqrt{3}\,i,\qquad z_2 = -7\sqrt{3} + 7\,i.$
11. $z_1 = -3 + \sqrt{3}\,i,\qquad z_2 = 7\sqrt{3} - 7\,i.$
12. $z_1 = -3 - \sqrt{3}\,i,\qquad z_2 = 7\sqrt{3} + 7\,i.$
13. $z_1 = 2\sqrt{3} + 2\,i,\qquad z_2 = -6 - 6\sqrt{3}\,i.$
14. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2\,i,\qquad z_2 = -6 + 6\sqrt{3}\,i.$

15. $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$, $z_2 = 6 - 6\sqrt{3}i$.
16. $z_1 = -2\sqrt{3} - 2i$, $z_2 = 6 + 6\sqrt{3}i$.
17. $z_1 = \sqrt{3} + 3i$, $z_2 = -7 - 7i$.
18. $z_1 = \sqrt{3} - 3i$, $z_2 = -7 + 7i$.
19. $z_1 = -\sqrt{3} + 3i$, $z_2 = 7 - 7i$.
20. $z_1 = -\sqrt{3} - 3i$, $z_2 = 7 + 7i$.
21. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}i$.
22. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -8 + 8\sqrt{3}i$.
23. $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 8 - 8\sqrt{3}i$.
24. $z_1 = -1 - i$, $z_2 = 8 + 8\sqrt{3}i$.
25. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = -8\sqrt{3} - 8i$.
26. $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = -8\sqrt{3} + 8i$.
27. $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 8\sqrt{3} - 8i$.
28. $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = 8\sqrt{3} + 8i$.
29. $z_1 = 3 + 3i$, $z_2 = -7 - 7\sqrt{3}i$.
30. $z_1 = 3 - 3i$, $z_2 = -7 + 7\sqrt{3}i$.
31. $z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = 7 - 7\sqrt{3}i$.
32. $z_1 = -3 - 3i$, $z_2 = 7 + 7\sqrt{3}i$.
33. $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -8 - 8i$.
34. $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = -8 + 8i$.
35. $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = 8 - 8i$.
36. $z_1 = -\sqrt{3} - i$, $z_2 = 8 + 8i$.

Возведение комплексного числа в степень

Справочный материал. Степенью n комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется комплексное число $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, то есть при возведении комплексного числа в степень модуль возводится в показатель степени, а аргумент умножается на показатель степени (формула Муавра).

Пример. Выполнить возведение комплексного числа в степень по формуле Муавра: $(-5 - 5i)^3$.

Решение. Для возведения комплексного числа

$z = -5 - 5i$ в степень 3 необходимо представить его в тригонометрической форме. Для этого найдём модуль и аргумент числа.

Найдём модуль числа:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2};$$

Числу z в координатной плоскости соответствует точка $M(-5; -5)$ (рис. 5):

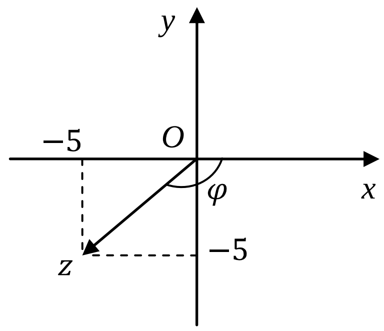

Рис. 5

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в Ш четверти:

$$\varphi = -\pi + arctg\frac{b}{a} = -\pi + arctg\frac{-5}{-5} =$$

$$= -\pi + arctg1 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма числа:

$$z = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Выполним возведение в степень по формуле Муавра:

$$(-5 - 5i)^3 = \left(5\sqrt{2}\right)^3\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\cdot 3\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\cdot 3\right)\right) =$$

$$= 250\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 250\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 250\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 250(1 - i) = 250 - 250i.$$

Ответ: $250 - 250i$.

<u>Задание 5.</u> Выполнить возведение комплексного числа в степень по формуле Муавра.

1. $(6 - 6i)^3$. **2.** $(-6 + 6i)^3$. **3.** $(-6 - 6i)^3$.

4. $(6 + 6i)^3$. **5.** $\left(-1 - \sqrt{3}\,i\right)^6$. **6.** $\left(1 + \sqrt{3}\,i\right)^6$.

7. $\left(-1 + \sqrt{3}\,i\right)^6$. **8.** $\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)^6$. **9.** $\left(5\sqrt{3} - 5i\right)^3$.

10. $(5\sqrt{3}+5i)^3$.	**11.** $(-5\sqrt{3}+5i)^3$.	**12.** $(-5\sqrt{3}-5i)^3$.
13. $(-4+4i)^4$.	**14.** $(-4-4i)^4$.	**15.** $(4+4i)^4$.
16. $(4-4i)^4$.	**17.** $(-2-2i)^4$.	**18.** $(2-2i)^4$.
19. $(2+2i)^4$.	**20.** $(-2+2i)^4$.	**21.** $(-1-i)^6$.
22. $(1-i)^6$.	**23.** $(-1+i)^6$.	**24.** $(1+i)^6$.
25. $(7-7i)^3$.	**26.** $(-7+7i)^3$.	**27.** $(-7-7i)^3$.
28. $(7+7i)^3$.	**29.** $(3+3i)^4$.	**30.** $(-3+3i)^4$.
31. $(-3-3i)^4$.	**32.** $(3-3i)^4$.	**33.** $(\sqrt{3}+i)^6$.
34. $(\sqrt{3}-i)^6$.	**35.** $(-\sqrt{3}-i)^6$.	**36.** $(-\sqrt{3}+i)^6$.

Извлечение корня из комплексного числа

Справочный материал. Корнем степени n из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется комплексное число:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), k = 0, n-1.$$

Пример. Найти все значения корня из комплексного числа: $\sqrt[5]{4-4\sqrt{3}i}$.

Решение. Для извлечения корня из комплексного числа $z = 4 - 4\sqrt{3}i$ необходимо представить его в тригонометрической форме. Для этого найдём модуль и аргумент числа.

Найдём модуль числа:

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8;$$

Числу z в координатной плоскости соответствует точка $M(4; -4\sqrt{3})$ (рис. 6):

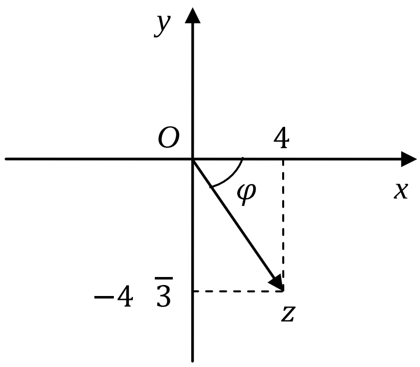

Рис. 6

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в IV четверти:

$$\varphi = arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{-4\sqrt{3}}{4} = arctg\left(-\sqrt{3}\right) =$$
$$= -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Тогда тригонометрическая форма числа:

$$z = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Выполним извлечение корня:

$$\sqrt[5]{4-4\sqrt{3}i} = \sqrt[5]{8}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}\right), k = 0, 4.$$

Распишем все значения корня:

при $k = 0$: $\sqrt[5]{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)\right)$;

при $k = 1$: $\sqrt[5]{8}\left(\cos\frac{5\pi}{15} + i\sin\frac{5\pi}{15}\right)$;

при $k = 2$: $\sqrt[5]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{15} + i\sin\frac{11\pi}{15}\right)$;

при $k = 3$: $\sqrt[5]{8}\left(\cos\frac{17\pi}{15} + i\sin\frac{17\pi}{15}\right)$;

при $k = 4$: $\sqrt[5]{8}\left(\cos\frac{23\pi}{15} + i\sin\frac{23\pi}{15}\right)$.

Ответ:

$\sqrt[5]{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)\right)$, $\sqrt[5]{8}\left(\cos\frac{5\pi}{15} + i\sin\frac{5\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{15} + i\sin\frac{11\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{8}\left(\cos\frac{17\pi}{15} + i\sin\frac{17\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{8}\left(\cos\frac{23\pi}{15} + i\sin\frac{23\pi}{15}\right)$.

<u>Задание 6.</u> Найти все значения корня из комплексного числа.

1. $\sqrt[3]{6+6i}$.	**2.** $\sqrt[3]{-6-6i}$.	**3.** $\sqrt[3]{6-6i}$.
4. $\sqrt[3]{-6+6i}$.	**5.** $\sqrt[3]{-7+7i}$.	**6.** $\sqrt[3]{-7-7i}$.
7. $\sqrt[3]{7+7i}$.	**8.** $\sqrt[3]{7-7i}$.	**9.** $\sqrt{-8+8i}$.
10. $\sqrt{-8-8i}$.	**11.** $\sqrt{8+8i}$.	**12.** $\sqrt{8-8i}$.
13. $\sqrt[4]{4-4i}$.	**14.** $\sqrt[4]{-4-4i}$.	**15.** $\sqrt[4]{-4+4i}$.
16. $\sqrt[4]{4+4i}$.	**17.** $\sqrt{9+9i}$.	**18.** $\sqrt{-9+9i}$.
19. $\sqrt{9-9i}$.	**20.** $\sqrt{-9-9i}$.	**21.** $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$.
22. $\sqrt{-2-2\sqrt{3}i}$.	**23.** $\sqrt{2+2\sqrt{3}i}$.	**24.** $\sqrt{-2+2\sqrt{3}i}$.

25. $\sqrt[4]{3-3i}$. **26.** $\sqrt[4]{-3+3i}$. **27.** $\sqrt[4]{-3-3i}$.
28. $\sqrt[4]{3+3i}$. **29.** $\sqrt[4]{2-2i}$. **30.** $\sqrt[4]{-2+2i}$.
31. $\sqrt[4]{2+2i}$. **32.** $\sqrt[4]{-2-2i}$. **33.** $\sqrt[3]{5-5i}$.
34. $\sqrt[3]{-5-5i}$. **35.** $\sqrt[3]{5+5i}$. **36.** $\sqrt[3]{-5+5i}$.

Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел

Справочный материал. Уравнения решаются как обычные алгебраические уравнения с привлечением операции извлечения корня из комплексного числа.

Пример. Решить уравнение на множестве комплексных чисел: $6x^4+1=0$.

Решение. Выразим из уравнения x: $x=\sqrt[4]{-\frac{1}{6}}$ и найдём все значения корня. Представим число $z=-\frac{1}{6}$ в тригонометрической форме. Найдём модуль и аргумент числа.

Найдём модуль числа:

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2+0^2}=\frac{1}{6}.$$

Числу z в координатной плоскости соответствует точка $M\left(-\frac{1}{6};\ 0\right)$ (рис. 7):

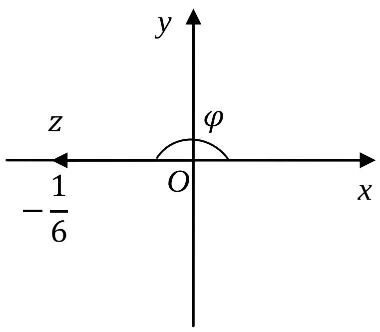

Рис. 7

Аргумент числа $\varphi=\pi$.

Тогда тригонометрическая форма числа:

$z=\frac{1}{6}\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)$.

По формуле извлечения корня из комплексного числа, получаем:

$$\sqrt[4]{-\frac{1}{6}} = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), k = 0, 3.$$

Распишем все значения корня:

при $k = 0$:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{6}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{6}}i =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}}i;$$

при $k = 1$:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{6}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{6}}i = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}}i;$$

при $k = 2$:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{6}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{6}}i = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}}i;$$

при $k = 3$:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{6}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{6}}i = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}}i.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}}i$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}}i$; $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}}i$; $x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{6}}i$.

Задание 7. Решить уравнения на множестве комплексных чисел.

1. $x^6 + 1 = 0$.

2. $x^6 - 1 = 0$.

3. $x^6 + 64 = 0$.

4. $x^6 - 64 = 0$.

5. $x^5 + 1 = 0$.

6. $x^5 - 1 = 0$.

7. $x^5 + 32 = 0$.

8. $x^5 - 32 = 0$.

9. $x^4 + 1 = 0$.

10. $x^4 - 1 = 0$.

11. $x^4 + 64 = 0$.

12. $x^4 - 64 = 0$.

13. $x^3 + 1 = 0$.

14. $x^3 - 1 = 0$.

15. $x^3 + 8 = 0$.

16. $x^3 - 8 = 0$.

17. $x^7 + 1 = 0$.

18. $x^7 - 1 = 0$.

19. $x^7 + 128 = 0.$
20. $x^7 - 128 = 0.$
21. $x^8 + 1 = 0.$
22. $x^8 - 1 = 0.$
23. $32x^5 + 1 = 0.$
24. $32x^5 - 1 = 0.$
25. $64x^6 + 1 = 0.$
26. $64x^6 - 1 = 0.$
27. $16x^4 + 1 = 0.$
28. $16x^4 - 1 = 0.$
29. $8x^3 + 1 = 0.$
30. $8x^3 - 1 = 0.$
31. $128x^7 - 1 = 0.$
32. $128x^7 + 1 = 0.$
33. $2x^4 + 1 = 0.$
34. $2x^4 - 1 = 0.$
35. $4x^4 + 1 = 0.$
36. $4x^4 - 1 = 0.$

Часть III

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Справочный материал. В данном пункте используются действия сложения, вычитания, произведения и частного комплексных чисел в алгебраической форме.

Пример. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме: $\frac{3-7i}{-5+8i} - \frac{5+6i \quad 3+i}{-9-4i}$.

Решение.

Найдём значение первой дроби, выполнив действие деления комплексных чисел. Для этого умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{3-7i}{-5+8i} = \frac{3-7i \quad -5-8i}{-5+8i \quad -5-8i} = \frac{-15-24i+35i+56i^2}{-5\ {}^2 - \ 8i\ {}^2} =$$

$$= \frac{-71+11i}{89} = -\frac{71}{89} + \frac{11}{89}i.$$

Найдём значение числителя второй дроби, выполнив умножение комплексных чисел:

$$5+6i \quad 3+i \quad = 15+5i+18i+6i^2 = 9+23i.$$

Найдём значение второй дроби, выполнив действие деления комплексных чисел. Для этого умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{5+6i \quad 3+i}{-9-4i} = \frac{9+23i}{-9-4i} = \frac{9+23i \quad -9+4i}{-9-4i \quad -9+4i} = \frac{-81+36i-207i+92i^2}{-9\ {}^2 - \ 4i\ {}^2} =$$

$$= \frac{-173-171i}{97} = -\frac{173}{97} - \frac{171}{97}i.$$

Найдём значение данного выражения, выполнив действие вычитания комплексных чисел:

$$\frac{3-7i}{-5+8i} - \frac{5+6i \ \ 3+i}{-9-4i} = \ -\frac{71}{89} + \frac{11}{89}i \ - \ -\frac{173}{97} - \frac{171}{97}i \ =$$

$$= \ -\frac{71}{89} - \ -\frac{173}{97} \ + \ \frac{11}{89} - \ -\frac{171}{97} \ \ i = \frac{8\,510}{8\,633} + \frac{16\,286}{8\,633}i.$$

Ответ: $\frac{8\,510}{8\,633} + \frac{16\,286}{8\,633}i.$

<u>Задание 8.</u> Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме.

1. $\frac{5-8i}{1+9i \ \ 5+7i} - \frac{8-4i}{1-5i}$.

2. $\frac{-2+8i \ \ 3+8i}{-5-i} + \frac{-2+9i}{1-3i}$.

3. $\frac{-4-3i}{1-8i \ \ 5+7i} - \frac{4-4i}{-1-8i}$.

4. $\frac{1-7i \ \ 4+9i}{2-i} + \frac{3-3i}{-4+6i}$.

5. $\frac{4+9i \ \ -1-7i}{6-5i} + \frac{-2-5i}{-2-3i}$.

6. $\frac{-2+8i}{1-3i \ \ -7-7i} - \frac{1-4i}{-3-9i}$.

7. $\frac{-6+3i \ \ -8-4i}{1-i} + \frac{-4-6i}{3+2i}$.

8. $\frac{1-3i \ \ 2-2i}{5-3i} + \frac{3-7i}{8-2i}$.

9. $\frac{-9-5i}{1-4i \ \ 1-7i} - \frac{2-3i}{-5-6i}$.

10. $\frac{-2+3i}{2-5i \ \ -3+5i} - \frac{2+i}{3-6i}$.

11. $\frac{1-8i \ \ 4+9i}{-3-i} + \frac{8+7i}{1+5i}$.

12. $\frac{-7+6i \ \ -1-7i}{-4-5i} + \frac{1-2i}{1-8i}$.

13. $\frac{9+7i}{1-4i \ \ 9-7i} - \frac{2-5i}{9-8i}$.

14. $\frac{7-2i \ \ 4-4i}{-6-i} + \frac{9-2i}{-1+2i}$.

15. $\frac{1+4i \ \ 7-5i}{3-8i} + \frac{-2-7i}{3-2i}$.

16. $\frac{1+5i}{1-6i} + \frac{-6+7i}{2+5i \ \ -6-8i}$.

17. $\frac{-2+5i}{3-5i} - \frac{-4-3i}{9+5i \ \ -2-8i}$.

18. $\frac{-2+5i}{1-5i \ \ 2-7i} - \frac{1-3i}{-6-4i}$.

19. $\frac{-3-5i \ \ 2+9i}{5-i} + \frac{7-2i}{-3+5i}$.

20. $\frac{8-i}{3-8i} + \frac{-2-7i}{-5+4i \ \ 6-2i}$.

21. $\frac{6-9i}{4-5i} - \frac{5+9i}{1-4i \ \ -6-7i}$.

22. $\frac{1-9i}{-2-6i \ \ 8+3i} - \frac{-7+i}{6-9i}$.

23. $\frac{2-3i \ \ -6+5i}{1-i} + \frac{8-7i}{6+8i}$.

24. $\frac{7-i}{4+3i} + \frac{1-8i}{6+5i \ \ -1+7i}$.

25. $\frac{3+7i}{-8-5i} - \frac{-8+4i \ \ -1-7i}{6+2i}$.

26. $\frac{-1+7i}{2-4i \ \ -3-8i} - \frac{2-3i}{9+4i}$.

27. $\frac{1-4i \ \ 3+8i}{6-i} + \frac{8+3i}{7+5i}$.

28. $\frac{-5-i}{4+5i} + \frac{-5+4i \ \ 6-2i}{5+3i}$.

29. $\frac{1+6i}{2+8i} - \frac{-8+3i}{1-i \ \ -3-4i}$.

30. $\frac{-8+5i}{-2-6i \ \ 8-3i} - \frac{-7-i}{1-4i}$.

31. $\frac{8-6i}{6-i} + \frac{2-4i \ \ -3+5i}{-9+7i}$.

32. $\frac{2-i}{4-7i} + \frac{-3+8i}{-6+4i \ \ 1-3i}$.

33. $\frac{8-6i}{-6-5i}-\frac{5+9i}{(5-3i)(-4-3i)}$. **34.** $\frac{2-6i}{(-3-6i)(4+3i)}-\frac{9+i}{6+5i}$.

35. $\frac{-2+5i}{-1-5i}+\frac{(-6-5i)(1+7i)}{-8+7i}$. **36.** $\frac{5-i}{-6-7i}+\frac{-5+3i}{(-7+3i)(-4-8i)}$.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Справочный материал. В данном пункте используются действия сложения, вычитания, произведения и частного комплексных чисел в тригонометрической форме.

Пример. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме: $\frac{(7\sqrt{3}-7i)^5 i^4}{(-7-7i)^4(-1+\sqrt{3}i)^8}$.

Решение. В данном примере используются операции возведения в степень, умножения и деления над четырьмя комплексными числами: $z_1=7\sqrt{3}-7i$, $z_2=i$, $z_3=-7-7i$ и $z_4=-1+\sqrt{3}i$. Для выполнения операций представим каждое число в тригонометрической форме.

Найдём модуль первого числа:

$$r_1=|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(7\sqrt{3})^2+(-7)^2}=14.$$

Первому числу в координатной плоскости соответствует точка $M_1(7\sqrt{3};-7)$ (рис. 8):

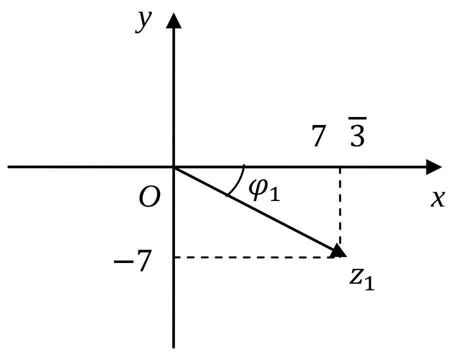

Рис. 8

Найдём аргумент первого числа, учитывая, что точка M_1 лежит в VI четверти:

$$\varphi_1=arctg\frac{b}{a}=arctg\frac{-7}{7\sqrt{3}}=-arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{6}.$$

Тогда тригонометрическая форма первого числа:

$$z_1=14\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Найдём модуль второго числа:

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

Второму числу в координатной плоскости соответствует точка $M_2(0;\ 1)$ (рис. 9):

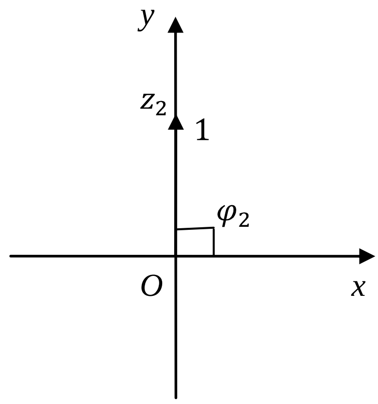

Рис. 9

Аргумент второго числа $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Тогда тригонометрическая форма второго числа:

$$z_2 = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Найдём модуль третьего числа:

$$r_3 = |z_3| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2} = 7\sqrt{2}.$$

Третьему числу в координатной плоскости соответствует точка $M_3(-7;\ -7)$ (рис. 10):

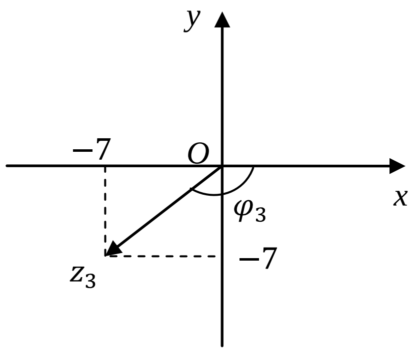

Рис. 10

Найдём аргумент третьего числа, учитывая, что точка M_3 лежит в III четверти:

$$\varphi_3 = -\pi + arctg\frac{b}{a} = -\pi + arctg\frac{-7}{-7} = -\pi + arctg1 =$$
$$= -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма третьего числа:

$$z_3 = 7\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Найдём модуль четвёртого числа:

$$r_4 = |z_4| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Четвёртому числу в координатной плоскости соответствует точка $M_4(-1; \sqrt{3})$ (рис. 11):

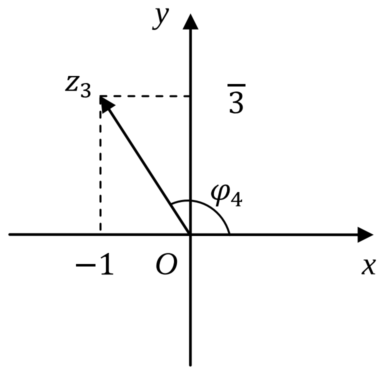

Рис. 11

Найдём аргумент четвёртого числа, учитывая, что точка M_4 лежит во II четверти:

$$\varphi_4 = \pi + arctg\frac{b}{a} = \pi + arctg\frac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - arctg\sqrt{3} =$$
$$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Тогда тригонометрическая форма четвёртого числа:

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Далее выполним возведение в степень по формуле Муавра:

$$z_1^{\,5} = 14^5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\cdot 5\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\cdot 5\right)\right) =$$
$$= 14^5\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right);$$

$$z_2^{\,4} = 1^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 4\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 4\right)\right) =$$
$$= 1\cdot(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0).$$

$$z_3^{\,4} = (7\sqrt{2})^4\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\cdot 4\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\cdot 4\right)\right) =$$
$$= 7^4\cdot 4\,(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)) = 7^4\cdot 4\,(\cos\pi + i\sin\pi);$$

$$z_4^{\,8} = 2^8\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 8\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 8\right)\right) =$$
$$= 2^8\left(\cos\frac{16\pi}{3} + i\sin\frac{16\pi}{3}\right) = 2^8\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Затем по правилу умножения комплексных чисел в тригонометрической форме найдём значения числителя и знаменателя данного выражения:

$${z_1}^5 \cdot {z_2}^4 =$$

$$= 14^5 \cdot 1\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}+0\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+0\right)\right) =$$

$$= 14^5\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$${z_3}^4 \cdot {z_4}^8 =$$

$$\left(7^4 \cdot 4\right) \cdot \left(2^8\right)\left(\cos\left(\pi + \left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) + i\sin\left(\pi + \left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right) =$$

$$= 7^4 \cdot 2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Затем выполним деление комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$\frac{{z_1}^5 \cdot {z_2}^4}{{z_3}^4 \cdot {z_4}^8} =$$

$$= \frac{14^5}{7^4 \cdot 2^{10}}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)\right) =.$$

$$= \frac{7}{32}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \frac{7}{32}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Ответ: $\frac{7}{32}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

<u>Задание 9.</u> Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

1. $\dfrac{(3+3i)^4 i^3}{(2-2i)^2\left(3+\sqrt{3}i\right)^4}$.

2. $\dfrac{(1-i)^2 i^5}{(2+2i)^3\left(1+\sqrt{3}i\right)}$.

3. $\dfrac{(4-4i)^2 i^7}{\left(2+2\sqrt{3}i\right)^3(1+i)}$.

4. $\dfrac{(5-5i)^2 i^5}{(1+i)^3\left(1+\sqrt{3}i\right)^2}$.

5. $\dfrac{\left(5\sqrt{3}-5i\right)^4 i^3}{\left(3+\sqrt{3}i\right)^3\left(2+2\sqrt{3}i\right)^2}$.

6. $\dfrac{(6-6i)^4 i^5}{(-7-7i)^3\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}$.

7. $\dfrac{(5+5i)^4 i^4}{(7-7i)^3\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}$.

8. $\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^4 i^8}{(4-4i)^3(1+i)^3}$.

9. $\dfrac{\left(-2-2\sqrt{3}i\right)^7 i^4}{(-8-8i)^3\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3}$.

10. $\dfrac{(-1-i)^4 i^5}{(2-2i)^3\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}$.

11. $\dfrac{\left(8\sqrt{3}-8i\right)^5 i^4}{(7-7i)^5\left(-1+\sqrt{3}i\right)^2}$.

12. $\dfrac{(6+6i)^3 i^5}{(9-9i)^2\left(1+\sqrt{3}i\right)^4}$.

13. $\dfrac{(1-i)^4(5+5i)^5}{i^2\left(6+6\sqrt{3}i\right)^4}$.

14. $\dfrac{(1+i)^3(5-5i)^2}{i^3\left(6+6\sqrt{3}i\right)^2}$.

15. $\frac{(2-2i)^4(1-i)^2}{i^6(-2+2\sqrt{3}i)^5}$.

16. $\frac{(-9+9i)^3(-5-5i)^2}{i^8(3\sqrt{3}+3i)^7}$.

17. $\frac{(-2+2i)^6(-3-3i)^3}{i^9(6-6\sqrt{3}i)^5}$.

18. $\frac{(-3+3i)^7(5\sqrt{3}-5i)^2}{i^4(5+5i)^6}$.

19. $\frac{(-1+i)^4(1-\sqrt{3}i)^3}{i^3(6+6\sqrt{3}i)^3}$.

20. $\frac{(-2+2i)^9(1+\sqrt{3}i)^2}{i^4(7-7i)^4}$.

21. $\frac{(-3-3i)^5(-1-\sqrt{3}i)^3}{i^7(\sqrt{3}+i)^{10}}$

22. $\frac{(1-i)^4(1-\sqrt{3}i)^5}{i^8(\sqrt{3}+3i)^5}$.

23. $\frac{(1+i)^8(2-2\sqrt{3}i)^4}{i^7(-\sqrt{3}+3i)^5}$.

24. $\frac{(-1+i)^5(2-2\sqrt{3}i)^3}{i^5(-\sqrt{3}-i)^5}$.

25. $\frac{(3-3i)^4(-1-\sqrt{3}i)^3}{i^9(-\sqrt{3}+3i)^4}$.

26. $\frac{(1-\sqrt{3}i)^5(-\sqrt{3}-i)^3}{i^5(1+i)^4}$.

27. $\frac{(\sqrt{3}-i)^7(-1-\sqrt{3}i)^6}{i^4(-4+4i)^4}$.

28. $\frac{(3-3i)^4(1-\sqrt{3}i)^3}{i^7(-2\sqrt{3}+2i)^5}$.

29. $\frac{(-3+3i)^4(1-\sqrt{3}i)^3}{i^8(-\sqrt{3}+i)^7}$.

30. $\frac{(1-i)^4(1-\sqrt{3}i)^3}{i^9(-\sqrt{3}+3i)^6}$.

31. $\frac{(3+3i)^2(1+\sqrt{3}i)^3}{i^8(-\sqrt{3}+i)^4}$.

32. $\frac{(-2+2i)^3(1-\sqrt{3}i)^5}{i^8(-\sqrt{3}-3i)^4}$.

33. $\frac{(1-i)^5(-2+2\sqrt{3}i)^3}{i^5(-\sqrt{3}+i)^7}$.

34. $\frac{(1-i)^4(1-\sqrt{3}i)^8}{i^9(-\sqrt{3}-3i)^5}$.

35. $\frac{(-2+2i)^6(-\sqrt{3}-i)^4}{i^6(-\sqrt{3}+3i)^5}$.

36. $\frac{(2-2i)^5(1-\sqrt{3}i)^4}{i^4(-\sqrt{3}+i)^7}$.

Решение биквадратных уравнений на множестве комплексных чисел

Справочный материал. Уравнения решаются как обычные алгебраические уравнения с учётом понятия мнимой единицы: $i=\sqrt{-1}$ и равенства комплексных чисел.

Пример. Решить биквадратное уравнение на множестве комплексных чисел: $x^4+14x^2+53=0$.

Решение.

Обозначим x^2 через a. Получаем квадратное уравнение: $a^2+14a+53=0$. Корни уравнения: $a_{1,2}=-7\pm\sqrt{-4}=$ $=-7\pm 2i$ или $x^2=-7\pm 2i$.

Решим уравнение $x^2=-7+2i$, учитывая, что комплексное число $x=u+vi$, где u и v – действительные числа: $(u+vi)^2=-7+2i$. Отсюда $u^2+2uvi-v^2=-7+2i$.

Учитывая, что комплексные числа равны, если равны их действительные и мнимые части, получаем систему уравнений: $\begin{cases} u^2 - v^2 = -7, \\ 2uv = 2. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} u = \frac{1}{v}, \\ \frac{1}{v^2} - v^2 = -7. \end{cases}$ Тогда:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{v}, \\ v^4 - 7v^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Обозначим v^2 через t. Получаем квадратное уравнение: $t^2 - 7t - 1 = 0$. Корни уравнения: $t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2}$. Отсюда $v^2 = \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2}$. Учитывая, что v – действительное число, оставляем положительное значение: $v^2 = \frac{7 + \sqrt{53}}{2}$ и, следовательно,

$$v_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{53}}{2}},\ u_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{7+\sqrt{53}}}.$$

Соответственно корни уравнения:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{7+\sqrt{53}}} + \sqrt{\frac{7+\sqrt{53}}{2}}i,\ x_2 = -\sqrt{\frac{2}{7+\sqrt{53}}} - \sqrt{\frac{7+\sqrt{53}}{2}}i.$$

После преобразования:

$$x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{53}-7}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{53}+7}{2}}i,\ x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{53}-7}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{53}+7}{2}}i.$$

Решим уравнение $x^2 = -7 - 2i$, учитывая, что комплексное число $x = u + vi$, где u и v – действительные числа: $(u + vi)^2 = -7 - 2i$. Отсюда $u^2 + 2uvi - v^2 =$
$= -7 - 2i$.

Далее $\begin{cases} u^2 - v^2 = -7, \\ 2uv = -2. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} u = -\frac{1}{v}, \\ \frac{1}{v^2} - v^2 = -7. \end{cases}$ Тогда:

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{v}, \\ v^4 - 7v^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

Обозначим v^2 через t. Получаем квадратное уравнение: $t^2 - 7t - 1 = 0$. Корни уравнения: $t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2}$. Отсюда

$v^2 = \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2}$. Учитывая, что v – действительное число, оставляем положительное значение: $v^2 = \frac{7+\sqrt{53}}{2}$ и, следовательно,

$$v_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{53}}{2}}, u_{3,4} = \mp\sqrt{\frac{2}{7+\sqrt{53}}}.$$

Соответственно корни уравнения:

$$x_3 = \sqrt{\frac{2}{7+\sqrt{53}}} - \sqrt{\frac{7+\sqrt{53}}{2}}i, x_4 = -\sqrt{\frac{2}{7+\sqrt{53}}} + \sqrt{\frac{7+\sqrt{53}}{2}}i.$$

После преобразования:

$$x_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{53}-7}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{53}+7}{2}}i, x_4 = -\sqrt{\frac{\sqrt{53}-7}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{53}+7}{2}}i.$$

Ответ:

$$x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{53}-7}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{53}+7}{2}}i, x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{53}-7}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{53}+7}{2}}i,$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{\sqrt{53}-7}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{53}+7}{2}}i, x_4 = \sqrt{\frac{\sqrt{53}-7}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{53}+7}{2}}i.$$

Задание 10. Решить уравнения на множестве комплексных чисел.

1. $x^4 - 4x^2 + 5 = 0.$
2. $x^4 + 4x^2 + 8 = 0.$
3. $x^4 + 4x^2 + 20 = 0.$
4. $x^4 - 4x^2 + 29 = 0.$
5. $x^4 + 6x^2 + 10 = 0.$
6. $x^4 - 6x^2 + 13 = 0.$
7. $x^4 + 6x^2 + 18 = 0.$
8. $x^4 + 6x^2 + 25 = 0.$
9. $x^4 - 2x^2 + 2 = 0.$
10. $x^4 + 2x^2 + 5 = 0.$
11. $x^4 - 2x^2 + 10 = 0.$
12. $x^4 + 2x^2 + 17 = 0.$
13. $x^4 + 8x^2 + 17 = 0.$
14. $x^4 - 8x^2 + 20 = 0.$
15. $x^4 - 8x^2 + 25 = 0.$
16. $x^4 + 8x^2 + 32 = 0.$
17. $x^4 - 10x^2 + 26 = 0.$
18. $x^4 + 10x^2 + 29 = 0.$
19. $x^4 - 10x^2 + 34 = 0.$
20. $x^4 + 10x^2 + 41 = 0.$
21. $x^4 + 10x^2 + 50 = 0.$
22. $x^4 + 10x^2 + 61 = 0.$
23. $x^4 - 4x^2 + 40 = 0.$
24. $x^4 + 4x^2 + 53 = 0.$
25. $x^4 + 6x^2 + 34 = 0.$
26. $x^4 - 6x^2 + 45 = 0.$
27. $x^4 + 6x^2 + 58 = 0.$
28. $x^4 + 2x^2 + 26 = 0.$
29. $x^4 - 2x^2 + 37 = 0.$
30. $x^4 + 2x^2 + 50 = 0.$
31. $x^4 + 8x^2 + 41 = 0.$
32. $x^4 - 8x^2 + 65 = 0.$
33. $x^4 + 12x^2 + 37 = 0.$
34. $x^4 - 12x^2 + 40 = 0.$

35. $x^4 + 12x^2 + 45 = 0.$ **36.** $x^4 + 12x^2 + 52 = 0.$

Построение областей в комплексной плоскости

Справочный материал. В данном пункте при построении областей используются понятия модуля и аргумента комплексного числа.

Пример. В комплексной плоскости построить область, заданную условиями: $z + i \ \leq 3, Imz \leq -1.$

Решение. Для построения области, заданной первым неравенством, используем геометрическое свойство модуля. С учётом этого первое условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_1 = -i$ на расстояние, не большее 3, то есть первое неравенство определяет круг радиуса 3 с центром в точке $0; -1$. Второе условие определяет множество точек, ординаты которых не превосходят число -1, то есть второе неравенство определяет полуплоскость, расположенную ниже прямой $y = -1$. Искомая область представляет полукруг радиуса 3 с центром в точке $0; -1$ (рис. 3).

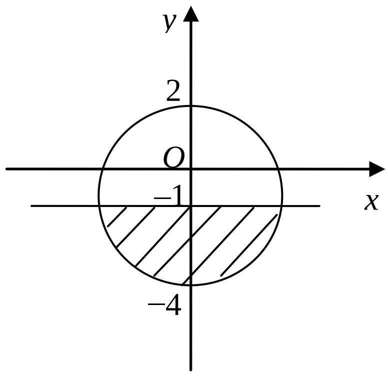

Рис. 3

Задание 11. В комплексной плоскости построить область, заданную условиями.

1. $z - i \ \leq 1.$

2. $z + 1 \ \geq 1, Rez \geq -1.$

3. $z + i \ \leq 2.$

4. $z - 2 \ \leq 1, Imz \geq 0.$

5. $Rez \ \leq 3.$

6. $Rez \ \leq 1, \ Imz \ \leq 1.$

7. $z \ \leq 2, Rez \geq 0.$

8. $argz \ \leq \frac{\pi}{4}.$

9. $z + i \ \geq 1.$

10. $z + 2 \ \geq 3.$

11. $arg z \leq \frac{\pi}{6}$.

12. $z - 3 \geq 1, Im z \geq 0$.

13. $z = 5, \ arg z \leq \frac{\pi}{3}$.

14. $z - 1 \leq 1$.

15. $z \leq 1, Re z \geq 0$.

16. $z - 1 - i \leq 1, Re z \geq 1$.

17. $z - 2 \leq 1, Im z \leq 0$.

18. $z + 1 \geq 1, Re z \leq -1$.

19. $z + 2 \leq 2, Im z \leq 0$.

20. $z + i \geq 1, Re z \geq 0$.

21. $z + i \geq 1, Re z \leq 0$.

22. $z - 3 \leq 1, Re z \geq 3$.

23. $z + i \leq 1, Im z \geq -1$.

24. $z - 1 \leq 2, Re z \geq 2$.

25. $z - 3 \leq 3, Im z \leq 0$.

26. $z + 1 - i \leq 1, Im z \geq 1$.

27. $\frac{\pi}{4} \leq arg z \leq \frac{\pi}{2}$.

28. $z + i \leq 1, Im z \leq -1$.

29. $z - i \geq 1, Im z \geq 1$.

30. $z \geq 2, \frac{\pi}{2} \leq arg z \leq \pi$.

31. $Re z \geq 1, Im z \geq 1$.

32. $z + i \geq 1, Im z \geq -1$.

33. $z - 1 \leq 2, Re z \leq 2$.

34. $z = 2, \ arg z \leq \frac{\pi}{2}$.

35. $z + 3 \leq 1, Re z \leq -3$.

36. $z + i \geq 1, Im z \leq -1$.

Список литературы

1. Баврин, И. И. Высшая математика: Учеб. для студ. естественно-научных специальностей педагогических вузов. – 3-е изд., стереотип. – М.: Издательский центр «Академия», 2003.– 616 с.

2. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Н. Ш. Кремер и др.]; под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 479 с.

3. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. Пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – 7-е изд., испр.– Москва: АСТ: Мир и Образование, 2014.– 816 с.: ил.

4. Красс, М. С., Чупрынов, Б. П. Основы математики и её приложения в экономическом образовании: Учеб. / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов – М.: Дело, 2000. – 688 с.

5. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под ред Н. Ш. Кременра. – 4-е изд., перераб. И доп. – М.: Издательство Юрайт, 2013.– 909 с.– Серия: Бакалавр. Углублённый курс.

6. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры: Учебник. 17-е изд., стер. / А. Г. Курош – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 432 с.

7. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.

8. Практикум по высшей математике для экономистов: Учеб. пособие для вузов / Кремер Н. Ш., Тришин И. М., Путко Б. А. и др.; Под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 423 с.

9. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч.1 / Д. Т. Письменный. – 12-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2013.– 288 с.

10. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре. Учебное пособие. / И. В. Проскуряков. – 13-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2010 – 480 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

Учебное издание

Деменева Надежда Валерьевна

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
Сборник задач

Подписано в печать 11.02.2016 г. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 2,0. Тираж 130 экз. Заказ № 28

ИПЦ «Прокростъ»
Пермской государственной сельскохозяйственной академии
имени академика Д.Н. Прянишникова
614990, г. Пермь, ул. Петропавловская, 23, тел. (342) 210-35-34