Т. А. СУХАЯ
В. Ф. БУБНОВ

ЗАДАЧИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ I

Т. А. СУХАЯ
В. Ф. БУБНОВ

ЗАДАЧИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В двух частях

Часть 1

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для инженерно-технических специальностей втузов

Минск
«Вышэйшая школа»
1993

ББК 22.11я73
С91
УДК 51 (075.8)

Рецензенты: кафедра высшей математики Белорусского аграрно-технического университета; кафедра высшей математики Минского радиотехнического института

Сухая Т. А., Бубнов В. Ф.
С91 Задачи по высшей математике: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1.— Мн.: Выш. шк., 1993.—416 с.: ил.
ISBN 5-339-00683-2.

Содержатся краткие теоретические сведения, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения по следующим разделам: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, введение в математический анализ, производная и ее приложения, неопределенный интеграл, определенный интеграл.

Для студентов инженерно-технических специальностей вузов всех форм обучения, ИТР, а также для тех, кто самостоятельно изучает курс высшей математики.

$С\frac{1602010000-101}{М304(03)-93}13-92$ ББК 22.11я73

Учебное издание

Сухая Тамара Александровна, Бубнов Владимир Федорович

ЗАДАЧИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В двух частях

Часть 1

Заведующий редакцией *Л. Д. Духвалов.* Редактор *М. С. Молчанова.* Оформление и художественное редактирование *А. Г. Звонарева.* Технический редактор *Г. М. Романчук.* Корректоры *И. И. Ганелес, В. В. Неверко, Л. А. Шлыкович*

ИБ № 3251

Сдано в набор 30.09.91. Подписано в печать 16.11.92. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 21,84. Усл. кр.-отт. 21,84. Уч.-изд. л. 24,43. Тираж 5000 экз. Зак. 1699. Цена 54 р.

Издательство «Вышэйшая школа» Министерства информации Республики Беларусь. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа. 220005. Минск, ул. Красная, 23.

ISBN 5-339-00683-2 (ч. 1)
ISBN 5-339-00682-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое вниманию читателя учебное пособие составлено на основе опыта многолетнего преподавания авторами курса высшей математики в Белорусской политехнической академии. Оно написано в соответствии с программой курса высшей математики в объеме 350—400 часов для инженерно-технических специальностей вузов.

Для освоения курса высшей математики самостоятельная работа студентов является определяющей. При составлении настоящего пособия авторы стремились: во-первых, оказать помощь студентам в самостоятельном овладении методами решения задач по курсу высшей математики, во-вторых, дать достаточное число упражнений для выработки навыков решения типовых задач, в-третьих, привести задачи, способствующие разъяснению основных математических понятий и их взаимосвязи. Это и определило структуру пособия. В начале каждого параграфа даются краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач, затем приводятся типовые примеры с подробными решениями и задачи для самостоятельного решения с ответами. (В данном пособии был использован ряд задач, взятых из известных сборников задач по высшей математике.)

У настоящего учебного пособия достаточно широкий адрес. Оно может быть использовано студентами инженерно-технических специальностей вузов всех форм обучения при подготовке к практическим занятиям, выполнении контрольных работ и индивидуальных заданий, а также преподавателями втузов при проведении практических занятий и организации самостоятельной работы студентов. Кроме того, пособие может быть полезно инженерам, а также тем, кто самостоятельно изучает высшую математику.

Пособие состоит из двух частей. В первую часть включены следующие разделы: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, введение в математический анализ, производная и ее приложения, неопределенный интеграл, определенный интеграл.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам — коллективу кафедры высшей математики Белорусского аграрно-технического университета (заведующий кафедрой — доктор физико-математических наук, профессор А. П. Рябушко) и коллективу кафедры высшей математики Минского радиотехнического института (заведующий кафедрой — доктор физико-математических наук, профессор Л. А. Черкас) — за ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению книги.

Все отзывы и пожелания просьба присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексная плоскость. Алгебраическая форма комплексного числа. Известно, что действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами. Простейшим из квадратных уравнений, не имеющих корней среди действительных чисел, является

$$x^2 + 1 = 0.$$

Необходимо расширить множество действительных чисел до такого множества, в котором уравнение $x^2 + 1 = 0$ уже имеет корень. В качестве «материала», из которого будет строиться это множество комплексных чисел, возьмем точки плоскости.

Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат. Условимся обозначать точки плоскости строчными буквами греческого алфавита α, β, γ, ... и записывать точку α с абсциссой a и ординатой b так: (a, b), т. е. $\alpha = (a, b)$.

Суммой точек $\alpha = (a, b)$ *и* $\beta = (c, d)$ будем называть точку

$$\alpha + \beta = (a + c,\ b + d).$$

Произведением точек $\alpha = (a, b)$ *и* $\beta = (c, d)$ называется точка

$$\alpha\beta = (a, b)(c, d) = (ac - bd,\ ad + bc).$$

Эти две операции обладают всеми основными свойствами, присущими операциям в множестве действительных чисел: они коммутативны, ассоциативны, дистрибутивны и для них существуют *обратные операции*: вычитание и деление (кроме деления на нуль).

Разностью $\alpha - \beta$ *точек* $\alpha = (a, b)$ *и* $\beta = (c, d)$ называется точка (x, y), такая, что $(c, d) + (x, y) = (a, b)$, $(c + x,\ d + y) = (a, b)$. Отсюда $c + x = a$, $d + y = b$. Тогда $x = a - c$, $y = b - d$. Итак,

$$\alpha - \beta = (a, b) - (c, d) = (a - c,\ b - d).$$

Точка $O(0, 0)$ является *нулевой*. *Точкой, противоположной* $\alpha = (a, b)$, будет точка $-\alpha = (-a, -b)$.

Частным $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{(a, b)}{(c, d)}$ *точек* $\alpha = (a, b)$ *и* $\beta = (c, d)$ называется точка (x, y), такая, что выполняется равенство $\dfrac{(a, b)}{(c, d)} = (x, y)$. Отсюда $(a, b) = (c, d)(x, y)$ или $(a, b) = (cx - dy,\ dx + cy)$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} cx - dy &= a, \\ dx + cy &= b. \end{aligned}\right\}$$

Решая полученную систему, находим:

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Положив $\beta = \alpha$, получим

$$(a, \ b)(a, \ b) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \ \frac{ab-ab}{a^2+b^2}\right) = (1, \ 0),$$

т. е. единицей при умножении служит точка $(1, \ 0)$.

При $\alpha = 1$ имеем

$$\frac{1}{\beta} = \beta^{-1} = \left(\frac{c}{c^2+d^2}, \ \frac{-d}{c^2+d^2}\right),$$

т. е. точку, обратную точке $\beta = (c, \ d)$.

Таким образом, построено множество чисел, изображаемых точками плоскости, и определены операции над этими числами. Это множество называется *множеством комплексных чисел* и обозначается **C**.

Рассмотрим точки, лежащие на оси абсцисс, т. е. точки вида $(a, \ 0)$. Ставя в соответствие точке $(a, \ 0)$ действительное число a, получаем взаимно однозначное соответствие между указанным множеством точек и множеством всех действительных чисел. Применяя к точкам $(a, \ 0)$ формулы сложения и умножения, имеем:

$$(a, \ 0) + (b, \ 0) = (a+b, \ 0),$$
$$(a, \ 0)(b, \ 0) = (ab - 0, \ a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, \ 0).$$

Таким образом, точки $(a, \ 0)$ складываются и перемножаются друг с другом как действительные числа.

Покажем, что среди комплексных чисел содержится корень уравнения $x^2 + 1 = 0$, т. е. такое число, квадрат которого равен действительному числу -1. Это точка $(0, \ 1)$, лежащая на оси ординат. Действительно,

$$(0, \ 1)(0, \ 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, \ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, \ 0) = -1.$$

Условимся обозначать эту точку буквой $i = (0, \ 1)$, так что $i^2 = -1$. Используют также запись $\sqrt{-1} = i$. Тогда:

$$ib = (0, \ 1)(b, \ 0) = (0 \cdot b - 1 \cdot 0, \ 0 \cdot 0 + 1 \cdot b) = (0, \ b),$$
$$\alpha = (a, \ b) = (a, \ 0) + (0, \ b) = a + ib.$$

Комплексное число i называют *мнимой единицей*, число a — *действительной частью числа* α (обозначают $a = \operatorname{Re} \alpha$), а число ib — его *мнимой частью* (обозначают $ib = \operatorname{Im} \alpha$). Выражение $a + ib$ называется *алгебраической формой комплексного числа* α.

Плоскость, все точки которой отождествлены с комплексными числами, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс этой плоскости называется *действительной осью*, так как ее точки изображают действительные числа, а ось ординат — *мнимой осью*.

Число $a - ib$ называется *сопряженным* к числу $\alpha = a + ib$ и обозначается $\bar{\alpha}$.

Приведем *операции над комплексными числами в алгебраической форме:*

1) $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$;
2) $(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$;
3) $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$;
4) $\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\dfrac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+$
$+i\,\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Число $r=\sqrt{x^2+y^2}$ называется *модулем комплексного числа* $z=x+iy$ и обозначается $|z|$. Модуль числа z равен расстоянию от точки M, изображающей это число, до начала координат (рис. 1.1).

Всякое решение φ системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= x/\sqrt{x^2+y^2},\\ \sin\varphi &= y/\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}\right\}$$

называется *аргументом комплексного числа* $z=x+iy$. Все аргументы числа z различаются на целые, кратные 2π, и обозначаются единым символом $\operatorname{Arg} z$. Каждое значение аргумента совпадает с величиной φ некоторого угла, на который следует повернуть ось Ox до совпадения ее с радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$ точки M (при этом $\varphi > 0$, если поворот совершается против хода часовой стрелки, и $\varphi < 0$ в противном случае).

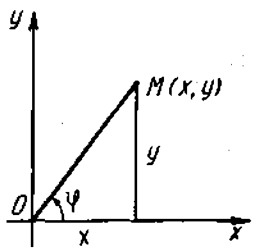


Рис 1.1

Значение $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \operatorname{Arg} z < 2\pi$, называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$. В некоторых случаях главным значением аргумента называют значение $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$.

Для всякого комплексного числа справедливо равенство

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $|z| = r$; $\varphi = \arg z$. Такая форма записи называется *тригонометрической формой комплексного числа z.*

Операции над комплексными числами в тригонометрической форме имеют следующий вид:

1) $z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+$
$+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$;
2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$;
3) $z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется такое комплексное число z_k, n-я степень которого равна подкоренному числу. Справедлива формула

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad (1.1)$$

где $\sqrt[n]{r}$ — арифметический корень степени n; $k=\overline{0, n-1}$. Геометрически эти n значений корня z_k представляют собой вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[n]{r}$ с центром в точке $O(0, 0)$. Вершины n-угольника имеют полярные координаты $\left(\sqrt[n]{r}, \frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, $k=\overline{0, n-1}$.

Примеры

1. Выполнить следующие действия:

а) $(1+2i)(4-3i)$; б) $(1-i)^3-(1+i)^3$;

в) $\frac{6-i}{3+2i}$.

Решение. а) $(1+2i)(4-3i)=4+8i-3i-6i^2=$ $=|i^2=-1|^*=10+5i$.

б) Применим формулы сокращенного умножения:

$$(1-i)^3-(1+i)^3=((1-i)-(1+i))((1-i)^2+$$
$$+(1-i)(1+i)+(1+i)^2)=(-2i)(1-2i+i^2+1-i^2+$$
$$+1+2i+i^2)=(-2i)(3+i^2)=|i^2=-1|=-4i.$$

в) Умножив числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю, получим

$$\frac{6-i}{3+2i}=\frac{(6-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{18-3i-12i+2i^2}{9-4i^2}=$$
$$=\frac{16-15i}{13}=\frac{16}{13}-\frac{15}{13}i.$$

2. Найти корни квадратного уравнения:

а) $x^2+4x+13=0$; б) $4x^2-2x+1=0$.

Решение. а) По формуле корней квадратного уравнения имеем:

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-13}=-2\pm 3i,$$
$$x_1=-2+3i,\ x_2=-2-3i.$$

б) Имеем:

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-16}}{8}=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{8}=$$
$$=\frac{2\pm 2\sqrt{3}i}{8}=\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}i,$$

---

* Здесь и далее при записи решений примеров все промежуточные выкладки мы будем заключать между вертикальными линиями.

$$x_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad x_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i.$$

3. Найти действительные корни уравнения

$$(1+i)x + (-2+5i)y = -4 + 17i.$$

Решение. Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части:

$$(x-2y) + i(x+5y) = -4 + 17i.$$

Приравняв действительные и мнимые части, получим:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= -4, \\ x + 5y &= 17, \end{aligned}\right\}$$

откуда $7y = 21$, $y = 3$, $x = 17 - 5y = 2$.

4. Представить в тригонометрической форме числа, изображенные на рис. 1.2: а) $z_1 = 1 + i$; б) $z_2 = -\sqrt{3} - i$; в) $z_3 = 2i$; г) $z_4 = -5$.

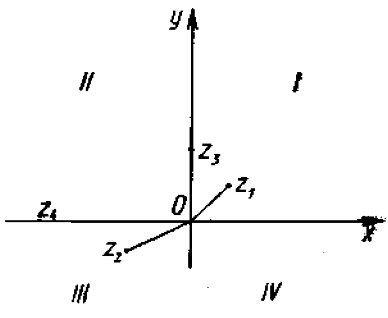


Рис. 1.2

Решение. а) Имеем: $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\varphi_1 = 1/\sqrt{2}$, $\sin\varphi_1 = 1/\sqrt{2}$, $\varphi_1 = \pi/4$, $\arg z_1 = \pi/4$. Тогда

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

б) Число $|z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$, $\cos\varphi_2 = -\sqrt{3}/2$, $\sin\varphi_2 = -1/2$; следовательно, точка z_2 находится в третьем квадранте. Тогда $\arg z_2 = 7\pi/6$ или $\arg z_2 = -5\pi/6$, а

$$z_2 = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right).$$

или

$$z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right).$$

в) Имеем: $|z_3| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$, $\arg z_3 = \pi/2$,

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

г) Так как $|z_4| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$, а $\arg z_4 = \pi$, то получаем

$$z_4 = 5(\cos\pi + i\sin\pi).$$

5. Вычислить $(-\sqrt{3} - i)^5$:

Решение. Запишем в тригонометрической форме число $-\sqrt{3} - i$:

$$-\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right).$$

Тогда

$$(-\sqrt{3} - i)^5 = 2^5\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right)^5 = 2^5\left(\cos\frac{35}{6}\pi + \right.$$

$$\left. + i\sin\frac{35}{6}\pi\right) = 32(\cos(6\pi - \pi/6) + i\sin(6\pi - \pi/6)) =$$

$$= 32\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 32(\sqrt{3}/2 - i/2) = 16(\sqrt{3} - i).$$

6. Найти $\sqrt[3]{-8}$.

Решение. Запишем -8 в тригонометрической форме:

$$-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Применив формулу (1.1), получим

$$\sqrt[3]{8(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right),$$

где $k = 0, 1, 2$. Подставляя значения k, получаем:

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3},$$
$$z_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2(-1 + i\cdot 0) = -2,$$
$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Точки z_0, z_1, z_2 располагаются на окружности радиусом 2 с центром в точке $O(0, 0)$ и делят ее на три равные части (рис. 1.3).

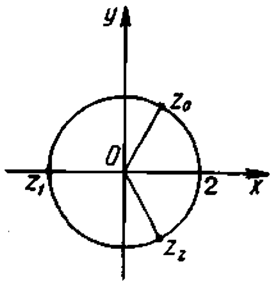


Рис. 1.3

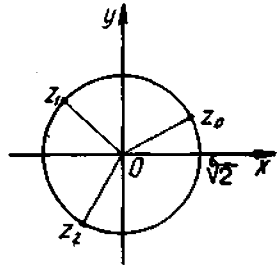


Рис. 1.4

7. Найти $\sqrt[3]{1+i}$.

Решение. Запишем число $1+i$ в тригонометрической форме. Имеем $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Так как $\cos\varphi = 1/\sqrt{2}$, $\sin\varphi = 1/\sqrt{2}$, то $\arg z = \pi/4$ и

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Применив формулу (1.1), получим

$$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/4+2k\pi}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi\right)\right),$$

где $k=0, 1, 2$. Для конкретных значений k имеем:

$$z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),\quad z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

Точки z_0, z_1, z_2 расположены на окружности радиусом $\sqrt[6]{2}$ и делят ее на три равные части (рис. 1.4).

8. Решить уравнение $z^4+1=0$.

Решение. Так как $z^4 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$, то корни уравнения

$$z_k = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1(\cos\pi + i\sin\pi)} = \\ = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right),$$

где $k = \overline{0, 3}$. Для конкретных значений k получим:

$$z_0 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$z_1 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$z_2 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$z_3 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

9. Определить множество точек, удовлетворяющих данному условию: а) $\operatorname{Re} z = 5$; б) $\operatorname{Im} z^2 = 1$; в) $|z - i| < 3$.

Решение. а) Условие $x = 5$ задает прямую, параллельную оси Oy (рис. 1.5).

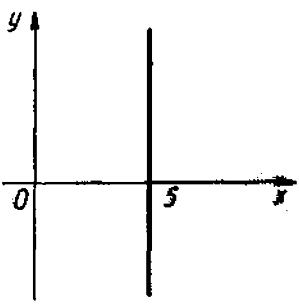


Рис. 1.5

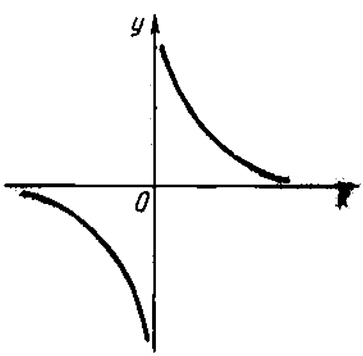


Рис. 1.6

б) Так как

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

то $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$, и по условию $2xy = 1$ или $y = \frac{1}{2x}$ (гипербола) (рис. 1.6).

в) Имеем:

$$|x+iy-i|<3,\ |x+i(y-1)|<3,$$
$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}<3,\ x^2+(y-1)^2<9.$$

Это внутренность круга с центром в точке $(0, 1)$ и радиусом, равным 3 (рис. 1.7).

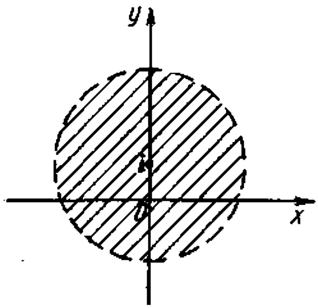


Рис. 1.7

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Выполнить следующие действия:

1) $(1+2i)(2-i)$; 2) $(2+3i)(2-3i)$; 3) $(4-5i)^2$;
4) $(1+2i)^3$; 5) $\frac{2+i}{2-i}$; 6) $\frac{5i}{2+i}$.

(*Ответ:* 1) $3+3i$; 2) 13; 3) $-9-40i$; 4) $-11-2i$; 5) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$; 6) $1+2i$.)

1.2. Решить уравнение:

1) $x^2+9=0$; 2) $x^2-2x-8=0$; 3) $x^2+6x-16=0$.

(*Ответ:* 1) $\pm 3i$; 2) $1\pm 3i$; 3) $-3\pm 5i$.)

1.3. Найти действительные решения уравнения

$$(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i.$$

(*Ответ:* $x=-4/11$, $y=5/11$.)

В задачах 1.4—1.7 выполнить указанные действия.

1.4. 1) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 1)\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2};\ 2)\ 1.\right)$

1.5. 1) $(-1+i)^5$; 2) $(\sqrt{3}+i)^5$; 3) $\frac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^6}$.
(*Ответ:* 1) $4(1-i)$; 2) $16(-\sqrt{3}+i)$; 3) $-1/4$.)

1.6. 1) $(1-i)^6$; 2) $(\sqrt{3}-i)^6$; 3) $(2+i\sqrt{12})^5$.
(*Ответ:* 1) $8i$; 2) -64; 3) $512(1-i\sqrt{3})$.)

1.7. 1) $(1+2i)^6$; 2) $(1+2i)^5-(1-2i)^5$;
3) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$.
$\left(\textit{Ответ:}\ 1)\ 117+44i;\ 2)\ -76i;\ 3)\ \frac{-44+5i}{-318}.\right)$

1.8. Найти все значения $\sqrt[6]{1}$ и изобразить их точками на комплексной плоскости. $\left(\textit{Ответ:}\ \cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3},\ k=\overline{0,\ 5}.\right)$

1.9. Записать в тригонометрической форме следующие комплексные числа: 1) $z=-4$; 2) $z=3i$; 3) $z=-2$; 4) $z=2-2i$; 5) $z=1+i\sqrt{3}$; 6) $z=2-i\sqrt{12}$; 7) $z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$. (*Ответ:* 1) $4(\cos\pi+i\sin\pi)$; 2) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; 4) $2\sqrt{2}(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))$; 5) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 6) $4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$; 7) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.)

1.10. Вычислить: 1) $\sqrt[3]{i}$; 2) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 3) $\sqrt[6]{-1}$.
$\left(\textit{Ответ:}\ 1)\ -i,\ \frac{i\pm\sqrt{3}}{2};\ 2)\ 1+i,\ -1{,}36+0{,}365i,\ 0{,}365-1{,}36i;\ 3)\ \pm i,\ \frac{\sqrt{3}\pm i}{2},\ \frac{-\sqrt{3}\pm i}{2}.\right)$

1.11. Выполнить указанные действия:
1) $\sqrt[3]{-1+i}$; 2) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$.
(*Ответ:* 1) $\sqrt[6]{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\varphi=45°$; $165°$; $285°$; 2) $\pm(\sqrt{3}+i)$, $\pm(1-\sqrt{3}i)$.)

1.12. Решить уравнение:
1) $z^3-8=0$; 2) $z^4+4=0$.

(*Ответ*: 1) 2; $-1\pm\sqrt{3}i$; 2) $\pm1\pm i$.)

1.13. Решить уравнение:

1) $z^4-3z^2+4=0$; 2) $z^4-30z^2+289=0$.

(*Ответ*: 1) $\pm\sqrt{7}/2\pm i/2$; 2) $\pm4\pm i$.)

1.14. Изобразить множество точек, удовлетворяющих неравенству: 1) $|z|<2$; 2) $|z-1-i|<1$. (*Ответ*: 1) внутренность круга радиусом 2 с центром в начале координат; 2) внутренность круга радиусом 1 с центром в точке (1, 1).)

В задачах 1.15—1.17 выполнить указанные действия.

1.15. 1) $(1+i)^{25}$; 2) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$; 3) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$.

(*Ответ*: 1) $2^{12}(1+i)$; 2) $2^9(1-\sqrt{3}i)$; 3) $(2-\sqrt{3})^{12}$.)

1.16. 1) $\sqrt[3]{2-2i}$; 2) $\sqrt[4]{-4}$; 3) $\sqrt[6]{-27}$. (*Ответ*: 1) $-1+$ $+i$, $\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $\frac{1-\sqrt{3}}{2}-i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 2) $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$; 3) $\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}i$; $\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$.)

1.17. 1) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; 2) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; 3) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}}$. (*Ответ*: 1) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+19}{72}\pi+i\sin\frac{24k+19}{72}\pi\right)$, $k=\overline{0,\ 5}$;

2) $\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{24k+5}{96}\pi+i\sin\frac{24k+5}{96}\pi\right)$, $k=\overline{0,\ 7}$;

3) $\left(\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\cos\frac{24k+17}{72}\pi+i\sin\frac{24k+17}{72}\pi\right)$, $k=\overline{0,\ 5}$.)

1.2. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Матрицей размеров m на n ($m\times n$) называется прямоугольная таблица, составленная из mn элементов некоторого множества. Будем пользоваться следующими обозначениями матрицы:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ или } A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрица, элементами которой являются числа, называется *числовой*.

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ составляют i-ю *строку*, а элементы $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ — j-й *столбец матрицы*.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной*. В квадратной матрице

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ составляют *главную диагональ*.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю; ее обозначают буквой O.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие не на главной диагонали, равны нулю. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной* и обозначается буквой E.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем ж номером, называется *транспонированной*. Ее обозначают A^T.

Операции сложения и вычитания вводятся только для матриц одинаковых размеров.

Суммой (разностью) матриц $A_{m\times n}$ *и* $B_{m\times n}$ называется такая матрица $C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n}$, что $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ *на число* α называется матрица $B_{m\times n}$, такая, что $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Произведение матрицы A на число α обозначается αA или $A\alpha$.

Произведение матрицы A на матрицу B вводится только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, т. е. если A — матрица размеров $m \times n$, а B — размеров $n \times k$.

Произведением AB *матрицы* $A_{m\times n}$ *на матрицу* $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}$, элементы которой c_{ij} находятся по формуле

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}.$$

Из определения следует, что элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A и соответствующих элементов j-го столбца матрицы B.

Если матрицу A можно умножить на матрицу B, то из этого, вообще говоря, не следует, что B можно умножить на A.

Справедливы следующие *свойства операций сложения и умножения матриц* (при условии, что они имеют смысл):

1) $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$;

2) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$;

3) $AB \neq BA$, $A(BC) = (AB)C$;

4) $A(B + C) = AB + AC$, $C(A + B) = CA + CB$.

Целой положительной степенью $A^k (k > 1)$ *квадратной матрицы* называется произведение k матриц, каждая из которых равна A. *Нулевой степенью квадратной матрицы* A называется единичная матрица E того же порядка, что и A, т. е. $A^0 = E$.

Выражение $P(A) = a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_kE$ называется *многочленом от матрицы* A. Если $P(A)$ — нулевая матрица, то A называется *корнем многочлена*.

Примеры

1. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-3 & 0 & -1\\ -4 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Найти $3A+2B$.

Решение. Матрица

$$3A+2B=\begin{bmatrix}9 & 6 & 0\\ 3 & 6 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & 0 & -2\\ -8 & 2 & 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 6 & -2\\ -5 & 8 & -7\end{bmatrix}.$$

2. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию $3A+2X=E$, если

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 6\\ 4 & 3 & -8\\ 2 & -2 & 5\end{bmatrix}.$$

Решение. Выражая X из данного равенства, получаем

$$X=\frac{1}{2}(E-3A)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -6 & 18\\ 12 & 9 & -24\\ 6 & -6 & 15\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 6 & -18\\ -12 & -8 & 24\\ -6 & 6 & -14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -9\\ -6 & -4 & 12\\ -3 & 3 & -7\end{bmatrix}.$$

3. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}.$$

Выяснить, существуют ли произведения AB и BA, и, если они существуют, найти их.

Решение. Произведение AB существует, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B:

$$C_{2\times 3}=A_{2\times 2}B_{2\times 3}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 2 & 4 & -8 \end{bmatrix}.$$

Здесь:

$c_{11}=3\cdot 1+(-1)\cdot 1=2,\quad c_{12}=3\cdot 3+(-1)\cdot 4=5,$
$c_{13}=3(-1)+(-1)\cdot 2=-5,\ c_{21}=4\cdot 1+(-2)\cdot 1=2,$
$c_{22}=4\cdot 3+(-2)\cdot 4=4,\quad c_{23}=4(-1)+(-2)\cdot 2=-8.$

Таким образом,

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 2 & 4 & -8 \end{bmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

4. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Выяснить, существуют ли произведения AB и BA, и, если они существуют, найти их.

Решение. Произведение AB существует, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Тогда

$$C_{4\times 2}=A_{4\times 4}B_{4\times 2}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -15 \\ 31 & 1 \\ -1 & 18 \\ 22 & -5 \end{bmatrix}.$$

Здесь:

$c_{11}=(-1)\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 5+(-5)\cdot 3=0,$
$c_{12}=(-1)(-3)+2\cdot 4+3(-2)+(-5)\cdot 4=-15,$
$c_{21}=1\cdot 2+0\cdot 1+4\cdot 5+3\cdot 3=31,$
$c_{22}=1(-3)+0\cdot 4+4(-2)+3\cdot 4=1,$
$c_{31}=(-2)\cdot 2+3\cdot 1+0\cdot 5+0\cdot 3=-1,$
$c_{32}=(-2)(-3)+3\cdot 4+0(-2)+0\cdot 4=18,$

$$c_{41}=1\cdot 2+(-1)\cdot 1+3\cdot 5+2\cdot 3=22,$$
$$c_{42}=1(-3)+(-1)\cdot 4+3(-2)+2\cdot 4=-5.$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

5. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 5 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Выяснить, существуют ли произведения AB и BA, и, если существуют, найти их.

Решение. Произведение AB существует, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Вычисляем:

$$C_{3\times 3}=A_{3\times 2}B_{2\times 3}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 5 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}(-1)(-2)+0\cdot 3 & (-1)\cdot 5+0\cdot 0 & (-1)\cdot 1+0\cdot 1\\ 2\cdot(-2)+3\cdot 3 & 2\cdot 5+3\cdot 0 & 2\cdot 1+3\cdot(-1)\\ 4\cdot(-2)+1\cdot 3 & 4\cdot 5+1\cdot 0 & 4\cdot 1+1\cdot(-1)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -5 & -1\\ 5 & 10 & -1\\ -5 & 20 & 3\end{bmatrix}.$$

Произведение BA также существует, так как число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы A. Находим:

$$P_{2\times 2}=B_{2\times 3}A_{3\times 2}=\begin{bmatrix}-2 & 5 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}(-2)(-1)+5\cdot 2+1\cdot 4 & (-2)\cdot 0+5\cdot 3+1\cdot 1\\ 3\cdot(-1)+0\cdot 2+(-1)\cdot 4 & 3\cdot 0+0\cdot 3+(-1)\cdot 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}16 & 16\\ -7 & -1\end{bmatrix}.$$

6. Найти $f(A)$, если $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}$, $f(x)=3x^2-2x+4$.

Решение. Матрица

$$f(A)=3A^2-2A+4E=3\begin{bmatrix}3&0\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\1&5\end{bmatrix}-$$

$$-2\begin{bmatrix}3&0\\1&5\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}9&0\\8&25\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&0\\2&10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}27&0\\24&75\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&0\\2&10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&0\\22&69\end{bmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.18. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&5\\1&2\\1&3\end{bmatrix}.$$

Найти AB. $\left(\textit{Ответ:}\begin{bmatrix}1&5\\3&10\\2&9\end{bmatrix}.\right)$

1.19. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}3&-2\\5&-4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&4\\2&5\end{bmatrix}.$$

Проверить, верно ли равенство $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$. (*Ответ:* нет.)

1.20. Вычислить A^3, если

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&3\end{bmatrix}.\ \left(\textit{Ответ:}\begin{bmatrix}15&20\\20&35\end{bmatrix}.\right)$$

1.21. Вычислить A^2, если

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}.\ \left(\textit{Ответ:}\begin{bmatrix}7&4&4\\9&4&3\\3&3&4\end{bmatrix}.\right)$$

1.22. Вычислить $AB-BA$, если:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&2\\-1&2&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&1&-2\\3&-2&4\\-3&5&-1\end{bmatrix}$$

$\left(Ответ: \begin{bmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}. \right)$

1.23. Доказать, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

является корнем многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

1.24. Найти $2f(A) - 3\varphi(A)$, если: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 4$, $\varphi(x) = x^2 - 2x + 1$. $\left(Ответ: \begin{bmatrix} -18 & 40 \\ 0 & 62 \end{bmatrix}. \right)$

1.25. Найти AB, если:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & -3 \\ 9 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \\ 16 & 24 & 8 \end{bmatrix}.$$

$\left(Ответ: \begin{bmatrix} -24 & -48 & 0 \\ -40 & -80 & 0 \\ -32 & -64 & 0 \\ -72 & -80 & 0 \end{bmatrix}. \right)$

1.26. Вычислить AB, если:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\left(Ответ: \begin{bmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \end{bmatrix}. \right)$

1.27. Найти $f(A)$, если:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = 3x^2 - 2x + 5.$$

$$\left(\text{Ответ: } \begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 4 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}.\right)$$

1.28. Даны матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислить ABC. $\left(\text{Ответ: } \begin{bmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{bmatrix}.\right)$

1.29. Найти AB, если:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\text{Ответ: } \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}.\right)$$

1.30. Найти AB, если:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\text{Ответ: } \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 12 \\ -9 & 9 & 4 & -5 \\ 22 & -1 & -9 & 11 \\ 16 & -11 & -11 & 3 \end{bmatrix}.\right)$$

1.31. Доказать, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

является корнем многочлена $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$.

1.32. Дана матрица $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$. Вычислить A^3. $\left(\textit{Ответ:}\ \begin{bmatrix}13 & -14\\ 21 & -22\end{bmatrix}.\right)$

1.33. Вычислить A^5, если

$$A=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{bmatrix}.\ \left(\textit{Ответ:}\ \begin{bmatrix}304 & -61\\ 305 & -62\end{bmatrix}.\right)$$

1.34. Вычислить AB, если

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & 5\\ -2 & 3 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ -3 & 2 & -1\end{bmatrix}.$$

$\left(\textit{Ответ:}\ \begin{bmatrix}11 & 7 & -2\\ 11 & 1 & -3\\ 11 & 16 & 0\end{bmatrix}.\right)$

1.3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Понятие определителя вводится только для квадратной матрицы. Если $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$, то *определителем второго порядка числовой матрицы* A называется число

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Если

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},$$

то *определителем третьего порядка числовой матрицы* A называется число

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-$$
$$-a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Если

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

то *определитель n-го порядка*

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, \; n=1, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}B_{1j}, \; n>1, \end{cases}$$

где B_{1j} — определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием первой строки и j-го столбца.

Пусть дана квадратная матрица порядка n. Выберем в ней произвольно s строк и s столбцов ($1 \leqslant s \leqslant n$). Элементы, стоящие на пересечении s строк и s столбцов, образуют матрицу порядка s. Определитель этой матрицы называется *минором порядка s матрицы* и обозначается M. Минором M', дополнительным к минору M, называется определитель матрицы, полученной в результате вычеркивания тех s строк и s столбцов данной матрицы, которые входят в минор M.

Алгебраическим дополнением минора М называется дополнительный к нему минор M', умноженный на $(-1)^{\sigma}$, где σ — сумма номеров тех строк и столбцов матрицы, которые входят в минор M.

Каждый элемент a_{ij} матрицы n-го порядка является минором первого порядка. Дополнительный минор является определителем порядка $n-1$. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} *элемента* называется минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{j+i}$, т. е. $A_{ij}=(-1)^{j+i}M_{ij}$. Строки и столбцы матрицы называются ее *рядами*. Под двумя *параллельными рядами* будем понимать две строки или два столбца матрицы.

Теорема 1 **(о разложении определителя по элементам ряда).** *Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов некоторого ряда и алгебраических дополнений этих элементов.*

Теорема 2 **(Лапласа).** *Определитель матрицы порядка n равен сумме произведений всевозможных миноров k-го порядка ($k<n$), которые можно составить из произвольно выбранных k параллельных рядов, и алгебраических дополнений этих миноров.*

Приведем *основные свойства определителей.*

1. Величина определителя не изменится, если его строки заменить столбцами с теми же номерами.

2. Если поменять местами два столбца (две строки) определителя, то он изменит знак на противоположный.

3. Если определитель содержит два одинаковых столбца (две одинаковые строки), то он равен нулю.

4. Умножение всех элементов одного ряда определителя на число $k \in \mathbf{R}$ равносильно умножению самого определителя на k.

5. Если все элементы одного из рядов определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

6. Если соответствующие элементы двух рядов определителя пропорциональны, то он равен нулю.

7. Если каждый элемент j-го ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то данный определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, одни из которых в j-м ряду содержит первые из упомянутых слагаемых, а другой — вторые; остальные элементы одинаковы.

8. Если к элементам одного ряда определителя прибавить элементы другого его ряда, умноженные на число $k \in \mathbf{R}$, то величина определителя не изменится.

Примеры

1. Дана матрица

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Вычислить $\det A$ различными способами.

Решение. *I способ.* Непосредственно находим

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}=2(-1)\cdot 7+3\cdot 5\cdot 4+1\cdot 2\cdot 0+$$

$$+1\cdot 0\cdot 4-1\cdot 3\cdot 7+2\cdot 2\cdot 5=73$$

II способ. Применим теорему о разложении определителя по элементам ряда:

$$\det A=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}=(-2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}+$$

$$+3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}=(-2)(-17)-3(-13)=73.$$

2. Используя теорему о разложении определителя по элементам ряда и свойства определителя, вычислить

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение. Применим теорему о разложении определителя ко второй его строке. Согласно свойству 8 определителей, на месте первого и второго элементов второй строки можно получить нули. Для этого прибавим к первому столбцу третий, умноженный на 3, а ко второму столбцу — третий, умноженный на -2. Получим

$$D=\begin{vmatrix} -10 & 11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 3 & 2 \\ 16 & -12 & 5 & 7 \end{vmatrix}=1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -10 & 11 & 1 \\ 8 & -2 & 2 \\ 16 & -12 & 7 \end{vmatrix}.$$

Прибавим первую строку полученного определителя к последней:

$$D=\begin{vmatrix} -10 & 11 & 1 \\ 8 & -2 & 2 \\ 6 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Прибавим ко второй строке последнего определителя первую, умноженную на -2, а к третьей строке — первую, умноженную на -8. Получим

$$D=\begin{vmatrix} -10 & 11 & 1 \\ 28 & -24 & 0 \\ 86 & -89 & 0 \end{vmatrix}.$$

Применив теорему 1 к третьему столбцу этого определителя, найдем

$$D=\begin{vmatrix} -10 & 11 & 1 \\ 28 & -24 & 0 \\ 86 & -89 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 28 & -24 \\ 86 & -89 \end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 86 & -89 \end{vmatrix}=428.$$

3. Вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим к первому столбцу третий, умноженный на -2, ко второму — третий, умноженный на 5, и к четвертому — третий, умноженный на -2. Имеем

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по элементам первой строки:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Прибавив к первой строке последнего определителя вторую, умноженную на -2, получим определитель

$$D=\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложив его по элементам третьего столбца, имеем

$$D=\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -9.$$

4. Используя теорему Лапласа, вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение. Применяя теорему Лапласа к первому и второму столбцам данного определителя, имеем

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 14.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1.35—1.54 вычислить определитель третьего порядка:

1.35. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.
(*Ответ:* -3.)

1.36. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.
(*Ответ:* 1.)

1.37. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.
(*Ответ:* 0).

1.38. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$.
(*Ответ:* 47.)

1.39. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$.
(*Ответ:* 100.)

1.40. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.
(*Ответ:* 1.)

1.41. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$.
(*Ответ:* 20.)

1.42. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$.
(*Ответ:* 6.)

1.43. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$.
(*Ответ:* -202.)

1.44. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.
(*Ответ:* -29.)

1.45. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$
(*Ответ:* -44.)

1.46. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$
(*Ответ:* -48.)

1.47. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$
(*Ответ:* 20.)

1.48. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.
(*Ответ:* -31.)

1.49. $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$
(*Ответ:* 180.)

1.50. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.
(*Ответ:* 18.)

1.51. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.
(*Ответ:* 0.)

1.52. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.
(*Ответ:* $(ab+bc+ca)x+abc$.)

1.53. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* $1+a^2+b^2+c^2$.)

1.54. $\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos 2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos 2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* 0.)

В задачах 1.55—1.64 вычислить определитель четвертого порядка.

1.55. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* 18.)

1.56. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* 4.)

1.57. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* 18.)

1.58. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* 20.)

1.59. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* 27.)

1.60. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* 17.)

1.61. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* 160.)

1.62. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* 900.)

1.63. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* 48.)

1.64. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* 1.)

1.4. ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Матрица A^{-1} называется *обратной* квадратной невырожденной матрице A, если выполняется условие

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Теорема. *Для невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}.*

Если

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

то A^{-1} находят по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где $\Delta_A = \det A$; A_{ij} — алгебраические дополнения к элементам a_{ij} матрицы A.

Рассмотрим *систему n линейных уравнений с n неизвестными:*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

где a_{ij}, b_i ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$) — действительные числа, причем для каждого i имеется хотя бы одно a_{ij}, отличное от нуля.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

называется *матрицей системы (1.2)*.

Если $\det A \neq 0$, то система (1.2) называется *невырожденной*.

Систему уравнений (1.2) можно записать в матричном виде:

$$AX = B,$$

где $X = [x_1 \ \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$; $B = [b_1 \ \ b_2 \ \dots \ b_n]$.

Упорядоченная система чисел (c_1, c_2, ..., c_n) называется *решением системы (1.2)*, если каждое из ее уравнений обращается в верное равенство после подстановки вместо x_1, x_2, ..., x_n чисел c_1, c_2, ..., c_n соответственно. Матрица, составленная из этих чисел, называется *вектор-решением системы (1.2)* и удовлетворяет матричному уравнению $AX = B$.

Невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_j = \Delta_j/\Delta, \ j=\overline{1,\ n},$$

где Δ_j — определитель, полученный из определителя $\Delta = \det A$ заменой j-го столбца столбцом из свободных членов системы.

Решение системы (1.2) можно записать в матричном виде:

$$X = A^{-1}B,$$

где A^{-1} — матрица, обратная к матрице A.

Метод нахождения решения системы (1.2) с использованием формулы $X = A^{-1}B$ называется *матричным*.

Примеры

1. Дана матрица

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу A^{-1}, если она существует.

Решение. Вычисляем

$$\Delta_A = 1\cdot 0\cdot 3 - 2\cdot 5(-1)+4\cdot 2\cdot 3-3\cdot 0(-1)+ \\ +2\cdot 4\cdot 3-5\cdot 2\cdot 1=48.$$

Так как $\Delta_A \neq 0$, то матрица A^{-1} существует:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta_A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Находим а$A^{-1}=\frac{1}{\Delta_A}$ские дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-17,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=8,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=12,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=6,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=10,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=7,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=8.$$

Следовательно,

$$A^{-1}=\frac{1}{48}\begin{bmatrix} -10 & 12 & -10 \\ -17 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5/24 & 1/4 & -5/24 \\ -17/48 & 1/8 & 7/48 \\ 1/6 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

2. Дана матрица

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу A^{-1}, если она существует.

Решение. Так как

$$\Delta_A=1\cdot5\cdot10-3\cdot6(-2)-3\cdot2\cdot4-4\cdot5(-2)+ \\ +3(-3)\cdot10-1\cdot2\cdot6=0,$$

то матрицы, обратной к A, не существует.

3. Дана система уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-\ x_2+x_3&=0, \\ 3x_1-2x_2-x_3&=5, \\ x_1+\ x_2+x_3&=6. \end{aligned}\right\}$$

Решить ее: а) матричным методом; б) по формулам Крамера.

Решение. а) Запишем матрицы:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Вычислим

$$\Delta_A=2(-2)\cdot1+3\cdot1\cdot1+(-1)\cdot1+1\cdot2\cdot1- \\ -1(-1)\cdot2-3(-1)\cdot1=7.$$

Найдем

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=5,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=3,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=5,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-1.$$

Тогда

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1\cdot 0+2\cdot 5+3\cdot 6 \\ -4\cdot 0+1\cdot 5+5\cdot 6 \\ 5\cdot 0-3\cdot 5-1\cdot 6 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 28 \\ 35 \\ -21 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \text{ т. е. } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Отсюда $x_1=4$, $x_2=5$, $x_3=-3$.

б) Вычислим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6+5+12+5=28,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 10+18-5+12=35,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -24-5-10+18=-21.$$

Тогда по формулам Крамера:

$$x_1 = \Delta_1/\Delta = 28/7 = 4, \quad x_2 = \Delta_2/\Delta = 35/7 = 5,$$
$$x_3 = \Delta_3/\Delta = -21/7 = -3.$$

4. Дана система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 16. \end{aligned}\right\}$$

Решить ее: а) матричным методом; б) по формулам Крамера.

Решение. а) Запишем матрицы A и B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Вычислим:

$$\Delta_A = 3-35-8+30-2+14=2,$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -37,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Тогда

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}17 & -5 & -1\\ -37 & 11 & 3\\ -11 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

и

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}17 & -5 & -1\\ -37 & 11 & 3\\ -11 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 16\\ 16\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}102-80-16\\ -222+176+48\\ -66+48+16\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6\\ 2\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ -1\end{bmatrix},$$

т. е. $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=-1$.

б) Вычислим:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}6 & 1 & -2\\ 16 & 3 & -7\\ 16 & 2 & 1\end{vmatrix}=18-112-64+96-16+84=6,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 6 & -2\\ 2 & 16 & -7\\ 5 & 16 & 1\end{vmatrix}=16-64-210+160-12+112=2,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 6\\ 2 & 3 & 16\\ 5 & 2 & 16\end{vmatrix}=48+80+24-90-32-32=-2.$$

По формулам Крамера имеем:

$$x_1=6/2=3,\ x_2=2/2=1,\ x_3=-2/2=-1.$$

5. С помощью формул Крамера решить невырожденную систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}2x_1+3x_2+11x_3+5x_4&=2,\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4&=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4&=-3,\\ x_1+x_2+3x_3+4x_4&=-3.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Вычислим:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & 11 & 5\\ 1 & 1 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 5 & 2\\ 0 & -1 & -7 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&-7&-2\\0&-2&2\end{vmatrix}=$$

$$=-(-14+2-4+2)=14,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2&3&11&5\\1&1&5&2\\-3&1&3&2\\-3&1&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&1&5&2\\0&4&18&8\\0&4&18&10\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}1&1&1\\4&18&8\\4&18&10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\4&18&8\\0&0&2\end{vmatrix}=-28,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&2&11&5\\1&1&5&2\\2&-3&3&2\\1&-3&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1&1\\1&1&5&2\\0&-5&-7&-2\\0&-4&-2&2\end{vmatrix}=$$

$$=1(-1)^3\begin{vmatrix}0&1&1\\-5&-7&-2\\-4&-2&2\end{vmatrix}=$$

$$=-(8+10-28+10)=0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&3&2&5\\1&1&1&2\\2&1&-3&2\\1&1&-3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\1&1&1&2\\0&-1&-5&-2\\0&0&-4&2\end{vmatrix}=$$

$$=1(-1)^3\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&-5&-2\\0&-4&2\end{vmatrix}=-(-10+4-8)=14,$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}2&3&11&2\\1&1&5&1\\2&1&3&-3\\1&1&3&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1&0\\1&1&5&1\\0&-1&-7&-5\\0&0&-2&-4\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^3\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&-7&-5\\0&-2&-4\end{vmatrix}=-(28-10-4)=-14.$$

По формулам Крамера имеем:

$$x_1 = -28/14 = -2,\ x_2 = 0/14 = 0,$$
$$x_3 = 14/14 = 1,\ x_4 = -14/14 = -1.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1.65—1.71 найти обратную матрицу для данной матрицы.

1.65. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $\left(\textit{Ответ:} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\right)$

1.66. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. $\left(\textit{Ответ:} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.\right)$

1.67. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. $\left(\textit{Ответ:} \begin{bmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{bmatrix}.\right)$

1.68. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$. $\left(\textit{Ответ:} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 37 & -29 & 24 \end{bmatrix}.\right)$

1.69. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$. $\left(\textit{Ответ:} \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.\right)$

1.70. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.\right)$

1.71. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\left(\textit{Ответ:}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}.\right)$$

В задачах 1.72, 1.73 найти неизвестную матрицу X из данного уравнения.

1.72. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$ $\left(\textit{Ответ:}\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.\right)$

1.73. $X\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$

$$\left(\textit{Ответ:}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}.\right)$$

В задачах 1.74—1.86 проверить, является ли система линейных уравнений невырожденной, и решить ее по формулам Крамера и матричным методом.

1.74. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

(*Ответ:* $[1 \quad 1 \quad 1]^T$.)

1.75. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

(*Ответ:* $[1 \quad -1 \quad 2]^T$.)

1.76. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

(*Ответ:* $[3 \quad -1 \quad 0]^T$.)

1.77. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

(*Ответ:* $[2 \quad -1 \quad 3]^T$.)

1.78. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

(*Ответ*: $[1 \quad 2 \quad 3]^T$.)

1.79. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -10, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$

(*Ответ*: $[0 \quad 0 \quad -2]^T$.)

1.80. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$

(*Ответ*: $[-2 \quad 1 \quad -1]^T$.)

1.81. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

(*Ответ*: $[-2 \quad 3 \quad -4]^T$.)

1.82. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

(*Ответ*: $[1 \quad 2 \quad 3]^T$.)

1.83. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 13, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$

(*Ответ*: $[-1 \quad -2 \quad -4]^T$.)

1.84. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 16. \end{cases}$

(*Ответ*: $[1 \quad 2 \quad 3]^T$.)

1.85. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

(*Ответ*: $[1 \quad -1 \quad 2]^T$.)

1.86. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

(*Ответ*: $[0 \quad 2 \quad 5/3 \quad -4/3]^T$.)

1.5. РАНГ МАТРИЦЫ. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА — КАПЕЛЛИ. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рангом матрицы A (обозначается r_A) называется наибольший порядок r отличных от нуля миноров матрицы A, а *базисным минором* — любой минор порядка r, отличный от нуля. Если в матрице A имеется отличный от нуля минор порядка k, а все миноры порядка $k+1$ равны нулю, то ранг матрицы A равен k.

Для нахождения ранга матрицы A применяют *метод окаймляющих миноров*. Пусть в матрице A найден минор M k-го порядка, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M. Если все они равны нулю, то ранг матрицы A равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторяется.

Элементарными преобразованиями матрицы называются:

1) умножение некоторого ряда матрицы на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одному ряду матрицы другого, параллельного ему ряда, умноженного на произвольное число;

3) перестановка двух параллельных рядов матрицы.

Теорема 1. *Ранг матрицы, полученной из данной элементарными преобразованиями, равен рангу данной матрицы.*

Рассмотрим систему m уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей системы (1.3)*, а матрица

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

полученная присоединением к A столбца свободных членов,— *расширенной матрицей системы (1.3)*. Легко видеть, что ранг матрицы $\tilde{A}$ либо равен рангу матрицы A, либо на единицу больше последнего. В матричной записи система (1.3) имеет вид

$$AX = B,$$

где $X = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]^T$; $B = [b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_m]^T$.

Упорядоченная совокупность чисел (c_1, c_2, ..., c_n) называется *решением системы (1.3)*, если каждое из уравнений системы (1.3) обращается в верное равенство после подстановки вместо x_1, x_2, ..., x_n соответственно c_1, c_2, ..., c_n. Матрица $C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]^T$ называется *вектор-решением* данной *системы*.

Система (1.3) называется *совместной*, если существует хотя бы одно решение этой системы; в противном случае она называется *несовместной*.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение. Система, имеющая более одного решения, называется *неопределенной*.

Теорема 2 **(Кронекера — Капелли).** *Для того чтобы система (1.3) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.*

Базисными неизвестными совместной системы называют те неизвестные, коэффициенты при которых образуют базисный минор матрицы системы; остальные неизвестные называют *свободными*.

Решение системы линейных уравнений осуществляют следующим образом.

1. Находят ранг матрицы A и ранг расширенной матрицы $\tilde{A}$. Если $r_A \neq r_{\tilde{A}}$, то система несовместна.

2. Если $r_A = r_{\tilde{A}} = r$, выделяют базисный минор и базисные неизвестные.

3. Данную систему заменяют равносильной, состоящей из тех r уравнений, в которые вошли элементы базисного минора.

4. Если $r = n$, т. е. число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера.

5. Если $r < n$, т. е. число базисных неизвестных меньше числа неизвестных системы, то из системы, полученной в п. 3, находят выражение базисных неизвестных через свободные, используя, например, формулы Крамера. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получают бесконечное множество решений исходной системы.

Система (1.3) при $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ называется *однородной*.

Однородная система всегда совместна, так как ранг ее матрицы равен рангу расширенной матрицы.

Набор чисел $x_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, всегда является решением однородной системы. Такое решение называют *тривиальным*.

Однородная система имеет лишь тривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен числу неизвестных ($r = n$). В частности, если число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$), то для того чтобы однородная система имела только нулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Если ранг матрицы системы однородных линейных уравнений меньше числа неизвестных, то множество решений системы бесконечно.

Пусть C_1, C_2, ..., C_k — вектор-решения системы однородных линейных уравнений, а α_1, α_2, ..., α_k — некоторые числа. Тогда вектор $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_k C_k$ называется *линейной комбинацией вектор-решений* C_1, C_2, ..., C_k, а α_1, α_2, ..., α_k — коэффициентами этой комбинации.

Вектор-решения C_1, C_2, ..., C_k называются *линейно зависимыми*, если хотя бы одно из них является линейной комбинацией остальных; в противном случае они называются *линейно независимыми*.

Фундаментальной системой решений системы однородных линейных уравнений называется совокупность максимального числа линейно независимых вектор-решений. Фундаментальная система решений существует тогда и только тогда, когда $r<n$, и содержит $n-r$ решений.

Так как любое решение однородной системы при $r<n$ может быть представлено в виде линейной комбинации решений фундаментальной системы, то формула

$$C=\alpha_1 C_1+\alpha_2 C_2+\ldots+\alpha_{n-r}C_{n-r}, \tag{1.4}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ — произвольные числа, дает общее решение *однородной системы*. Каждое решение, получаемое из формулы (1.4) при конкретных значениях $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$, называют *частным решением однородной системы*.

Фундаментальная система решений может быть найдена следующим образом.

Выделим базисный минор и базисные неизвестные. Не нарушая общности, можно считать базисными неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Выразив их через свободные неизвестные, получим:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=d_{11}x_{r+1}+\ldots+d_{1\ n-r}x_n, \\ x_2=d_{21}x_{r+1}+\ldots+d_{2\ n-r}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r=d_{r1}x_{r+1}+\ldots+d_{r\ n-r}x_n. \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

Возьмем $(n-r)^2$ произвольных чисел c_{ij}, $i, j=\overline{1, n-r}$, таких, что

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1\ n-r} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2\ n-r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-r\ 1} & c_{n-r\ 2} & \ldots & c_{n-r\ n-r} \end{vmatrix}\neq 0. \tag{1.6}$$

В равенствах (1.5) будем придавать свободным неизвестным значения, равные соответственно элементам строк определителя. Полученная таким образом совокупность решений является фундаментальной системой решений. Отметим, что часто определитель (1.6) записывают в виде

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

В этом случае соответствующую фундаментальную систему называют *нормированной*.

Примеры

1. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

Решение. С помощью элементарных преобразований матрицы получим в первом столбце все нули, кроме первого элемента. Для этого первую строку умножим на -2 и прибавим ко второй, затем первую строку прибавим к третьей, после этого первую строку умножим на -1 и прибавим к четвертой. Наконец, первую строку умножим на -3 и прибавим к пятой:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поменяв местами вторую и третью строки полученной матрицы, имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 6 & -10 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножив вторую строку на -3, затем на -6, а после на 4 и прибавив соответственно к третьей, четвертой и пятой строкам, получим

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -14 & -16 & -29 \\ 0 & 0 & -28 & -32 & -58 \\ 0 & 0 & 14 & 16 & 29 \end{bmatrix}.$$

Умножив третью строку на -2, затем на 1 и прибавив соответственно к четвертой и пятой строкам, имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -14 & -16 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Минор

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} = -14 \neq 0.$$

Миноров четвертого порядка, отличных от нуля, нет. Следовательно, $r_A = 3$.

2. Найти ранг матрицы A методом окаймляющих миноров, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Вычисляем:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1.$$

Найден минор второго порядка, отличный от нуля. Вычислим окаймляющие его миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -40 - 3 + 4 - 10 + 1 + 48 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 21 - 8 + 20 + 12 + 7 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 10 - 12 + 12 + 4 + 10 = 0.$$

Так как не существует миноров третьего порядка, отличных от нуля и окаймляющих минор второго порядка, отличный от нуля, то $r_A = 2$.

3. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3, \\ 5x_1 + 8x_2 - 11x_3 + 7x_4 &= -12. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Составим расширенную матрицу данной системы и найдем r_A и $r_{\bar{A}}$ с помощью ее элементарных преобразований:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 5 & 8 & -11 & 7 & -12\end{bmatrix}.$$

Первую строку матрицы умножим на -4 и прибавим ко второй, затем умножим первую строку на -5 и прибавим к третьей строке:

$$\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 9 & -13 & 6 & -11\\ 0 & 18 & -26 & 12 & -22\end{bmatrix}.$$

Затем вторую строку полученной матрицы умножим на -2 и прибавим к третьей:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 9 & -13 & 6 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Минор $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 9\end{vmatrix}=9\neq 0$, отсюда $r_A=r_{\tilde{A}}=2$, т. е. система совместна.

Исходная система равносильна системе

$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-x_4&=2,\\ 9x_2-13x_3+6x_4&=-11.\end{aligned}\right\}$$

В качестве базисных неизвестных возьмем x_1, x_2. Тогда x_3, x_4 — свободные неизвестные. Перенося их в правую часть, получаем:

$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2&=2-3x_3+x_4,\\ 9x_2&=-11+13x_3-6x_4.\end{aligned}\right\}$$

Находим решение полученной системы по формулам Крамера:

$$x_1=\frac{1}{9}\begin{vmatrix}2-3x_3+x_4 & -2\\ -11+13x_3-6x_4 & 9\end{vmatrix}=\frac{1}{9}(-22+26x_3-$$

$$-12x_4+18-27x_3+9x_4)=\frac{1}{9}(-x_3-3x_4-4),$$

$$x_2=\frac{1}{9}(-11+13x_3-6x_4).$$

Пусть $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, где $c_1, c_2\in\mathbf{R}$. Тогда решение имеет вид $\left[\frac{1}{9}(-c_1-3c_2-4)\quad \frac{1}{9}(-11+13c_1-6c_2)\quad c_1\quad c_2\right]^T$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Таким образом, исходная система имеет бесконечное множество решений.

4. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3, \\ x_1 + 3x_2 \qquad - 3x_4 &= 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Исследуем данную систему на совместность:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Минор

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Следовательно, $r_A = r_{\tilde{A}} = 3$. Выберем данный минор за базисный. Исходная система равносильна следующей системе:

$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-4x_4&=4,\\ x_2-x_3+x_4&=-3,\\ 2x_3-4x_4&=12. \end{aligned}\right\}$$

Тогда x_1, x_2, x_3 — базисные неизвестные, x_4 — свободное неизвестное. Перенесем слагаемые с x_4 в правую часть уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3&=4+4x_4,\\ x_2-x_3&=-3-x_4,\\ 2x_3&=12+4x_4. \end{aligned}\right\}$$

Тогда $x_3=6+2x_4$, а по формулам Крамера:

$$x_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 4+4x_4 & 3\\ 0 & -3-x_4 & -1\\ 0 & 12+4x_4 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}(-6-2x_4+12+4x_4)=3+x_4,$$

$$x_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4+4x_4 & -2 & 3\\ -3-x_4 & 1 & -1\\ 12+4x_4 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(8+8x_4+24+8x_4-$$

$$-36-12x_4-12-4x_4)=-8.$$

Полагая $x_4=c$ ($c\in\mathbf{R}$), получаем: $x_1=-8$, $x_2=3+c$, $x_3=6+2c$, т. е. исходная система имеет бесконечное множество решений: $[-8\ \ 3+c\ \ 6+2c\ \ c]^T$, $c\in\mathbf{R}$.

5. Найти фундаментальную систему решений следующей системы:

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3+x_4&=0,\\ 7x_1+5x_2-x_3+2x_4&=0,\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4&=0,\\ 5x_1+7x_2+x_3+4x_4&=0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Находим ранг данной системы:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1\\ 7 & 5 & -1 & 5\\ 3 & 1 & -1 & 2\\ 5 & 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & -16 & -8 & -2\\ 0 & -8 & -4 & -1\\ 0 & -8 & -4 & -1 \end{bmatrix}\to$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & -16 & -8 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

т. е. $r_A = 2$. Возьмем минор $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -16 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$ в качестве базисного. Тогда исходная система равносильна системе

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= -x_3 - x_4, \\ -8x_2 &= 4x_3 + x_4, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$x_2 = -\frac{1}{8}(4x_3 + x_4),$$

$$x_1 = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} -x_3 - x_4 & 3 \\ 4x_3 + x_4 & -8 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(-4x_3 + 5x_4).$$

Положив вначале $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, а затем $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, получим решения $[1/2 \quad -1/2 \quad 1 \quad 0]^T$ и $[-5/8 \quad 1/8 \quad 0 \quad 1]^T$, которые и образуют нормированную фундаментальную систему решений.

Общее решение системы имеет вид $\left[\frac{1}{2}C_1 - \frac{5}{8}C_2 \quad -\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{8}C_2 \quad C_1 \quad C_2\right]^T$, $C_1, \ C_2 \in \mathbf{R}$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1.87—1.92 вычислить ранг матрицы:

1.87. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (*Ответ*: 2.)

1.88. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ (*Ответ*: 2.)

1.89. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$ (*Ответ*: 2.)

1.90. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (*Ответ*: 4.)

1.91. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$

(*Ответ:* 3.)

1.92. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 8 & 13 \end{bmatrix}$.

(*Ответ:* 3.)

В задачах 1.93—1.104 выяснить, совместна ли система уравнений, и, если она совместна, решить ее.

1.93. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

(*Ответ:* $\left[-\frac{11}{7}c \quad -\frac{1}{7}c \quad c\right]^T$, $c \in \mathbf{R}$.)

1.94. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

(*Ответ:* $\left[\frac{3c_1 - 13c_2}{17} \quad \frac{19c_1 - 20c_2}{17} \quad c_1 \quad c_2\right]^T$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.)

1.95. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

(*Ответ:* $[-c_1 + 7c_2/6 \quad c_1 + 5c_2/6 \quad c_1 \quad c_2/3 \quad c_2]^T$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.)

1.96. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

(*Ответ:* $\left[\frac{-4c_1 + 7c_2}{8} \quad \frac{-4c_1 + 5c_2}{8} \quad \frac{4c_1 - 5c_2}{8} \quad c_1 \quad c_2\right]^T$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.)

1.97. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

(*Ответ:* система несовместна.)

1.98. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

(*Ответ:* $[0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; c \;\; c]^T$, $c \in \mathbf{R}$.)

1.99. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 15, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$

(*Ответ:* $[1 \;\; 2 \;\; 3]^T$.)

1.100. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$

$\left(\textit{Ответ: } \left[\frac{1+c_3}{3} \;\; \frac{1+3c_1+3c_2-5c_3}{3} \;\; c_1 \;\; c_2 \;\; c_3\right]^T, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.\right)$

1.101. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

(*Ответ:* $[-c/2 \;\; -1-c/2 \;\; 0 \;\; -1-c/2 \;\; c]^T$, $c \in \mathbf{R}$.)

1.102. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

$\left(\textit{Ответ: } \left[\frac{1+5c}{6} \;\; \frac{1-7c}{6} \;\; \frac{1+5c}{6} \;\; c\right]^T, \; c \in \mathbf{R}.\right)$

1.103. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

(*Ответ:* система несовместна.)

$$
\textbf{1.104.}\begin{cases} 2x_1+3x_2-\ \ x_3+5x_4=0,\\ 3x_1-\ \ x_2+2x_3-7x_4=0,\\ 4x_1+\ \ x_2-3x_3+6x_4=0,\\ \ \ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0.\end{cases}
$$

(*Ответ:* $[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$.)

В задачах 1.105—1.107 найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений.

$$
\textbf{1.105.}\begin{cases} 2x_1+\ \ x_2-\ \ x_3=0,\\ 9x_1+2x_2-3x_3=0.\end{cases}
$$

(*Ответ:* $C=[1\ \ 3\ \ 5]^T$; $[\alpha\ \ 3\alpha\ \ 5\alpha]^T$, $\alpha\in\mathbf{R}$.)

$$
\textbf{1.106.}\begin{cases} 3x_1-6x_2+\ \ 4x_3+\ \ 2x_4=0,\\ 2x_1-4x_2+\ \ 5x_3+\ \ 3x_4=0,\\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0.\end{cases}
$$

(*Ответ:* $C_1=[1\ \ 0\ \ -5/2\ \ 7/2]^T$, $C_2=[0\ \ 1\ \ 5\ \ -7]^T$; $\left[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ -\frac{5}{2}\alpha_1+5\alpha_2\ \ \frac{7}{2}\alpha_1-7\alpha_2\right]^T$, $\alpha_1,\ \alpha_2\in\mathbf{R}$.)

$$
\textbf{1.107.}\begin{cases} 3x_1+2x_2+\ \ x_3+3x_4+5x_5=0,\\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0,\\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0,\\ 3x_1+2x_2+\qquad\ \ 4x_4+8x_5=0.\end{cases}
$$

(*Ответ:* $C_1=[1\ \ 0\ \ 0\ \ -9/4\ \ 3/4]^T$, $C_2=[0\ \ 1\ \ 0\ \ -3/2\ \ 1/2]^T$, $C_3=[0\ \ 0\ \ 1\ \ -2\ \ 1]^T$; $\left[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ -\frac{9}{4}\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_2-2\alpha_3\ \ \frac{3}{4}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2+\alpha_3\right]^T$, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\in\mathbf{R}$.)

1.6. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{R}^3$. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Величины, которые полностью определяются заданием их числовых значений (например, длина, площадь, объем, масса и т. д.), называются *скалярными*.

Величины, для определения которых, кроме числового значения, необходимо знать еще и направление (например, сила, скорость, ускорение и т. д.), называются *векторными*.

Вектором называется направленный отрезок в пространстве или упорядоченная пара точек. Вектор изображается отрезком прямой, на котором указано его направление, и обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\mathbf{a}$.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\mathbf{0}$.

Длина отрезка, изображающего вектор, называется *длиной (модулем) вектора* и обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\mathbf{a}|$ или AB, a.

Векторы, параллельные одной прямой или лежащие на одной прямой, называются *коллинеарными*.

Два вектора называются *равными*, если один из них может быть получен из другого путем параллельного переноса.

Векторы, расположенные в одной плоскости или параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными*.

Произведением вектора $\mathbf{a}$ *на число* $\lambda \in \mathbf{R}$ называется вектор $\mathbf{a}\lambda = \lambda\mathbf{a}$, длина которого $|\lambda\mathbf{a}|$ равна произведению $|\lambda|$ и $|\mathbf{a}|$, т. е. $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda|\,|\mathbf{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$.

Перечислим *свойства операции умножения вектора на число:*

1) для любого вектора $\mathbf{a}$ и чисел α, $\beta \in \mathbf{R}$ справедливо равенство $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$;

2) если $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, то для любого вектора $\mathbf{b}$, коллинеарного $\mathbf{a}$, существует единственное число λ, удовлетворяющее равенству $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* или *ортом*. Для любого вектора $\mathbf{a}$ справедливо равенство $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{a}_0$, где a_0 — единичный вектор.

Суммой двух векторов $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, началом каждого из которых является точка O, называется вектор $\overrightarrow{OC}$ диагонали параллелограмма $OACB$, построенного на векторах $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ (рис. 1.8).

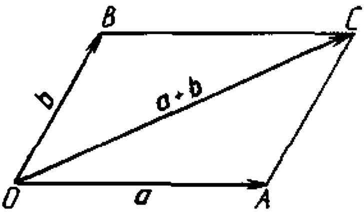


Рис. 1.8

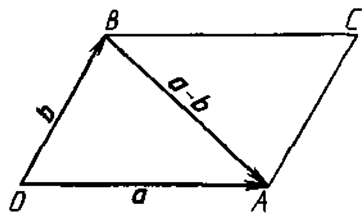


Рис. 1.9

Чтобы найти сумму векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$, нужно конец вектора $\mathbf{a}_1$ совместить с началом вектора $\mathbf{a}_2$, конец вектора $\mathbf{a}_2$ — с началом вектора $\mathbf{a}_3$, конец вектора $\mathbf{a}_3$ — с началом $\mathbf{a}_4$ и т. д., пока не дойдем до вектора $\mathbf{a}_n$. Тогда суммой $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n$ будет вектор, идущий из начала вектора $\mathbf{a}_1$ в конец вектора $\mathbf{a}_n$.

Приведем *свойства операции сложения векторов:*

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;

2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;

3) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, $\lambda \in \mathbf{R}$;

4) $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$, α, $\beta \in \mathbf{R}$.

Разностью двух векторов $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ называется такой вектор $\mathbf{c}$, который нужно сложить с вектором $\mathbf{b}$, чтобы получить вектор $\mathbf{a}$, т. е. $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$, если $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$.

Вектор $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ совпадает с вектором $\overrightarrow{BA}$ диагонали параллелограмма $OACB$, построенного на векторах $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ (рис. 1.9).

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется длина отрезка CD этой оси, заключенного между проекциями на ось l точек A и B, взятая со знаком «+», если направление отрезка CD совпадает с направлением оси l, и со знаком «—», если эти направления противоположны. Обозначается это так: $CD = \text{пр}_l \overrightarrow{AB}$. Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла между ним и осью:

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \alpha.$$

Вектор вида $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{a}_n$, где $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $k = \overline{1, n}$, называется *линейной комбинацией векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Если вектор представлен как линейная комбинация некоторых векторов, то говорят, что он разложен по этим векторам.

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, одновременно не равные нулю, такие, что выполняется равенство

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

В противном случае векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются *линейно независимыми*.

Приведем теоремы, устанавливающие условия линейной зависимости векторов на плоскости и в пространстве.

Теорема 1. *Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы, а два неколлинеарных вектора линейно независимы.*

Теорема 2. *Три компланарных вектора линейно зависимы, а три некомпланарных вектора линейно независимы.*

Базисом на плоскости (в $\mathbf{R}^2$) называют два неколлинеарных вектора этой плоскости, взятых в определенном порядке. Если на плоскости выбран базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, то любой вектор $\mathbf{a}$ этой плоскости можно разложить по векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, и такое разложение единственно.

Базисом в пространстве (в $\mathbf{R}^3$) называют три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке. Если в пространстве $\mathbf{R}^3$ выбран базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, то любой вектор $\mathbf{a}$ можно разложить по векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, и такое разложение единственно.

Если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbf{R}^3$ и вектор $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3$, то числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называют *координатами вектора* $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и записывают: $\mathbf{a} = (\alpha_1; \alpha_2, \alpha_3)$.

При умножении вектора $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ на число $\lambda \in \mathbf{R}$ все его координаты умножаются на это число:

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3).$$

При сложении (вычитании) векторов $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\mathbf{b} = (\alpha_1, \beta_2, \beta_3)$ складываются (вычитаются) их соответствующие координаты:

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \alpha_3 \pm \beta_3).$$

Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность фиксированной точки O и базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Точка O называется *началом координат*, а прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов,— *осями координат*. Прямая Ox называется *осью абсцисс*, прямая Oy — *осью ординат*, прямая Oz — *осью аппликат*. Плоскости, проходящие через оси координат, называют *координатными плоскостями*.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиусом-вектором точки M*. Координаты радиуса-вектора точки M по отношению к точке O называются *коорди-*

натами точки M в данной системе координат. Первая координата называется *абсциссой*, вторая — *ординатой*, третья — *аппликатой*.

Базис называется *ортонормированным*, если базисные векторы попарно ортогональны и длина каждого из них равна единице.

Декартова система координат с ортонормированным базисом $\mathbf{i}=(1, 0, 0)$, $\mathbf{j}=(0, 1, 0)$, $\mathbf{k}=(0, 0, 1)$ называется *прямоугольной системой координат*, а векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — *ортами координатных осей*.

Любой вектор $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$ можно разложить по базису $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ единственным образом, т. е. $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$.

Разложение радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки $M(x, y, z)$ по ортам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ имеет вид $\overrightarrow{OM}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

Если в прямоугольной системе координат даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Направление вектора $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$ определяется углами α, β, γ, образованными вектором $\mathbf{a}$ с положительными направлениями осей Ox, Oy и Oz соответственно. Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами вектора* $\mathbf{a}$ и определяются по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{a}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{a}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{a_z}{a}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

Направляющие косинусы связаны соотношением

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi.$$

Перечислим *основные свойства скалярного произведения векторов:*

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{a})=|\mathbf{a}|^2=a^2$, отсюда $|\mathbf{a}|=\sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$;
2) $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=0$, если $\mathbf{a}=0$, либо $\mathbf{b}=0$, либо $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$;
3) $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=(\mathbf{b}, \mathbf{a})$;
4) $(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b})=(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\lambda\in\mathbf{R}$;
5) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}, \mathbf{b})+(\mathbf{a}, \mathbf{c})$;
6) $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=|\mathbf{a}|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=|\mathbf{b}|\,\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$, следовательно, $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}=\dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|}$.

Если в прямоугольной системе координат векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими координатами: $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z)$, то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

С помощью последней формулы можно найти угол, который образуют векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Примеры

1. Точки K и L являются серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overrightarrow{AK} = \mathbf{k}$ и $\overrightarrow{AL} = \mathbf{l}$, выразить через $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DC}$ (рис. 1. 10).

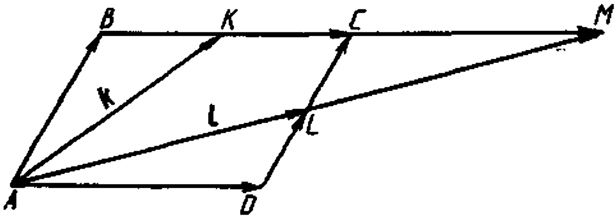


Рис. 1.10

Решение. Из треугольника AKM получаем:

$$\mathbf{k} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AM} = 2\mathbf{l}, \quad \overrightarrow{KM} = 2\mathbf{l} - \mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KM} = \frac{1}{3}(2\mathbf{l} - \mathbf{k}) = \frac{2\mathbf{l} - \mathbf{k}}{3},$$

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BK} = \frac{2(2\mathbf{l} - \mathbf{k})}{3} = \frac{4\mathbf{l} - 2\mathbf{k}}{3}.$$

Из треугольника ADL имеем:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL} = \mathbf{l}, \quad \overrightarrow{DL} = \mathbf{l} - \overrightarrow{AD} = \frac{2\mathbf{k} - \mathbf{l}}{3},$$

$$\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DL}, \quad \overrightarrow{DC} = \frac{2(2\mathbf{k} - \mathbf{l})}{3} = \frac{4\mathbf{k} - 2\mathbf{l}}{3}.$$

2. Угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $60°$, $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 8$. Найти $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ и $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

Решение. Построим параллелограмм на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 1.11). Воспользуемся свойствами скалярного произведения векторов. Имеем:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \ \mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) =$$
$$= |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}, \ \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos 60° + |\mathbf{b}|^2 =$$
$$= 25 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 1/2 + 64 = 129,$$

откуда $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{129}$;

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \ \mathbf{a} - \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \ \mathbf{a}) - (\mathbf{b}, \ \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \ \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \ \mathbf{b}) =$$
$$= |\mathbf{a}|^2 - 2(\mathbf{a}, \ \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60° + 8^2 = 49,$$

откуда $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 7$.

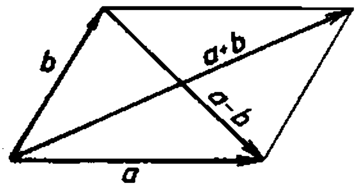


Рис. 1.11

3. Даны вершины четырехугольника $ABCD$: $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$, $D(-5, -5, 3)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{AC}=(-5, 3, -1)$, $\overrightarrow{BD}=(-6, -9, 3)$.

Вычислим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$:

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})=(-5)(-6)+3(-9)+(-1)\cdot 3=0.$$

Отсюда следует, что $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$.

4. Даны векторы: $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-6\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+12\mathbf{k}$. Найти проекцию вектора $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{c}$.

Решение. Требуемая проекция

$$\text{пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{c}|}.$$

Имеем: $\mathbf{a}=(3, -6, -1)$, $\mathbf{b}=(1, 4, -5)$, $\mathbf{c}=(3, -4, 12)$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(4, -2, -6)$. Тогда

$$\text{пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{c}|}=\frac{4\cdot 3+(-2)(-4)+(-6)\cdot 12}{\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}}=$$
$$=-52/13=-4.$$

5. Вектор $\mathbf{x}$, перпендикулярный к векторам $\mathbf{a}=(4, -2, -3)$ и $\mathbf{b}=(0, 1, 3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\mathbf{x}|=26$, найти координаты вектора $\mathbf{x}$.

Решение. Обозначим координаты вектора $\mathbf{x}$ через x_1, x_2, x_3: $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$. Так как $\mathbf{x}\perp\mathbf{a}$, $\mathbf{x}\perp\mathbf{b}$, то $(\mathbf{x}, \mathbf{a})=0$, $(\mathbf{x}, \mathbf{b})=0$. Переходя к координатам векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}4x_1-2x_2-3x_3=0,\\ x_2+3x_3=0,\end{aligned}\right\}$$

решив которую, имеем: $x_2=-3x_3$, $4x_1=2x_2+3x_3=$

$=-3x_3$, $x_1=-(3/4)x_3$. Следовательно, $\mathbf{x}=(-(3/4)x_3, -3x_3, x_3)$. Так как $|\mathbf{x}|=26$, то

$$\sqrt{(9/16)x_3^2+9x_3^2+x_3^2}=26.$$

Тогда $\pm x_3\cdot 13/4=26$, $x_3=\pm 8$.

Так как по условию $\cos\beta<0$, т. е. угол β — тупой, то $\cos\beta=x_2/26=-3x_3/26<0$. Отсюда имеем: $-3x_3<0$, $x_3>0$, $x_3=8$. Тогда $\mathbf{x}=(-6, -24, 8)$.

6. Даны векторы: $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$. Найти вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий следующим условиям: $(\mathbf{x}, \mathbf{a})=-5$, $(\mathbf{x}, \mathbf{b})=-11$, $(\mathbf{x}, \mathbf{c})=20$.

Решение. Обозначим координаты вектора $\mathbf{x}$ через x_1, x_2, x_3. Тогда

$$\left.\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{a})&=-5,\\ (\mathbf{x}, \mathbf{b})&=-11,\\ (\mathbf{x}, \mathbf{c})&=20\end{aligned}\right\}\ \text{или}\ \left.\begin{aligned}2x_1-x_2+3x_3&=-5,\\ x_1-3x_2+2x_3&=-11,\\ 3x_1+2x_2-4x_3&=20.\end{aligned}\right\}$$

Найдем решение полученной системы по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&-3&2\\3&2&-4\end{vmatrix}=24-6+6+27-4-8=39,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-5&-1&3\\-11&-3&2\\20&2&-4\end{vmatrix}=$$

$$=-60-40-66+180+44+20=78,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&-5&3\\1&-11&2\\3&20&-4\end{vmatrix}=88-30+60+99-20-80=\mathbf{107},$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&-1&-5\\1&-3&-11\\3&2&20\end{vmatrix}=$$

$$=-120+33-10-45+20+44=78.$$

Тогда $x_1=\Delta_1/\Delta=78/39=2$, $x_2=\Delta_2/\Delta=107/30=3$, $x_3=\Delta_3/\Delta=78/39=2$, т. е. $\mathbf{x}=(2, 3, 2)$.

7. Даны векторы: $\mathbf{a}=(5, -1, 10)$, $\mathbf{b}=(3, 6, 4)$, $\mathbf{c}=(6, 0, 11)$, $\mathbf{d}=(2, -7, 6)$. Показать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{d}$ в этом базисе.

Решение. Как известно, базисом в пространстве R^3 является любая упорядоченная система из трех линейно независимых векторов. Покажем, что векторы **a**, **b** и **c** линейно независимы, т. е. выполняется равенство

$$\alpha_1\mathbf{a}+\alpha_2\mathbf{b}+\alpha_3\mathbf{c}=0$$

при условии, что все числа α_1, α_2, α_3 одновременно равны нулю. Подставляя в это равенство координаты векторов **a**, **b**, **c**, получаем:

$$\alpha_1(5\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+10\mathbf{e}_3)+\alpha_2(3\mathbf{e}_1+6\mathbf{e}_2+4\mathbf{e}_3)+\alpha_3(6\mathbf{e}_1+11\mathbf{e}_3)=\mathbf{0}$$

или

$$(5\alpha_1+3\alpha_2+6\alpha_3)\mathbf{e}_1+(-\alpha_1+6\alpha_2)\mathbf{e}_2+(10\alpha_1+4\alpha_2+ \\ +11\alpha_3)\mathbf{e}_3=\mathbf{0}.$$

Для того чтобы вектор, разложенный по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, был равен нулевому вектору, его координаты должны равняться нулю, т. е.

$$\left.\begin{aligned} 5\alpha_1+3\alpha_2+6\alpha_3&=0,\\ -\alpha_1+6\alpha_2\qquad&=0,\\ 10\alpha_1+4\alpha_2+11\alpha_3&=0.\end{aligned}\right\}$$

Получим однородную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными α_1, α_2, α_3. Такая система имеет нулевое решение ($\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$), если ее определитель не равен нулю. Поскольку

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6\\ -1 & 6 & 0\\ 10 & 4 & 11\end{vmatrix}=-21\neq 0,$$

то векторы **a**, **b**, **c** линейно независимы. Следовательно, они образуют базис и вектор **d** является линейной комбинацией векторов **a**, **b**, **c**: $\mathbf{d}=\beta_1\mathbf{a}+\beta_2\mathbf{b}+\beta_3\mathbf{c}$. Числа β_1, β_2, β_3 будут координатами вектора **d** в базисе **a**, **b**, **c**. Найдем их.

Воспользовавшись разложением **a**, **b**, **c**, **d** в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, имеем:

$$2\mathbf{e}_1-7\mathbf{e}_2+6\mathbf{e}_3=\beta_1(5\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+10\mathbf{e}_3)+\beta_2(3\mathbf{e}_1+6\mathbf{e}_2+ \\ +4\mathbf{e}_3)+\beta_3(6\mathbf{e}_1+11\mathbf{e}_3)$$

или

$$2\mathbf{e}_1-7\mathbf{e}_2+6\mathbf{e}_3=(5\beta_1+3\beta_2+6\beta_3)\mathbf{e}_1+(-\beta_1+6\beta_2)\mathbf{e}_2+ \\ +(10\beta_1+4\beta_2+11\beta_3)\mathbf{e}_3.$$

Из равенства векторов следует равенство их координат, поэтому получаем систему:

$$\left.\begin{aligned} 5\beta_1 + 3\beta_2 + \ 6\beta_3 &= \ \ 2, \\ -\beta_1 + 6\beta_2 \qquad\quad &= -7, \\ 10\beta_1 + 4\beta_2 + 11\beta_3 &= \ \ 6. \end{aligned}\right\}$$

Решая ее по формулам Крамера $\beta_i = \Delta_i/\Delta$, $i = 1, 2, 3$, находим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -7 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 11 \end{vmatrix} = -21, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -1 & -7 & 0 \\ 10 & 6 & 11 \end{vmatrix} = 21,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & -7 \\ 10 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, $\beta_1 = -21/-21 = 1$, $\beta_2 = 21/-21 = -1$, $\beta_3 = 0/-21 = 0$, т. е. $\mathbf{d} = (1, -1; 0)$.

8. Даны вершины треугольника ABC: $A(3, 2, -3)$, $B(5, 1, -1)$, $C(1, -2, 1)$. Вычислить его внешний угол при вершине A (рис. 1.12).

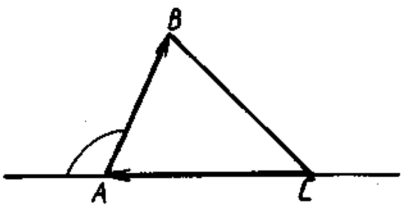


Рис. 1.12

Решение. Внешний угол при вершине A — это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$. Так как $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 2)$, $\overrightarrow{CA} = (2, 4, -4)$, то

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}}) = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{CA}|} =$$

$$= \frac{2\cdot 2 + (-1)\cdot 4 + 2\cdot(-4)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}} = -4/9.$$

Следовательно, $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}}) = \arccos(-4/9) \approx 116°\,25'$.

Задачи для самостоятельного решения

1.108. Даны векторы $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$. Вектор $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$ — медиана треугольника OAB. Разложить аналитически и геометрически вектор $\mathbf{c}$ по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а вектор $\mathbf{a}$ — по векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. (*Ответ:* $\mathbf{c}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$, $\mathbf{a}=2\mathbf{c}-\mathbf{b}$.)

1.109. На сторонах OA и OB прямоугольника $OACB$ отложены единичные векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$. Точка M — середина стороны BC, N — середина стороны AC. Выразить через $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{MN}$, если $|\overrightarrow{OA}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=4$. (*Ответ:* $\overrightarrow{OA}=3\mathbf{i}$, $\overrightarrow{AC}=4\mathbf{j}$, $\overrightarrow{BO}=-4\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OC}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OM}=(3/2)\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, $\overrightarrow{ON}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $\overrightarrow{MN}=(3/2)\mathbf{i}-2\mathbf{j}$.)

1.110. Даны радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ трех последовательных вершин A, B, C параллелограмма $ABCD$. Найти радиус-вектор четвертой вершины D. (*Ответ:* $\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2$.)

1.111. В равнобедренной трапеции $OACB$ угол $BOA=60°$, $OB=BC=CA=2$, точки M и N — середины сторон BC и AC. Выразить векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MN}$ через единичные векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ направлений $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. (*Ответ:* $\overrightarrow{AC}=2(\mathbf{n}-\mathbf{m})$, $\overrightarrow{OM}=2\mathbf{n}+\mathbf{m}$, $\overrightarrow{ON}=3\mathbf{m}+\mathbf{n}$, $\overrightarrow{MN}=2\mathbf{m}-\mathbf{n}$.)

1.112. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1,\ -2,\ 3)$, $B(3,\ 2,\ 1)$, $C(6,\ 4,\ 4)$. Найти его четвертую вершину D. (*Ответ:* $D(4,\ 0,\ 6)$.)

1.113. Вычислить $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, если $|\mathbf{a}|=2\sqrt{2}$, $|\mathbf{b}|=4$ и $(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{b}})=135°$. (*Ответ:* $2\sqrt{10}$.)

1.114. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}=2\mathbf{m}+\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{m}-2\mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — единичные векторы, $(\widehat{\mathbf{m},\ \mathbf{n}})=60°$. (*Ответ:* $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$.)

1.115. Дан вектор $\mathbf{a}=2\mathbf{m}-\mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — единичные векторы, $(\widehat{\mathbf{m},\ \mathbf{n}})=120°$. Найти $\cos(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{m}})$ и $\cos(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{n}})$. (*Ответ:* $5/(2\sqrt{7})$, $-2/\sqrt{7}$.)

1.116. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(-3,\ -2,\ 0)$, $B(3,\ -3,\ 1)$, $C(5,\ 0,\ 2)$. Найти его четвертую вершину D и угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$. (*Ответ:* $D(-1, 1, 1)$, $\varphi = 120°$.)

1.117. Найти угол между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$, если $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — единичные векторы, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = 120°$. (*Ответ:* 120°.)

1.118. Найти угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если вектор $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ перпендикулярен к вектору $5\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ и $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$. (*Ответ:* 60°.)

1.119. Даны векторы $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Найти $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$, $\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ и $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$. (*Ответ:* $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = 4\sqrt{2}/3$, $\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = 4\sqrt{6}/3$, $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 4/(3\sqrt{3})$.)

1.120. На плоскости даны два вектора $\mathbf{p} = (2, -3)$, $\mathbf{q} = (1, 2)$. Найти разложение вектора $\mathbf{a} = (9, 4)$ по базису $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$. (*Ответ:* $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 5\mathbf{q}$.)

1.121. Даны векторы $\mathbf{a}_1 = (3, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 2, 5)$, $\mathbf{d} = (5, 0, -1)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ образуют базис, и вычислить координаты вектора $\mathbf{d}$ в этом базисе. (*Ответ:* $\mathbf{d} = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$.)

1.122. Даны три вектора: $\mathbf{a} = (3, -1)$, $\mathbf{b} = (1, -2)$, $\mathbf{c} = (-1, 7)$. Найти разложение вектора $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ по базису $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. (*Ответ:* $\mathbf{p} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.)

1.123. Даны векторы: $\mathbf{a}_1 = (3, -2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 1, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 1, -3)$. Найти разложение вектора $\mathbf{a} = (11, -6, 5)$ по базису $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. (*Ответ:* $\mathbf{a} = 2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.)

1.124. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi = 120°$. Зная, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, вычислить: 1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; 2) $|\mathbf{a}|^2$; 3) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2$; 4) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b})$; 5) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$; 6) $|3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|^2$. (*Ответ:* 1) -6; 2) 9; 3) 13; 4) -61; 5) 37; 6) 73.)

1.125. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны, вектор $\mathbf{c}$ образует с ними углы, равные $\pi/3$. Зная, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 5$, $|\mathbf{c}| = 8$, вычислить $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \mathbf{b} + 3\mathbf{c})$, $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}|^2$. (*Ответ:* -72, 373.)

1.126. Даны радиусы-векторы вершин треугольника ABC: $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Показать, что треугольник ABC — равносторонний.

1.127. Найти вектор $\mathbf{x}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, образующий с ортом $\mathbf{j}$ острый угол и имеющий длину $|\mathbf{x}| = 15$. (*Ответ:* $\mathbf{x} = -5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.)

1.128. Радиус-вектор точки M составляет с осью Oy угол 60°, а с осью Oz — угол 45°, $|\overrightarrow{OM}| = 8$. Найти координаты точки M, если ее абсцисса отрицательна. (*Ответ:* $M(-4, 4, 4\sqrt{2})$.)

1.129. Даны вершины треугольника ABC: $A(1, 2, 1)$, $B(3, -1, 7)$, $C(7, 4, -2)$. Вычислив внутренние углы треугольника, убедиться, что этот треугольник — равнобедренный.

1.130. Даны два вектора: $\mathbf{a}_1=(3, -1, 5)$ и $\mathbf{a}_2=(1, 2, -3)$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$, перпендикулярного к оси Oz и удовлетворяющего следующим условиям: $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1)=9$, $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_2)=-4$. (*Ответ:* $\mathbf{x}=(2, -3, 0)$.)

1.131. Даны три вектора: $\mathbf{a}=(2, -3, 1)$, $\mathbf{b}=(-3, 1, 2)$, $\mathbf{c}=(1, 2, 3)$. Вычислить $\text{пр}_{\mathbf{b}+\mathbf{c}}\mathbf{a}$. (*Ответ:* $-8/\sqrt{38}$.)

1.7. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется *правой*, если наблюдателю, находящемуся внутри телесного угла, образованного этими векторами, кратчайшие повороты от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ и от $\mathbf{b}$ к $\mathbf{c}$ кажутся происходящими против хода часовой стрелки. В противном случае данная тройка называется *левой*.

Векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ называется вектор, обозначаемый $\mathbf{c}=[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ или $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ и удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) длина вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т. е.

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}});$$

2) вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярен к плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

3) упорядоченная тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — правая.

Из определения векторного произведения следует, что если $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$, то $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=\mathbf{0}$.

Перечислим основные *свойства векторного произведения векторов:*

1) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=-[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$;

2) $[\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}]=\lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $\lambda\in\mathbf{R}$;

3) $[\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}]=[\mathbf{a}, \mathbf{c}]+[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

Если $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z)$, то вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в координатной форме записывают так:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=(a_yb_z-b_ya_z)\,\mathbf{i}+$$

$$+(b_xa_z-a_xb_z)\,\mathbf{j}+(a_xb_y-b_xa_y)\,\mathbf{k}.$$

Смешанным произведением векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется число, обозначаемое $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ и определяемое как скалярное произведение вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и вектора $\mathbf{c}$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})=([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}).$$

Приведем *геометрические свойства смешанного произведения векторов:*

1) если V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{cases} V, \text{ если тройка } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ — правая,} \\ -V, \text{ если тройка } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ — левая.} \end{cases}$$

2) для того чтобы векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно выполнение условия $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Перечислим *алгебраические свойства смешанного произведения векторов:*

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$;

2) $(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, $(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, $(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$;

3) $(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \alpha_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$;

4) $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = 0$.

Если $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Примеры

1. Доказать, что $|[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}]| = 2|[\mathbf{b}, \mathbf{a}]|$. Выяснить геометрический смысл этого равенства.

Решение. Воспользуемся свойствами векторного произведения:

$$[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}] = [\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a}] - [\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b}] = \\ = [\mathbf{a}, \mathbf{a}] + [\mathbf{b}, \mathbf{a}] - [\mathbf{a}, \mathbf{b}] - [\mathbf{b}, \mathbf{b}].$$

Так как $[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = |\mathbf{a}|^2 \sin 0° = \mathbf{0}$, $[\mathbf{b}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$, имеем

$$[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}] = 2[\mathbf{b}, \mathbf{a}], \ |[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}]| = 2|[\mathbf{b}, \mathbf{a}]|.$$

Поскольку $|[\mathbf{b}, \mathbf{a}]|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 1.13), приведенных к общему началу, а $|[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}]|$ — площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, то из доказанного равенства следует, что площадь второго параллелограмма в два раза больше площади первого.

2. Даны вершины треугольника $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$. Определить длину высоты, опущенной из B на сторону AC, и площадь треугольника ABC (рис. 1.14).

Решение. Требуемую площадь вычислим по формуле

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

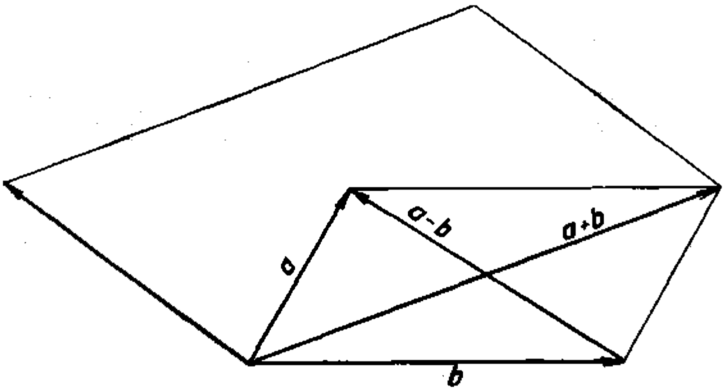


Рис. 1.13

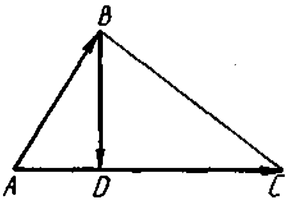


Рис. 1.14

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и длину вектора $\overrightarrow{AC}$. Имеем:

$$\overrightarrow{AB}=(4,\ -5,\ 0),\ \overrightarrow{AC}=(0,\ 4,\ -3),$$
$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{16+9}=5;$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]|=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}=$$
$$=\frac{1}{2}|15\mathbf{i}+12\mathbf{j}+16\mathbf{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{225+144+256}=$$
$$=\frac{25}{2}=12{,}5.$$

Здесь $\operatorname{mod}|A|$ — модуль определителя матрицы A. Но так как $S_{\triangle ABC}=|\overrightarrow{BD}|\,|\overrightarrow{AC}|/2$, то $|\overrightarrow{BD}|=2S/|\overrightarrow{AC}|=$ $=25/5=5$.

3. Найти вектор $\mathbf{x}$, если известно, что он перпендикулярен к векторам $\mathbf{a}_1=(2,\ -3,\ 1)$, $\mathbf{a}_2=(1,\ -2,\ 3)$ и удовлетворяет условию $(\mathbf{x},\ \mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})=10$.

Решение. Так как вектор $\mathbf{x}$ перпендикулярен к плоскости векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, а вектор $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ также перпендикулярен к плоскости этих векторов по определению, то отсюда следует, что $\mathbf{x} \parallel [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$. Имеем

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k} = (-7, -5, -1).$$

Так как $\mathbf{x} \parallel [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$, то координаты этих векторов пропорциональны, т. е. $\mathbf{x} = (-7\lambda, -5\lambda, -\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Обозначим $\mathbf{d} = (1, 2, -7)$. По условию, $(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = 10$, откуда $-7\lambda - 10\lambda + 7\lambda = 10$, $-10\lambda = 10$, $\lambda = -1$. Тогда $\mathbf{x} = (7, 5, 1)$.

4. В пространстве даны четыре точки: $A(1, 1, 1)$, $B(4, 4, 4)$, $C(3, 5, 5)$, $D(2, 4, 7)$. Найти объем тетраэдра $ABCD$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB} = (3, 3, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 4, 4)$, $\overrightarrow{AD} = (1, 3, 6)$.

Объем тетраэдра, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, составляет 1/6 часть объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах:

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3.$$

5. Доказать, что четыре точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Достаточно взять три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ (рис. 1.15) и доказать, что они компланарны, т. е. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$. Так как $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$, $\overrightarrow{AD} = (1, -1, 4)$, то

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 12 - 2 - 8 = 0.$$

6. Найти длину высоты пирамиды, опущенной на грань BCD, если известно, что ее вершинами являются точки $A(0, 0, 1)$, $B(2, 3, 5)$, $C(6, 2, 3)$, $D(3, 7, 2)$ (рис. 1.16).

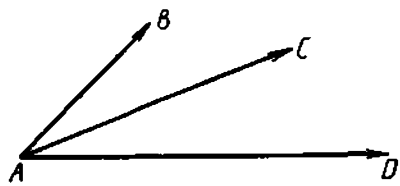


Рис. 1.15

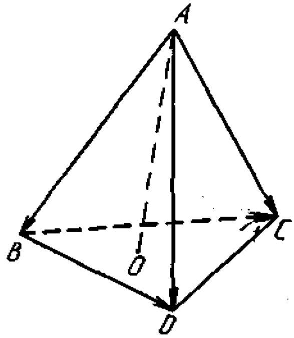


Рис. 1.16

Решение. Так как $V = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} AO$, то $AO = 3V/S$. Имеем

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 120 = 20,$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} |11\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 17\mathbf{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{121 + 100 + 289} = \frac{1}{2}\sqrt{510}.$$

Тогда

$$AO = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 20 \cdot 2}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.132. Дано: $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \pi/4$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ и $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$. (*Ответ:* $50\sqrt{2}$.)

1.133. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi = 60°$. Зная, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 5$, вычислить $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$, $|[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}]|$, $|[3\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - 3\mathbf{b}]|$. (*Ответ:* $15\sqrt{3}/2$, $15\sqrt{3}$, $75\sqrt{3}$.)

1.134. Даны точки $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 2, 1)$.

Найти $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}]$, $[\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]$. (*Ответ:* (6, -4, -6), (-12, 8, 12).)

1.135. Вычислить синус угла, образованного векторами $\mathbf{a} = (2, -2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 3, 6)$. (*Ответ:* $\sin\varphi = 5\sqrt{17}/21$.)

1.136. Вектор $\mathbf{b}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\mathbf{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\mathbf{b}| = 51$, найти его координаты. (*Ответ:* $\mathbf{b} = (45, 24, 0)$.)

1.137. Сила $\mathbf{F} = (3, 4, -2)$ приложена к точке $C(2, -1, -2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат. (*Ответ:* 15, $\cos\alpha = 2/3$, $\cos\beta = -2/15$, $\cos\gamma = 11/15$.)

1.138. Найти вектор $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, построить его и вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если: 1) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{k}$; 2) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$; 3) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. (*Ответ:* 1) $-6\mathbf{j}$, 6; 2) $-2\mathbf{k}$, 2; 3) $6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $2\sqrt{22}$.)

1.139. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$, $C(4, 5, 2)$. (*Ответ:* 24,5.)

1.140. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} + \mathbf{q}$, где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ — единичные векторы, образующие угол, равный 30°. (*Ответ:* 1,5.)

1.141. Даны вершины тетраэдра A_1, A_2, A_3, A_4. Вычислить $\cos(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}})$, площадь треугольника $A_1A_2A_3$, объем тетраэдра и сделать чертеж, если: 1) $A_1(2, 4, 3)$, $A_2(7, 6, 3)$, $A_3(4, 9, 3)$, $A_4(3, 6, 7)$; 2) $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(5, 8, 3)$, $A_3(1, 9, 9)$, $A_4(6, 4, 8)$; 3) $A_1(3, 3, 9)$, $A_2(6, 9, 1)$, $A_3(1, 7, 3)$, $A_4(8, 5, 8)$. (*Ответ:* 1) $\cos\varphi = 20/29$, $S = 10{,}5$, $V = 14$; 2) $\cos\varphi = 1/70$, $S = \sqrt{621}/2$, $V = \frac{121}{6}$; 3) $\cos\varphi = 33/(\sqrt{14}\sqrt{109})$, $S = \sqrt{437}$, $V = 4$.)

1.142. Даны векторы $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Найти $[2\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b}]$. (*Ответ:* $25\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 35\mathbf{k}$.)

1.143. Показать, что векторы $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ компланарны, и разложить вектор $\mathbf{c}$ по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. (*Ответ:* $\mathbf{c} = 5\mathbf{a} + \mathbf{b}$.)

1.144. Показать, что точки $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 3, 0)$, $D(5, 0, -6)$ лежат в одной плоскости.

1.145. Построить параллелепипед на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ и вычислить его объем. Выяснить, правой или левой будет тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. (*Ответ:* $V = 51$; левая.)

1.146. Дан тетраэдр с вершинами в точках $A_1(2, 0, 0)$, $A_2(0, 3, 0)$, $A_3(0, 0, 6)$, $A_4(2, 3, 8)$. Вычислить его объем и высоту, опущенную на грань $A_1A_2A_3$. (*Ответ:* $V = 14$, $H = \sqrt{14}$.)

1.147. Дан тетраэдр с вершинами в точках $O(0, 0, 0)$, $A(5, 2, 0)$, $B(2, 5, 0)$, $C(1, 2, 4)$. Найти площадь грани ABC, объем тетраэдра и его высоту, опущенную из точки O на грань ABC. (*Ответ:* $S = 6\sqrt{3}$, $V = 14$, $H = 7\sqrt{3}/3$.)

1.148. Вычислить длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. (*Ответ:* $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{5}$, $S = \sqrt{6}$.)

1.149. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\mathbf{m} - \mathbf{n}$, $4\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы; $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \pi/4$. (*Ответ:* $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.)

1.150. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол 30°, $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 3$. Вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярен к векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Зная, что $|\mathbf{c}| = 3$, вычислить $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. (*Ответ:* ± 27.)

1.151. Проверить, компланарны ли векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, если:

1) $\mathbf{a} = (2, 3, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, -4)$, $\mathbf{c} = (2, 5, 3)$;
2) $\mathbf{a} = (2, 3, 4)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 1)$, $\mathbf{c} = (5, -3, 7)$;
3) $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (3, -3, 2)$, $\mathbf{c} = (3, -3, 1)$.

(*Ответ:* 1) нет; 2) да; 3) нет.)

1.8. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Непустое множество L называется *линейным пространством*, если выполнены следующие два условия.

I. В L введена операция сложения элементов, т. е. для любых x, $y \in L$ определено отображение

$$\langle x, y \rangle \to z = x + y \in L,$$

обладающее свойствами (иногда их называют аксиомами):

1) $x + y = y + x$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) в множестве L существует *нулевой элемент* (будем обозначать его через 0), такой, что $x + 0 = x$ для любого $x \in L$;
4) для каждого $x \in L$ существует элемент, который будем называть *противоположным элементу* x и обозначать $-x$, такой, что $x + (-x) = 0$.

II. В множестве L введена операция умножения элементов на действительные (комплексные) числа, т. е. для любых $\lambda \in \mathbf{R}$ ($\lambda \in \mathbf{C}$) и $x \in L$ определено отображение $\langle \lambda, x \rangle \to y \in L$, где $y = \lambda x$. Отображение $\langle \lambda, x \rangle \to y \in L$ обладает свойствами:

5) $1 \cdot x = x$;

6) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

Операции сложения элементов и умножения их на числа удовлетворяют законам дистрибутивности:

7) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$;

8) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Элементы x, y, z, ... линейного пространства называются *векторами* и обозначаются $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, ... Пространство L называется *действительным*, если в нем операция умножения вектора на число определена только для действительных чисел, и *комплексным*, если эта операция определена только для комплексных чисел.

Система векторов $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r) \in L$ называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbf{R}$, одновременно не равные нулю, такие, что

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_r\mathbf{x}_r = \mathbf{0};$$

в противном случае система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$ называется *линейно независимой*.

Пусть в линейном пространстве L выполняются следующие условия:

а) существует n линейно независимых векторов;

б) любая система $n+1$ векторов линейно зависима.

Тогда число n называют *размерностью пространства* и обозначают $\dim L$.

Линейное пространство L размерности n будем называть *n-мерным*.

Базисом n-мерного пространства называется любая упорядоченная система n линейно независимых векторов.

Если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис линейного пространства L, то для любого $\mathbf{x} \in L$ существует единственная система чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, таких, что

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n. \qquad (1.7)$$

Выражение (1.7) называется *разложением вектора* $\mathbf{x}$ *по базису* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, а числа α_i — *координатами вектора* $\mathbf{x}$ *в базисе* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Примеры

1. Является ли множество $\mathbf{Z}$ всех целых чисел линейным пространством?

Решение. Для любых $x, y \in \mathbf{Z}$ $x + y \in \mathbf{Z}$; однако для любых $x \in \mathbf{Z}$ и любого $\lambda \in \mathbf{R}$ λx не всегда принадлежит множеству целых чисел. Например, для $x = 3$ и $\lambda = 1/5$ $\lambda x = (1/5) \cdot 3 = 3/5$ — не целое число. Поэтому множество $\mathbf{Z}$ не является линейным пространством.

2. Образуют ли линейное пространство векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат: Ox или Oy?

Решение. Если вектор $\mathbf{a}$ принадлежит оси Ox, а вектор $\mathbf{b}$ — оси Oy, то $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ не принадлежит ни Ox, ни Oy (рис. 1.17). Следовательно, множество данных векторов

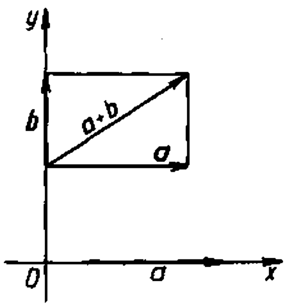


Рис. 1.17

не образует линейного пространства.

3. Является ли множество всех действительных чисел **R** линейным пространством?

Решение. Проверим, удовлетворяют ли действительные числа определению линейного пространства.

I. Для любых $x,\ y \in \mathbf{R}$ $x+y \in \mathbf{R}$, причем для действительных чисел эта операция удовлетворяет условиям:

1) $x+y=y+x$;
2) $(x+y)+z=x+(y+z)$;
3) $x+0=x$;
4) $x+(-x)=0$.

II. Для любых $\lambda \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$ $\lambda x \in \mathbf{R}$, причем:

5) $1 \cdot x = x$;
6) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$, $\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$;
7) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;
8) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

Следовательно, **R** является линейным пространством.

4. Образуют ли линейное пространство: а) многочлены степени n; б) многочлены степени не выше n?

Решение. а) Обозначим множество многочленов n-й степени через L. Рассмотрим многочлены:

$$P_1(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$P_2(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}x+b_n.$$

Тогда

$$P_1(x)+P_2(x)=(a_0+b_0)x^n+(a_1+b_1)x^{n-1}+$$
$$+(a_2+b_2)x^{n-2}+\ldots+(a_{n-1}+b_{n-1})x+a_n+b_n.$$

Если $b_0=-a_0$, то $(P_1(x)+P_2(x)) \notin L$. Следовательно, множество многочленов n-й степени не является линейным пространством.

б) Обозначим множество многочленов степени не выше n через L'. Тогда при любых a_i, b_i, $i=0,\ n$, $(P_1(x)+P_2(x)) \in L'$, причем:

1) $P_1(x)+P_2(x)=P_2(x)+P_1(x)$;
2) $(P_1(x)+P_2(x))+P_3(x)=P_1(x)+(P_2(x)+P_3(x))$;

3) $P_1(x)+0=P_1(x)$;

4) $P_1(x)+(-P_1(x))=0$, где $-P_1(x)=-a_0x^n-$ $-a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-\ldots-a_n$.

Для любого $\lambda\in\mathbf{R}$ и $P_1(x)\in L'$

$$\lambda P_1(x)=\lambda a_0x^n+\lambda a_1x^{n-1}+\ldots+\lambda a_n,\quad \lambda P_1(x)\in L',$$

т. е. определена операция умножения многочлена на число, удовлетворяющая условиям:

5) $1\cdot P_1(x)=P_1(x)$;

6) $\lambda(\mu P_1(x))=(\lambda\mu)P_1(x)$, λ, $\mu\in\mathbf{R}$;

7) $\lambda(P_1(x)+P_2(x))=\lambda P_1(x)+\lambda P_2(x)$;

8) $(\lambda+\mu)P(x)=\lambda P(x)+\mu P(x)$.

Итак, множество L' многочленов степени не выше n образует линейное пространство.

5. Образуют ли линейное пространство все векторы трехмерного пространства, координатами которых являются целые числа?

Решение. Обозначим множество таких геометрических векторов через $\tilde{L}$. Проверим, удовлетворяют ли элементы множества $\tilde{L}$ определению линейного пространства.

I. Для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in\tilde{L}$ $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\tilde{L}$.

II. Для $\lambda\in\mathbf{R}$ $\lambda\mathbf{x}$ не всегда принадлежит $\tilde{L}$. Так, например, если λ — дробное число, то $\lambda\mathbf{x}\notin\tilde{L}$.

Следовательно, $\tilde{L}$ не образует линейное пространство.

6. Образуют ли линейное пространство все векторы плоскости, лежащие на данной прямой?

Решение. Да, образуют, так как сумма таких векторов всегда является вектором, лежащим на данной прямой, а умножив данный вектор на любое число $\lambda\in\mathbf{R}$, получим вектор, лежащий на этой прямой. Обе операции удовлетворяют свойствам 1—8.

7. Образует ли линейное пространство множество квадратных матриц порядка n, элементами которых являются действительные числа?

Решение. Рассмотрим множество $\hat{L}$ квадратных матриц второго порядка. Проверим, удовлетворяют ли элементы множества $\hat{L}$ определению линейного пространства.

I. Для $A_1=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \mu_1\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \mu_2\end{bmatrix}$

$$A_1+A_2=\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & \beta_1+\beta_2\\ \gamma_1+\gamma_2 & \mu_1+\mu_2\end{bmatrix},$$

т. е. сумма двух квадратных матриц также является квадратной матрицей. Операция сложения удовлетворяет свойствам 1—4, так как элементами матриц являются действительные числа, для которых справедливы переместительный и сочетательный законы. Роль нулевого элемента играет матрица $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, а противоположного — матрица, элементами которой являются числа, противоположные элементам исходной матрицы.

II. Для любого $\lambda\in\mathbf{R}$

$$\lambda A_1=\begin{bmatrix}\lambda\alpha_1 & \lambda\beta_1\\ \lambda\gamma_1 & \lambda\mu_1\end{bmatrix}\in\hat{L},$$

причем данная операция удовлетворяет следующим свойствам:

5) $1\cdot A_1=A_1$ (здесь роль единичного элемента играет единичная матрица E);

6) $\lambda(\mu A_1)=(\lambda\mu)A_1\in\hat{L}$, λ, $\mu\in\mathbf{R}$;

7) $\lambda(A_1+A_2)=\lambda A_1+\lambda A_2$, $\lambda\in\mathbf{R}$;

8) $(\lambda+\mu)A_1=\lambda A_1+\mu A_1$, λ, $\mu\in\mathbf{R}$.

Следовательно, множество $\hat{L}$ квадратных матриц второго порядка образует линейное пространство, базисом которого являются матрицы:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Замечание. Можно доказать, что множество квадратных матриц любого порядка является линейным пространством.

8. Показать, что векторы $\mathbf{a}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ и $\mathbf{c}=-3\mathbf{i}+12\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ линейно зависимы.

Решение. Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ линейно зависимы, то равенство $\alpha_1\mathbf{a}+\alpha_2\mathbf{b}+\alpha_3\mathbf{c}=\mathbf{0}$ выполняется в том случае, когда не все α_i, $i=1, 2, 3$, одновременно равны нулю. Имеем

$$\alpha_1(-1,\ 3,\ 2)+\alpha_2(2,\ -3,\ -4)+\alpha_3(-3,\ 12,\ 6)=(0,\ 0,\ 0),$$

т. е.

$$(-\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3,\ 3\alpha_1-3\alpha_2+12\alpha_3,\ 2\alpha_1-4\alpha_2+6\alpha_3)=(0,\ 0,\ 0).$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}-\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3&=0,\\ 3\alpha_1-3\alpha_2+12\alpha_3&=0,\\ 2\alpha_1-4\alpha_2+6\alpha_3&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

матрица которой

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 12 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Найдем ранг матрицы A с помощью элементарных преобразований. Умножим первую строку на 3 и прибавим ко второй, затем первую строку умножим на 2 и прибавим к третьей:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 12 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3$, то $r_A = 2$.

Система (1) эквивалентна следующей системе:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0, \\ 3\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда имеем:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0, \\ \alpha_2 = -\alpha_3, & \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \alpha_1 &= -5\alpha_3, \\ \alpha_2 &= -\alpha_3. \end{aligned}\right\}$$

Полагая $\alpha_3 = t$, получаем, что система (1) имеет бесконечное множество решений $(-5t, -t, t)$, где $t \in \mathbf{R}$. Если положить, например, $\alpha_3 = -1$, то $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 1$, и зависимость между векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ имеет вид $5\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = 0$.

9. Убедиться в том, что совокупность линейных комбинаций векторов $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_5 = (0, 1, 2, 3)$ образует линейное пространство; найти базис и размерность этого пространства.

Решение. Совокупность линейных комбинаций данных векторов образует линейное пространство, так как она замкнута относительно операций сложения и умножения на $\lambda \in \mathbf{R}$.

Среди векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$ находим те, которые являются линейно независимыми.

Исследуем на линейную зависимость векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. Они являются линейно независимыми, если равенство

$$\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2 = 0 \qquad (1)$$

выполняется только в том случае, когда $\alpha=0$, $\beta=0$. Подставляя в равенство (1) координаты векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, имеем:

$$\alpha(1,\ 0,\ 0,\ -1)+\beta(2,\ 1,\ 1,\ 0)=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

или

$$(\alpha+2\beta,\ \beta,\ \beta,\ -\alpha)=(0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\alpha+2\beta=0,\ \beta=0,\ -\alpha=0.$$

Очевидно, что $\alpha=0$, $\beta=0$ — единственное решение этой системы. Следовательно, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ — линейно независимые векторы.

Исследуем на линейную зависимость векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Они являются линейно независимыми, если равенство

$$\alpha\mathbf{a}_1+\beta\mathbf{a}_2+\gamma\mathbf{a}_3=\mathbf{0} \qquad (2)$$

выполняется только при $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$. В координатной форме равенство (2) имеет вид

$$\alpha(1,\ 0,\ 0,\ -1)+\beta(2,\ 1,\ 1,\ 0)+\gamma(1,\ 1,\ 1,\ 0)=$$
$$=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

или

$$(\alpha+2\beta+\gamma,\ \beta+\gamma,\ \beta+\gamma,\ -\alpha+\gamma)=(0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\alpha+2\beta+\gamma=0,\ \beta+\gamma=0,\ -\alpha+\gamma=0,$$

определитель которой равен нулю. Следовательно, данная система имеет ненулевые решения. Находим их:

$$\left.\begin{aligned}\alpha+2\beta+\gamma&=0,\\ \beta+\gamma&=0,\\ -\alpha+\gamma&=0,\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned}\alpha&=\ \ \gamma,\\ \beta&=-\gamma.\end{aligned}\right\}$$

Полагая $\gamma=t\in\mathbf{R}$, получаем решение системы $(t,\ t,\ t)$, где $t\in\mathbf{R}$. Например, $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$ — одно из таких решений. Следовательно, векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависимы и эта зависимость имеет вид $\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3=\mathbf{0}$.

Исследуем на линейную зависимость векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$. Они являются линейно независимыми, если равенство

$$\alpha\mathbf{a}_1+\beta\mathbf{a}_2+\gamma\mathbf{a}_4=\mathbf{0} \qquad (3)$$

выполняется только при $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$. В координатной форме равенство (3) имеет вид

$$\alpha(1,\ 0,\ 0,\ -1)+\beta(2,\ 1,\ 1,\ 0)+\gamma(1,\ 2,\ 3,\ 4)=$$
$$=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

или

$$(\alpha+2\beta+\gamma,\ \beta+2\gamma,\ \beta+3\gamma,\ -\alpha+4\gamma)=(0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\alpha+2\beta+\ \gamma&=0,\\ \beta+2\gamma&=0,\\ \beta+3\gamma&=0,\\ -\alpha+4\gamma&=0,\end{aligned}\right\}$$

которая эквивалентна системе

$$\left.\begin{aligned}\alpha+2\beta+\gamma&=0,\\ -\alpha+4\gamma&=0,\\ \gamma&=0.\end{aligned}\right\}$$

Определитель этой системы $\Delta=2\neq0$, поэтому она имеет только нулевые решения: $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$. Следовательно, векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$ линейно независимы.

Исследуем на линейную зависимость векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$. Они являются линейно независимыми, если равенство

$$\alpha\mathbf{a}_1+\beta\mathbf{a}_2+\gamma\mathbf{a}_4+\sigma\mathbf{a}_5=\mathbf{0} \tag{4}$$

выполняется только при $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\sigma=0$. В координатной форме равенство (4) имеет вид

$$\alpha(1,\ 0,\ 0,\ -1)+\beta(2,\ 1,\ 1,\ 0)+\gamma(1,\ 2,\ 3,\ 4)+$$
$$+\sigma(0,\ 1,\ 2,\ 3)=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

или

$$(\alpha+2\beta+\gamma,\ \beta+2\gamma+\sigma,$$
$$\beta+3\gamma+2\sigma,\ -\alpha+4\gamma+3\sigma)=(0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\alpha+2\beta+\ \gamma&=0,\\ \beta+2\gamma+\ \sigma&=0,\\ \beta+3\gamma+2\sigma&=0,\\ \alpha+4\gamma+3\sigma&=0,\end{aligned}\right\}$$

определитель которой равен нулю. Следовательно, эта система имеет ненулевые решения, а векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$ линейно зависимы.

Таким образом, наибольшее число линейно независимых векторов рассматриваемого линейного пространства равно 3, а это означает, что и размерность данного пространства равна 3. В качестве базиса можно взять систему векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$.

10. Найти базис и размерность линейного пространства полиномов степени не выше n.

Решение. Пусть L' — линейное пространство полиномов $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ степени не выше n. Равенство

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots + \alpha_n x^{n-1} + \alpha_{n+1} x^n = 0, \quad \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad i = \overline{1, n+1},$$

выполняется лишь в том случае, когда все $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n+1}$, а любой вектор пространства L' (в нашем случае — полином степени не выше n) линейно выражается через векторы $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Следовательно, эти векторы образуют базис пространства L', размерность которого равна $n+1$. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ являются координатами вектора $P(x)$ в данном базисе.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1.152—1.155 выяснить, образует ли данное множество линейное пространство.

1.152. Векторы плоскости, концы которых лежат во втором квадранте. (*Ответ:* нет.)

1.153. Векторы пространства $\mathbf{R}^3$, у которых первая и последняя координаты равны между собой. (*Ответ:* да.)

1.154. Векторы пространства $\mathbf{R}^3$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. (*Ответ:* да.)

1.155. Множество $N(A)$ решений системы линейных однородных уравнений $AX = 0$. (*Ответ:* да.)

1.156. Даны векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — базис. Доказать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{c} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ в этом базисе. (*Ответ:* $\mathbf{c} = (11/7, -1/7)$.)

1.157. В некотором базисе даны векторы $\mathbf{a}_1 = (2, 1)$ и $\mathbf{a}_2 = (4, 2)$. Найти все значения λ, при которых вектор $\mathbf{b} = (1, \lambda)$ в том же базисе линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. (*Ответ:* $\lambda = 1/2$.)

1.158. Показать, что векторы, заданные в указанном базисе, являются линейно независимыми:

1) $\mathbf{a}_1 = (2, 1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-6, 2, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -4, 1)$;
2) $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (4, 3, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (-6, 5, 7)$;
3) $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 3, 4)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 1, -1)$;
4) $\mathbf{a}_1 = (-2, 3, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 5)$, $\mathbf{a}_3 = (4, 2, 7)$;

5) $a_1=(2,3,1)$, $a_2=(3,-2,-1)$, $a_3=(-1,4,0)$;
6) $a_1=(1,-1,2)$, $a_2=(3,5,0)$, $a_3=(-2,-3,1)$;
7) $a_1=(-1,1,1)$, $a_2=(3,0,1)$, $a_3=(2,-3,2)$;
8) $a_1=(2,4,2)$, $a_2=(3,4,-1)$, $a_3=(1,-5,2)$;
9) $a_1=(1,1,1)$, $a_2=(1,2,3)$, $a_3=(1,3,6)$.

В задачах 1.159—1.163 доказать, что векторы **a**, **b**, **c** образуют базис, и найти координаты вектора **d** в этом базисе.

1.159. $a=e_1+e_2$, $b=2e_1-e_2+e_3$, $c=e_2-e_3$, $d=e_1+8e_2-5e_3$. (*Ответ:* $d=(3,\ -1,\ 4)$.)

1.160. $a=4e_1+5e_2+3e_3$, $b=2e_1+3e_2+2e_3$, $c=-e_1-2e_2-e_3$, $d=e_1$. (*Ответ:* $d=(1,\ -1,\ 1)$.)

1.161. $a=e_1+4e_2+2e_3$, $b=2e_1+9e_2+6e_3$, $c=3e_1-e_2+e_3$, $d=e_1+3e_2$. (*Ответ:* $d=(3,\ -1,\ 0)$.)

1.162. $a=3e_1+e_2+e_3$, $b=4e_1+e_2+2e_3$, $c=-5e_1+e_2+2e_3$, $d=2e_1+3e_2+5e_3$. (*Ответ:* $d=(1,\ 1,\ 1)$.)

1.163. $a=e_2+7e_3$, $b=2e_1+9e_3$, $c=e_1-2e_2-3e_3$, $d=-3e_1+e_2$. (*Ответ:* $d=(3,\ -2,\ 1)$.)

В задачах 1.164, 1.165 показать, что векторы e_1, e_2, e_3, e_4 образуют базис, и найти координаты вектора **a** в этом базисе.

1.164. $e_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $e_2=(1,\ 1,\ -1,\ -1)$, $e_3=(1,\ -1,\ 1,\ -1)$, $e_4=(1,\ -1,\ -1,\ 1)$, $a=(1,\ 2,\ 1,\ 1)$. (*Ответ:* $a=(5/4,\ 1/4,\ -1/4,\ -1/4)$.)

1.165. $e_1=(1,\ 1,\ 0,\ 1)$, $e_2=(2,\ 1,\ 3,\ 1)$, $e_3=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $e_4=(0,\ 1,\ -1,\ -1)$, $a=(0,\ 0,\ 0,\ 1)$. (*Ответ:* $a=(1,\ 0,\ -1,\ 0)$.)

1.9. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Действительное линейное пространство V называется *евклидовым пространством*, если каждой паре векторов **x** и **y** из V поставлено в соответствие действительное число $(x,\ y)$, называемое *скалярным произведением векторов* **x** *и* **y**, и выполнены следующие условия:

1) $(x,\ y)=(y,\ x)$;
2) $(x_1+x_2,\ y)=(x_1,\ y)+(x_2,\ y)$;
3) $(\lambda x,\ y)=\lambda(x,\ y)$, $\lambda\in\mathbb{R}$;
4) $(x,\ x)\geqslant 0$ и $(x,\ x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Длиной или *модулем вектора* **x** называется число $|x|=\sqrt{(x,\ x)}$. Вектор **x**, длина которого равна единице, называется *нормированным*.

Имеют место следующие соотношения:

1) $|x|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;
2) $|\lambda x|=|\lambda|\,|x|$, $\lambda\in\mathbb{R}$;
3) $|(x,\ y)|\leqslant|x|\,|y|$ (*неравенство Коши — Буняковского*);
4) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ (*неравенство треугольника*).

Угол φ, для которого

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} \quad (0 \leqslant \varphi < 2\pi),$$

называется *углом между векторами* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$.

Система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ называется *ортонормированной* в случае, когда выполняется условие

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j, \\ 1, \text{ если } i = j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Базис n-мерного евклидова пространства называется *ортонормированным*, если базисные векторы составляют ортонормированную систему. Во всяком n-мерном ($n \geqslant 2$) евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Процесс построения ортонормированного базиса по данному называется *ортогонализацией* данного базиса. Этот процесс можно описать следующим образом.

1. По данному базису $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ находим ортогональный базис $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, используя соотношения:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{g}_1, \ \mathbf{f}_k = \mathbf{g}_k + \lambda_1^{(k)}\mathbf{f}_1 + \lambda_2^{(k)}\mathbf{f}_2 + \ldots + \\ + \lambda_{k-1}^{(k)}\mathbf{f}_{k-1} \quad (1 < k \leqslant n),$$

где $\lambda_j^{(k)} = -(\mathbf{j}_j, \mathbf{g}_k)/|\mathbf{f}_j|^2$; $j = \overline{1, k-1}$.

2. Нормируем каждый из полученных векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, т. е. находим векторы $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1/|\mathbf{f}_1|$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2/|\mathbf{f}_2|$, ..., $\mathbf{e}_n = \mathbf{f}_n/|\mathbf{f}_n|$, которые и образуют ортонормированный базис.

Если векторы заданы координатами в ортонормированном базисе, то их скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат.

Примеры

1. Привести примеры евклидовых пространств.

Решение. 1. Множества геометрических векторов на плоскости и в пространстве. Их базисы соответственно имеют вид: (1, 0), (0, 1); (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

2. Множество непрерывных функций на отрезке $[a; b]$ в случае, когда их скалярное произведение задано формулой $(f, \varphi) = \int\limits_a^b f(t)\varphi(t)dt$.

2. Доказать следующее утверждение: если вектор $\mathbf{x}$ евклидова пространства ортогонален каждому из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, то он ортогонален и любому вектору $\mathbf{z}$ линейного пространства, являющемуся линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Решение. Пусть $\mathbf{z} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{a}_n$. Покажем, что $\mathbf{x} \perp \mathbf{z}$, т. е. $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$. Находим

$$(\mathbf{x},\ \mathbf{z})=(\mathbf{x},\ \alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{a}_n)=$$
$$=(\mathbf{x},\ \alpha_1\mathbf{a}_1)+(\mathbf{x},\ \alpha_2\mathbf{a}_2)+\ldots+(\mathbf{x},\ \alpha_n\mathbf{a}_n)=$$
$$=\alpha_1(\mathbf{x},\ \mathbf{a}_1)+\alpha_2(\mathbf{x},\ \mathbf{a}_2)+\ldots+\alpha_n(\mathbf{x},\ \mathbf{a}_n)=0,$$

так как по условию $(\mathbf{x},\ \mathbf{a}_i)=0,\ i=\overline{1,\ n}$.

3. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон (рис. 1.18).

Решение. Имеем

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=(\mathbf{x}+\mathbf{y},\ \mathbf{x}+\mathbf{y})+(\mathbf{x}-\mathbf{y},\ \mathbf{x}-\mathbf{y})=$$
$$=(\mathbf{x},\ \mathbf{x})+(\mathbf{y},\ \mathbf{x})+(\mathbf{x},\ \mathbf{y})+(\mathbf{y},\ \mathbf{y})+(\mathbf{x},\ \mathbf{x})-(\mathbf{y},\ \mathbf{x})-$$
$$-(\mathbf{x},\ \mathbf{y})+(\mathbf{y},\ \mathbf{y})=2|\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{y}|^2.$$

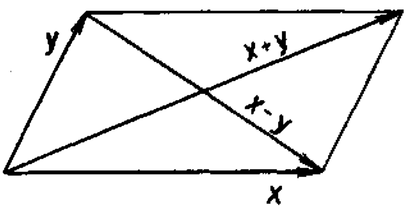


Рис. 1.18

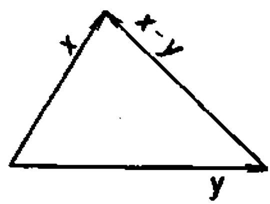


Рис. 1.19

4. Пользуясь скалярным умножением векторов, доказать, что квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Решение. Из рис. 1.19 следует:

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=(\mathbf{x}-\mathbf{y},\ \mathbf{x}-\mathbf{y})=(\mathbf{x},\ \mathbf{x})-(\mathbf{y},\ \mathbf{x})-(\mathbf{x},\ \mathbf{y})+$$
$$+(\mathbf{y},\ \mathbf{y})=|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2-2|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\varphi,$$

т. е.

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2-2|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\varphi.$$

5. В пространстве $\mathbf{R}^3$ с базисом $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ даны три линейно независимых вектора: $\mathbf{a}_1=(3,\ -2,\ 1)$, $\mathbf{a}_2=(2,\ 1,2)$, $\mathbf{a}_3=(3,\ -1,\ -2)$. Считая векторы $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3$ некоторым базисом в $\mathbf{R}^3$, построить по ним ортонормированный базис.

Решение. Положим $\mathbf{e}_1=\mathbf{a}_1$, $\mathbf{e}_2=\mathbf{a}_2+\lambda\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3=\mathbf{a}_3+\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2$. Тогда $\mathbf{e}_1=(3,\ -2,\ 1)$.

Должно выполняться равенство

$$(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1)=(\mathbf{a}_2+\lambda\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1)=(\mathbf{a}_2,\ \mathbf{e}_1)+\lambda(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1)=0,$$

из которого следует:

$$\lambda = -(\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1)/(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = -\frac{3}{7}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{3}{7}\mathbf{a}_1 =$$
$$=(2, 1, 2) - \frac{3}{7}(3, -2, 1) = (5/7, \ 13/7, \ 11/7).$$

Найдем $\mathbf{e}_3$, воспользовавшись условием: $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = 0$, $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = 0$, т. е. $\mathbf{e}_3 \perp \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 \perp \mathbf{e}_2$. Но

$$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{a}_3 + \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_1) + \lambda_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) +$$
$$+ \lambda_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_1) + \lambda_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -(\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_1)/(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = -9/14$.

Кроме того,

$$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{a}_3 + \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2) +$$
$$+ \lambda_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + \lambda_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2) + \lambda_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0.$$

Отсюда $\lambda_2 = -(\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2)/(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 4/9$. Тогда

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_3 + \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_3 - \frac{9}{14}\mathbf{e}_1 + \frac{4}{9}\mathbf{e}_2 =$$
$$=(3, -1, -2) - \frac{9}{14}(3, -2, 1) + \frac{4}{9}\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right) =$$
$$=\left(\frac{25}{18}, \frac{10}{9}, -\frac{35}{18}\right).$$

Построена ортогональная система векторов. Пронормируем ее векторы. Найдем их длины:

$$|\mathbf{e}_1| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14},$$
$$|\mathbf{e}_2| = \sqrt{\frac{25 + 169 + 121}{49}} = \frac{\sqrt{315}}{7},$$
$$|\mathbf{e}_3| = \sqrt{\frac{25^2 + 20^2 + (-35)^2}{18^2}} = \frac{5\sqrt{10}}{6}.$$

Введем следующие обозначения: $\mathbf{e}_1^0 = \mathbf{e}_1/|\mathbf{e}_1|$, $\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_2/|\mathbf{e}_2|$, $\mathbf{e}_3^0 = \mathbf{e}_3/|\mathbf{e}_3|$. Тогда:

$$\mathbf{e}_1^0 = (3/\sqrt{14}, \ -2/\sqrt{14}, \ 1/\sqrt{14}), \ \mathbf{e}_2^0 = (5/\sqrt{315},$$
$$13/\sqrt{315}, \ 11/\sqrt{315}), \ \mathbf{e}_3^0 = (\sqrt{10}/6, \ 2\sqrt{10}/15, \ -7\sqrt{10}/30).$$

6. Доказать, что квадрат диагонали n-мерного прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его ребер, выходящих из одной вершины (*n-мерное обобщение теоремы Пифагора*).

Решение. Пусть ребра параллелепипеда заданы векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ по аналогии с трехмерным параллелепипедом, диагональ которого соответствует вектору $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n$, а ее длина

$$|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n|^2 = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) + \ldots + (\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n),$$

так как $\mathbf{a}_i \perp \mathbf{a}_j$, $i \neq j$.

7. Пользуясь неравенством Коши — Буняковского, показать, что для любых действительных чисел имеет место следующее неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Решение. Рассмотрим векторы $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_i$ — ортонормированный базис; a_i, b_i — координаты векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ в базисе e_i; $i = \overline{1, n}$. Тогда:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \quad |\mathbf{y}| = \sqrt{(\mathbf{y}, \mathbf{y})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Подставив полученные выражения в неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.166. Пронормировать вектор $\mathbf{c} = (3, 1, 2, 1)$. (*Ответ:* $\mathbf{c} = (3/\sqrt{15}, 1/\sqrt{15}, 2/\sqrt{15}, 1/\sqrt{15})$.)

1.167. Найти единичный вектор, ортогональный векторам $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -1, -1, 1)$, $\mathbf{c} = (2, 1, 1, 3)$. (*Ответ:* $\mathbf{e} = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.)

1.168. Даны векторы $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{y} = -4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — ортонормированный базис. Найти угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. (*Ответ:* $\arccos(-6/\sqrt{238})$.)

1.169. Найти векторы, дополняющие до ортонормированного базиса следующие системы векторов: 1) (2/3, 1/3, 2/3), (1/3, 2/3, −2/3); 2) (1/2, 1/2, 1/2, 1/2), (1/2, 1/2, −1/2, −1/2). (*Ответ:* 1) (2/3, −2/3, −1/3) или (−2/3, 2/3, 1/3); 2) (1/2, −1/2, 1/2, −1/2) или (1/2, −1/2, −1/2, 1/2).)

1.170. Выяснить, является ли ортогональной в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^3$ система векторов: $\mathbf{x}=(1,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{y}=(-1,\ -1,\ 1)$, $\mathbf{z}=(2,\ 2,\ -2)$. (*Ответ:* нет.)

В задачах 1.171, 1.172 по данному базису $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^3$ построить ортонормированный базис.

1.171. $\mathbf{f}_1=(1,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{f}_2=(0,\ 1,\ -1)$, $\mathbf{f}_3=(1,\ 1,\ 1)$. (*Ответ:* $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$, $(0, 1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$.)

1.172. $\mathbf{f}_1=(1,\ -2,\ 2)$, $\mathbf{f}_2=(-1,\ 0,\ -1)$, $\mathbf{f}_3=(5,\ -3,\ -7)$. (*Ответ:* (−2/3, −2/3, −1/3), (1/3, −2/3, 2/3), (2/3, −1/3, −2/3).)

1.173. Определить угол между векторами **x** и **y**, если: 1) $\mathbf{x}=(1, 2, 2, 3)$, $\mathbf{y}=(3, 1, 5, 1)$; 2) $\mathbf{x}=(2, 2, 2, 3)$, $\mathbf{y}=(2, 0, -2, 1)$. (*Ответ:* 1) 45°; 2) $\cos\varphi=1/\sqrt{21}$.)

1.10. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть V, W — два линейных пространства. *Оператором f, действующим из V в W*, называется отображение вида $f\colon V\to W$, ставящее в соответствие каждому вектору $\mathbf{x}$ пространства V некоторый вектор $\mathbf{y}$ пространства W: $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$. При этом вектор $\mathbf{y}$ называют *образом вектора* $\mathbf{x}$.

Оператор f называется *линейным*, если выполняются следующие два условия:

1) $f(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=f(\mathbf{x}_1)+f(\mathbf{x}_2)$ для любых $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2\in V$;

2) $f(\lambda\mathbf{x})=\lambda f(\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x}\in V$ и любого $\lambda\in\mathbf{R}$.

Если $V=W=L$, то линейный оператор, действующий в этом случае из L в L, называется *линейным преобразованием пространства L*. В дальнейшем будем рассматривать только случай $V=W=L$.

Пусть f — линейный оператор в конечномерном пространстве L_n, а $\mathbf{e}_i$, $i=\overline{1,\ n}$, — некоторый базис пространства L_n. Разложим векторы $f(\mathbf{e}_k)$ по этому базису. Получим

$$f(\mathbf{e}_k)=a_{1k}\mathbf{e}_1+a_{2k}\mathbf{e}_2+\ldots+a_{nk}\mathbf{e}_n,\quad k=\overline{1,\ n}.$$

Тогда матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей оператора f в базисе* e_i, $i=\overline{1, n}$.

Если задана матрица оператора f, то он определяется однозначно, а именно: если $y=f(x)$, то $Y=AX$, где X и Y — столбцы координат векторов x и y соответственно; A — матрица оператора f в базисе e_i, $i=\overline{1, n}$.

Если A и A' — матрицы оператора f в базисах e_i, $i=\overline{1, n}$, и e_i', $i=\overline{1, n}$, соответственно, а T — матрица перехода от базиса e_i, $i=\overline{1, n}$, к базису e_i', $i=\overline{1, n}$, то *формула преобразования матрицы оператора при преобразовании базиса* имеет вид

$$A'=T^{-1}AT.$$

Суммой f_1+f_2, *произведением* f_1f_2 *двух линейных преобразований* f_1 *и* f_2 *и произведением* λf *числа* λ *и линейного преобразования* f *пространства* L_n называются преобразования, определяемые соответственно равенствами:

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x),\ (f_1f_2)(x)=f_1(f_2(x)),$$
$$\lambda f(x)=\lambda f(x)$$

для любого вектора x пространства L_n. Преобразования f_1+f_2, f_1f_2, λf являются линейными. Если A_1, A_2, A — матрицы преобразований f_1, f_2, f пространства L_n в некотором базисе, то матрицами преобразований f_1+f_2, f_1f_2, f пространства L_n в том же базисе будут соответственно матрицы A_1+A_2, A_1A_2, λA.

Примеры

1. Доказать, что поворот плоскости на угол α вокруг начала координат является линейным преобразованием, и найти матрицу этого преобразования в любом ортонормированном базисе, если положительное направление отсчета углов совпадает с направлением кратчайшего поворота, переводящего первый базисный вектор во второй (рис. 1.20).

Решение. Поворот плоскости на угол α переводит всякий вектор плоскости в вектор этой же плоскости, сумму векторов — в сумму векторов, сохраняя линейные отноше-

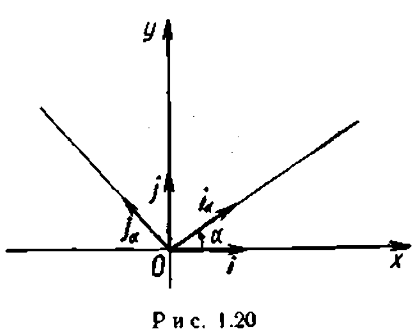


Рис. 1.20

ния между векторами. Следовательно, это — линейное преобразование. Найдем его матрицу в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$. При повороте на угол α векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ перейдут в векторы

$$\mathbf{i}_\alpha = \cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha\mathbf{j}, \quad \mathbf{j}_\alpha = -\sin\alpha\mathbf{i} + \cos\alpha\mathbf{j}.$$

Матрица данного преобразования имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

2. Преобразование f переводит вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $f(\mathbf{x}) = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$. Доказать, что это преобразование линейное, и найти его матрицу.

Решение. Покажем, что $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$. Имеем:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (x_2 + y_2 + x_3 + y_3,\ 2x_1 + 2y_1 + x_3 + y_3,\ 3x_1 + 3y_1 - x_2 - y_2 + x_3 + y_3),$$
$$f(\mathbf{x}) = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3),$$
$$f(\mathbf{y}) = (y_2 + y_3,\ 2y_1 + y_3,\ 3y_1 - y_2 + y_3),$$
$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = (x_2 + y_2 + x_3 + y_3,\ 2x_1 + 2y_1 + x_3 + y_3,\ 3x_1 + 3y_1 - x_2 - y_2 + x_3 + y_3).$$

Отсюда $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$. Кроме того,

$$f(\lambda\mathbf{x}) = (\lambda(x_2 + x_3),\ \lambda(2x_1 + x_3),\ \lambda(3x_1 - x_2 + x_3)),$$
$$\lambda f(\mathbf{x}) = \lambda(x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3) = (\lambda(x_2 + x_3),\ \lambda(2x_1 + x_3),\ \lambda(3x_1 - x_2 + x_3)).$$

Следовательно, преобразование f является линейным. Найдем его матрицу. Для этого запишем векторы $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$, $f(\mathbf{e}_3)$ в том же базисе:

$$f(\mathbf{e}_1) = 0\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad f(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + 1\cdot\mathbf{e}_3,$$
$$f(\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Тогда

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Будет ли преобразование f линейным, если оно переводит вектор $\mathbf{x}$ в вектор $f(\mathbf{x}) = (x_1,\ x_2 + 1,\ x_3 + 2)$?

Решение. Найдем:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2 + 1,\ x_3 + y_3 + 2),$$
$$f(\mathbf{x}) = (x_1,\ x_2 + 1,\ x_3 + 2), \quad f(\mathbf{y}) = (y_1,\ y_2 + 1,\ y_3 + 2).$$

Тогда

$$f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})=(x_1+y_1,\ x_2+y_2+2,\ x_3+y_3+4).$$

Очевидно, что $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})\neq f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})$, следовательно, преобразование не является линейным.

4. Будет ли линейным преобразование f, переводящее вектор $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ в вектор $f(\mathbf{x})=(2x_1+x_2, x_1+x_3, x_3^2)$?

Решение. Так как

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=(2x_1+2y_1+x_2+y_2, x_1+y_1+x_3+y_3, (x_3+y_3)^2),$$
$$f(\mathbf{y})=(2y_1+y_2,\ y_1+y_3,\ y_3^2),$$
$$f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})=(2x_1+2y_1+x_2+y_2,$$
$$x_1+y_1+x_3+y_3,\ x_3^2+y_3^2),$$

то $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})\neq f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})$ и преобразование не является линейным.

5. Будет ли линейным преобразование f, переводящее вектор $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ в вектор $f(\mathbf{x})=(x_1-x_2+x_3,\ x_3,\ x_2)$? Найти матрицу преобразования f.

Решение. Имеем:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=(x_1+y_1-x_2-y_2+x_3+y_3,\ x_3+y_3,\ x_2+y_2),$$
$$f(\mathbf{y})=(y_1-y_2+y_3,\ y_3,\ y_2),$$
$$f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})=(x_1+y_1-x_2-y_2+x_3+y_3,\ x_3+y_3,\ x_2+y_2),$$

т. е. $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})$. Так как

$$f(\lambda\mathbf{x})=(\lambda(x_1-x_2+x_3),\ \lambda x_3,\ \lambda x_2),$$
$$\lambda f(\mathbf{x})=(\lambda(x_1-x_2+x_3),\ \lambda x_3,\ \lambda x_2),$$

то $f(\lambda\mathbf{x})=\lambda f(\mathbf{x})$.

Преобразование является линейным. Найдем его матрицу:

$$f(\mathbf{e}_1)=1\cdot\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\ f(\mathbf{e}_2)=0\cdot\mathbf{e}_1+0\cdot\mathbf{e}_2+1\cdot\mathbf{e}_3,$$
$$f(\mathbf{e}_3)=0\cdot\mathbf{e}_1+1\cdot\mathbf{e}_2+0\cdot\mathbf{e}_3,$$

отсюда

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

6. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего векторы $\mathbf{a}_1=(2, 3, 5)$, $\mathbf{a}_2=(0, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3=(1, 0, 0)$ в векторы $\mathbf{b}_1=(1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2=(1, 1, -1)$, $\mathbf{b}_3=(2, 1, 2)$.

Решение. Пусть A — искомая матрица,

$$B=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&1&0\\5&2&0\end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&1&1\\1&-1&2\end{bmatrix}.$$

Решаем матричное уравнение:

$$AB=C,\ ABB^{-1}=CB^{-1},\ A=CB^{-1}.$$

Имеем $\Delta_B=6-5=1$,

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}0&2&-1\\0&-5&3\\1&-4&2\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A=CB^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&1&1\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&-1\\0&-5&3\\1&-4&2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2&-11&6\\1&-7&4\\2&-1&0\end{bmatrix}.$$

7. Даны два базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ линейного пространства и матрица A линейного преобразования в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Найти матрицу этого преобразования в базисе $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, если $\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2'=2\mathbf{e}_1-4\mathbf{e}_2$, $A=\begin{bmatrix}2&4\\-3&3\end{bmatrix}$.

Решение. Матрица T перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ к базису $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ имеет вид

$$T=\begin{bmatrix}-2&2\\1&-4\end{bmatrix},\quad \Delta_T=8-2=6.$$

Тогда

$$T^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}-4&-1\\-2&-2\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-4&-1\\-2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2/3&-1/6\\-1/3&-1/3\end{bmatrix}.$$

Матрица линейного преобразования f в базисе $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$

$$A'=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-2/3&-1/6\\-1/3&-1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\-3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&2\\1&-4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -3/2 & 11 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

8. Даны два базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ линейного пространства и матрица A линейного преобразования f в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Найти матрицу этого преобразования в базисе $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$, если $\mathbf{e}_1' = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Матрица T перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Находим обратную ей матрицу T^{-1}:

$$T^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь $\Delta = 15 + 8 - 2 + 2 - 10 - 12 = 1$.

Матрица линейного преобразования f в базисе $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -26 & -19 & 6 \\ 37 & 26 & -8 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1.174—1.179 выяснить, является ли линейным преобразование f, переводящее любой вектор $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\mathbf{y}$, заданный координатами в том же базисе, что и вектор $\mathbf{x}$.

1.174. $\mathbf{y} = (3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 5\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2)$. (*Ответ:* да.)

1.175. $y=(5\alpha_1-1,\ \alpha_2+2\alpha_3,\ \alpha_2^3)$. (*Ответ:* нет.)

1.176. $y=(\alpha_2+3\alpha_3,\ 5\alpha_1,\ 2\alpha_3-3\alpha_1)$. (*Ответ:* да.)

1.177. $y=(\alpha_1+2\alpha_2,\ \alpha_2^2-\alpha_1^2,\ \alpha_3+2)$. (*Ответ:* нет.)

1.178. $y=(\alpha_1\alpha_2,\ 2\alpha_1-3\alpha_2,\ \alpha_3+\alpha_1)$. (*Ответ:* нет.)

1.179. $y=(4\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3,\ 3\alpha_1-2\alpha_2)$. (*Ответ:* да.)

В задачах 1.180—1.182 найти матрицу линейного преобразования, переводящего векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ в векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ соответственно.

1.180. $\mathbf{a}_1=(2,\ 0,\ 3)$, $\mathbf{a}_2=(4,\ 1,\ 5)$, $\mathbf{a}_3=(3,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{b}_1=(1,\ 2,\ -1)$, $\mathbf{b}_2=(4,\ 5,\ -2)$, $\mathbf{b}_3=(1,\ -1,\ 1)$.

$$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{bmatrix}.\right)$$

1.181. $\mathbf{a}_1=(3,\ 4,\ 5)$, $\mathbf{a}_2=(2,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{a}_3=(-4,\ -2,\ -3)$, $\mathbf{b}_1=(4,\ 5,\ 3)$, $\mathbf{b}_2=(2,\ 3,\ 2)$, $\mathbf{b}_3=(-1,\ -2,\ -1)$.

$$\left(\text{Ответ: } -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 10 & -15 \\ 5 & 15 & -20 \\ 4 & 12 & -15 \end{bmatrix}.\right)$$

1.182. $\mathbf{a}_1=(1,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{a}_2=(1,\ 2,\ 3)$, $\mathbf{a}_3=(1,\ 3,\ 6)$, $\mathbf{b}_1=(0,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{b}_2=(1,\ 0,\ 1)$, $\mathbf{b}_3=(1,\ 1,\ 0)$.

$$\left(\text{Ответ: } \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.\right)$$

1.183. Найти матрицу линейного преобразования f, переводящего вектор $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{y}=[\mathbf{x},\ \mathbf{a}]$ в ортонормированном базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, если $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

$$\left(\text{Ответ: } \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.\right)$$

1.184. Матрица линейного преобразования f в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Найти матрицу данного преобразования в базисе $\mathbf{g}_1=$

$= 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{g}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$.

$\left(\textit{Ответ:} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \right)$

1.185. Линейное преобразование f в базисе $\mathbf{a}_1 = (8, -6, 7)$, $\mathbf{a}_2 = (-16, 7, -13)$, $\mathbf{a}_3 = (9, -3, 7)$ имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу данного преобразования в базисе $\mathbf{b}_1 = (1, -2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (3, -1, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (2, 1, 2)$.

$\left(\textit{Ответ:} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}. \right)$

1.186. Показать, что дифференцирование является линейным преобразованием пространства всех многочленов степени не выше n от одного неизвестного с действительными коэффициентами. Найти матрицу этого преобразования в базисе $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

$\left(\textit{Ответ:} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}. \right)$

1.187. Пусть преобразование f_1 в базисе $\mathbf{a}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3)$ имеет матрицу $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, а преобразование f_2 в базисе $\mathbf{b}_1 = (3, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (4, 2)$ — матрицу $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$. Найти матрицу преобразования $f_1 + f_2$ в базисе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$.

$\left(\textit{Ответ:} \begin{bmatrix} 44 & 44 \\ -59/2 & -25 \end{bmatrix}. \right)$

1.188. Преобразование f_1 в базисе $\mathbf{a}_1 = (-3, 7)$, $\mathbf{a}_2 =$

$=(1,\ -2)$ имеет матрицу $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, а преобразование f_2 в базисе $\mathbf{b}_1=(6,\ -7)$, $\mathbf{b}_2=(-5,\ 6)$ — матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$. Найти матрицу преобразования $f_1 f_2$ в том базисе, в котором даны координаты всех векторов. (*Ответ:* $\begin{bmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{bmatrix}$.)

1.11. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть число λ и вектор $\mathbf{x}\in L$, $\mathbf{x}\neq 0$, таковы, что $f(\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}$. Тогда число λ называется *собственным числом линейного оператора* f, а вектор $\mathbf{x}$ — *собственным вектором* этого *оператора, соответствующим собственному числу* λ.

В конечномерном пространстве векторное равенство $f(\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}$ эквивалентно матричному равенству

$$(A-\lambda E)X=0, \tag{1.8}$$

где A — матрица оператора f; $X=[x_1\ \ x_2\ \ \dots\ \ x_n]$, $X\neq 0$. Отсюда следует, что λ является собственным числом оператора f в том и только в том случае, когда система (1.8) имеет ненулевые решения, т. е. $\det(A-\lambda E)=0$. Тогда λ — корень многочлена

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda E)=0.$$

Многочлен $P(\lambda)$ называют *характеристическим многочленом оператора* f, а уравнение $p(\lambda)=0$ — *характеристическим уравнением*.

Собственными числами оператора могут быть только корни его характеристического уравнения, но не всякий корень характеристического уравнения является собственным числом линейного преобразования действительного линейного пространства. Например, комплексное характеристическое число не может быть собственным числом линейного преобразования действительного линейного пространства.

Собственное число называется *m-кратным*, если оно является m-кратным корнем характеристического уравнения, и *простым*, если оно является простым корнем характеристического уравнения.

Собственные векторы линейного преобразования действительного линейного пространства можно найти следующим образом.

1. Выбирают в данном пространстве некоторый базис.

2. Находят матрицу A данного преобразования в выбранном базисе.

3. Определяют характеристические числа линейного преобразования f, т. е. корни уравнения $\det(A-\lambda E)=0$. Выделяют из них только те λ_i, которые являются собственными числами данного линейного преобразования, т. е. для действительного линейного пространства — только действительные корни характеристического уравнения. Если характеристических чисел нет, то не существует и собственных векторов.

4. Записывают систему (1.8) в координатной форме:

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0.\end{array}\right\}\qquad(1.9)$$

Затем полагают λ равным одному из собственных чисел λ_i данного преобразования и находят ненулевое решение $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}$ этой системы. Таким образом, вектор $X^{(i)}=(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)})$ является собственным вектором данного оператора f с собственным числом λ_i. Так как при $\lambda=\lambda_i$ система (1.9) имеет бесконечное множество решений, то для указанного оператора существует бесконечное множество собственных векторов с данным собственным числом.

Примеры

1. Найти собственные векторы линейного оператора действительного линейного пространства, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & -3\end{bmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 4\\ -1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

$$-6+3\lambda-2\lambda+\lambda^2+4=0,\ \lambda^2+\lambda-2=0,$$

отсюда $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$.

Для определения координат собственных векторов получаем две системы линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}(2-\lambda_1)x_1+4x_2=0,\\ -x_1+(-3-\lambda_1)x_2=0,\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(2-\lambda_2)x_1+4x_2=0,\\ -x_1+(-3-\lambda_2)x_2=0.\end{array}\right\}$$

Поскольку $\lambda_1=1$, то первая из систем имеет вид

$$\left.\begin{array}{l}x_1+4x_2=0,\\ -x_1-4x_2=0.\end{array}\right\}$$

Таким образом, значения x_1 и x_2 должны удовлетворять уравнению $x_1=-4x_2$. Следовательно, решение этой системы имеет вид $x_1=t$, $x_2=-4t$, $t\in\mathbf{R}$. Итак, собственному числу $\lambda=1$ соответствуют собственные векторы $X^{(1)}=(t, -4t)$, $t\neq0$, $t\in\mathbf{R}$.

Значение $\lambda_2=-2$ приводит к системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l}4x_1+4x_2=0,\\ -x_1-x_2=0,\end{array}\right\}$$

решая которую, имеем: $x_2 = t$, $x_1 = -t$, $t \in \mathbf{R}$. Следовательно, собственными векторами данного оператора, соответствующими собственному числу $\lambda_2 = -2$, являются $\mathbf{X}^{(2)} = (t, -t)$, $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$.

2. Найти собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(12 - 7\lambda + \lambda^2)(5 - \lambda) - 4(3 - \lambda) - 4(5 - \lambda) = 0,$$
$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28 = 0.$$

Так как целые корни многочлена с целыми коэффициентами — делители свободного члена, то, подставляя всевозможные делители в последнее уравнение, убеждаемся, что корнями уравнения являются числа 1, 4, 7. Следовательно, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 7$ — собственные числа.

Для определения собственных векторов записываем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (3-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0, \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_2 - 2x_3 &= 0, \\ -2x_2 + (5-\lambda)x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Подставляя в систему (1) $\lambda_1 = 1$, получаем систему:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0, \\ -2x_2 + 4x_3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

которая эквивалентна следующей системе:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 2x_3, \\ x_1 &= -2x_3. \end{aligned}\right\}$$

Решая последнюю систему, находим: $x_1 = -2t$, $x_2 = 2t$, $t \in \mathbf{R}$. Таким образом, собственными векторами, соответствующими собственному числу $\lambda_1 = 1$, являются $\mathbf{X}^{(1)} = (-2t, 2t, t)$, $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$.

Подставив в систему (1) $\lambda_2 = 4$, имеем систему:

$$\left.\begin{aligned} -x_1+2x_2&=0,\\ 2x_1-2x_3&=0,\\ -2x_2+\ x_3&=0,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x_3&=2x_2,\\ x_1&=2x_2.\end{aligned}\right\}$$

Полагая $x_2=t$, получаем, что $x_1=2t$, $x_2=t$, $x_3=2t$, $t\in\mathbf{R}$,— решение последней системы. Следовательно, $\mathbf{X}^{(2)}=(2t,\ t,\ 2t)$, $t\neq0$, $t\in\mathbf{R}$,— собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_2=4$.

Подставив в (1) $\lambda_3=7$, получим систему:

$$\left.\begin{aligned} -4x_1+2x_2\qquad\ &=0,\\ 2x_1-3x_2-2x_3&=0,\\ -2x_2-2x_3&=0,\end{aligned}\right\}$$

эквивалентную системе

$$\left.\begin{aligned} x_2&=-x_3,\\ x_1&=\frac{1}{2}x_3.\end{aligned}\right\}$$

Решение этой системы имеет вид $x_1=\frac{1}{2}t$, $x_2=-t$, $x_3=t$, $t\in\mathbf{R}$. Таким образом, собственными векторами данного оператора, соответствующими собственному числу $\lambda_3=7$, являются $\mathbf{X}^{(3)}=\left(\frac{t}{2},\ -t,\ t\right)$, $t\neq0$, $t\in\mathbf{R}$.

3. Найти собственные векторы линейного оператора f, заданного матрицей

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\det(A-\lambda E)=0,\quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

$$(-4+\lambda^2)(-3-\lambda)+3+2(-3-\lambda)+5(-2-\lambda)=0,$$
$$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0,\ (\lambda+1)^3=0,$$

откуда $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

Таким образом, оператор f имеет одно собственное число $\lambda = -1$ кратности 3.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda = -1$.

Подставив $\lambda = -1$ в систему

$$\left.\begin{aligned} (2-\lambda)x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 5x_1 + (-3-\lambda)x_2 + 3x_3 &= 0, \\ -x_1 + (-2-\lambda)x_3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

получим

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ -x_1 - x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Из последнего уравнения имеем $x_1 = -x_3$. Тогда

$$x_2 = 3x_1 + 2x_3 = -3x_3 + 2x_3 = -x_3.$$

Полагая $x_3 = -t$, $t \in \mathbf{R}$, находим, что $x_1 = -t$, $x_2 = -t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbf{R}$, — решение системы (1). Тогда $\mathbf{X} = (-t, -t, t)$, $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$, — собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda = -1$.

4. Найти собственные векторы линейного преобразования линейного пространства V, заданного матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

в некотором базисе, если: а) V — действительное; б) V — комплексное.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0.$$

Число $\lambda_1 = 1$ — единственный целый корень данного уравнения. Так как $\lambda = 1$ является корнем многочлена $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13$, то данный многочлен делится без остатка на $\lambda - 1$. Следовательно,

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0,$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

откуда $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$.

а) Если V — действительное пространство, то оператор f имеет только одно собственное число $\lambda = 1$. Найдем собственные векторы, соответствующие $\lambda = 1$. Подставив это значение в систему

$$\left.\begin{aligned} (4-\lambda)x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 + (-4-\lambda)x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 + (5-\lambda)x_3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

имеем

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Из последнего уравнения полученной системы находим $x_1 = x_3$. Тогда $5x_2 = x_1 + 9x_3 = 10x_3$, $x_2 = 2x_3$. Если $x_3 = t$, то $x_2 = 2t$, $x_1 = t$. Векторы $\mathbf{X}^{(1)} = (t,\ 2t,\ t)$, $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$, соответствуют собственному числу $\lambda = 1$.

б) Если V — комплексное линейное пространство, то оператор имеет три собственных числа: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$. Для λ_1 уже найдены собственные векторы $\mathbf{X}^{(1)} = (t,\ 2t,\ t)$. Найдем собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_2 = 2 + 3i$. Составим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (2-3i)x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 + (-6-3i)x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 + (-3-3i)x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Из последнего уравнения этой системы имеем $x_1 = (1/4)(3-3i)x_3$. Тогда

$$5x_2 = (2-3i)x_1 + 7x_3 = \frac{1}{4}(2-3i)(3-3i)x_3 + 7x_3 =$$

$$= \frac{1}{4}(6 - 15i + 9i^2)x_3 + 7x_3 = \frac{25-15i}{4}x_3,$$

$$x_2 = \frac{5-3i}{4}x_3.$$

Положим $x_3 = 4t$. Отсюда $\mathbf{X}^{(2)} = (3-3i,\ \ 5-3i,\ \ 4)t$, $t \neq 0$, $t \in \mathbf{C}$.

Для определения собственных векторов, соответствующих собственному числу $\lambda_3 = 2 - 3i$, составим систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (2+3i)x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 + (-6+3i)x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 + (3+3i)x_3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

из последнего уравнения которой имеем $x_1=\frac{1}{4}(3+$ $+3i)x_3$. Тогда

$$5x_2=(2+3i)x_1+7x_3=\frac{1}{4}(2+3i)(3+3i)x_3+7x_3=$$
$$=\frac{1}{4}(15i-3)x_3+7x_3=\frac{25+15i}{4}x_3,$$

откуда $x_2=\frac{5+3i}{4}x_3$. Положив $x_3=4t$, имеем $\mathbf{X}^{(3)}=$ $=(3+3i,\ 5+3i,\ 4)t$, $t\neq 0$, $t\in\mathbf{C}$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1.189—1.198 найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей A.

1.189. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. (*Ответ:* $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$; $\mathbf{X}^{(1)}=(t,$ $-t)$, $\mathbf{X}^{(2)}=(t,\ t)$, $t\neq 0$.)

1.190. $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}$. (*Ответ:* $\lambda_1=7$, $\lambda_2=-2$; $\mathbf{X}^{(1)}=(t,$ $t)$, $\mathbf{X}^{(2)}=(4t,\ -5t)$, $t\neq 0$.)

1.191. $A=\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{bmatrix}$.

(*Ответ:* $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=0$; $\mathbf{X}^{(1)}=(t,t,t)$, $\mathbf{X}^{(2)}=(2t,\ t,\ -3t)$, $t\neq 0$.)

1.192. $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{bmatrix}$.

(*Ответ:* $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$; $\mathbf{X}^{(1)}=(0,\ 0,\ t)$, $\mathbf{X}^{(2)}=(3t,$ $-6t,\ 20t)$, $t\neq 0$.)

1.193. $A=\begin{bmatrix}7 & 0 & 0\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{bmatrix}$.

(*Ответ:* $\lambda_1=1$, $\lambda_2=7$, $\lambda_3=-7$; $\mathbf{X}^{(1)}=(0,\ 2t,\ t)$, $\mathbf{X}^{(2)}=$ $=(7t,\ 5t,\ 6t)$, $\mathbf{X}^{(3)}=(0,\ 5t,\ 6t)$, $t\neq 0$.)

1.194. $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$.

(*Ответ:* $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$; $\mathbf{X}=(3t,\ t,\ t)$, $t\neq 0$.)

1.195. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(*Ответ:* $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$; $\mathbf{X}^{(1)}=(t,\ t,\ t)$, $\mathbf{X}^{(2)}=(0,\ 0,\ t)$, $\mathbf{X}^{(3)}=(t,\ 3t,\ t)$, $t\neq 0$.)

1.196. $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$.

(*Ответ:* $\lambda_1=3$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$; $\mathbf{X}^{(1)}=(t,\ 2t,\ 2t)$, $\mathbf{X}^{(2)}=$ $=(t,\ 2t,\ t)$, $t\neq 0$.)

1.197. $A=\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$.

(*Ответ:* $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=1$; $\mathbf{X}^{(1)}=(3t,\ 5t,\ 6t)$, $t\neq 0$; $\mathbf{X}^{(2)}=(2,\ 1,\ 0)t_1+(1,\ 0,\ -1)t_2$, где t_1, t_2 не равны нулю одновременно.)

1.198. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(*Ответ:* $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$; $\mathbf{X}=(1,\ 2,\ 0)t_1+(0,\ 0,\ 1)t_2$, где t_1, t_2 не равны нулю одновременно.)

1.12. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Квадратичной формой действительных переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных, т. е. многочлен, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Квадратичная форма имеет вид

$$L(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

где a_{ij} — некоторые числа, называемые *коэффициентами квадратичной формы*.

Если $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ — квадратичная форма от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, а $\lambda \in \mathbf{R}$, то

$$L(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^2 L(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Если $n = 2$, то

$$L(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Для $n = 3$

$$L(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

Квадратичную форму можно записать в таком виде, что коэффициенты при x_ix_j и x_jx_i, $i \neq j$, будут равны между собой.

Так как $x_ix_j = x_jx_i$, то

$$a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})x_ix_j + \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})x_ix_j.$$

Без ограничения общности будем считать, что $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij} \in \mathbf{R}$. Симметричную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

составленную из коэффициентов квадратичной формы, называют *матрицей квадратичной формы*.

Квадратичная форма может быть записана в виде

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = X^TAX,$$

где $A = (a_{ij})$; $X^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Выражение X^TAX называют *матричной записью квадратичной формы*.

Квадратичная форма называется *действительной*, если все ее коэффициенты — действительные числа и, кроме того, линейное пространство является действительным.

Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы. Квадратичная форма называется *невырожденной*, если ее матрица — невырожденная. Ранг невырожденной квадратичной формы равен числу переменных этой формы.

Матрица U называется *ортогональной (унитарной)*, если выполняется условие $U^{-1} = U^T$.

Будем рассматривать квадратичную форму в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$. Так как матрица $A = (a_{ij})$ симметрична, то она может быть представлена в виде $A = U^TDU$, где D — диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы A.

Столбцы матрицы U являются координатами некоторого ортонормированного базиса $B' = (e_1, e_2, ..., e_n)$, в котором матрица A имеет диагональный вид, а квадратичная форма — искомый канонический вид. Соответствующее преобразование координат определяется соотношением $X = UX'$ и называется *ортогональным*.

Если λ_i, $i=\overline{1, n}$,— собственные числа матрицы A, то квадратичная форма имеет *канонический вид:*

$$L(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

Примеры

1. Записать матрицу для данной квадратичной формы:

а) $L(x_1, x_2)=x_1^2+2x_2^2-x_1x_2$;

б) $L(x_1, x_2, x_3)=3x_1^2+4x_2^2-4x_3^2+5x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$;

в) $L(x_1, x_2, x_3, x_4)=2x_4^2-2x_1x_4+x_2x_3$.

Решение. а) Для $L(x_1, x_2)=x_1^2-\frac{1}{2}x_1x_2-\frac{1}{2}x_2x_1+2x_2^2$ имеем: $a_{11}=1$, $a_{22}=2$, $a_{12}=a_{21}=-1/2$. Тогда

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}.$$

б) Для $L(x_1, x_2, x_3)$ получаем: $a_{11}=3$, $a_{22}=4$, $a_{33}=-4$, $a_{12}=a_{21}=5/2$, $a_{13}=a_{31}=-3/2$, $a_{23}=a_{32}=-1/2$. Таким образом,

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 5/2 & -3/2 \\ 5/2 & 4 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 & -4 \end{bmatrix}.$$

в) Для $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ имеем: $a_{11}=0$, $a_{22}=0$, $a_{33}=0$, $a_{44}=2$, $a_{12}=a_{21}=0$, $a_{13}=a_{31}=0$, $a_{14}=a_{41}=-1$, $a_{24}=a_{42}=0$, $a_{34}=a_{43}=0$. Тогда

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Записать в матричном виде квадратичную форму $L(x_1, x_2, x_3)=4x_1^2-2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-3x_1x_3$.

Решение. Так как $a_{11}=4$, $a_{22}=-2$, $a_{33}=3$, $a_{12}=a_{21}=1$, $a_{13}=a_{31}=-3/2$, $a_{23}=a_{32}=0$, то:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3/2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad X^T=[x_1 \quad x_2 \quad x_3].$$

Тогда

$$L(x_1, x_2, x_3)=X^TAX=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3/2 & 0 & 3 \end{bmatrix}[x_1 \ \ x_2 \ \ x_3].$$

3. Записать квадратичную форму по заданной матрице:

а) $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение. а) Имеем: $a_{11}=3$, $a_{22}=2$, $a_{12}=a_{21}=-1$. Тогда

$$L(x_1, x_2)=3x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2.$$

б) Так как $a_{11}=-1$, $a_{22}=0$, $a_{33}=1$, $a_{12}=a_{21}=2$, $a_{13}=a_{31}=3$, $a_{23}=a_{32}=5$, то

$$L(x_1, x_2, x_3)=-x_1^2+x_3^2+2x_1x_2+3x_1x_3+5x_2x_3.$$

4. Привести к каноническому виду квадратичную форму $L(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2+4x_1x_2$.

Решение. Имеем: $a_{11}=1$, $a_{22}=1$, $a_{12}=a_{21}=2$. Тогда матрица квадратичной формы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\det(A-\lambda E)=0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0, \ \lambda^2-2\lambda-3=0.$$

Отсюда собственными значениями матрицы A являются $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$. Значит, канонический вид квадратичной формы $L(y_1, y_2)=-y_1^2+3y_2^2$.

Определяем собственные векторы. При $\lambda_1=-1$ получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1+2\alpha_2=0, \\ 2\alpha_1+2\alpha_2=0, \end{aligned}\right\}$$

откуда $\alpha_2=-\alpha_1$. Следовательно, $\alpha_1=t$, $\alpha_2=t$, $t\in\mathbf{R}$, — ее решение. Таким образом, вектор-столбцы $X^{(1)}=\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$,

$t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$, являются собственными векторами матрицы A, соответствующими собственному числу $\lambda_1 = -1$. Пронормировав $\mathbf{X}^{(1)}$, получим $\mathbf{X}^{(1)*} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Координаты β_1, β_2 собственных вектор-столбцов, соответствующих собственному числу $\lambda_2 = 3$, находим из следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -2\beta_1 + 2\beta_2 = 0, \\ 2\beta_1 - 2\beta_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда $\beta_2 = \beta_1$. Следовательно, $\beta_1 = t$, $\beta_2 = t$, $t \in \mathbf{R}$,— ее решение. Вектор-столбцы $\mathbf{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$, $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$, являются собственными векторами матрицы A, соответствующими собственному числу $\lambda_2 = 3$. Пронормировав $\mathbf{X}^{(2)}$, получим $\mathbf{X}^{(2)*} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2, \\ x_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2. \end{aligned}\right\}$$

Матрица этого ортогонального преобразования

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

5. Привести к каноническому виду квадратичную форму $L(x_1, \ x_2, \ x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + 12x_1x_3$.

Решение. Так как $a_{11} = 4$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = 9$, $a_{12} = a_{21} = -2$, $a_{13} = a_{31} = 6$, $a_{23} = a_{32} = -3$, то матрица квадратичной формы

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\det(A - \lambda E) = 0$. Тогда

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 6 \\ -2 & 1-\lambda & -3 \\ 6 & -3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda^3 - 14\lambda^2 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Следовательно, квадратичная форма имеет канонический вид

$$L(y_1, y_2, y_3) = 14y_1^2.$$

При $\lambda = 14$ для определения собственных векторов имеем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -10\alpha_1 - \ \ 2\alpha_2 + 6\alpha_3 &= 0, \\ -2\alpha_1 - 13\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0, \\ 6\alpha_1 - \ \ 3\alpha_2 - 5\alpha_3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

эквивалентную системе

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1 + 13\alpha_2 + \ \ 3\alpha_3 &= 0, \\ -42\alpha_2 - 14\alpha_3 &= 0, \\ 63\alpha_2 + 21\alpha_3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= -2\alpha_2, \\ \alpha_3 &= -3\alpha_2. \end{aligned}\right\}$$

Следовательно, $\alpha_1 = -2t$, $\alpha_2 = -2t$, $t \in \mathbf{R}$, — ее решение. Тогда вектор-столбцы

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ -3t \end{bmatrix}, \quad t \neq 0, \quad t \in \mathbf{R},$$

являются собственными векторами матрицы A, соответствующими собственному числу $\lambda = 14$. Пронормировав $\mathbf{X}^{(1)}$, получим

$$\mathbf{X}^{(1)*} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{bmatrix}.$$

При $\lambda = 0$ имеем систему

$$\left.\begin{aligned} 4\beta_1 - 2\beta_2 + 6\beta_3 &= 0, \\ -2\beta_1 + \ \ \beta_2 - 3\beta_3 &= 0, \\ 6\beta_1 - 3\beta_2 + 9\beta_3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

которая сводится к одному уравнению $2\beta_1 - \beta_2 + 3\beta_3 = 0$ или $\beta_2 = 2\beta_1 + 3\beta_3$. Решение этой системы можно записать в виде $\beta_2 = 2a + 3b$, где $\beta_1 = a$; $\beta_3 = b$. В результате получим семейство собственных векторов $\mathbf{X} = a\mathbf{e}_1 + (2a + 3b)\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3$, зависящее от двух параметров a и b. Из него выделим два каких-либо ортогональных вектора. Положив $a = 0$, $b = 1$, получим собственный вектор $\mathbf{X}^{(2)} = 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Подберем параметры a и b так, чтобы выполнялось равенство $(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}) = 0$. Имеем: $(2a + 3b) \cdot 3 + b = 0$, $6a + 10b = 0$, $3a + 5b = 0$. Теперь возьмем $a = -5$, $b = 3$. Получим другой собственный вектор рассмотренного семейства $\mathbf{X}^{(3)} = -5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$.

Пронормировав векторы $\mathbf{X}^{(2)}$ и $\mathbf{X}^{(3)}$, найдем:

$$\mathbf{X}^{(2)*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(3)*} = \begin{bmatrix} -5/\sqrt{35} \\ -1/\sqrt{35} \\ 3/\sqrt{35} \end{bmatrix}.$$

Ортогональное преобразование, приводящее исходную квадратичную форму к каноническому виду, имеет вид

$$x_1 = -\frac{2}{\sqrt{14}} y_1 - \frac{5}{\sqrt{35}} y_3,$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{14}} y_1 + \frac{3}{\sqrt{10}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{35}} y_3,$$

$$x_3 = -\frac{3}{\sqrt{14}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} y_2 + \frac{3}{\sqrt{35}} y_3.$$

Матрица этого ортогонального преобразования

$$U = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{14} & 0 & -5/\sqrt{35} \\ 1/\sqrt{14} & 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{35} \\ -3/\sqrt{14} & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{35} \end{bmatrix}.$$

6. Привести к каноническому виду квадратичную форму $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4\sqrt{2}x_2x_3$.

Решение. Имеем: $a_{11} = 2$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = 3$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{31} = a_{13} = 0$, $a_{23} = a_{32} = -2\sqrt{2}$, тогда матрица квадратичной формы

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\sqrt{2}\\ 0 & -2\sqrt{2} & 3\end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\det(A-\lambda E)=0$, т. е.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -2\sqrt{2}\\ 0 & -2\sqrt{2} & 3-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

откуда

$$(2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)-8(2-\lambda)=0,\ (2-3\lambda+\lambda^2)(3-\lambda\ \ -16+8\lambda)=0,\ \lambda^3-6\lambda^2+3\lambda+10=0.$$

Целые корни многочлена с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена. Используя это утверждение, получаем: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=-1$. Тогда канонический вид квадратичной формы

$$L(y_1,\ y_2,\ y_3)=2y_1^2+5y_2^2-y_3^2.$$

Определим собственные векторы. При $\lambda=2$ имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}-\alpha_2-2\sqrt{2}\alpha_3&=0,\\ -2\sqrt{2}\alpha_2+\qquad\alpha_3&=0.\end{aligned}\right\}$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix}-1 & -2\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2} & 1\end{vmatrix}\neq 0,$$

то $\alpha_2=\alpha_3=0$. Таким образом,

$$\mathbf{X}^{(1)}=\begin{bmatrix}t\\0\\0\end{bmatrix},\ t\neq 0,\ t\in\mathbf{R},\ \mathbf{X}^{(1)*}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

При $\lambda=5$ получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}-3\beta_1\qquad\qquad&=0,\\ -4\beta_2-2\sqrt{2}\beta_3&=0,\\ -2\sqrt{2}\beta_2-\quad 2\beta_3&=0,\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\beta_1&=0,\\ \beta_3&=-\sqrt{2}\beta_2.\end{aligned}\right\}$$

Полагая $\beta_2 = t$, имеем $\beta_3 = -\sqrt{2}t$. Тогда:

$$X^{(2)*} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ -\sqrt{2}t \end{bmatrix}, \; t \neq 0, \; t \in \mathbf{R}, \; X^{(2)*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

При $\lambda = -1$ получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3\gamma_1 \qquad\qquad &= 0, \\ 2\gamma_2 - 2\sqrt{2}\gamma_3 &= 0, \\ -2\sqrt{2}\gamma_2 + \quad 4\gamma_3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

из которой находим:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_1 = 0, \\ &\gamma_3 = \frac{2\sqrt{2}}{2}\gamma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma_2. \end{aligned}\right\}$$

Полагая $\gamma_2 = t$, имеем $\gamma_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}t$. Тогда:

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2t \\ \sqrt{2}t \end{bmatrix}, \; t \neq 0, \; t \in \mathbf{R}, \; X^{(3)*} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= \quad \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}y_3, \\ x_3 &= -\sqrt{\frac{2}{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3. \end{aligned}\right\}$$

Задачи для самостоятельного решения

1.199. Записать матрицу данной квадратичной формы:

1) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$;

2) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$;

3) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$.

(*Ответ*: 1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.)

1.200. Записать квадратичную форму по заданной матрице:

1) $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

(*Ответ*: 1) $8x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3-3x_3^2$; 2) $2x_1^2-6x_1x_2+x_2^2+8x_2x_3-5x_3^2$; 3) $2x_1^2-2x_1x_2+10x_1x_3-3x_2^2+12x_2x_3$.)

1.201. С помощью ортогонального преобразования привести квадратичную форму к каноническому виду и записать вид этого ортогонального преобразования:

1) $L(x_1,\ x_2)=5x_1^2+8x_1x_2+5x_2^2$;
2) $L(x_1,\ x_2)=13x_1^2-48x_1x_2+27x_2^2$;
3) $L(x_1,\ x_2)=5x_1^2+4\sqrt{6}x_1x_2+7x_2^2$;
4) $L(x_1,\ x_2)=5x_1^2+2\sqrt{3}x_1x_2+3x_2^2$;
5) $L(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;
6) $L(x_1,\ x_2,\ x_3)=7x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-8x_1x_2+8x_2x_3$;
7) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$;
8) $L(x_1,\ x_2,\ x_3)=3x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$;
9) $L(x_1,\ x_2,\ x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.

(*Ответ*: 1) $9x_1'^2+x_2'^2$; $x_1=\frac{1}{2}(x_1'-x_2')$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1'+x_2')$;

2) $45x_1'^2-5x_2'^2$; $x_1=\frac{1}{5}(-3x_1'+4x_2')$, $x_2=\frac{1}{5}(4x_1'+3x_2')$;

3) $11x_1'^2+x_2'^2$; $x_1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2'$, $x_2=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}x_2'$;

4) $6x_1'^2+2x_2'^2$; $x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1'+\frac{1}{2}x_2'$; $x_2=\frac{1}{2}x_1'-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2'$;

5) $2x_1'^2-x_2'^2+5x_3'^2$; $x_1'=\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3$, $x_2'=\frac{2}{3}x_1+$

$+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3$, $x_3'=\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3$; 6) $11x_1'^2+5x_2'^2-x_3'^2$; $x_1'=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3$, $x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3$, $x_3'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3$; 7) $-7x_1'^2+2x_2'^2+2x_3'^2$; $x_1'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3$, $x_2'=\frac{2\sqrt{5}}{5}x_1-\frac{\sqrt{5}}{5}x_2$, $x_3'=\frac{2\sqrt{5}}{15}x_1+\frac{4\sqrt{5}}{15}x_2+\frac{\sqrt{5}}{3}x_3$; 8) $7x_1'^2-2x_2'^2+7x_3'^2$; $x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_3$, $x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3$, $x_3'=\frac{\sqrt{2}}{6}x_1-\frac{2\sqrt{2}}{3}x_2+\frac{\sqrt{2}}{6}x_3$; 9) $10x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2$; $x_1'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3$, $x_2'=\frac{2\sqrt{5}}{5}x_1-\frac{\sqrt{5}}{5}x_2$, $x_3'=\frac{2\sqrt{5}}{15}x_1+\frac{4\sqrt{5}}{15}x_2+\frac{\sqrt{5}}{3}x_3$.)

1.13. ПЛОСКОСТЬ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Положение плоскости в пространстве относительно прямоугольной системы координат определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей этой плоскости, и ненулевым вектором $\mathbf{n}=(A, B, C)$ $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$, перпендикулярным к ней. Вектор $\mathbf{n}=(A, B, C)$ называется *нормальным вектором плоскости.*

Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{n}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю, т. е. $(\overrightarrow{M_0M}, \mathbf{n})=0$. Выражая скалярное произведение через координаты векторов $\mathbf{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, получаем *уравнение плоскости, заданной точкой* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *и нормальным вектором* $\mathbf{n}=(A, B, C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Раскрывая в этом уравнении скобки и обозначая число $-Ax_0-By_0-Cz_0$ через D, получаем уравнение

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

которое называется *общим уравнением плоскости.*

Пусть $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ — *радиус-вектор текущей точки плоскости* $M(x, y, z)$, $\mathbf{n}=\cos\alpha\mathbf{i}+\cos\beta\mathbf{j}+\cos\gamma\mathbf{k}$ — единичный вектор, имеющий направление перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат, α, β, γ — углы, образованные этим перпендикуляром с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно, p — длина этого перпендикуляра. Запишем *уравнение плоскости в векторной форме:* $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = p$. При переходе к координатной записи это уравнение примет вид

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Его называют *нормальным уравнением плоскости.* Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду все члены уравнения надо умножить на *нормирующий множитель*

$$\mu = \pm 1/|\mathbf{n}| = \pm 1/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

где знак перед радикалом противоположен знаку свободного члена D в общем уравнении плоскости.

Можно выделить следующие *частные случаи расположения плоскости* и записать соответствующие им уравнения:

$By + Cz + D = 0$ — плоскость параллельна оси Ox;
$Ax + Cz + D = 0$ — плоскость параллельна оси Oy;
$Ax + By + D = 0$ — плоскость параллельна оси Oz;
$Ax + By + Cz = 0$ — плоскость проходит через точку $O(0, 0, 0)$;
$Cz + D = 0$ — плоскость параллельна плоскости Oxy;
$By + D = 0$ — плоскость параллельна плоскости Oxz;
$Ax + D = 0$ — плоскость параллельна плоскости Oyz;
$By + Cz = 0$ — плоскость проходит через ось Ox;
$Ax + By = 0$ — плоскость проходит через ось Oz;
$Ax + Cz = 0$ — плоскость проходит через ось Oy;
$z = 0$ — уравнение плоскости Oxy;
$y = 0$ — уравнение плоскости Oxz;
$x = 0$ — уравнение плоскости Oyz.

Уравнение

$$x/a + y/b + z/c = 1$$

называют *уравнением плоскости в отрезках,* так как a, b, c — абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями Ox, Oy, Oz соответственно.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$$

или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Угол φ *между плоскостями* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2z + D = 0$ определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условием параллельности плоскостей является $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2$ или в координатной форме

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2 = \lambda.$$

Условием перпендикулярности двух плоскостей будет $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$, т. е. $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0$ или в координатной форме $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *до плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Примеры

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2, 7, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \text{ или } A(x + 2) + B(y - 7) + C(z - 3) = 0.$$

Так как $\mathbf{n}_1(A, B, C) \parallel \mathbf{n}(1, -4, 5)$, то $A/1 = B/(-4) = C/5 = k$. Следовательно, $A = k$, $B = -4k$, $C = 5k$, $k \in \mathbf{R}$. Подставляя найденные значения A, B, C в уравнение плоскости, получаем

$$k(x + 2) - 4k(y - 7) + 5k(z - 3) = 0,$$

что равносильно уравнению

$$x + 2 - 4(y - 7) + 5(z - 3) = 0$$

или

$$x - 4y + 5z + 15 = 0.$$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $O(0, 0, 0)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$ (рис. 1.21).

Решение. Воспользуемся уравнением $Ax + By + Cz = 0$ плоскости, проходящей через начало координат, где $\mathbf{n}(A, B, C)$ — нормальный вектор этой плоскости.

Нормальные векторы данных плоскостей $\mathbf{n}_1 = (2, -1, 5)$, $\mathbf{n}_2 = (1, 3, -1)$. Если плоскости перпендикулярны, то их нормальные векторы ортогональны, т. е. $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_1$, $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_2$. Следовательно, $\mathbf{n}$ коллинеарен вектору $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$, т. е. $\mathbf{n} = \lambda[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Найдем

$$[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -14\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 7\mathbf{k} = (-14, 7, 7).$$

Отсюда $\mathbf{n} = (-14\lambda, 7\lambda, 7\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

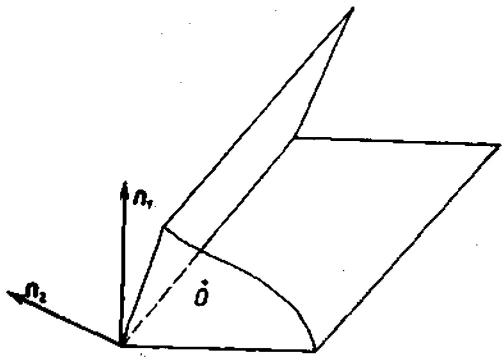


Рис. 1.21

Подставляя координаты вектора $\mathbf{n}=(-14\lambda,\ 7\lambda,\ 7\lambda)$ в уравнение плоскости, получаем

$$-14\lambda x+7\lambda y+7\lambda z=0 \text{ или } 2x-y-z=0.$$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $K(0,\ 0,\ 1)$ и $N(3,\ 0,\ 0)$ и образующей с плоскостью Oxy угол, равный 60°.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку:

$$A(x-0)+B(y-0)+C(z-1)=0.$$

Поскольку плоскость проходит через точку $N(3,\ 0,\ 0)$, то координаты точки K удовлетворяют уравнению плоскости:

$$A(3-0)+B\cdot 0+C(0-1)=0,\ 3A-C=0,\ C=3A.$$

Подставив $C=3A$ в уравнение искомой плоскости, имеем:

$$Ax+By+3A(z-1)=0 \text{ или } Ax+By+3Az-3A=0,$$

следовательно, ее нормальный вектор $\mathbf{n}_1=(A,\ B,\ 3A)$.

Воспользуемся тем, что плоскость образует угол, равный 60°, с плоскостью Oxy. Уравнение плоскости Oxy $z=0$, следовательно, $\mathbf{n}_2=(0,\ 0,\ 1)$. Тогда по формуле косинуса угла между плоскостями имеем:

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1|\ |\mathbf{n}_2|},\ \cos 60°=\frac{1}{2}=\frac{A\cdot 0+B\cdot 0+3A\cdot 1}{\sqrt{A^2+B^2+9A^2}\cdot 1},$$

$$1/2=3A/\sqrt{B^2+10A^2},\ \sqrt{B^2+10A^2}=6A,$$

$$B^2+10A^2=36A^2,\ B^2=26A^2,\ B=\pm A\sqrt{26}.$$

Подставляя это выражение в уравнение искомой плоскости, получаем:

$$Ax\pm A\sqrt{26}y+3Az-3A=0$$

или

$$x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0.$$

4. Найти расстояние от точки $M_0(3,\ 1,\ -1)$ до плоскости $22x+4y-20z-45=0$.

Решение. Нормальный вектор данной плоскости $\mathbf{n}=(22,\ 4,\ -20)$. Тогда

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|22\cdot 3+4\cdot 1-20(-1)-45|}{\sqrt{22^2+4^2+(-20)^2}}=$$
$$=\frac{45}{30}=1{,}5.$$

5. Записать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями:

$$(P_1)\colon\ x-3y+2z-5=0,\quad (P_2)\colon\ 3x-2y-z+3=0.$$

Решение. Пусть точка $M(X,\ Y)$ принадлежит искомой плоскости (P). Поскольку расстояния от любой точки, принадлежащей искомой плоскости (P), до плоскостей (P_1) и (P_2) равны, то, воспользовавшись формулой расстояния от точки до плоскости, получим $d_{(P_1)}=d_{(P_2)}$, т. е.

$$\frac{|X-3Y+2Z-5|}{\sqrt{1+9+4}}=\frac{|3X-2Y-Z+3|}{\sqrt{1+9+4}}$$

или

$$|X-3Y+2Z-5|=|3X-2Y-Z+3|.$$

Возможны два случая:

1) $x-3y+2z-5=3x-2y-z+3$ или $2x+y-3z+8=0$;

2) $-(x-3y+2z-5)=3x-2y-z+3$ или $4x-5y+z-2=0$.

Итак, уравнения искомых плоскостей:

$$2x+y-3z+8=0,\ 4x-5y+z-2=0.$$

6. Записать уравнение плоскости, проходящей через

точки $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$ параллельно вектору $\mathbf{a} = (3, 0, 1)$ (рис. 1.22).

Решение. Пусть $\mathbf{n}$ — нормальный вектор искомой плоскости, тогда $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}$, т. е. вектор $\mathbf{n}$ коллинеарен вектору $[\mathbf{a}, \overrightarrow{M_1M_2}]$. Следовательно, $\mathbf{n} = \lambda[\mathbf{a}, \overrightarrow{M_1M_2}]$. Имеем: $\overrightarrow{M_1M_2} = (2-1,\ 1-2,\ 1-0) = (1,\ -1,\ 1)$,

$$[\mathbf{a}, \overrightarrow{M_1M_2}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Таким образом, $\mathbf{n} = (\lambda,\ -2\lambda,\ -3\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через данную точку, имеем:

$$\lambda(x-1) - 2\lambda(y-2) - 3\lambda(z-0) = 0,$$

т. е. $x - 2y - 3z + 3 = 0$.

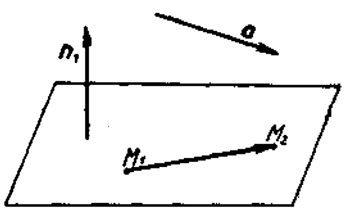


Рис. 1.22

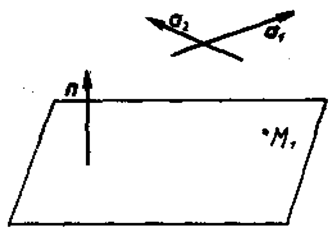


Рис. 1.23

7. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 параллельно векторам $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, если $M_1(1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 0, 1)$ (рис. 1.23).

Решение. Пусть $\mathbf{n} = (A, B, C)$ — нормальный вектор плоскости. По условию $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}_2$. Тогда $\mathbf{n} \parallel [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$. Следовательно, $\mathbf{n} = \lambda[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$,

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} = (1,\ -2,\ 1).$$

Отсюда $\mathbf{n} = (\lambda,\ -2\lambda,\ \lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через данную точку, получим

$$\lambda(x-1) - 2\lambda(y-1) + \lambda(z-1) = 0$$

или $x - 2y + z = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

1.202. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно плоскости (P), если:

1) $M_0(2, 1, -1)$, (P): $x - 2y + 3z + 5 = 0$;
2) $M_0(3, 0, 2)$, (P): $4x - y - 2z + 1 = 0$.

(*Ответ*: 1) $x - 2y + 3z + 3 = 0$; 2) $4x - y - 2z - 8 = 0$.)

1.203. Составить уравнение плоскости, проходящей через данные три точки:

1) $M_1(-2, 0, 4)$, $M_2(4, -8, -4)$, $M_3(1, -4, 6)$;
2) $M_1(1, 3, 6)$, $M_2(2, 2, 1)$, $M_3(-1, 0, 1)$.

(*Ответ*: 1) $4x + 3y + 8 = 0$; 2) $2x - 3y + z + 1 = 0$.)

1.204. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3, 5, -7)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки. (*Ответ*: $x + y + z - 1 = 0$.)

1.205. Определить объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $2x + 3y + 6z - 18 = 0$. (*Ответ*: 27.)

1.206. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно двум векторам $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, если:

1) $M_0(3, 7, 2)$, $\mathbf{n}_1 = (4, 1, 2)$, $\mathbf{n}_2 = (5, 3, 1)$;
2) $M_0(2, -3, 1)$, $\mathbf{n}_1 = (-3, 2, -1)$, $\mathbf{n}_2 = (1, 2, 3)$;
3) $M_0(3, 4, -5)$, $\mathbf{n}_1 = (3, 1, -1)$, $\mathbf{n}_2 = (1, -2, 1)$.

(*Ответ*: 1) $5x - 6y - 7z + 41 = 0$; 2) $x + y - z + 2 = 0$; 3) $x + 4y + 7z + 16 = 0$.)

1.207. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки M_1, M_2 перпендикулярно к плоскости (P), если:

1) $M_1(2, 3, -1)$, $M_2(1, 5, 3)$, (P): $3x - y + 3z + 15 = 0$;
2) $M_1(1, -1, -2)$, $M_2(3, 1, 1)$, (P): $x - 2y + 3z - 5 = 0$;
3) $M_1(2, -15, 1)$, $M_2(3, 1, 2)$, (P): $3x - y - 4z = 0$.

(*Ответ*: 1) $2x + 3y - z - 14 = 0$; 2) $4x - y - 2z - 9 = 0$; 3) $9x - y + 7z - 40 = 0$.)

1.208. Определить двугранный угол, образованный данными плоскостями:

1) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$;
2) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

(*Ответ*: 1) $\pi/2$; 2) $\arccos(2/15)$.)

1.209. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно к плоскостям (P_1) и (P_2), если:

1) $M_0(2, 2, -2)$, (P_1): $3x-2y-z+1=0$, (P_2): $x-y-z=0$;

2) $M_0(2, -3, 5)$, (P_1): $2x+y-2z+1=0$, (P_2): $x+y+z-5=0$;

3) $M_0(2; -1, 1)$, (P_1): $2x-z+1=0$, (P_2): $y=0$.

(*Ответ*: 1) $x+2y-z-8=0$; 2) $3x-4y+z-23=0$; 3) $x+2z-4=0$.)

1.210. Записать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между данными плоскостями:

1) $7x+y-6=0$, $3x+5y-4z+1=0$;

2) $5x-5y-2z-3=0$, $x+7y-2z+1=0$;

3) $2x-y+5z+3=0$, $2x-10y+4z-2=0$.

(*Ответ*: 1) $4x-4y+4z-7=0$, $10x+6y-4z-5=0$; 2) $x-3y-1=0$, $3x+y-2z-1=0$; 3) $3x-6y+7z+2=0$, $x+4y+3z+4=0$.)

1.211. Даны две точки $M_1(3, -2, 1)$, $M_2(6, 0, 5)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_2 и перпендикулярной к прямой M_1M_2. (*Ответ*: $3x+2y+4z-38=0$.)

1.212. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $5x-2y+5z-10=0$ и образующую с плоскостью $x-4y-8z+12=0$ угол 45°. (*Ответ*: $x+20y+7z=0$, $x-z=0$.)

1.213. Через ось Oz провести плоскость, образующую с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ угол $\pi/3$. (*Ответ*: $x+3y=0$, $3x-y=0$.)

1.214. Составить уравнение плоскости, проходящей:

1) через точку $M_1(1, -2, 4)$ параллельно плоскости Oxz;

2) через точку $M_2(-2, 3, 5)$ параллельно плоскости Oxy;

3) через точку $M_3(-3, 2, -1)$ параллельно плоскости Oyz.

(*Ответ*: 1) $y+2=0$; 2) $z-5=0$; 3) $x+3=0$.)

1.215. Составить уравнение плоскости, проходящей:

1) через ось Ox и точку $M_1(-1, 2, 1)$;

2) через ось Oy и точку $M_2(1, 3, -4)$;

3) через ось Oz и точку $M_3(2, -2, 5)$.

(*Ответ:* 1) $y-2z=0$; 2) $4x+z=0$; 3) $x+y=0$.)

1.216. Вычислить угол между плоскостями, проходящими через точку $M_1(1, -1, 1)$, одна из которых содержит ось Ox, а другая — ось Oz. (*Ответ:* $60°$.)

1.217. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, -1, 4)$ и отсекающей на оси Oz отрезок, вдвое больший, чем на осях Ox и Oy. (*Ответ:* $2x+2y+$ $+z-6=0$.)

1.218. Найти расстояния от точек $M_1(3, 5, 1)$, $M_2(7,$ $-1, 2)$, $M_3(2, 0, 4)$ до плоскости $x+2y-2z+5=0$. (*Ответ:* 16/3, 2, 1/3.)

1.219. Найти расстояние d от точки $M(-1, 1, -2)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(1, -1, 1)$, $M_2(-2, 1, 3)$, $M_3(4, -5, -2)$. (*Ответ:* 4.)

1.220. Найти уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x-2y-z-3=0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d=5$. (*Ответ:* $2x-2y-z-18=0$, $2x-$ $-2y-z+12=0$.)

1.221. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x+y-4z+5=0$ и отстоящей от точки $M_0(1, 2, 0)$ на расстоянии $\sqrt{21}$. (*Ответ:* $2x+y-4z+$ $+17=0$, $2x+y-4z-25=0$.)

1.222. Определить, где лежит начало координат: внутри острого или тупого угла, образованного двумя плоскостями $x-2y+3z-5=0$ и $2x-y-z+3=0$. (*Ответ:* внутри острого угла.)

1.14. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Положение прямой на плоскости относительно прямоугольной системы координат определяется точкой $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей этой прямой, и ненулевым вектором $\mathbf{n}=(A, B)$ $(A^2+B^2\neq 0)$, перпендикулярным к прямой. Вектор $\mathbf{n}$ называется *нормальным вектором прямой*. Если $M(x, y)$ — произвольная точка этой прямой, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{n}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю, т. е. $(\overrightarrow{M_0M}, \mathbf{n})=0$. Выражая скалярное произведение через координаты векторов $\mathbf{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, получаем *уравнение прямой, заданной точкой* $M_0(x_0, y_0)$ *и нормальным вектором* $\mathbf{n}=(A, B)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Раскрывая в этом уравнении скобки и обозначая число $-Ax_0-By_0$ через C, получаем уравнение

$$Ax+By+C=0,$$

которое называют *общим уравнением прямой*.

Перечислим следующие *частные случаи расположения прямой на плоскости* и запишем соответствующие уравнения:

$Ax+By=0$ — прямая проходит через точку $O(0, 0)$;
$Ax+C=0$ — прямая параллельна оси Oy;
$By+C=0$ — прямая параллельна оси Ox;
$x=0$ — уравнение оси Oy;
$y=0$ — уравнение оси Ox.

Положение прямой на плоскости определяется также точкой $M_0(x_0, y_0)$ этой прямой и ненулевым вектором $\mathbf{s}=(l, m)$, параллельным данной прямой, который называется *направляющим вектором прямой*. Для любой точки $M(x, y)$, принадлежащей данной прямой, векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{s}$ коллинеарны, следовательно, $\overrightarrow{M_0M}=t\mathbf{s}$, где t — действительный параметр. Если $\mathbf{r}=(x, y)$ — радиус-вектор точки $M(x, y)$, а $\mathbf{r}_0=(x_0, y_0)$ — радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$, то $\overrightarrow{M_0M}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ и уравнение $\overrightarrow{M_0M}=t\mathbf{s}$ примет вид

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{s}t.$$

Его называют *векторно-параметрическим уравнением прямой*.

Уравнение $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{s}t$ равносильно уравнениям

$$\left.\begin{array}{l} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \end{array} \quad t\in(-\infty;\ +\infty),\right\}$$

которые называются *параметрическими уравнениями прямой на плоскости*.

Исключив из параметрических уравнений параметр t, получим уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\mathbf{s}(l, m)$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}, \tag{1.10}$$

которое называется *каноническим уравнением прямой*.

Уравнение

$$x/a+y/b=1$$

называется *уравнением прямой в отрезках*. Здесь a и b — величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy ($a\neq 0$, $b\neq 0$).

Нормальное уравнение прямой записывают в виде

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0, \tag{1.11}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ — направляющие косинусы нормального вектора $\mathbf{n}$, направленного из начала координат в сторону прямой; p — расстояние от начала координат до прямой.

Общее уравнение прямой приводится к нормальному виду умножением на нормирующий множитель

$$\mu=\pm 1/\sqrt{A^2+B^2}.$$

Знак здесь выбирают противоположным знаку свободного числа C.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ или } d=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta-p|.$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид $y=kx+b$, где $k=\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент прямой; α — угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox; b — величина отрезка, отсекаемого на оси Oy.

Если в уравнении $Ax+By+C=0$ $B\neq 0$, то:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},\ k=-\frac{A}{B},\ b=-\frac{C}{B}.$$

Угол между прямыми можно найти по следующим формулам:

1) $\cos\varphi=\dfrac{(\mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2)}{|\mathbf{s}_1|\ |\mathbf{s}_2|}$, где $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ — направляющие векторы прямых. Если $\mathbf{s}_1=(l_1,\ m_1)$, $\mathbf{s}_2=(l_2,\ m_2)$, то

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2}};$$

2) $\cos\varphi=\dfrac{(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1|\ |\mathbf{n}_2|}$, где $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ — нормальные векторы данных прямых. Если $\mathbf{n}_1=(A_1,\ B_1)$, $\mathbf{n}_2=(A_2,\ B_2)$, то

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}};$$

3) $\operatorname{tg}\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$, где k_1, k_2 — угловые коэффициенты прямых $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0)$, имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Условие параллельности прямых записывается в виде

$$\mathbf{s}_1\parallel\mathbf{s}_2,\quad \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2},$$

$$\text{или } \mathbf{n}_1\parallel\mathbf{n}_2,\ \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2},\ \text{ или } k_1=k_2.$$

Условие перпендикулярности прямых можно записать в виде

$$(\mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2)=0,\ l_1l_2+m_1m_2=0,$$
$$\text{или } (\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2)=0,\ A_1A_2+B_1B_2=0,\ \text{или } k_1k_2=-1.$$

Примеры

1. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(1,\ 2)$, $B(2,\ -2)$, $C(6,\ 1)$. Требуется:

а) записать уравнение стороны AB;

б) записать уравнение высоты CD и вычислить ее длину $h=|CD|$;

в) найти угол φ между высотой CD и медианой BM;

г) записать уравнения биссектрис L_1 и L_2 внутреннего и внешнего углов при вершине A.

Решение. а) Для того чтобы найти уравнение прямой AB, воспользуемся каноническим уравнением. Вычислим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, который можно считать направляющим вектором этой прямой. Таким образом, $\mathbf{s}_{AB} = (l, m) = (1, -4)$. В качестве точки на прямой можно взять любую из точек A или B. Выбрав точку A и подставив координаты вектора $\mathbf{s}_{AB}$ в исходное уравнение, имеем

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4} \text{ или } 4x + y - 6 = 0.$$

Это и есть уравнение прямой AB.

б) Запишем уравнение высоты CD. Воспользуемся уравнением прямой $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, где $\mathbf{n} = (A, B)$ — нормальный вектор прямой; $M_0(x_0, y_0)$ — фиксированная точка на прямой. Вектор $\overrightarrow{AB} = (1, -4)$ можно считать нормальным вектором по отношению к прямой CD. В качестве фиксированной точки на прямой берем точку C. Искомое уравнение имеет вид

$$1 \cdot (x-6) - 4(y-1) = 0 \text{ или } x - 4y - 2 = 0.$$

Вычислим длину высоты CD. Она равна расстоянию от точки C до прямой AB. Воспользуемся формулой

$$h_C = |Ax_0 + By_0 + C| / \sqrt{A^2 + B^2},$$

где x_0, y_0 — координаты точки C. Заменив A, B, C их значениями из уравнения прямой AB, получим

$$h_C = |4x_0 + y_0 - 6| / \sqrt{17} = |4 \cdot 6 + 1 - 6| / \sqrt{17} = 19/\sqrt{17}.$$

в) Запишем уравнение медианы BM. Найдем координаты точки M по формулам деления отрезка пополам:

$$x_M = (x_A + x_C)/2 = 7/2, \quad y_M = (y_A + y_C)/2 = 3/2,$$

т. е. $M(7/2, 3/2)$, $\overrightarrow{BM} = (3/2, 7/2)$. Без ограничения общности, $\mathbf{s}_{BM} = \overrightarrow{BM} = (3/2, 7/2)$.

Воспользовавшись каноническим уравнением прямой, имеем $(x-2)/1{,}5 = (y+2)/3{,}5$. Преобразовав полученное уравнение, найдем уравнение медианы BM: $7x - 3y - 20 = 0$.

Таким образом, $\mathbf{n}_{BM} = (7, -3)$, $\mathbf{n}_{CD} = (1, -4)$.

Найдем угол φ между высотой CD и медианой BM по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{n}_{BM}, \mathbf{n}_{CD})}{|\mathbf{n}_{BM}|\,|\mathbf{n}_{CD}|} = \frac{1\cdot 7 - 4(-3)}{\sqrt{1^2+4^2}\sqrt{7^2+3^2}} =$$

$$= \frac{19}{\sqrt{17}\sqrt{58}}.$$

г) Биссектрисы углов, образованных двумя прямыми AB и AC, представляют собой множества точек, равноудаленных от этих прямых. Если уравнения заданных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то для любой точки $M(x, y)$, лежащей на одной из биссектрис, используя формулу для определения расстояния от точки до прямой, имеем

$$\frac{|A_1\tilde{x} + B_1\tilde{y} + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2\tilde{x} + B_2\tilde{y} + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Поскольку $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ — произвольная точка биссектрисы, то, учитывая, что выражения, стоящие в последнем равенстве под знаком модуля, могут иметь разные знаки, получаем для одной из биссектрис уравнение

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \tag{1}$$

а для другой

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{2}$$

Найдем уравнения биссектрис угла A. Уравнение стороны AB имеет вид $4x + y - 6 = 0$. Воспользовавшись каноническим уравнением прямой (1.10) и тем, что вектор $\overrightarrow{AC} = (5, -1)$ можно считать направляющим вектором стороны AC, получим ее каноническое уравнение

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-1} \text{ или } x + 5y - 11 = 0.$$

Тогда из уравнения (1) имеем

$$\frac{x + 5y - 11}{\sqrt{26}} = \frac{4x + y - 6}{\sqrt{17}},$$

т. е.

$$(\sqrt{17} - 4\sqrt{26})x + (5\sqrt{17} - \sqrt{26})y - 11\sqrt{17} + 6\sqrt{26} = 0.$$

Это и есть уравнение одной из биссектрис. Из уравнения (2) получим уравнение другой биссектрисы:

$$\frac{x+5y-11}{\sqrt{26}}=\frac{-4x-y-6}{\sqrt{17}},$$

т. е.

$$(\sqrt{17}+4\sqrt{26})x+(5\sqrt{17}+\sqrt{26})y-11\sqrt{17}-6\sqrt{26}=0.$$

2. Через точку $M(1,\ 2)$ провести прямую так, чтобы она прошла на одинаковом расстоянии от точек $A(3,\ 3)$ и $B(5,\ 2)$.

Решение. Таких прямых две. Одна из них (L_1) пройдет через точку M параллельно прямой AB (рис. 1.24),

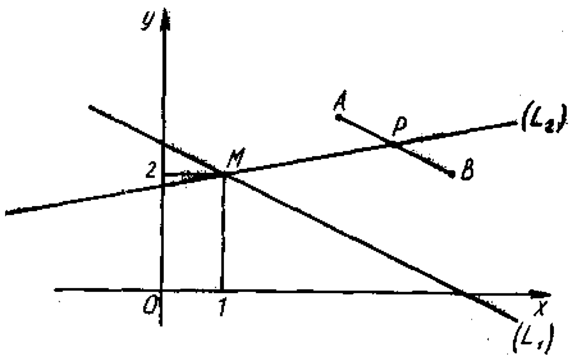


Рис. 1.24

а другая (L_2) — через точку M и середину отрезка AB. Воспользовавшись уравнением (1.10) и тем, что вектор $\overrightarrow{AB}=(2,\ -1)$ можно взять в качестве направляющего вектора $\mathbf{s}_{L_1}$ прямой (L_1), получим уравнение (L_1):

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1} \text{ или } x+2y-5=0.$$

Координаты точки P находим по формулам:

$$x_P=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_P=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

Тогда $P(4;\ 2{,}5)$, $\overrightarrow{MP}(3;\ 0{,}5)$. Воспользовавшись уравнением (1.10) и тем, что $\mathbf{s}_{L_2}=\overrightarrow{MP}$, найдем уравнение прямой (L_2):

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{0{,}5} \text{ или } x-6y+11=0.$$

3. Даны две вершины $A(3,\ 1)$, $B(5,\ 7)$ треугольника ABC и точка $N(4,\ -1)$ пересечения его высот. Записать уравнения сторон треугольника (рис. 1.25).

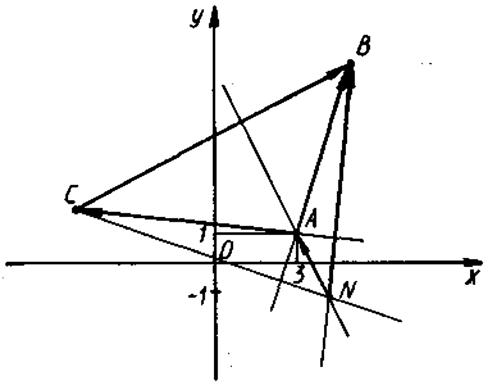


Рис. 1.25

Решение. Воспользовавшись уравнением (1.10) и тем, что направляющим вектором стороны AB можно считать вектор $\overrightarrow{AB}=(2,\ 6)$, получим уравнение стороны AB:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{6} \text{ или } 3x-y-8=0.$$

Так как $\overrightarrow{NA}=(-1,\ 2)$, $\overrightarrow{NB}=(1,\ 8)$, $\overrightarrow{NA}\perp\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{NB}\perp\overrightarrow{AC}$, то запишем уравнения сторон AC и BC в виде $A(x-x_0)+ + B(y-y_0)=0$, где $\mathbf{n}=(A,\ B)$ — нормальный вектор к прямой, а $(x_0,\ y_0)$ — фиксированная точка на ней. Тогда получим:

$$1(x-3)+8(y-1)=0,\ x+8y-11=0\ (AC);$$
$$-1(x-5)+2(y-7)=0,\ x+2y-9=0\ (BC).$$

4. Записать уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y=3x+5$ и координаты вершины прямого угла $M(4,\ -1)$ (рис. 1.26).

Решение. С помощью формулы $\operatorname{tg}\theta=(k_2-k_1)/(1+ + k_1k_2)$, где k_1 — угловой коэффициент той прямой, которую поворачивают против хода часовой стрелки на

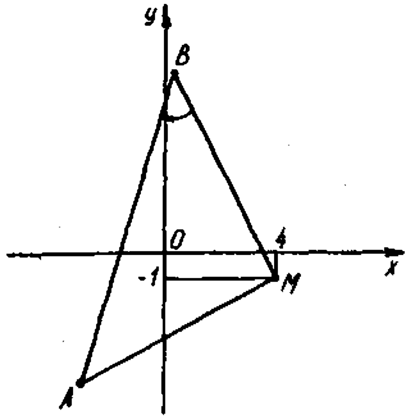


Рис. 1.26

угол θ до ее совпадения с другой прямой, угловой коэффициент которой k_2, находим угловой коэффициент катета BM. Имеем

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{k_{BM} - 3}{1 + 3k_{BM}},$$

откуда $1 + 3k_{BM} = k_{BM} - 3$, $k_{BM} = -2$.

Воспользовавшись условием перпендикулярности прямых через угловые коэффициенты $k_1 k_2 = -1$, найдем угловой коэффициент катета AM: $k_{AM} k_{BM} = -1$, откуда $k_{AM} = -1/k_{BM} = 1/2$. Запишем уравнение катета AM в виде $y - y_0 = k(x - x_0)$, где (x_0, y_0) — фиксированная точка прямой. Имеем:

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x - 4) \text{ или } y = \frac{1}{2}x - 3,$$

т. е. $x - 2y - 6 = 0$.

5. Даны уравнения двух смежных сторон AB и AD параллелограмма и точка O_1 пересечения его диагоналей (рис. 1.27). Найти уравнения двух других сторон, если $O_1(3, 3)$,

$$x + y - 1 = 0 \ (AB), \quad 3x - y + 4 = 0 \ (AD).$$

Решение. Решив систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x + y - 1 &= 0, \\ 3x - y + 4 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

найдем координаты точки пересечения $A(-3/4, 7/4)$, а затем, воспользовавшись формулами деления отрезка пополам,— координаты точки C. Имеем:

$$3=\frac{-3/4+x_C}{2},\quad 3=\frac{7/4+y_C}{2},$$

откуда $x_C=27/4$, $y_C=17/4$, т. е. $C(27/4, 17/4)$.

Так как $\mathbf{n}_{AB}=(1, 1)$, $\mathbf{n}_{AD}=(3, -1)$ и $\mathbf{n}_{CD}\parallel\mathbf{n}_{AB}$, $\mathbf{n}_{AD}\parallel\mathbf{n}_{BC}$, то без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{n}_{CD}=(1, 1)$, $\mathbf{n}_{BC}=(3, -1)$.

Запишем уравнения сторон BC и CD в виде $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$. Имеем:

$$3(x-27/4)-1(y-17/4)=0,\ 3x-y-16=0\ (BC),$$
$$1(x-27/4)+1(y-17/4)=0,\ x+y-11=0\ (CD).$$

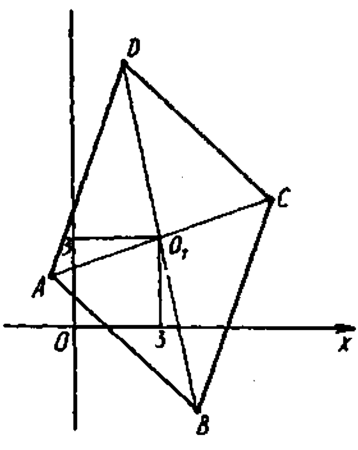


Рис. 1.27

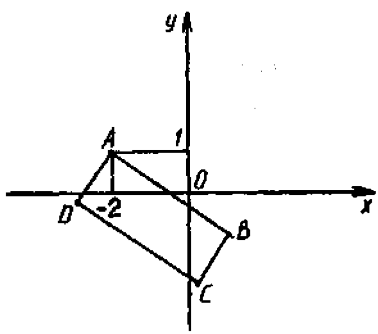


Рис. 1.28

6. Даны уравнения сторон прямоугольника $ABCD$ $3x-2y-5=0$, $2x+3y+7=0$ и одна из его вершин $A(-2, 1)$. Вычислить площадь этого прямоугольника (рис. 1.28).

Решение. Уравнения сторон прямоугольника $3x-2y-5=0$ (BC), $2x+3y+7=0$ (CD), а его площадь $S_{ABCD}=AB\cdot AD$.

Длина стороны AB — это расстояние от точки A до прямой BC:

$$AB=|3(-2)-2\cdot 1-5|/\sqrt{9+4}=13/\sqrt{13},$$

а длина стороны AD — расстояние от точки A до прямой CD:

$$AD = |2(-2) + 3 \cdot 1 + 7|/\sqrt{4+9} = 6/\sqrt{13}.$$

Тогда

$$s_{ABCD} = AB \cdot AD = \frac{13}{\sqrt{13}} \frac{6}{\sqrt{13}} = 6.$$

7. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(2, 7)$ и образующих с прямой AB углы по 45° (рис. 1.29), если $A(-1, 7)$, $B(8, -2)$.

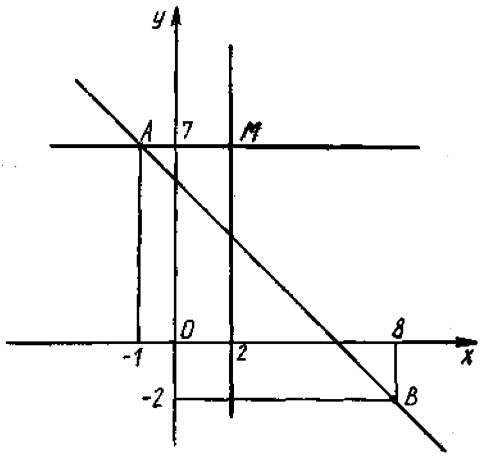


Рис. 1.29

Решение. Найдем угловой коэффициент прямой AB:

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-7}{8+1} = -1.$$

Воспользовавшись формулой $\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$, где $k_1 = k_{AB} = -1$, а $k_2 = k$ — угловой коэффициент искомой прямой, имеем

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \left|\frac{k+1}{1-k}\right|.$$

Решаем полученное уравнение относительно k. Возможны два случая:

1) $1=\frac{1+k}{1-k}$, откуда $1-k=1+k$, $k=0$, т. е. $\theta=0°$;

2) $1=\frac{-1-k}{1-k}$, откуда $1-k=-1-k$, следовательно, k не существует, т. е. $\theta=90°$.

Таким образом, искомых прямых две, а их уравнения $y=7$ и $x=2$.

Задачи для самостоятельного решения

1.223. Записать уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0, y_0)$ и нормальным вектором $\mathbf{n}=(A, B)$, если: 1) $M_0(2, 3)$, $\mathbf{n}=(-1, 2)$; 2) $M_0(1, 2)$, $\mathbf{n}=(3, -4)$; 3) $M_0(1, -1)$, $\mathbf{n}=(2, -3)$. (*Ответ:* 1) $x-2y+4=0$; 2) $3x-4y+5=0$; 3) $2x-3y-5=0$.)

1.224. Записать уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0, y_0)$ и направляющим вектором $\mathbf{s}=(l, m)$, если: 1) $M_0(-1, 2)$, $\mathbf{s}=(2, 3)$; 2) $M_0(-2, 2)$, $\mathbf{s}=(-1, 1)$; 3) $M_0(-1, 4)$, $\mathbf{s}=(2, 1)$. (*Ответ:* 1) $3x-2y+7=0$; 2) $x+y=0$; 3) $x-2y+9=0$.)

1.225. Записать уравнение прямой, заданной двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, если: 1) $M_1(2, 3)$, $M_2(-1, 6)$; 2) $M_1(3, -1)$, $M_2(2, 5)$; 3) $M_1(4, 0)$, $M_2(-1, 2)$. (*Ответ:* 1) $x+y-5=0$; 2) $6x+y-17=0$; 3) $2x+5y-8=0$.)

1.226. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2, 1)$: 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно к данной прямой; 3) под углом 45° к данной прямой. (*Ответ:* 1) $2x+3y-7=0$; 2) $3x-2y-4=0$; 3) $x-5y+3=0$, $5x+y-11=0$.)

1.227. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4, 10)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат. (*Ответ:* $x+y-6=0$.)

1.228. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4, -3)$ и образующей с осями координат треугольник, площадь которого равна 3. (*Ответ:* $3x+2y-6=0$, $3x+8y+12=0$.)

1.229. Даны вершины треугольника ABC: $A(4, 4)$, $B(-6, -1)$, $C(-2, -4)$. Записать уравнения биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине C и медианы, проведенной из этой вершины. (*Ответ:* $7x+y+18=0$, $11x-2y+14=0$.)

1.230. Через точку пересечения прямых $3x-y=0$, $x+4y-2=0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $2x+7y=0$. (*Ответ*: $91x-26y-2=0$.)

1.231. Даны вершины треугольника ABC: $A(2, 1)$, $B(-1, -1)$, $C(3, 2)$. Записать уравнения его высот. (*Ответ*: $4x+3y-11=0$, $x+y+2=0$, $3x+2y-13=0$.)

1.232. Найти проекцию точки $A(-8, 12)$ на прямую, проходящую через точки $M_1(2, -3)$ и $M_2(-5, 1)$. (*Ответ*: $(-12, 5)$.)

1.233. Зная уравнения двух сторон параллелограмма $x-3y=0$ и $2x+5y+6=0$ и одну из его вершин $C(4, -1)$, составить уравнения двух других сторон параллелограмма. (*Ответ*: $x-3y-7=0$, $2x+5y-3=0$.)

1.234. Через точку $A(2, 5)$ провести прямые, равноудаленные от точек $M_1(-1, 2)$ и $M_2(5, 4)$. (*Ответ*: $x-2=0$, $x-3y+13=0$.)

1.235. Даны две вершины треугольника $A_1(-6, 2)$, $A_2(2, -2)$ и точка $N(1, 2)$ пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины A_3. (*Ответ*: $A_3(2, 4)$.)

1.236. Найти координаты точки, симметричной точке $M(-2, 1)$ относительно прямой $2x-3y+4=0$. (*Ответ*: $(-14/13, -5/13)$.)

1.237. Через точку $A(3, 1)$ провести прямые, наклоненные к прямой $2x+3y-1=0$ под углом 45°. (*Ответ*: $5x+y-16=0$, $x-5y+2=0$.)

1.238. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $3x-4y+5=0$, $4x+3y-7=0$ и одна из его вершин $A(-2, 1)$. Записать уравнения двух других сторон прямоугольника. (*Ответ*: $3x-4y+10=0$, $4x+3y+5=0$.)

1.239. Вычислить угол между данными прямыми:

1) $x+5y-3=0$, $2x-3y+4=0$;
2) $x+2y-3=0$, $2x+4y+5=0$;
3) $3x+5y+1=0$, $5x-3y-2=0$.

(*Ответ*: 1) 45°; 2) 0°; 3) 90°.)

1.240. Найти расстояние d от точки до прямой в каждом из следующих случаев:

1) $A_1(2, -1)$, $4x+3y+10=0$;
2) $A_2(0, -3)$, $5x-12y-23=0$;
3) $A_3(1, -2)$, $x-2y-5=0$.

(*Ответ*: 1) 3; 2) 1; 3) 0 (точка A_3 лежит на прямой).)

1.241. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $3x-2y-5=0$, $2x+3y+7=0$ и одна из его вершин $A(-2, 1)$. Вычислить площадь этого прямоугольника. (*Ответ*: 6.)

1.242. Составить уравнения биссектрис углов между указанными прямыми:

1) $3x - 4y + 2 = 0$, $5x + 12y - 3 = 0$;

2) $3x - y + 5 = 0$, $3x + y - 4 = 0$.

(*Ответ:* 1) $64x + 8y + 11 = 0$, $14x - 112y + 41 = 0$; 2) $6x + 1 = 0$, $2y - 9 = 0$.)

1.243. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$. Вычислить его площадь. (*Ответ:* 49.)

1.244. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $3x - 4y - 10 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d = 3$. (*Ответ:* $3x - 4y - 25 = 0$, $3x - 4y + 5 = 0$.)

1.245. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $11x + 3y - 7 = 0$ и $12x + y - 19 = 0$ и равноудаленной от точек $A(3, -2)$ и $B(-1, 6)$. (*Ответ:* $7x + y - 9 = 0$, $2x + y + 1 = 0$.)

1.246. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $3x - 2y + 1 = 0$ относительно точки $M(5, 1)$. (*Ответ:* $3x - 2y - 27 = 0$.)

1.247. Составить уравнения сторон квадрата, если в прямоугольной системе координат даны одна из его вершин $A(2, -4)$ и точка пересечения его диагоналей $K(5, 2)$. (*Ответ:* $x - 3y + 16 = 0$, $x - 3y - 14 = 0$, $3x + y - 32 = 0$, $3x + y - 2 = 0$.)

1.248. Зная уравнение прямой $3x - 2y + 6 = 0$, являющейся одной из сторон угла, и уравнение его биссектрисы $x - 3y + 5 = 0$, составить уравнение другой стороны угла. (*Ответ:* $6x + 17y - 15 = 0$.)

√ **1.249.** Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $7x - y - 9 = 0$, $x + y - 5 = 0$ и точка $M(3, -8)$, лежащая на его основании. Записать уравнение основания треугольника. (*Ответ:* $3x + y - 1 = 0$, $x - 3y - 27 = 0$.)

1.250. Даны уравнение катета $y = 2x$ и середина гипотенузы — точка $K(4, 2)$ — прямоугольного равнобедренного треугольника. Найти уравнения двух других его сторон. (*Ответ:* $3x + y - 14 = 0$, $x + 2y - 2 = 0$; $x - 3y + 2 = 0$, $x + 2y - 14 = 0$.)

1.251. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $y = \frac{8}{15}x + 1$ и проходящей на расстоянии $d = 4$ от точки $M(6, -2)$. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{8}{15}x - \frac{2}{3};\ y = \frac{8}{15}x - \frac{146}{15}.\right)$

1.252. Составить уравнение сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(3, -4)$ и уравнения двух его высот $7x-2y-1=0$, $2x-7y-6=0$. (*Ответ:* $2x+7y+22=0$, $7x+2y-13=0$, $x-y+2=0$.)

1.253. Доказать, что прямые $3x-4y+10=0$ и $6x-8y+15=0$ параллельны, и найти расстояние между ними. (*Ответ:* 1/2.)

1.254. Составить уравнения прямых, проходящих через начало координат и отстоящих на расстоянии, равном 3, от точки $M(2\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$. (*Ответ:* $y=x$, $y=-41x$.)

1.15. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямую в пространстве можно представить как пересечение двух плоскостей (P_1) и (P_2), поэтому аналитически ее можно задать системой двух линейных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Система (1.12) определяет прямую только в том случае, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2, и называется *общими уравнениями прямой*.

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p} \tag{1.13}$$

определяют прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\mathbf{s}=(l, m, p)$, который называется *направляющим вектором прямой*.

Параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x=x_0+lt,&\\ y=y_0+mt,&\quad t\in\mathbf{R}.\\ z=z_0+pt,&\end{aligned}\right\}$$

Условие параллельности двух прямых (L_1) и (L_2):

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ (L_1),\quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{p_2}\ (L_2)$$

(рис. 1.30) можно записать в виде

$$\mathbf{s}_1\parallel\mathbf{s}_2 \text{ или } l_1/l_2=m_1/m_2=p_1/p_2.$$

Условие перпендикулярности двух прямых (L_1) и (L_2) (рис. 1.31) записывают в виде

$$\mathbf{s}_1\perp\mathbf{s}_2, \text{ т. е. } (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)=0,\ l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2=0.$$

Угол между прямыми (L_1) и (L_2) (рис. 1.32) можно найти по формуле

$$\cos\varphi=\cos(\widehat{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2})=\frac{(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}{|\mathbf{s}_1|\,|\mathbf{s}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+p_1^2}\,\sqrt{l_2^2+m_2^2+p_2^2}}.$$

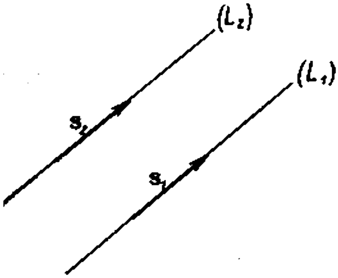


Рис. 1.30

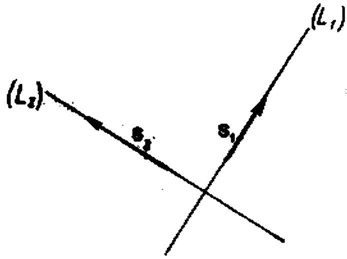


Рис. 1.31

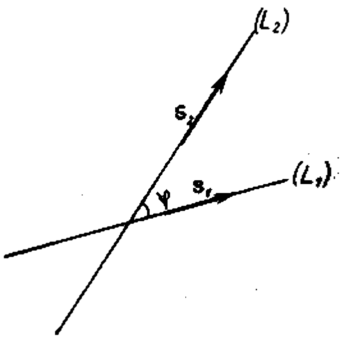


Рис. 1.32

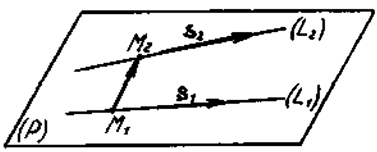


Рис. 1.33

Прямые называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости (рис. 1.33).

Необходимое и достаточное условие компланарности двух прямых, заданных каноническими уравнениями, записывают в виде

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\ \mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2) = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим плоскость и прямую в $\mathbf{R}^3$.

Угол между прямой $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{p}$ (L) *и плоскостью* $Ax + By + Cz + D = 0$ (P) (рис. 1.34) находится по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|(\mathbf{n},\ \mathbf{s})|}{|\mathbf{n}|\ |\mathbf{s}|} = \frac{|Al + Bm + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{m^2 + l^2 + p^2}},$$

где $\mathbf{n} = (A,\ B,\ C)$; $\mathbf{s} = (l,\ m,\ p)$.

Условие параллельности прямой (L) *и плоскости* (P) означает, что $\mathbf{n} \perp \mathbf{s}$ (рис. 1.35), т. е.

$$(\mathbf{n},\ \mathbf{s}) = 0 \text{ или } Al + Bm + Cp = 0.$$

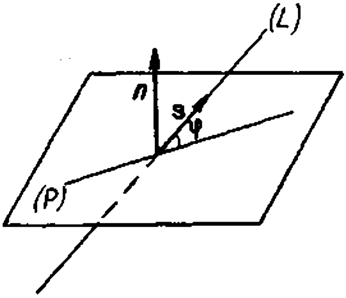


Рис. 1.34

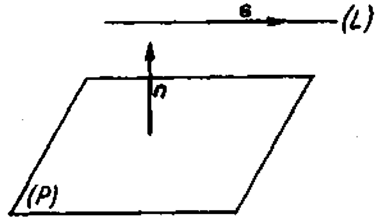


Рис. 1.35

Условие перпендикулярности прямой (L) *и плоскости* (P) означает, что $\mathbf{n} \parallel \mathbf{s}$ (рис. 1.36), т. е.

$$\mathbf{n} = \lambda \mathbf{s} \text{ или } \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p} = \lambda, \ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Условие того, что прямая (L) *лежит в плоскости* (P) означает, что точка $M_0 \in (P)$, т. е. $\mathbf{n} \perp \mathbf{s}$ (рис. 1.37), откуда имеем:

$$\left. \begin{array}{l} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Al + Bm + Cp = 0. \end{array} \right\}$$

Для определения *точки пересечения прямой* $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$ *с плоскостью* $Ax + By + Cz + D = 0$ надо совместно решить их уравнения, для чего следует воспользоваться параметрическими уравнениями прямой $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + pt$. При этом возможны следующие случаи.

1. Если $Al + Bm + Cp \neq 0$, то прямая пересекает плоскость. В этом случае из уравнения $A(x_0 + lt) + B(y_0 + mt) + C(z_0 + pt) = 0$ находим значение параметра t_1:

$$t_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cp},$$

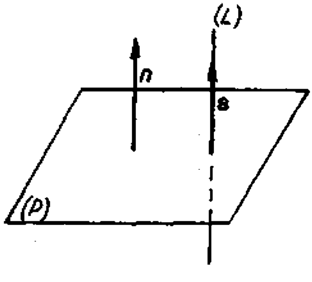


Рис. 1.36

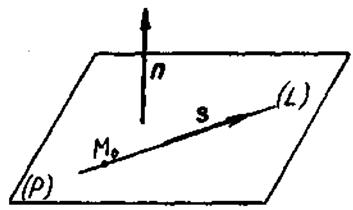


Рис. 1.37

соответствующее точке пересечения, и, подставляя его в параметрические уравнения прямой, получаем координаты точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ пересечения прямой и плоскости $x_1 = x_0 + lt_1, y_1 = y_0 + mt_1, z_1 = z_0 + pt_1$.

2. Если $Al + Bm + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая параллельна плоскости.

3. Если $Al + Bm + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая лежит в плоскости.

Расстояние от точки M_1 до прямой (L) (рис. 1.38) находится по формуле

$$d = |[\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{s}]|/|\mathbf{s}|, \ M_0 \in L.$$

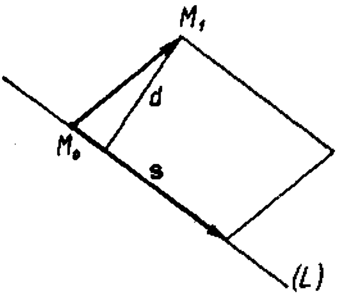


Рис. 1.38

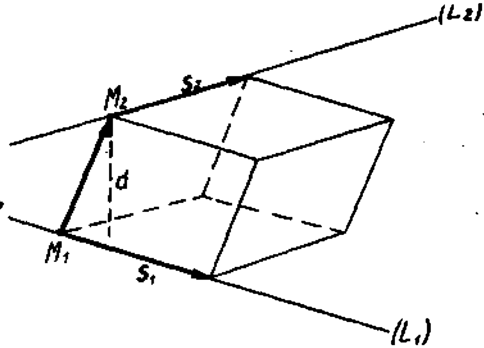


Рис. 1.39

Расстояние между скрещивающимися прямыми (рис. 1.39)

$$d(L_1, L_2) = |(\overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)|/|[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2]|.$$

Примеры

1. Через точку $M(2, 3, 1)$ провести прямую перпендикулярно к прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ (рис. 1.40).

Решение. Так как $\mathbf{s}_1 = (2, -1, 3)$ — направляющий вектор данной прямой, то, обозначая направляющий вектор искомой прямой через $\mathbf{s}_2 = (l, m, p)$ и учитывая, что $\mathbf{s}_1 \perp \mathbf{s}_2$, имеем $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = 0$ или $2l - m + 3p = 0$.

Поскольку векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ лежат в одной плоскости, то их смешанное произведение равно нулю, т. е. $(\overrightarrow{M_0M}, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = 0$. Учитывая, что $\overrightarrow{M_0M} = (3, 3, -1)$, имеем

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ l & m & p \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 8l - 11m - 9p = 0.$$

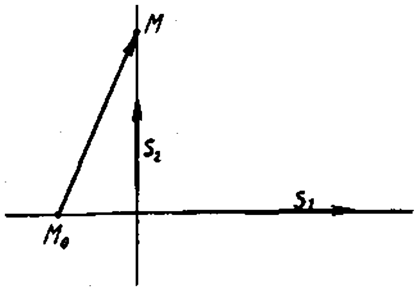


Рис. 1.40

Таким образом, для определения координат вектора $\mathbf{s}_2$ получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2l - m + 3p &= 0, \\ 8l - 11m - 9p &= 0, \end{aligned}\right\}$$

эквивалентную системе

$$\left.\begin{aligned} 2l - m + 3p &= 0, \\ -7m - 21p &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда $m = -3p$, $l = -3p$. Подставляя выражения для l и m в канонические уравнения прямой $\frac{x-2}{l} = \frac{y-3}{m} = \frac{z-1}{p}$, получаем

$$\frac{x-2}{-3p} = \frac{y-3}{-3p} = \frac{z-1}{p} \text{ или } \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{1}.$$

2. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, -5, 3)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+3}{9}$.

Решение. Направляющий вектор данной прямой $\mathbf{s}_1 = (4, -6, 9)$, а направляющий вектор искомой прямой $\mathbf{s}$ в силу ее параллельности исходной прямой имеет вид $\mathbf{s} = \lambda \mathbf{s}_1$. Следовательно, $\mathbf{s} = (4\lambda, -6\lambda, 9\lambda)$.

Воспользуемся каноническими уравнениями прямой (1.13), где в качестве (x_0, y_0, z_0) возьмем координаты точки M, Получим уравнение искомой прямой:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}.$$

3. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z-4=0,\\ 3x+2y-5z-4=0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Найдем направляющий вектор $\mathbf{s}=(l, m, p)$ искомой прямой. Так как он должен быть перпендикулярен к нормальным векторам $\mathbf{n}_1=(1, -2, 3)$ и $\mathbf{n}_2=(3, 2, -5)$ заданных плоскостей (рис. 1.41), то $\mathbf{s}\parallel[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$, т. е. $\mathbf{s}=$ $=\lambda[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$, $\lambda\in\mathbf{R}$. Тогда имеем

$$[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=4\mathbf{i}+14\mathbf{j}+8\mathbf{k}=(4, 14, 8),$$

а $\mathbf{s}=(4\lambda, 14\lambda, 8\lambda)$.

В качестве точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит искомая прямая, возьмем точку ее пересечения с какой-

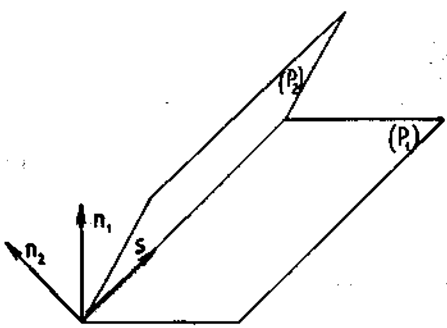


Рис. 1.41

либо из координатных плоскостей, например с плоскостью Oxy, уравнение которой $z=0$. Координаты y_0 и z_0 этой точки определим из системы уравнений заданных плоскостей, положив $z=0$:

$$\left.\begin{aligned} x_0-2y_0=4,\\ 3x_0+2y_0=4. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, находим: $x_0=2$, $y_0=-1$. Таким образом, канонические уравнения данной прямой имеют вид

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}.$$

4. Найти расстояние между двумя параллельными

прямыми (L_1) и (L_2) (рис. 1.42), если $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=$ $=\frac{z}{2}$ (L_1) и $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$ (L_2).

Решение. Расстояние между параллельными прямыми можно найти по формуле расстояния от точки до прямой. Здесь $\mathbf{s}=(3,\ 4,\ 2)$, $M_1(7,\ 1,\ 3)$, $M_2(2,\ -1,\ 0)$, $\overrightarrow{M_2M_1}=(5,\ 2,\ 3)$. Тогда

$$[\overrightarrow{M_2M_1},\ \mathbf{s}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-8\mathbf{i}-\mathbf{j}+14\mathbf{k}=(-8,\ -1,\ 14).$$

Имеем

$$d=\frac{|[\overrightarrow{M_2M_1},\ \mathbf{s}]|}{|\mathbf{s}|}=\frac{\sqrt{64+1+196}}{\sqrt{9+16+4}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

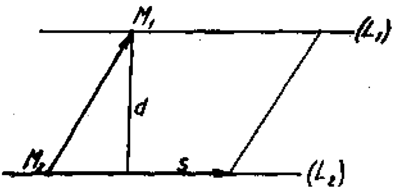


Рис. 1.42

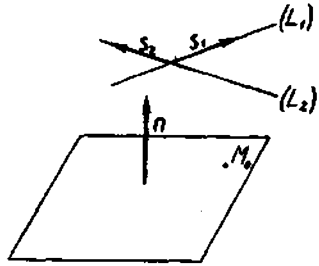


Рис. 1.43

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4,\ -3,\ 1)$ параллельно прямым $\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$ (L_1) и $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}$ (L_2).

Решение. Запишем уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0:

$$A(x-4)+B(y+3)+C(z-1)=0.$$

Так как нормальный вектор $\mathbf{n}$ этой плоскости перпендикулярен к направляющим векторам $\mathbf{s}_1=(6,\ 2,\ -3)$ и $\mathbf{s}_2=$ $=(5,\ 4,\ 2)$ заданных прямых (рис. 1.43), то $\mathbf{n}\parallel[\mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2]$, т. е. $\mathbf{n}=\lambda[\mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2]$, $\lambda\in\mathbf{R}$. Тогда имеем

$$[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 16\mathbf{i} - 27\mathbf{j} + 14\mathbf{k} = (16, -27, 14),$$

а $\mathbf{n} = (16\lambda, -27\lambda, 14\lambda)$. Подставляя координаты вектора $\mathbf{n}$ в уравнение плоскости, получаем

$$16\lambda(x-4) - 27\lambda(y+3) + 14\lambda(z-1) = 0$$

или окончательно

$$16x - 27y + 14z - 159 = 0.$$

6. Найти проекцию точки $M(3, 1, -1)$ на плоскость $3x + y + z - 20 = 0$ и точку, симметричную точке M относительно этой плоскости.

Решение. Нормальный вектор данной плоскости $\mathbf{n} = (3, 1, 1)$. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость, имеет вид $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ (рис. 1.44). Перейдя к параметрическим уравнениям прямой, получим $x = 3t + 3$, $y = t + 1$, $z = t - 1$. Решая совместно уравнения плоскости и прямой, имеем:

$$3(3t+3) + t + 1 + t - \\ - 1 - 20 = 0, \quad 11t - 11 = 0,$$

откуда $t = 1$. Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой, находим проекцию Q точки M на плоскость: $x_Q = 6$, $y_Q = 2$, $z_Q = 0$, т. е. $Q(6, 2, 0)$.

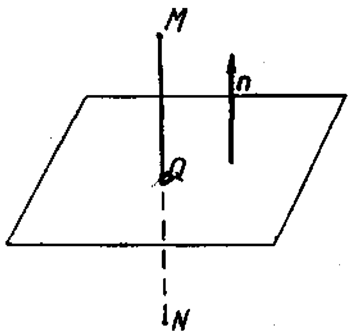


Рис. 1.44

Координаты точки N, симметричной точке M относительно плоскости (P), определяем из формул:

$$x_Q = (x_M + x_N)/2, \; y_Q = (y_M + y_N)/2, \; z_Q = (z_M + z_N)/2$$

или

$$6 = (3 + x_N)/2, \; 2 = (1 + y_N)/2, \; 0 = (-1 + z_N)/2,$$

откуда $x_N = 9$, $y_N = 3$, $z_N = 1$, т. е. $N(9, 3, 1)$.

7. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3, 1, -2)$ и прямую $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.

Решение. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку M_0:

$$A(x-3)+B(y-1)+C(z+2)=0.$$

Нормальный вектор $\mathbf{n}=(A, B, C)$ этой плоскости перпендикулярен к направляющему вектору $\mathbf{s}=(5, 2, 1)$ данной прямой (рис. 1.45). Так как точка $M_1(4, -3, 0)$

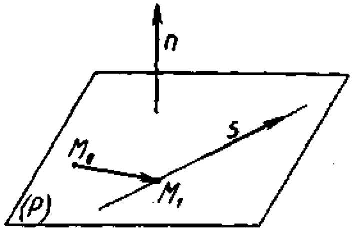


Рис. 1.45

принадлежит данной прямой, то вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=(1, -4, 2)$ также перпендикулярен к вектору $\mathbf{n}$. Следовательно, $\mathbf{n} \parallel [\mathbf{s}, \overrightarrow{M_0M_1}]$, т. е. $\mathbf{n}=\lambda[\mathbf{s}, \overrightarrow{M_0M_1}]$. Имеем:

$$[\mathbf{s}, \overrightarrow{M_0M_1}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}=8\mathbf{i}-9\mathbf{j}-22\mathbf{k}.$$

Тогда $\mathbf{n}=(8\lambda, -9\lambda, -22\lambda)$. Подставляя координаты вектора $\mathbf{n}$ в уравнение искомой плоскости, получаем

$$8\lambda(x-3)-9\lambda(y-1)-22\lambda(z+2)=0,$$

т. е.

$$8x-9y-22z-59=0.$$

8. Записать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3, -2, 4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$ и пересекающей прямую $\frac{x-2}{3}=$ $=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

Решение. Нормальный вектор $\mathbf{n}=(3, -2, 3)$ данной плоскости перпендикулярен к направляющему вектору $\mathbf{s}=(l, m, p)$ искомой прямой. Отсюда $(\mathbf{n}, \mathbf{s})=0$, т. е. $3l-$ $-2m-3p=0$. Направляющий вектор данной прямой $\mathbf{s}_1=(3, -2, 2)$; точка $M_1(2, -4, 1)$ принадлежит этой прямой. Так как данная и искомая прямые пересекаются, то векторы $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}_1$, $\overrightarrow{M_0M_1} = (-1, -2, 5)$ компланарны (рис. 1.46). Следовательно, $(\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 2 \\ l & m & p \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 6l + 17m + 8p = 0.$$

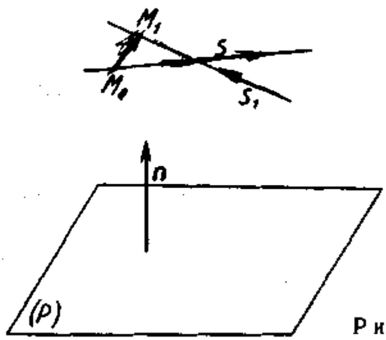


Рис. 1.46

Таким образом, для определения координат вектора $\mathbf{s}$ получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3l - 2m - 3n &= 0, \\ 6l + 17m + 8p &= 0, \end{aligned}\right\}$$

эквивалентную системе

$$\left.\begin{aligned} 3l - 2m - 3p &= 0, \\ 21m + 14p &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда находим: $m = -\frac{2}{3}p$, $l = \frac{5}{9}p$. Тогда $\mathbf{s} = \left(\frac{5}{9}p, -\frac{2}{3}p, p\right)$ или $\mathbf{s} = (5, -6, 9)$. Подставляя координаты направляющего вектора в формулу (1.13), получаем

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}.$$

9. Доказать, что прямые $\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$ (L_1) и $\frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$ (L_2) скрещиваются, и найти расстояние между ними (см. рис. 1.39).

Решение. Расстояние между скрещивающимися прямыми находим по формуле

$$d = |(\overrightarrow{M_1M_2},\ \mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2)| / |[\mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2]|,$$

где $\mathbf{s}_1 = (3, 4, -2)$; $\mathbf{s}_2 = (6, -4, -1)$; $M_1 = (-7, -4, -3)$; $M_2 = (21, -5, 2)$; $\overrightarrow{M_1M_2} = (28, -1, 5)$. Имеем

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\ \mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2) = \begin{vmatrix} 28 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -507 \neq 0,$$

т. е. векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ некомпланарны, и поэтому прямые скрещиваются. Вычисляем:

$$[\mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -12\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 36\mathbf{k} =$$

$$= -3\,(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k}),$$

$$|[\mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2]| = \sqrt{3^2(16 + 9 + 144)} = 39.$$

Тогда

$$d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2},\ \mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2)|}{|[\mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2]|} = \frac{507}{39} = 13.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.255. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(-2, 1, 5)$ параллельно: 1) вектору $\mathbf{a} = (1, -3, 4)$; 2) прямой $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{5}$; 3) оси Ox; 4) оси Oy. $\left(\textit{Ответ: } 1)\ \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-5}{4};\ 2)\ \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{5};\ 3)\ \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-5}{0};\ 4)\ \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{0}.\right)$

1.256. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки: 1) $M_1(1, 5, 1)$, $M_2(4, 6, 9)$; 2) $M_1(2, 3, 1)$, $M_2(5, -4, 4)$; 3) $M_1(0, -2, 3)$, $M_2(3, -1, 0)$. $\left(\textit{Ответ: } 1)\ \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-1}{8};\ 2)\ \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z-1}{3};\ 3)\ \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-3}.\right)$

1.257. Составить канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями:

1) $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$

(*Ответ*: 1) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3{,}5}{5}$; 2) $\frac{x-1}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$;
3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$.)

1.258. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2,\ 3,\ -5)$ параллельно прямой

$$\left.\begin{aligned} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

(*Ответ*: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{-5}$.)

1.259. Доказать параллельность прямых

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+7}{1} \text{ и } \left.\begin{aligned} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

1.260. Доказать перпендикулярность прямых

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-6} \text{ и } \left.\begin{aligned} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{aligned}\right\}$$

1.261. Найти угол между указанными прямыми:

1) $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$;

2) $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z + 1 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$

(*Ответ*: 1) $\varphi = 60°$; 2) $\cos\varphi = 98/195$, $\varphi = 59°48'$.)

1.262. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ и $\frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+6}{1}$ пересекаются. Найти их точку пересечения. (*Ответ*: $(3,\ -3,\ -2)$.)

1.263. Найти проекцию точки $A(5,\ 2,\ -1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$. (*Ответ*: $(1,\ 4,\ -7)$.)

1.264. Вычислить угол между прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{12}=\frac{z-1}{-3}$ и плоскостью $6x-3y+2z=0$. $\left(\textit{Ответ:}\ \psi=\arcsin\frac{18}{91}\approx 11°21'.\right)$

1.265. Показать, что прямая $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ лежит в плоскости $x+2y-4z+1=0$.

1.266. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4,\ -3,\ 2)$ и прямую $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-1}$. (*Ответ:* $9x+8y-6z=0$.)

1.267. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1,\ 2,\ -3)$ параллельно прямым $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$, $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$. (*Ответ:* $9x+11y+5z-16=0$.)

1.268. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$ лежат в одной плоскости, и составить уравнение этой плоскости. (*Ответ:* $2x-16y-13z+31=0$.)

1.269. Провести плоскость через пару параллельных прямых $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{1}$, $\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{1}$. (*Ответ:* $3x-2y-3=0$.)

1.270. Записать уравнения проекции прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}$ на плоскость Oyz. (*Ответ:* $y-3z+5=0$, $x=0$.)

1.271. Найти проекцию точки $M(4,\ 3,\ 10)$ на прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$. (*Ответ:* (3, 6, 8).)

1.272. Проверить, пересекаются ли прямые $\frac{x}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}$ и $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}$. Записать уравнение плоскости, в которой они лежат. (*Ответ:* $x+6y+3z-9=0$.)

1.273. Составить уравнение плоскости, проходящей

через точку $M_0(2, 0, 1)$ и прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-1}$.
(*Ответ*: $5x-3y-z-9=0$.)

1.274. Найти точку, симметричную точке $M(2, 7, 1)$ относительно плоскости $x-4y+z+7=0$. (*Ответ*: $(4, -1, 3)$.)

1.275. Найти точку, симметричную точке $P(4, 3, 10)$ относительно прямой $x=1+2t$, $y=2+4t$, $z=3+5t$. (*Ответ*: $(2, 9, 6)$.)

1.276. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(3, -2, 4)$ на плоскость $5x+3y-7z+1=0$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}.\right)$

1.277. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к прямой $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2}$.
(*Ответ*: $4x+5y-2z=0$.)

1.278. Найти расстояние от точки $M_0(1, 2, 5)$ до указанной прямой:

1) $x=t$, $y=1-2t$, $z=3+t$;

2) $\begin{cases} x+y-z+2=0, \\ 4x-3z+3=0. \end{cases}$

(*Ответ*: 1) $\sqrt{35/6}$; 2) $8\sqrt{3/26}$.)

1.279. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми:

1) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$, $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$;

2) $\begin{cases} 4x+2y+3z+1=0, \\ 9x+5y+2z+9=0, \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+y+7z-2=0, \\ x+y-4z+3=0. \end{cases}$

(*Ответ*: 1) $\sqrt{10/3}$; 2) $4\sqrt{29}/(9\sqrt{6})$.)

1.280. Найти канонические уравнения проекции прямой $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ на плоскость $x-y+3z+8=0$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \frac{x-0{,}8}{7}=\frac{y-4{,}6}{4}=\frac{z+1{,}4}{-1}.\right)$

1.281. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{3}$ параллельно прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-2}{-5}$. (*Ответ*: $-7x+8y+2z+23=0$.)

1.282. Составить канонические уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на данную прямую (L), если:

1) $M_0(5, 3, 1)$, (L): $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$;

2) $O(0, 0, 0)$, (L): $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

$\left(\textit{Ответ: } 1)\ \frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-1}{-1};\ 2)\ \frac{x}{33} = \frac{y}{-26} = \frac{z}{27}.\right)$

1.283. Найти проекцию точки $M(3, -4, -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$. (*Ответ:* $(2, -3, -5)$.)

1.16. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Говорят, что кривая (Γ) в системе координат Oxy имеет уравнение $F(x, y) = 0$, если выполнено следующее условие: точка $M(x, y)$ принадлежит кривой (Γ) в том и только в том случае, когда ее координаты x и y удовлетворяют соотношению $F(x, y) = 0$. Если $F(x, y) = f(x) - y$, то уравнение $F(x, y) = 0$ может быть записано в виде $y = f(x)$. Кривая в этом случае совпадает с графиком функции $y = f(x)$.

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая (Γ), уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1.14)$$

причем не все коэффициенты A, B, C одновременно равны нулю (в противном случае (Γ) — прямая, т. е. алгебраическая кривая первого порядка).

В общем случае может оказаться, что уравнение (1.14) *определяет вырожденную кривую* (пустое множество, точку, прямую, пару прямых).

Если же кривая (Γ) — невырожденная, то для нее найдется такая прямоугольная система координат, в которой *каноническое уравнение* этой кривой имеет один из следующих трех видов:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \quad (\textit{эллипс; } a \geqslant b > 0), \qquad (1.15)$$

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \quad (\textit{гипербола; } a,\ b > 0), \qquad (1.16)$$

$$y^2 = 2px \quad (\textit{парабола}). \qquad (1.17)$$

Система координат, в которой уравнение кривой (Γ) имеет вид (1.15), (1.16) или (1.17), называется *канонической системой координат*.

Изучим основные кривые второго порядка.

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *центром*. Если R — радиус окружности, а точка $C(a, b)$ — ее центр, то уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Если центр окружности совпадает с точкой $O(0, 0)$, то ее уравнение записывается в виде

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек той же плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), бо́льшая, чем расстояние между фокусами.

Если оси координат расположены так, что ось Ox проходит через фокусы $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, а точка $O(0, 0)$ совпадает с серединой отрезка F_1F_2 (рис. 1.47), то из равенства $F_1M + F_2M = 2a$ получаем *простейшее (каноническое) уравнение эллипса*

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \quad (b^2 = a^2 - c^2).$$

Точки $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$ называются *вершинами эллипса*. Центр симметрии $O(0, 0)$ называется *центром эллипса*.

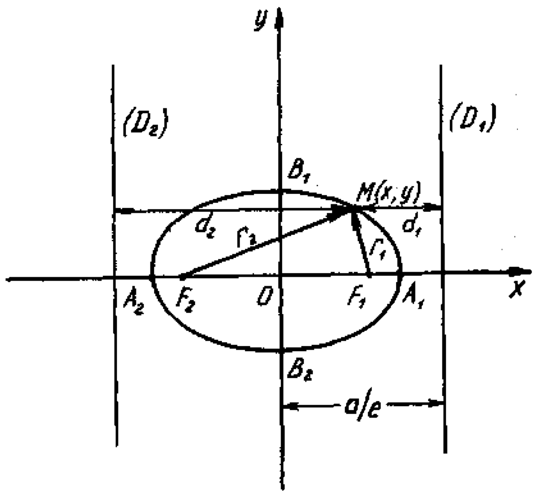


Рис. 1.47

Параметры a и b называются соответственно *большой и малой полуосями эллипса*, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ — *фокальными радиусами-векторами точки* M, принадлежащей эллипсу, а числа $r_1 = |\overrightarrow{F_1M}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{F_2M}|$ — *фокальными радиусами точки* M.

Форма эллипса (мера его сжатия)* характеризуется его *эксцентриситетом* $e = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ (так как $c < a$, то $e < 1$). При $e = 0$, т. е. $a = b$, эллипс является окружностью.

Прямые (D_1): $x = a/e$ и (D_2): $x = -a/e$, перпендикулярные к большой оси эллипса и проходящие на расстоянии a/e от его центра, называются *директрисами эллипса* (см. рис. 1.47).

Для эллипса справедливы равенства:

$$r_1/d_1 = e, \quad r_2/d_2 = e,$$

где d_1 и d_2 — расстояния от точки $M(x, y)$, принадлежащей эллипсу, до директрис, ближайших к фокусам F_1 и F_2, соответственно.

Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух данных точек той же плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), меньшая, чем расстояние между фокусами.

Если ось Ox проходит через фокусы $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, а точка $O(0, 0)$ — середина отрезка F_1F_2 (рис. 1.48), то из равенств $|F_2M - F_1M| = 2a$, $r_2 - r_1 = \pm 2a$ получаем *каноническое уравнение гиперболы*

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2).$$

Параметры a, b — называются *полуосями гиперболы*, точки $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$ — ее *вершинами*, оси Ox, Oy — *действительной* и *мнимой осями*, а центр симметрии O — *центром гиперболы*. Векторы $\overrightarrow{F_1M}$, $\overrightarrow{F_2M}$ — *фокальные радиусы-векторы точки* M, принадлежащей гиперболе, а числа r_1, r_2 — *фокальные радиусы точки* M.

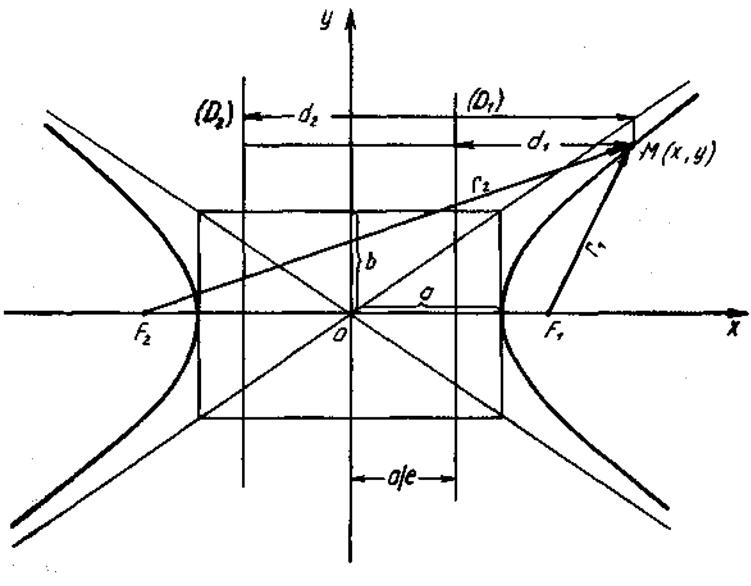


Рис. 1.48

Прямая называется *асимптотой гиперболы*, если расстояние от точки $M(x, y)$ гиперболы до этой прямой стремится к нулю при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm \dfrac{b}{a} x$. Число

$$e = c/a = \sqrt{a^2 + b^2}/a > 1$$

называется *эксцентриситетом* *гиперболы* и характеризует ее форму. Если $a=b$, то гипербола называется *равносторонней*.

Прямые (D_1): $x=a/e$ и (D_2): $x=-a/e$, перпендикулярные к действительной оси гиперболы и проходящие на расстоянии a/e от ее центра, называются *директрисами гиперболы* (см. рис. 1.48).

Директрисы гиперболы обладают следующим свойством: *отношение расстояния от любой точки гиперболы до какого-либо фокуса к расстоянию от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету*, т. е.

$$r_i/d_i = e, \ i = 1, 2.$$

Параболой называется множество точек плоскости, равноотстоящих от данной точки этой плоскости, называемой *фокусом*, и данной прямой той же плоскости, называемой *директрисой*. Если директрисой параболы является прямая $x=-p/2$, а фокусом — точка $F(p/2, 0)$ (рис. 1.49), то имеем *каноническое уравнение параболы*

$$y^2 = 2px.$$

Парабола, заданная таким уравнением, расположена симметрично относительно оси абсцисс. Число $p>0$ называется *параметром параболы*, точка O — ее *вершиной*, вектор $\overrightarrow{FM}$ — *фокальным радиусом-вектором точки* M параболы, а число $r=|\overrightarrow{FM}|$ — *фокальным радиусом точки* M.

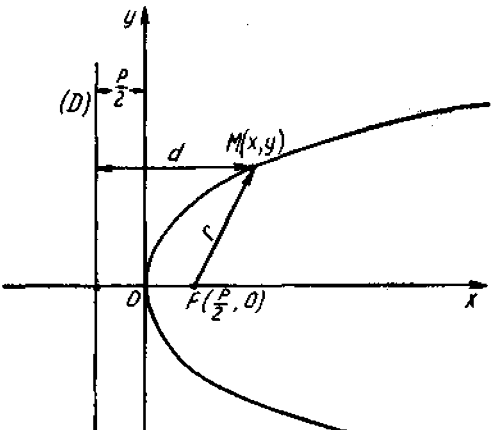


Рис. 1.49

Если осью симметрии параболы служит ось ординат, то уравнение параболы имеет вид

$$x^2 = 2py.$$

Длина фокального радиуса-вектора параболы $y^2=2px$ определяется по формуле $r=x+p/2$. Прямая (D): $x=-p/2$ является *директри-*

сой параболы $y^2 = 2px$, а прямая (D'): $y = -p/2$ — *директрисой параболы* $x^2 = 2py$. Для параболы $r = d$, где d — расстояние от точки $M(x, y)$, принадлежащей параболе, до соответствующей директрисы.

Примеры

1. Записать уравнение окружности, имеющей центр в точке $O'(6, 7)$ и касающейся прямой $5x - 12y - 24 = 0$ (рис. 1.50).

Решение. Радиус R окружности найдем как расстояние от центра $O'(6, 7)$ окружности до данной прямой:

$$R = |5 \cdot 6 - 12 \cdot 7 - 24| / \sqrt{5^2 + 12^2} = 6.$$

Воспользовавшись каноническим уравнением окружности, получим

$$(x-6)^2 + (y-7)^2 = 6^2.$$

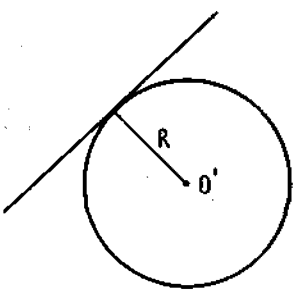


Рис. 1.50

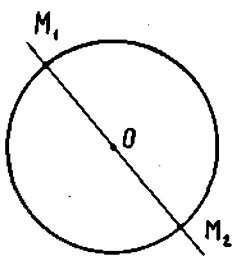


Рис. 1.51

2. Записать уравнение окружности, если точки $M_1(3, 2)$, $M_2(-1, 6)$ — концы диаметра окружности (рис. 1.51).

Решение. Найдем координаты центра окружности по формулам деления отрезка пополам:

$$x_O = \frac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1, \quad y_O = \frac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2} = \frac{2+6}{2} = 4.$$

Определим радиус окружности. Имеем $\overrightarrow{OM_1} = (2, -2)$, тогда

$$R = |\overrightarrow{OM_1}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}.$$

Уравнение окружности примет вид

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8.$$

3. Расстояния от одного из фокусов эллипса до концов большой оси равны 7 и 1. Составить уравнение эллипса.

Решение. По условию $AF_1 = 1$, $BF_1 = 7$ (рис. 1.52). Тогда $2a = AF_1 + F_1B = 1 + 7 = 8$, $a = 4$, $c = OF_1 = 4 - 1 = 3$. Так как для эллипса $c^2 = a^2 - b^2$, $b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 7$, $b = \sqrt{7}$, то, подставляя найденные значения a и b в каноническое уравнение эллипса, получаем

$$x^2/4^2 + y^2/(\sqrt{7})^2 = 1.$$

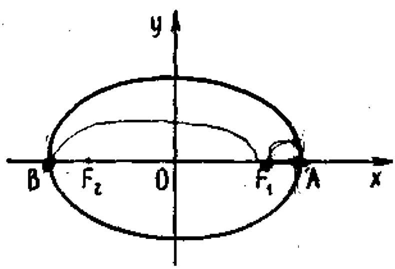


Рис. 1.52

4. Прямые $x = \pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найти уравнение этого эллипса.

Решение. По условию $2b = 8$. Уравнения директрис $x = \pm a/e$. Отсюда $\pm a/e = \pm 8$, $a/e = 8$, $e = c/a$. Тогда $a^2/c = 8$, $a^2 = 8c$. Так как для эллипса $c^2 = a^2 - b^2 = a^2 - 16$ или $a^2 = c^2 + 16$, то, подставляя выражение для a^2 в равенство $a^2 = 8c$, получаем:

$$8c = c^2 + 16, \ c^2 - 8c + 16 = 0, \ (c-4)^2 = 0, \ c = 4.$$

Тогда $a^2 = 32$, откуда $a = \sqrt{32}$ и уравнение эллипса примет вид

$$x^2/32 + y^2/16 = 1.$$

5. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(9, 8)$, если уравнения асимптот гиперболы $y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} x$. Найти эксцентриситет и уравнения директрис.

Решение. Из уравнений асимптот находим $\frac{b}{a} =$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ или $b=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$. Подставив в каноническое уравнение гиперболы полученное выражение для b, имеем

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{9y^2}{8a^2}=1.$$

Так как точка $M(9, 8)$ принадлежит гиперболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы. Отсюда $\frac{9^2}{a^2}-\frac{8^2\cdot 9}{8a^2}=1$, т. е. $81-72=a^2$, $a^2=9$, $a=3$. Тогда

$$b=\frac{2\sqrt{2}}{3}a=\frac{2\sqrt{2}\cdot 3}{3}=2\sqrt{2}.$$

Искомое уравнение гиперболы имеет вид

$$x^2/9-y^2/8=1.$$

Найдем эксцентриситет:

$$e=c/a=\sqrt{a^2+b^2}/a=\sqrt{9+8}/3=\sqrt{17}/3.$$

Уравнения директрис имеют вид

$$x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{3}{\sqrt{17}/3}=\pm\frac{9}{\sqrt{17}}.$$

6. Уравнение эллипса имеет вид $x^2/49+y^2/24=1$. Составить уравнение софокусной гиперболы (т. е. такой, фокусы которой совпадают с фокусами данного эллипса) при условии, что ее эксцентриситет $e=1{,}25$. Найти уравнения асимптот и директрис гиперболы (рис. 1.53).

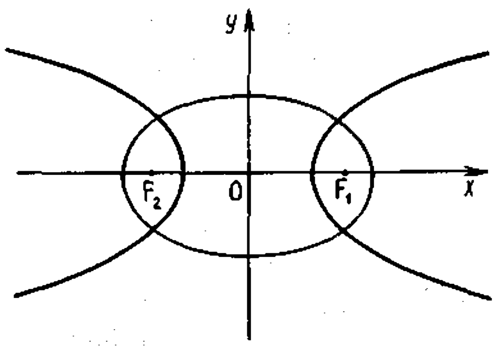


Рис. 1.53

Решение. Для эллипса $a^2=49$, $b^2=24$, $c^2=a^2-b^2=49-24=25$, $c=5$. Фокусы эллипса совпадают с фокусами гиперболы. Отсюда имеем: $F_1(5, 0)$, $F_2(-5, 0)$. Обозначим через a_1 и b_1 полуоси гиперболы. Так как для искомой гиперболы по условию $c_1=c=5$ и $e=1{,}25$, то имеем: $a_1=c_1/e=5/1{,}25=4$, $b_1^2=c_1^2-a_1^2=25-16=9$, $b_1=3$. Тогда уравнение гиперболы, фокусы которой совпадают с фокусами эллипса, имеет вид

$$x^2/4^2-y^2/3^2=1.$$

Уравнения асимптот гиперболы

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{4}x,$$

а уравнения ее директрис

$$x=\pm a/e=\pm 4/1{,}25=\pm 16/5.$$

7. Парабола с вершиной в точке $O(0, 0)$ проходит через точку $A(-2, -3)$ и симметрична относительно оси Ox (рис. 1.54). Записать ее уравнение, найти фокус и уравнение директрисы.

Решение. Так как точка $A(-2, -3)$ принадлежит параболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению параболы $y^2=2px$, откуда имеем $9=-4p$ или $p=-9/4$. Следовательно, уравнение искомой параболы имеет вид $y^2=-\frac{9}{2}x$; $F(-9/8, 0)$ — ее фокус. Уравнение директрисы $x=-p/2=9/8$.

8. На параболе $y^2=8x$ найти точку, фокальный радиус-вектор которой равен 20.

Решение. Из условия имеем: $2p=8$, $p=4$. Тогда $F(2, 0)$ — фокус данной параболы. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка параболы. По определению параболы $NM=FM$ или $x+p/2=x+2$ (рис. 1.55). По условию $x+2=20$, откуда $x=18$. Из уравнения параболы имеем: $y^2=8\cdot 18=144$, $y=\pm 12$.

Таким образом, искомые точки — $M_1(18, 12)$ и $M_2(18, -12)$.

9. Составить уравнение параболы, если известно, что:

а) фокус параболы $F(5, 0)$, а ее директрисой является ось ординат;

б) парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точки $O(0, 0)$ и $M(6, -2)$.

Решение. а) Так как по условию $p=5$ и вершина

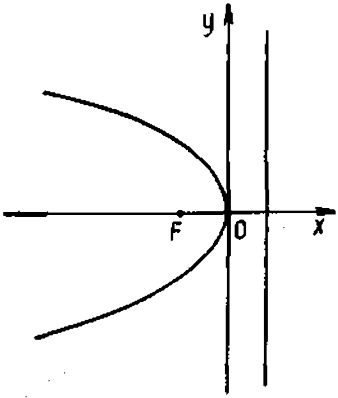


Рис. 1.54

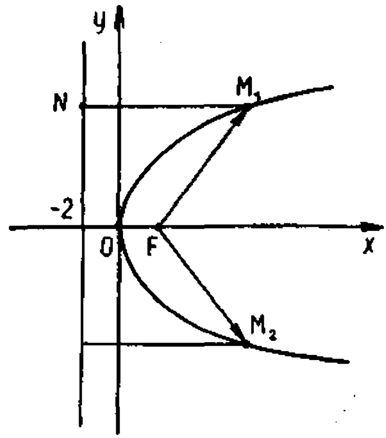


Рис. 1.55

параболы имеет координаты (2,5; 0), то, воспользовавшись уравнением $y^2 = 2p(x - x_0)$, получим

$$y^2 = 10(x - 2,5) = 10x - 25.$$

б) Запишем уравнение параболы в общем виде: $x^2 = 2py$. Точка $M(6, -2)$ удовлетворяет уравнению параболы, т. е. $36 = 2p \cdot (-2) = -4p$, $p = -9$. Тогда искомое уравнение $x^2 = -18y$.

Задачи для самостоятельного решения

1.284. Записать уравнение окружности, если концы одного из ее диаметров имеют координаты (3, 9) и (7, 3). (*Ответ:* $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 13$.)

1.285. Записать уравнение окружности, проходящей через три данные точки:

1) $M_1(9, 3)$, $M_2(-3, 3)$, $M_3(11, 1)$;
2) $M_1(4, 5)$, $M_2(-4, -1)$, $M_3(0, 1)$;
3) $M_1(1, 4)$, $M_2(-7, 4)$, $M_3(2, -5)$.

(*Ответ:* 1) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 100$; 2) $(x+9)^2 + (y-14)^2 = 250$; 3) $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 41$.)

1.286. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $O(2, 3)$ и касающейся прямой $x - 2y + 1 = 0$. (*Ответ:* $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9/5$.)

1.287. Составить уравнение окружности, касающейся прямой $x-7y+10=0$ в точке $N(4, 2)$, если известно, что ее центр лежит на прямой $2x+y=0$. (*Ответ*: $(x-6)^2+(y+12)^2=200$.)

1.288. Найти точки пересечения прямой $y=x+2$ и окружности $x^2+y^2-4x-12=0$. (*Ответ*: (2, 4), (−2, 0).)

1.289. Привести к каноническому виду уравнение окружности:

1) $x^2+y^2-2x+4y=0$;
2) $3x^2+3y^2-2x+7y+1=0$.

(*Ответ*: 1) $(x-1)^2+(y+2)^2=5$; 2) $(x-1/3)^2+(y+7/6)^2=41/36$.)

1.290. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что:

1) большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c=8$;

2) малая полуось равна 6, эксцентриситет $e=0,8$;

3) расстояние между фокусами $2c=6$, эксцентриситет $e=3/5$;

4) сумма полуосей равна 10, расстояние между фокусами равно $4\sqrt{5}$.

(*Ответ*: 1) $x^2/25+y^2/9=1$; 2) $x^2/100+y^2/36=1$; 3) $x^2/100+y^2/64=1$; 4) $x^2/36+y^2/16=1$.)

1.291. Дан эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис. (*Ответ*: 1) $a=5$, $b=3$; 2) $F_1(4, 0)$, $F_2(-4, 0)$; 3) $e=4/5$; 4) $x=\pm 25/4$.)

1.292. Определить эксцентриситет эллипса, если расстояние между его фокусами равно расстоянию между вершинами большой и малой полуосей. (*Ответ*: $e=\sqrt{0,4}$.)

1.293. Определить эксцентриситет эллипса, если известно, что:

1) его большая ось втрое больше малой;

2) его оси относятся как 5:3. (*Ответ*: 1) $2\sqrt{2}/3$; 2) 0,8.)

1.294. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, если:

1) большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c=8$;

2) малая ось равна 16, а эксцентриситет $e=3/5$. (*Ответ*: 1) $x^2/9+y^2/25=1$; 2) $x^2/25+y^2/16=1$.)

1.295. Оси эллипса совпадают с осями координат. Эллипс проходит через точки $M_1(2, 2)$, $M_2(3, 1)$. Составить уравнение эллипса. (*Ответ*: $3x^2 + 5y^2 = 32$.)

1.296. Эллипс касается оси абсцисс в точке $(8, 0)$ и оси ординат в точке $(0, -5)$. Записать уравнение эллипса, если известно, что его оси параллельны осям координат. (*Ответ*: $(x-8)^2/64 + (y+5)^2/25 = 1$.)

1.297. Эллипс пересекает ось абсцисс в точках $(5, 0)$ и $(11, 0)$ и касается оси ординат в точке $(0, 5)$. Составить уравнение эллипса, если его оси параллельны осям координат. $\left(\text{Ответ: } \dfrac{(x-8)^2}{64} + \dfrac{(y-5)^2}{320/11} = 1.\right)$

1.298. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:

1) точка $M_1(2, -2)$ эллипса и его большая полуось $a = 4$;

2) точки $M_1(4, -\sqrt{3})$ и $M_2(2\sqrt{2}, 3)$ эллипса;

3) точка $M_1(-\sqrt{5}, 2)$ эллипса и расстояние между его директрисами, равное 10.

(*Ответ*: 1) $x^2/16 + y^2/16/3 = 1$; 2) $x^2/20 + y^2/15 = 1$; 3) $x^2/15 + y^2/6 = 1$.)

1.299. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если:

1) расстояние между фокусами $2c = 14$ и ось $2a = 12$;

2) расстояние между фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $e = 3/2$;

3) расстояние между фокусами $2c = 20$ и уравнения асимптот $y = \pm \dfrac{4x}{3}$;

4) расстояние между директрисами равно $32/5$ и ось $2b = 6$.

(*Ответ*: 1) $x^2/36 - y^2/13 = 1$; 2) $x^2/4 - y^2/5 = 1$; 3) $x^2/36 - y^2/64 = 1$; 4) $x^2/16 - y^2/9 = 1$.)

1.300. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

1) действительная ось равна 48 и эксцентриситет $e = 13/12$;

2) действительная ось равна 16 и угол φ между асимптотой и осью абсцисс удовлетворяет условию $\operatorname{tg}\varphi = 3/4$.

(*Ответ*: 1) $x^2/576 - y^2/100 = 1$; 2) $x^2/64 - y^2/36 = 1$.)

1.301. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(24, 5)$, если уравнения ее асимптот $y = \pm \frac{5}{12}x$. (*Ответ*: $x^2/432 - y^2/75 = 1$.)

1.302. Составить уравнение гиперболы, если:

1) гипербола проходит через точку $M(10, -3\sqrt{3})$, асимптоты заданы уравнениями $y = \pm \frac{3}{5}x$;

2) расстояние между фокусами равно 10, асимптоты заданы уравнениями $y = \pm \frac{1}{2}x$.

(*Ответ*: 1) $x^2/25 - y^2/9 = 1$; 2) $x^2/20 - y^2/5 = 1$.)

1.303. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс, если даны:

1) точки $M_1(-8, 2\sqrt{2})$ и $M_2(6, -1)$ гиперболы;

2) точки $M_1(9/2, -1)$ гиперболы и уравнения асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$;

3) точка $M_1(-3, 5/2)$ гиперболы и уравнения директрис $x = \pm 4/3$.

$\left(\textit{Ответ: } 1)\ \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1;\ 2)\ \frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1;\ 3)\ \frac{x^2}{61/9} - \frac{y^2}{305/16} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.\right)$

1.304. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $x^2/25 + y^2/9 = 1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $e = 2$. (*Ответ*: $x^2/4 - y^2/12 = 1$.)

1.305. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат в вершинах эллипса $x^2/100 + y^2/64 = 1$, а директрисы проходят через фокусы этого эллипса. (*Ответ*: $x^2/60 - y^2/40 = 1$.)

1.306. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола симметрично расположена относительно оси Ox и проходит через точку $A(-2, 4)$;

2) парабола симметрично расположена относительно оси Oy и проходит через точку $B(3, -9)$. (*Ответ*: 1) $y^2 = -8x$; 2) $y = -x^2$.)

1.307. На параболе $y^2 = 16x$ найти точки, фокальный радиус-вектор которых равен 13. (*Ответ*: (9, 12), (9, −12).)

1.308. Арка моста имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен 24 м, а высота 6 м. (*Ответ*: 12.)

1.309. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(7, 0)$ и уравнение директрисы $x-7=0$. (*Ответ*: $y^2=-28x$.)

1.310. Составить уравнение параболы, если известно, что:

1) координаты фокуса $(3, 0)$, директриса служит осью ординат, а ось симметрии — осью абсцисс;

2) координаты фокуса $(0, 4)$, директриса служит осью абсцисс, а ось симметрии — осью ординат.

(*Ответ*: 1) $y^2=6x-9$; 2) $x^2=8y-16$.)

1.311. Привести к каноническому виду уравнение параболы:

1) $y=4x^2-8x+7$; 2) $x=2y^2-12y+14$.

$\left(\text{\textit{Ответ}: 1) } (x-1)^2=\frac{1}{4}(y-3);\ 2)\ (y-3)^2=\frac{1}{2}(x+4).\right)$

1.17. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Если перейти от системы координат Oxy к новой системе $O'x'y'$, приняв за начало координат точку $O'(a, b)$ (рис. 1.56) и сохранив прежнее направление осей координат, то связь между старыми и новыми координатами выразится формулами:

$$\left.\begin{aligned} x&=x'+a,\\ y&=y'+b,\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned} x'&=x-a,\\ y'&=y-b.\end{aligned}\right\}$$

Такое преобразование координат называется *параллельным переносом*.

При *повороте осей координат на угол* α (начало координат — прежнее, причем угол α отсчитывается против хода часовой стрелки) (рис. 1.57)

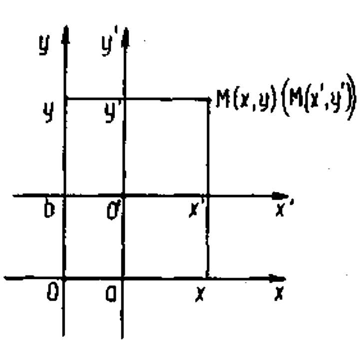


Рис. 1.56

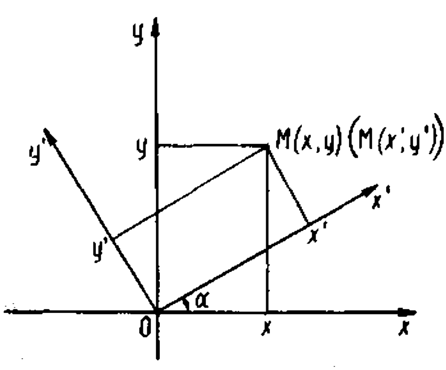


Рис. 1.57

зависимость между старыми координатами x, y и новыми x', y' определяется следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned}\right\}$$

Уравнение вида

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{1.18}$$

не содержащее члена xy с произведением координат, называется *пятичленным уравнением кривой второго порядка*. Это уравнение определяет на плоскости эллипс, окружность, гиперболу или параболу (с возможными случаями распада и вырождения этих кривых) с осями симметрии, параллельными осям координат, в зависимости от знака произведения коэффициентов A и C. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $AC > 0$. Тогда уравнение (1.18) определяет эллипс (действительный, мнимый или выродившийся в точку); при $A = C$ имеем окружность.

2. Пусть $AC < 0$. В этом случае уравнение (1.18) определяет гиперболу, которая может выродиться в две пересекающиеся прямые, если левая часть уравнения распадается на произведение двух линейных множителей.

3. Пусть $AC = 0$ (т. е. либо $A = 0$, $C \neq 0$, либо $C = 0$, $A \neq 0$). Тогда уравнение (1.18) определяет параболу, которая может вырождаться в две параллельные прямые (различные, совпадающие между собой или мнимые), если левая часть уравнения не содержит либо x, либо y, т. е. уравнение имеет вид

$$Ax^2 + 2Dx + F = 0 \text{ или } Cy^2 + 2Ey + F = 0.$$

Записав пятичленное уравнение в форме

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = f,$$

можно определить вид кривой и расположение ее на плоскости.

Уравнение

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (B \neq 0) \tag{1.19}$$

называется *общим уравнением кривой второго порядка*.

Применив к уравнению (1.19) формулы поворота осей координат:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{aligned}\right\}$$

при надлежащем выборе α можно освободиться в уравнении от члена с произведением координат. (Дальнейшие преобразования рассмотрены выше.)

Примеры

1. Установить, какая кривая определяется данным уравнением:

а) $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$;
б) $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0$.

Решение. а) *I способ.* Применив формулы параллельного переноса $x=x'+a$, $y=y'+b$, преобразуем левую часть исходного уравнения:

$$16(x'+a)^2+25(y'+b)^2-32(x'+a)+$$
$$+50(y'+b)-359=0,$$
$$16x'^2+25y'^2+x'(32a-32)+y'(50b+50)-$$
$$-359+25b^2+16a^2-32a+50b=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при x' и y', получаем:

$$32a-32=0,\ a=1;\ 50b+50=0,\ b=-1.$$

Следовательно, $O'(1,\ -1)$ — начало новой системы координат. С помощью параллельного переноса $x=x'+1$, $y=y'-1$ приведем исходное уравнение к каноническому виду

$$16x'^2+25y'^2-359+25+16-32-50=0$$

или $16x'^2+25y'^2=400$.

Окончательно, разделив на 400 обе части полученного уравнения, имеем

$$x'^2/25+y'^2/16=1$$

или в старой системе координат

$$(x-1)^2/5^2+(y+1)^2/4^2=1.$$

Таким образом, получили уравнение эллипса с центром в точке $O'(1,\ -1)$, большая полуось которого $a=5$, а малая полуось $b=4$ (рис. 1.58).

II способ. Дополнив члены, содержащие x, и члены, содержащие y, до полных квадратов, получим

$$16((x^2-2x+1)-1)+25((y^2+2y+1)-1)=359$$

или

$$16(x-1)^2-16+25(y+1)^2-25=359,$$

откуда

$$16(x-1)^2+25(y+1)^2=400.$$

Разделив на 400 обе части последнего уравнения, получим каноническое уравнение эллипса

$$(x-1)^2/5^2+(y+1)^2/4^2=1.$$

б) Применив метод выделения полного квадрата, имеем:

$$(x-3)^2-9-y^2+10=0,\ (x-3)^2-y^2=-1$$

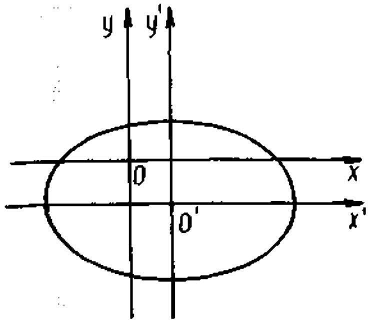


Рис. 1.58

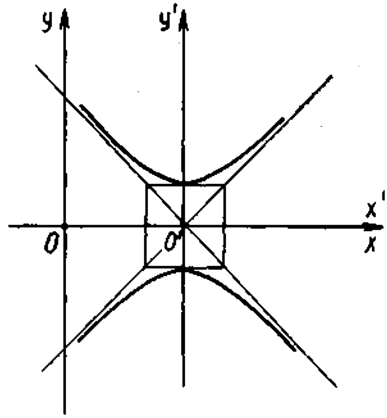


Рис. 1.59

или $y^2 - (x-3)^2 = 1$. Это уравнение гиперболы с центром в точке $O'(3, 0)$ (рис. 1.59).

2. Привести к каноническому виду уравнение линии $4x^2 + 4x + 2y - 1 = 0$ и построить ее.

Решение. Применив формулы параллельного переноса $x = x' + a$, $y = y' + b$, имеем:

$$4(x' + a)^2 + 4(x' + a) + 2(y' + b) - 1 = 0,$$
$$4x'^2 + x'(8a + 4) + 2y'^2 + 2b - 1 + 4a + 4a^2 = 0.$$

Найдем такие значения a и b, при которых коэффициент при x' и свободный член обратятся в нуль. Получим систему

$$\left.\begin{aligned} &8a + 4 = 0, \\ &2b - 1 + 4a + 4a^2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

эквивалентную системе

$$\left.\begin{aligned} &a = -1/2, \\ &2b - 1 - 2 + 1 = 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда $a = -1/2$, $b = 1$. Таким образом, $O'(-1/2, 1)$ — начало новой системы координат, в которой уравнение кривой примет вид $4x'^2 + 2y' = 0$. Отсюда $y' = -2x'^2$ или, в старой системе координат,

$$y - 1 = -2(x + 1/2)^2.$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке $O'(-1/2, 0)$.

3. Привести к каноническому виду уравнение $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$.

Решение. Выразив x и y из формул поворота осей координат и подставив их в данное уравнение, имеем

$$(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 6(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 6(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 2(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) - 1 = 0,$$

откуда

$$(\cos^2\alpha + 6\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha)x'^2 + (\sin^2\alpha - 6\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)y'^2 + (-2\cos\alpha\sin\alpha - 6\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha)x'y' + x'(2\sin\alpha + 6\cos\alpha) + y'(2\cos\alpha - 6\sin\alpha) - 1 = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при $x'y'$, получаем уравнение $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$, $\cos 2\alpha = 0$, откуда $\alpha = 45°$, и уравнение преобразуется к виду

$$\left(1 + 6\cdot\frac{1}{2}\right)x'^2 + \left(1 - 6\cdot\frac{1}{2}\right)y'^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}x' - \frac{4}{\sqrt{2}}y' - 1 = 0$$

или

$$4x'^2 - 2y'^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}x' - \frac{4}{\sqrt{2}}y' - 1 = 0.$$

Применив далее метод выделения полного квадрата, получаем:

$$4\left(x'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x'\right) - 2\left(y'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}y'\right) - 1 = 0,$$

$$4((x' + 1/\sqrt{2})^2 - 1/2) - 2((y' + 1/\sqrt{2})^2 - 1/2) - 1 = 0,$$

$$4(x' + 1/\sqrt{2})^2 - 2 - 2(y' + 1/\sqrt{2})^2 + 1 - 1 = 0,$$

$$4(x' + 1/\sqrt{2})^2 - 2(y' + 1/\sqrt{2})^2 = 2,$$

$$\frac{(x' + 1/\sqrt{2})^2}{1/2} - \frac{(y' + 1/\sqrt{2})^2}{1} = 1.$$

Приняв за начало новой системы координат точку $O'(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, с помощью формул параллельного переноса $x'' = x' + 1/\sqrt{2}$, $y'' = y' + 1/\sqrt{2}$ получим уравнение гиперболы

$$\frac{x''^2}{(1/\sqrt{2})^2} - \frac{y''^2}{1^2} = 1,$$

которая изображена на рис. 1.60.

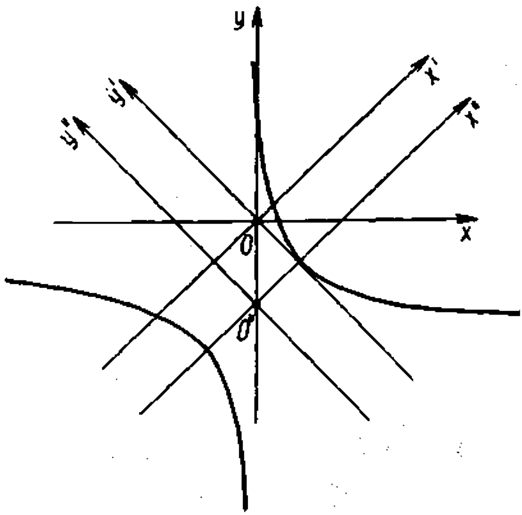


Рис. 1.60

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение, воспользовавшись формулами поворота осей координат. Имеем

$$(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)^2 + 2(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) + (x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)^2 - 8(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha) + 4 = 0,$$

откуда

$$x'^2(\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha) + x'y'(2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) + y'^2(1 - 2\sin\alpha\cos\alpha) - 8x'\cos\alpha + 8y'\sin\alpha + 4 = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при $x'y'$, получаем $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$, $\cos 2\alpha = 0$, откуда $\alpha = \pi/4$, и уравнение принимает вид

$$2x'^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}x' + \frac{8}{\sqrt{2}}y' + 4 = 0.$$

Применяем метод выделения полного квадрата:

$$2\left(x'^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}x'\right) + \frac{8}{\sqrt{2}}y' + 4 = 0,$$

$$2\left(\left(x'-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2-2\right)+\frac{8}{\sqrt{2}}y'+4=0,$$

$$2(x'-\sqrt{2})^2+\frac{8}{\sqrt{2}}y'=0,\ -\frac{4}{\sqrt{2}}y'=(x'-\sqrt{2})^2.$$

Произведя параллельный перенос осей координат с помощью формул $x''=x'-\sqrt{2}$, $y''=y'$, получим уравнение параболы $-2\sqrt{2}y''=x''^2$, которая изображена на рис. 1.61.

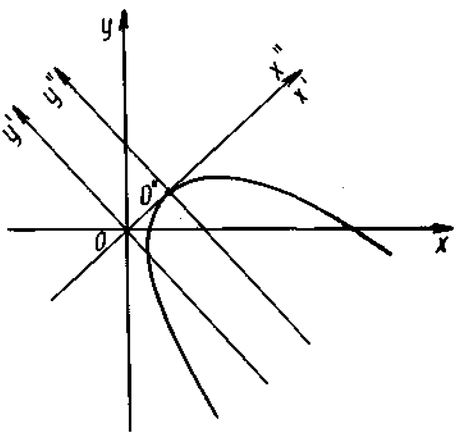


Рис. 1.61

5. Привести к каноническому виду уравнение кривой $13x^2-48xy+27y^2=45$ и найти формулы преобразования координат.

Решение. Решим эту задачу с помощью квадратичных форм (см. § 1.12). Введем обозначение $L(x, y)=$ $=13x^2-48xy+27y^2$. Тогда матрица данной квадратичной формы

$$A=\begin{bmatrix} 13 & -24 \\ -24 & 27 \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные значения этой матрицы. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & -24 \\ -24 & 27-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-40\lambda-225=0,$$

откуда $\lambda_1 = 45$, $\lambda_2 = -5$. Тогда квадратичная форма имеет следующий канонический вид: $L'(x', y') = 45x'^2 - 5y'^2$. Переходя к исходному уравнению, получаем $45x'^2 - 5y'^2 = 45$, т. е. имеем гиперболу

$$x'^2/1 - y'^2/9 = 1.$$

Чтобы указать преобразование, с помощью которого уравнение кривой можно привести к каноническому виду, найдем собственные векторы. Для $\lambda_1 = 45$ получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} -32\alpha_1 - 24\alpha_2 &= 0, \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда $\alpha_1 = -\frac{4}{3}\alpha_2$. Тогда собственные векторы $\mathbf{X}_{(\lambda_1)} = (3t, -4t)$, $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$.

Для $\lambda_2 = -5$ имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 18\alpha_1 - 24\alpha_2 &= 0, \\ 3\alpha_1 - 4\alpha_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда $\alpha_1 = \frac{4}{3}\alpha_2$. Тогда $\mathbf{X}_{(\lambda_2)} = (4t, 3t)$, $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. Если пронормировать собственные векторы $\mathbf{X}_{(\lambda_1)}$ и $\mathbf{X}_{(\lambda_2)}$, то получим: $\mathbf{X}'_{(\lambda_1)} = (-3/5, 4/5)$, $\mathbf{X}'_{(\lambda_2)} = (4/5, 3/5)$.

Таким образом, преобразование, приводящее уравнение кривой к каноническому виду, имеет вид

$$x = \frac{1}{5}(-3x' + 4y'), \quad y = \frac{1}{5}(4x' + 3y').$$

6. Привести к каноническому виду уравнение кривой $5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$ и найти формулы преобразования координат.

Решение. Обозначим $L(x, y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2$. Матрица этой квадратичной формы имеет вид $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение матрицы:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$.

Найдем собственные векторы. Для $\lambda_1 = 4$ имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0, \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда $\alpha_1 = -2\alpha_2$. Тогда $\mathbf{X}_{(\lambda_1)} = (2t, \ -t)$, $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. Нормируя полученные векторы, находим $\mathbf{X}'_{(\lambda_1)} = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$.

Для $\lambda_2 = 9$ получаем систему

$$\left.\begin{aligned} -4\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0, \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

откуда $\alpha_2 = 2\alpha_1$. Следовательно, $\mathbf{X}_{(\lambda_2)} = (t, 2t)$, $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. Нормируя полученные векторы, имеем $\mathbf{X}'_{(\lambda_2)} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

Таким образом, матрица преобразования координат

$$T = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix},$$

а формулы преобразования осей координат имеют вид:

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y', \quad y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'.$$

Найденное преобразование является поворотом осей координат на угол α, для которого $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$, $\sin\alpha = -1/\sqrt{5}$.

Подставив в уравнение данной кривой выражения для x и y из формул поворота осей координат:

$$5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(-\frac{x'}{\sqrt{5}} + \frac{2y'}{\sqrt{5}}\right) +$$
$$+ 8\left(-\frac{x'}{\sqrt{5}} + \frac{2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 8\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) +$$
$$+ 14\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 5 = 0,$$

после несложных преобразований получим

$$4x'^2 + 9y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{36}{\sqrt{5}}y' + 5 = 0.$$

Затем, применив метод выделения полного квадрата, имеем:

$$4\left(x'^2 + \frac{x'}{2\sqrt{5}}\right) + 9\left(y'^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}y'\right) + 5 = 0,$$

$$4\left(\left(x'+\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2-\frac{1}{80}\right)+9\left(\left(y'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{4}{5}\right)+5=0,$$

$$4\left(x'+\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+5-\frac{1}{20}-\frac{36}{5}=0,$$

$$4\left(x'+\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

С помощью формул параллельного переноса $x' = x'' - \dfrac{1}{4\sqrt{5}}$, $y' = y'' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ получаем

$$4x''^2+9y''^2=\frac{9}{4} \text{ или } \frac{y''^2}{1/4}+\frac{x''^2}{9/16}=1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $a=1/2$, $b=3/4$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1.312—1.323 с помощью метода выделения полного квадрата и параллельного переноса осей координат упростить уравнение линии, определить ее тип и расположение на плоскости.

1.312. $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$. (*Ответ:* $(x-5)^2/9+(y+2)^2/4=1$ — эллипс.)

1.313. $x^2-4y^2+8x-24y=24$. (*Ответ:* $(x+4)^2/4-(y+3)^2/1=1$ — гипербола.)

1.314. $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$. (*Ответ:* $-(x-2)^2/9+(y+1)^2/16=1$ — гипербола.)

1.315. $x-2y^2+12y-14=0$. (*Ответ:* $2(y-3)^2=x+4$ — парабола.)

1.316. $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$. (*Ответ:* $(x-3)^2/9+(y+1)^2/5=1$ — эллипс.)

1.317. $2x^2-8x+y^2-6y+1=0$. (*Ответ:* $(x-2)^2/8+(y-3)^2/16=1$ — эллипс.)

1.318. $y^2-6y-x^2+2x=0$. (*Ответ:* $(y-3)^2/8-(x-1)^2/8=1$ — гипербола.)

1.319. $3x^2-4y^2-12x+24=0$. (*Ответ:* $y^2/3-(x-2)^2/4=1$ — гипербола.)

1.320. $9x^2+4y^2-54x-32y+109=0$. (*Ответ:* $(x-3)^2/4+(y-4)^2/9=1$ — эллипс.)

1.321. $x^2+6x+5=2y$. (*Ответ:* $(x+3)^2=2(y+2)$ — парабола.)

1.322. $y^2+2y+4x-11=0$. (*Ответ:* $(y+1)^2=-4(x-3)$ — парабола.)

1.323. $y^2+8y-2x+12=0$. (*Ответ:* $(y+4)^2=2(x+$ $+2)$ — парабола.)

В задачах 1.324—1.326 привести к каноническому виду данное уравнение кривой, определить ее тип и расположение на плоскости. Записать формулы преобразования осей координат.

1.324. $4x^2+24xy+11y^2-20=0$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{4}=\right.$ $\left.=1;\ x=\frac{1}{5}(3x'+4y'),\ y=\frac{1}{5}(4x'-3y').\right)$

1.325. $5x^2+4xy+8y^2-36=0$. (*Ответ:* $x'^2/4+y'^2/9=$ $=1;\ x=(x'-2y')/\sqrt{5},\ y=(2x'+y')/\sqrt{5}$.)

1.326. $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x''^2}{1}-\right.$ $-\frac{y''^2}{9}=1;\ x''=x'-\frac{\sqrt{10}}{2},\ y''=y'-\frac{\sqrt{10}}{2};\ x=\frac{1}{\sqrt{10}}(x'-$ $\left.-3y'),\ y=\frac{1}{\sqrt{10}}(3x'+y').\right)$

В задачах 1.327—1.329 привести к каноническому виду уравнение кривой, упрощая соответствующую квадратичную форму и применяя метод выделения полного квадрата.

1.327. $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$. (*Ответ:* $x'^2/30+y'^2/5=1$.)

1.328. $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$. (*Ответ:* $x'^2/9-$ $-y'^2/36=1$.)

1.329. $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$. (*Ответ:* $y'^2=-2x'$.)

1.18. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Говорят, что *поверхность* (σ) *в системе координат* $Oxyz$ *имеет уравнение* $F(x,\ y,\ z)=0$, если выполнено условие: точка $M(x,\ y,\ z)$ принадлежит поверхности (σ) в том и только в том случае, когда ее координаты удовлетворяют соотношению $F(x,\ y,\ z)=0$. Если $F(x,\ y,\ z)=$ $=f(x,\ y)-z$, то уравнение может быть записано в виде $z=f(x,\ y)$.

Если лежащая в плоскости Oxy *кривая* $F(x,\ y)=0$ *вращается вокруг оси* Ox, *то уравнение образуемой при этом поверхности имеет вид* $F(x,\ \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$. *Уравнение* $F(\pm\sqrt{x^2+z^2},\ y)=0$ *определяет поверхность, образованную вращением той же кривой вокруг оси* Oy.

Алгебраической поверхностью второго порядка называется поверхность (σ), уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+$$
$$+2Hy+2Lz+K=0. \qquad (1.20)$$

В этом уравнении не все коэффициенты при членах второго порядка одновременно равны нулю, так как иначе поверхность (σ) была бы плоскостью. Уравнение (1.20) называют *общим уравнением поверхности второго порядка*.

В общем случае может оказаться, что уравнение (1.20) определяет вырожденную поверхность (пустое множество, точку, плоскость, пару плоскостей, прямую). Если же поверхность (1.20) — невырожденная, то с помощью преобразования декартовой системы координат (параллельного переноса и поворота осей координат в пространстве) и теории квадратичных форм ее уравнение может быть приведено к одному из указанных ниже видов, называемых *каноническими* и определяющих тип поверхности:

$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$	(*эллипсоид* (рис. 1.62); при $a=b=c$ имеем сферу $x^2+y^2+z^2=a^2$),
$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1$	(*однополостный гиперболоид* (рис. 1.63)),
$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=-1$	(*двуполостный гиперболоид* (рис. 1.64)),
$z=x^2/a^2+y^2/b^2$	(*эллиптический параболоид* (рис. 1.65)),
$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=0$	(*конус второго порядка* (рис. 1.66)),
$z=x^2/a^2-y^2/b^2$	(*гиперболический параболоид* (рис. 1.67)),
$x^2/a^2+y^2/b^2=1$	(*эллиптический цилиндр* (рис. 1.68)),
$x^2/a^2-y^2/b^2=1$	(*гиперболический цилиндр* (рис. 1.69)),
$y^2=2px$	(*параболический цилиндр* (рис. 1.70)).

При $D=0$, $E=0$, $F=0$ общее уравнение поверхности (1.20) принимает вид

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Gx+2Hy+2Lz+K=0.$$

В этом случае приведение общего уравнения к каноническому виду достигается с помощью метода выделения полных квадратов и параллельного переноса осей координат.

Основным методом исследования формы поверхностей второго порядка является *метод параллельных сечений*, который состоит в том, что поверхности пересекаются координатными плоскостями и плоскостями, параллельными им, а затем на основании вида полученных в сечениях линий делается вывод о форме исходной поверхности.

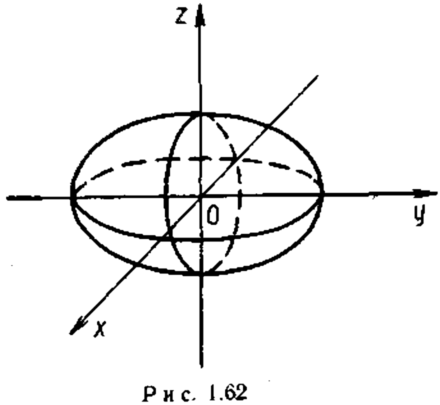


Рис. 1.62

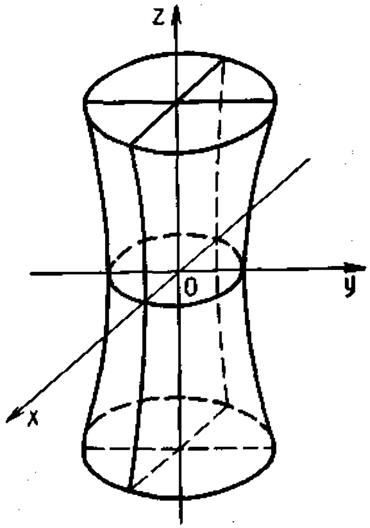


Рис. 1.63

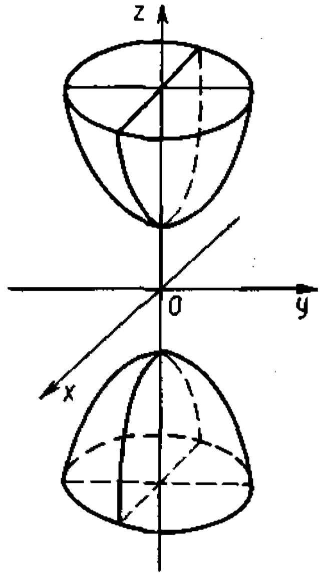


Рис. 1.64

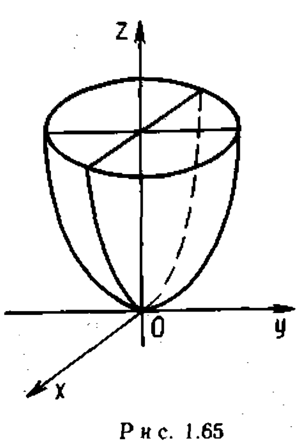


Рис. 1.65

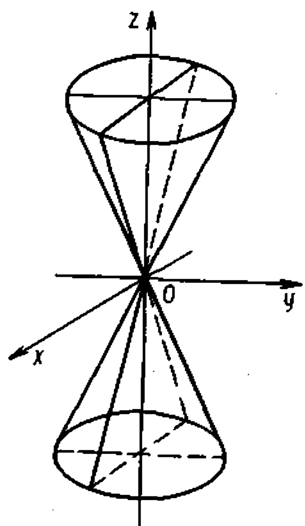


Рис. 1.66

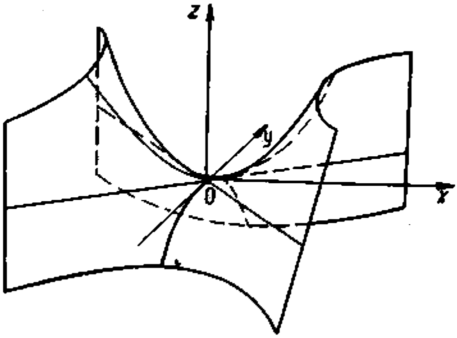


Рис. 1.67

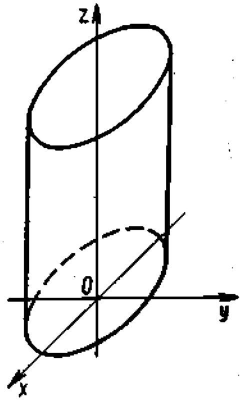


Рис. 1.68

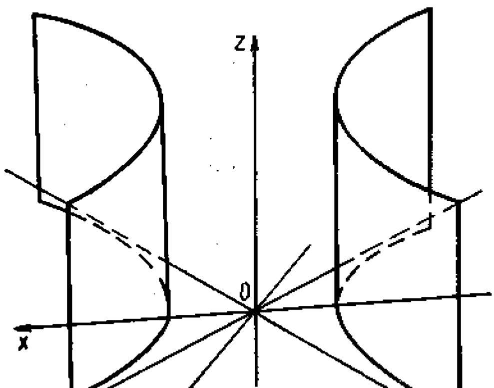


Рис. 1.69

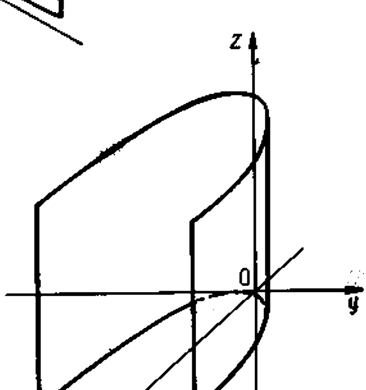


Рис. 1.70

Примеры

1. Записать уравнение шаровой поверхности, имеющей центр в точке $O'(1, 4, -7)$ и касающейся плоскости $6x + 6y - 7z + 42 = 0$.

Решение. Воспользовавшись уравнением сферы, имеем

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 = R^2.$$

Радиус R найдем по формуле расстояния от точки до плоскости:

$$R = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|6 \cdot 1 + 6 \cdot 4 - 7(-7) + 42|}{\sqrt{36 + 36 + 49}} = 11.$$

Окончательно получаем

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 = 11^2.$$

2. Записать уравнение поверхности, полученной при вращении эллипса $x^2/4 + y^2/9 = 1$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Решение. а) На основании правила, приведенного в начале данного параграфа, в уравнении эллипса заменяем y на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ и получаем уравнение поверхности вращения

$$x^2/4 + (y^2 + z^2)/9 = 1 \text{ или } x^2/4 + y^2/9 + z^2/9 = 1.$$

Это уравнение определяет эллипсоид вращения с полуосями $a = 2$, $b = c = 3$.

б) Согласно тому же правилу, в уравнении эллипса заменяем x на $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ и получаем уравнение эллипсоида вращения:

$$(x^2 + z^2)/4 + y^2/9 = 1 \text{ или } x^2/4 + y^2/9 + z^2/4 = 1$$

с полуосями $a = c = 2$, $b = 3$.

3. Записать уравнение поверхности, полученной при вращении гиперболы $y^2/16 - x^2/25 = 1$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Решение. а) Для получения уравнения поверхности, образованной вращением гиперболы $y^2/16 - x^2/25 = 1$ вокруг оси Ox, заменяем в ее уравнении y на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Таким образом, имеем

$$z^2/16 + y^2/16 - x^2/25 = 1.$$

Полученная поверхность является однополостным гиперболоидом вращения (рис. 1.71).

б) При вращении данной гиперболы вокруг оси Oy необходимо в ее уравнении заменить x на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$. Тогда имеем уравнение двуполостного гиперболоида вращения

$$x^2/25+z^2/25-y^2/16=-1,$$

изображенного на рис. 1.72.

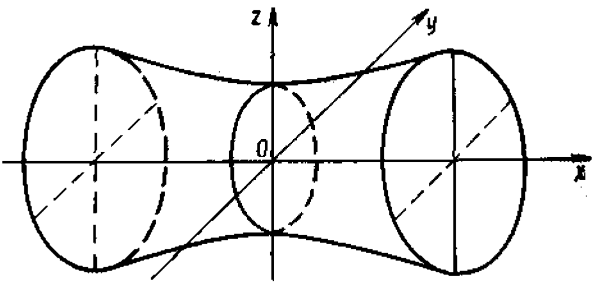


Рис. 1.71

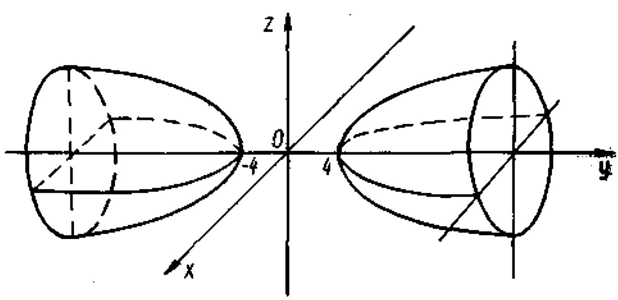


Рис. 1.72

4. Привести уравнение данной поверхности к каноническому виду и определить ее тип:

а) $4x^2+y^2-z^2-24x-4y+2z+35=0$;

б) $z^2+6z-x=0$; в) $2y^2+z^2=1-x$.

Решение. а) Приведем уравнение к каноническому виду, выделив полные квадраты при переменных:

$$4(x^2-6x)+(y^2-4y)-(z^2-2z)+35=0,$$

$$4((x-3)^2-9)+((y-2)^2-4)-((z-1)^2-1)+35=0,$$
$$4(x-3)^2+(y-2)^2-(z-1)^2-36-4+1+35=0,$$
$$4(x-3)^2+(y-2)^2-(z-1)^2=4.$$

Разделив на 4 все слагаемые последнего уравнения, получим

$$(x-3)^2/1+(y-2)^2/4+(z-1)^2/4=1.$$

Это уравнение однополостного гиперболоида. Если произвести параллельный перенос осей координат по формулам: $x'=x-3$, $y'=y-2$, $z'=z-1$, то точка $O'(3, 2, 1)$ будет началом новой системы координат, а уравнение поверхности примет канонический вид

$$x'^2/1+y'^2/4-z'^2/4=1,$$

где $a=1$, $b=2$, $c=2$.

б) Выделив полный квадрат в уравнении $z^2+6z-x=0$ при переменной z, имеем

$$(z+3)^2-9-x=0 \text{ или } (z+3)^2=x+9.$$

Данная поверхность является параболическим цилиндром. Произведя параллельный перенос осей координат по формулам: $x'=x+9$, $y'=y$, $z'=z+3$, получим каноническое уравнение поверхности $z'^2=x'$; точка $O'(3, 2, -1)$ служит началом новой системы координат.

в) Переписав исходное уравнение в виде

$$\frac{y^2}{1/2}+\frac{z^2}{1}=-(x-1),$$

получим уравнение эллиптического параболоида с вершиной в точке $O'(1, 0, 0)$. Совершив параллельный перенос осей координат по формулам: $x'=x-1$, $y'=y$, $z'=z$, имеем

$$\frac{y'^2}{1/2}+\frac{z'^2}{1}=-x'.$$

5. Составить уравнение проекций линии пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ с конусом $x^2+y^2-z^2=0$ на координатные плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz (рис. 1.73).

Решение. а) Найдем уравнение линии пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ с конусом $x^2+y^2-z^2=0$. Подставив $x^2+y^2=z^2$ в уравнение сферы, получим $2z^2=a^2$

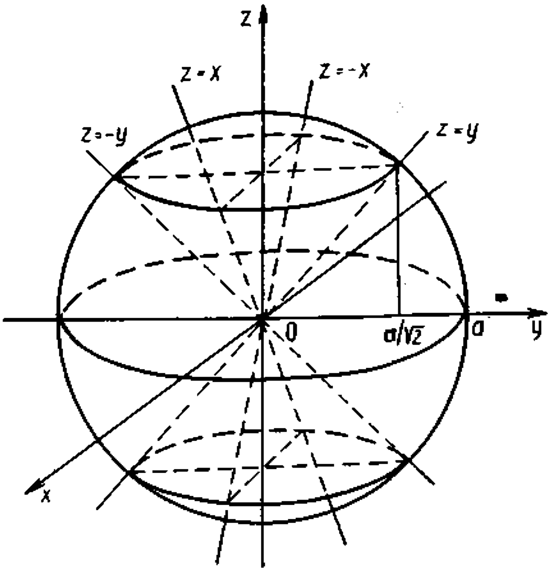


Рис. 1.73

или $z = \pm a/\sqrt{2}$. Затем, подставив найденное значение z в уравнение конуса, имеем

$$x^2 + y^2 = (a/\sqrt{2})^2,$$

т. е. уравнение окружности. Это и есть уравнение проекции линии пересечения данной сферы с конусом на плоскость Oxy.

б) Уравнение плоскости Oxz имеет вид $y = 0$. Подставив $y = 0$ в уравнения сферы и конуса, получим:

$$x^2 + z^2 = a^2,\ x^2 - z^2 = 0,\ z = \pm x.$$

Это пара пересекающихся прямых (см. рис. 1.73). Здесь $-a/\sqrt{2} \leqslant x \leqslant a/\sqrt{2}$.

в) Так как $x = 0$ — уравнение плоскости Oyz, то, подставив $x = 0$ в уравнения сферы и конуса, получим:

$$y^2 + z^2 = a^2,\ y^2 - z^2 = 0,\ y = \pm z,$$
$$-a/\sqrt{2} \leqslant y \leqslant a/\sqrt{2}.$$

Это также пара пересекающихся прямых (см. рис. 1.73).

6. Какую поверхность определяет уравнение $z = x^2/4 - y^2/9$?

Решение. Установим форму поверхности с помощью метода параллельных сечений. Пересечем поверхность плоскостью $y = 0$, в результате чего имеем:

$$z = x^2/4 - y^2/9, \ y = 0,$$

откуда $x^2 = 4z$. Это уравнение параболы в плоскости Oxz. Сечением данной поверхности плоскостью $x = 0$ является парабола

$$y^2 = -9z, \ x = 0.$$

В результате пересечения поверхности плоскостью $z = 0$ получаем пару пересекающихся прямых:

$$y = \pm \frac{3}{2}x, \ z = 0.$$

Сечения поверхности плоскостями $x = h$ дают параболы, расположенные в плоскости $x = h$:

$$z = h^2/4 - y^2/9, \ x = h,$$

а сечения плоскостями $z = h$ — гиперболы:

$$\frac{x^2}{4h} - \frac{y^2}{9h} = 1, \ z = 0,$$

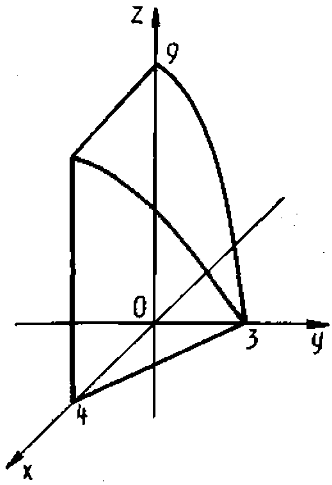
причем при $h > 0$ действительная ось гиперболы параллельна оси Ox, а при $h < 0$ — оси Oy. По виду полученных сечений заключаем, что исходная поверхность — гиперболический параболоид (см. рис. 1.67).

7. Построить тело, ограниченное поверхностями: $z = 9 - y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $3x + 4y = 12$.

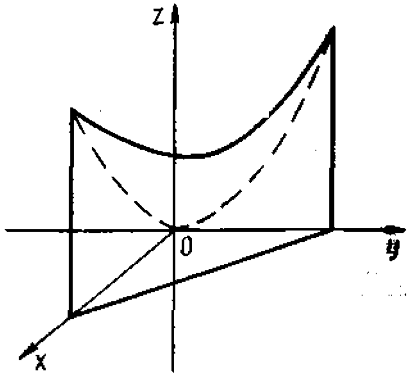
Решение. Уравнение $z = 9 - y^2$ задает параболический цилиндр. Его направляющая — парабола, расположенная в плоскости Ozy с вершиной в точке $(0, 9)$. Парабола пересекает ось Oy в точках $y = \pm 3$, ее ветви направлены вниз.

Уравнение $3x + 4y = 12$ определяет плоскость, параллельную оси Oz и отсекающую на оси Ox отрезок, величина которого равна 4, а на оси Oy — отрезок, величина которого равна 3. Уравнения $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$ задают координатные плоскости.

Таким образом, получаем тело, которое расположено в первом октанте и изображено на рис. 1.74.



Р и с. 1.74



Р и с. 1.75

8. Построить тело, ограниченное поверхностями: $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Уравнение $z = x^2 + y^2$ задает параболоид вращения, $x + y = 1$ — плоскость, параллельную оси Oz, а $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ — координатные плоскости. Тело, ограниченное этими поверхностями, изображено на рис. 1.75.

9. Построить тело, ограниченное поверхностями: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ $(z \geqslant 0)$, $z = 6 - x^2 - y^2$.

Решение. Так как уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ задает конус второго порядка, а $z = 6 - x^2 - y^2$ — параболоид вращения с вершиной в точке (0, 0, 6), то получаем тело, изображенное на рис. 1.76.

10. Построить тело, ограниченное поверхностями: $z = 4 - y^2$, $y = x^2/2$, $z = 0$.

Решение. Уравнения $z = 4 - y^2$ и $y = x^2/2$ определяют параболические цилиндры, $z = 0$ — уравнение плоскости Oxy. Параболический цилиндр $z = 4 - y^2$ и плоскость $z = 0$ пересекаются по прямой $y = 2$. Полученное тело изображено на рис. 1.77.

11. Найти точки пересечения поверхности $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1$ и прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{3}$.

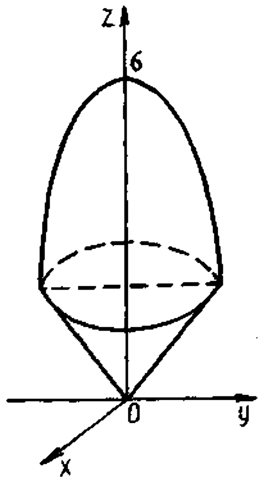


Рис. 1.76

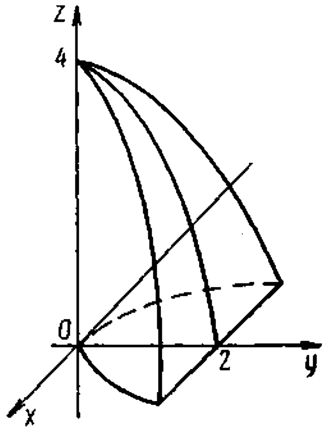


Рис. 1.77

Решение. Уравнение $x^2/4+y^2-z^2/9=-1$ задает двуполостный гиперболоид. Перейдем к параметрическим уравнениям прямой: $x=t+3$, $y=t+1$, $z=3t+6$. Подставляя выражения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в уравнение двуполостного гиперболоида, имеем

$$(t+3)^2/4+(t+1)^2-(3t+6)^2/9=-1.$$

Решив это уравнение, получим $t=1$. Подставив найденное значение t в параметрические уравнения прямой, имеем: $x=4$, $y=2$, $z=9$, т. е. искомая точка — $M(4, 2, 9)$.

Задачи для самостоятельного решения

1.330. Найти точки пересечения поверхности и прямой:

1) $x^2/81+y^2/36+z^2/9=1$ и $(x-3)/3=(y-4)/(-6)=$ $=(z+2)/4$;

2) $x^2/16+y^2/9-z^2/4=1$ и $x/4=y/(-3)=(z+2)/4$;

3) $x^2/9-y^2/4=z$ и $x/3=(y-2)/(-2)=(z+1)/2$.

(*Ответ*: 1) (3, 4, —2), (6, —2, 2); 2) (4, —3, 2), т. е. прямая касается поверхности; 3) прямая лежит на поверхности.)

1.331. Найти кривую, определяемую уравнениями

$x^2/4 - y^2/3 = 2z$, $x - 2y + 2 = 0$. (*Ответ:* парабола $(y - 3)^2 = 6(z + 1)$.)

1.332. Определить тип указанной поверхности и построить ее:

1) $z = 2 + x^2 + y^2$; 2) $x^2 + y^2 = 2x$;
3) $y^2 = x^2 + z^2$; 4) $x^2 - y^2 - z^2 - 4 = 0$; 5) $x^2 = 4z$.

(*Ответ:* 1) параболоид вращения; 2) круговой цилиндр; 3) конус; 4) двуполостный гиперболоид; 5) параболический цилиндр.)

В задачах 1.333—1.342 определить тип указанной поверхности, приведя ее уравнение к каноническому виду. Построить данную поверхность.

1.333. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6x - 4y - 12z - 1 = 0$. (*Ответ:* $(x + 3)^2/24 + (y - 1)^2/12 + (z - 2)^2/8 = 1$ — эллипсоид.)

1.334. $x^2 + 3y^2 + 12z - 24 = 0$. (*Ответ:* $x^2 + 3y^2 = -12(z - 2)$ — эллиптический параболоид.)

1.335. $9x^2 - 16y^2 + 144z^2 + 96y - 576z + 144 = 0$. (*Ответ:* $x^2/32 - (y - 3)^2/18 + (z - 2)^2/2 = 1$ — однополостный гиперболоид.)

1.336. $2y^2 + x^2 - 4x - 4z^2 + 4 = 0$. (*Ответ:* $2y^2 + (x - 2)^2 = 4z^2$ — конус.)

1.337. $4z^2 = x^2 + 2y^2 + 2x + 3$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{(x+1)^2}{2} + \dfrac{y^2}{1} - \dfrac{z^2}{1/2} = -1\right.$ — однополостный гиперболоид.$\Big)$

1.338. $x^2 + 3y^2 - z^2 + 2z = 0$. $\left(\textit{Ответ:}\ x^2 + \dfrac{y^2}{1/3} - (z - 1)^2 = -1\right.$ — двуполостный гиперболоид.$\Big)$

1.339. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 4x + 4y + 4z + 7 = 0$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{(x-1)^2}{1/2} + (y + 2)^2 + \dfrac{(z+1)^2}{1/2} = 1\right.$ — эллипсоид.$\Big)$

1.340. $x^2 - 6y^2 + 3z^2 + 8x + 12y + 1 = 0$ $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{(x+4)^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{3/2} + \dfrac{z^2}{3} = 1\right.$ — однополостный гиперболоид.$\Big)$

1.341. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2z - 2 = 0$. (*Ответ:* $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2(z + 2)$ — параболоид вращения.)

1.342. $2y^2 + z^2 = 1 - x$. (*Ответ:* $2y^2 + z^2 = -(x - 1)$ — эллиптический параболоид.)

В задачах 1.343—1.357 построить тело, ограниченное указанными поверхностями.

1.343. $x + y + z = 3$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

1.344. $x^2+y^2=a^2,\ z=mx\ (m>0),\ z=0.$
1.345. $az=x^2-y^2,\ z=0,\ x=a\ (a>0).$
1.346. $x^2+y^2=a^2,\ x^2+z^2=a^2\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0).$
1.347. $z=4-y^2,\ z=y^2+2,\ x=-1,\ x=2.$
1.348. $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ z=0,\ x+z=6.$
1.349. $z=a-x,\ y^2=ax\ (a>0),\ z=0.$
1.350. $az=a^2-x^2-y^2,\ z=0.$
1.351. $z^2=2ax,\ x^2+y^2=ax(a>0).$
1.352. $x^2+y^2+z^2=4a^2,\ x^2+y^2=a^2.$
1.353. $4z=16-x^2-y^2,\ x^2+y^2=4,\ z=0.$
1.354. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0.$
1.355. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2\pm ax=0.$
1.356. $y^2+z^2=4ax,\ y^2=ax,\ x=3a\ (a>0).$
1.357. $az=x^2+y^2,\ x^2+y^2\pm ax=0,\ z=0.$

1.19. ЛИНИИ, ЗАДАННЫЕ УРАВНЕНИЯМИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Говорят, что на плоскости введена *полярная система координат* $\langle O, u\rangle$, если заданы: точка O, называемая *полюсом*; некоторый луч u, исходящий из точки O и называемый *полярной осью; масштаб* для измерения длин. Положение точки M на плоскости можно определить двумя числами: $r(M)=|\overrightarrow{OM}|>0$, выражающим расстояние от точки M до полюса, и $\varphi(M)$ — величиной угла, на который следует повернуть ось u для того, чтобы ее направление совпало с направлением вектора $\overrightarrow{OM}$ (при этом $\varphi(M)>0$, если поворот осуществляется против хода часовой стрелки, и $\varphi(M)<0$ в противном случае). Числа r и φ называются *полярными координатами точки* M.

Полярный угол $\varphi(M)$ имеет бесконечно много возможных значений (отличающихся друг от друга на величину $2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$). Значение полярного угла, удовлетворяющее условию $0\leqslant\varphi<2\pi$ или $-\pi<\varphi\leqslant\pi$, называется *главным*. Для полюса $z=0$, φ — произвольное.

Пусть на плоскости выбраны правая декартова прямоугольная система координат Oxy (т. е. такая, что кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy происходит против хода часовой стрелки) и полярная система координат $\langle O, u\rangle$, причем полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс (рис. 1.78). Тогда декартовы и полярные координаты произвольной точки M связаны формулами:

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\varphi,\\ y&=r\sin\varphi\end{aligned}\right\}\quad\text{и}\quad\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\varphi&=y/x,\\ r&=\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}\right\}$$

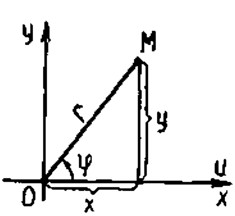


Рис. 1.78

Из этих формул следует:

$$\cos\varphi=x/\sqrt{x^2+y^2},\ \sin\varphi=y/\sqrt{x^2+y^2}.$$

При нахождении полярного угла φ нужно учитывать, в каком квадранте расположена точка, и выбирать соответствующее значение φ.

Уравнение кривой в полярных координатах имеет вид $F(r, \varphi)=0$ или $r=f(\varphi)$. Оно может быть получено либо непосредственно, исходя из геометрических свойств кривой, либо переходом к полярным координатам в уравнении этой кривой, заданной в декартовых прямоугольных координатах с помощью записанных выше формул.

Обобщенными полярными координатами точки M называют ее полярные координаты r и φ, такие, что $-\infty < r < \infty$, $-\infty < \varphi < \infty$.

Чтобы построить точку $M(r, \varphi)$ в обобщенной полярной системе координат, необходимо провести луч, образующий с полярной осью u угол φ, затем отложить на нем отрезок OM длиной $|r|$, если $r>0$, и на его продолжении, если $r<0$. В дальнейшем под r и φ (если специально не оговорено) будем понимать полярные координаты точки.

Мы уже изучили параметрические уравнения прямой. Иногда удобно рассматривать параметрические уравнения линии. Пусть заданы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, непрерывные на некотором промежутке X числовой оси. Уравнения $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in X$, называются *параметрическими уравнениями кривой* (Г) в декартовой прямоугольной системе координат, если выполнено следующее условие: для любого значения параметра $t\in X$ точка $M(\varphi(t), \psi(t))$ принадлежит кривой (Г) и, наоборот, для любой точки $M(x, y)$ кривой (Г) существует такое значение параметра $t\in X$, при котором ее координаты определяются из уравнений $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Исключение параметра t из уравнений $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ (если оно возможно) приводит к уравнению, связывающему x и y, т. е. к обычному уравнению линии вида $F(x, y)=0$. Всякую функцию, заданную явно $(y=f(x))$, можно задать параметрически. Действительно,

$$y=f(x) \text{ или } \left.\begin{matrix} x=t, \\ y=f(t), \end{matrix} \quad t\in X.\right\}$$

Всякое уравнение линии в полярных координатах $(r=r(\varphi))$ можно записать в параметрическом виде:

$$x=r\cos\varphi=f(\varphi)\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi=f(\varphi)\sin\varphi.$$

Считая $\varphi=t$, имеем

$$r=r(\varphi) \text{ или } \left.\begin{matrix} x=f(t)\cos t, \\ y=f(t)\sin t. \end{matrix}\right\}$$

Примеры

1. Составить таблицу значений функции $r=a\varphi$ для $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ и построить с помощью этой таблицы график функции $r=a\varphi$.

Решение. Составляем таблицу значений функции при $a=1$ (табл. 1.1) и строим график. Полученная кривая называется *спиралью Архимеда* (рис. 1.79, *а*).

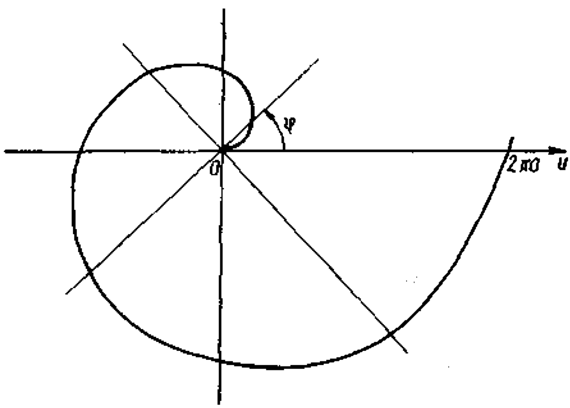
Спираль Архимеда, соответствующая положительным значениям φ, раскручивается против хода часовой стрелки (рис. 1.79, *б*), а для отрицательных значений φ — по ходу

Таблица 1.1

φ	r	φ	r	φ	r	φ	r	φ	r
0	0	$\pi/3$	1,04	$3\pi/4$	2,34	$7\pi/6$	3,68	$5\pi/3$	5,13
$\pi/12$	0,26	$\pi/2$	1,57	$5\pi/6$	2,60	$5\pi/4$	3,92	$7\pi/4$	5,48
$\pi/6$	0,52	$7\pi/12$	1,83	π	3,14	$4\pi/3$	4,18	2π	6,28
$\pi/4$	0,78	$2\pi/3$	2,08	$13\pi/12$	3,4	$3\pi/2$	4,61		

часовой стрелки. При $a > 1$ длина полярного радиуса r для точек спирали увеличивается в a раз, при $a < 1$ — уменьшается в a раз.

а



б

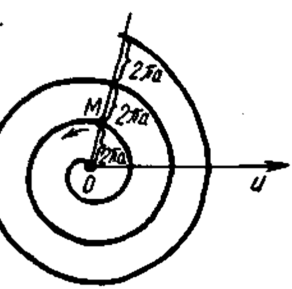


Рис. 1.79

2. Составить таблицу значений функции $r = a(1 - \cos\varphi)$ для $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и с ее помощью построить график данной функции.

Решение. Положив $a = 1$, составим таблицу значений функции (табл. 1.2) и построим ее график.

Полученная кривая называется *кардиоидой* (рис. 1.80).

Таблица 1.2

φ	r	φ	r	φ	r	φ	r	φ	r
0	0	$\pi/2$	1	π	2	$3\pi/2$	1	2π	0
$\pi/6$	0,134	$2\pi/3$	1,500	$7\pi/6$	1,866	$5\pi/3$	0,500		
$\pi/3$	0,500	$5\pi/6$	1,866	$4\pi/3$	1,500	$11\pi/6$	0,134		

Для $2\pi \leqslant \varphi \leqslant 4\pi$ полярный радиус r принимает те же значения, что и для $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, т. е. получается тот же самый график, и т. д.

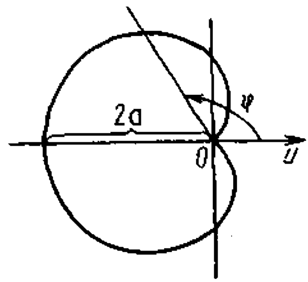


Рис. 1.80

3. Доказать, что уравнение $r = a \sin \varphi$ задает окружность.

Решение. Совместим начало декартовой прямоугольной системы координат $O(0, 0)$ с полюсом, а полярную ось — с положительным направлением оси Ox. Тогда:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \sin \varphi = y/r = y/\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение $r = a \sin \varphi$, получим:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ay/\sqrt{x^2 + y^2}, \ x^2 + y^2 = ay$$

или

$$x^2 + (y - a/2)^2 = a^2/4.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $O(0, a/2)$ радиусом $a/2$.

Замечание. Аналогично можно доказать, что уравнение $r = a \cos \varphi$ задает окружность $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$.

4. Составить таблицу значений функции $r = a \sin 3\varphi$ и построить ее график.

Решение. Положим $a = 1$. Угол φ может изменяться только в тех пределах, для которых $\sin 3\varphi \geqslant 0$, т. е. при $\varphi \in [0; \pi/3] \cup [2\pi/3; \pi] \cup [4\pi/3; 5\pi/3]$ (для $\varphi \in (\pi/3; 2\pi/3) \cup \cup (\pi; 4\pi/3) \cup (5\pi/3; 2\pi)$ графика не существует).

Составим таблицу значений функции для $\varphi \in [0; \pi/3]$ (табл. 1.3) и построим ее график, который для $\varphi \in [0; \pi/3]$ представляет собой кривую, похожую на «лепесток розы» (рис. 1.81), симметричный относительно луча $\varphi = \pi/6$. В силу периодичности функции $\sin 3\varphi$ для $\varphi \in [2\pi/3; \pi] \cup$

Таблица 1.3

φ	0	$\pi/18$	$\pi/9$	$\pi/6$	$2\pi/9$	$5\pi/18$	$\pi/3$
r	0	0,500	0,866	1	0,866	0,500	0

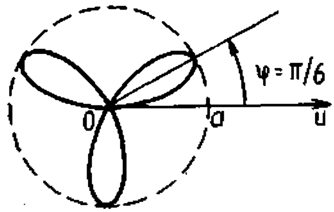


Рис. 1.81

$\cup[4\pi/3;\ 5\pi/3]$ получаем такие же лепестки, симметричные относительно лучей $\varphi = 5\pi/6$ и $\varphi = 3\pi/2$ соответственно. Таким образом, графиком функции является кривая, называемая *трехлепестковой розой* (см. рис. 1.81). Все «лепестки розы» располагаются внутри окружности радиусом a.

Замечания. 1. Графиком функции $r = a\cos 3\varphi$ также является трехлепестковая роза, которая получается из розы $r = a\sin 3\varphi$ поворотом ее на угол $\pi/6$ по ходу часовой стрелки.

2. Кривые, определяемые уравнениями $r = a\sin k\varphi$ или $r = a\cos k\varphi$ $(a > 0,\ k > 0)$, называются *розами*. Так как $r \leqslant a$, то все розы располагаются внутри круга с центром в полюсе и радиусом a. Если $k = 2n - 1$, $n \in \mathbf{N}$, то роза состоит из k лепестков, а если $k = 2n$, $n \in \mathbf{N}$, — из $2k$ лепестков. При этом все лепестки симметричны относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен a.

5. Составить таблицу значений функции $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ $(a > 0)$ и построить ее график.

Решение. Положим $a = 1$. Так как левая часть уравнения неотрицательна, то угол φ может изменяться только в тех пределах, при которых $\cos 2\varphi \geqslant 0$, т. е. для $\varphi \in [-\pi/4;\ \pi/4] \cup [3\pi/4;\ 5\pi/4]$ (для $\varphi \in (\pi/4;\ 3\pi/4) \cup (5\pi/4;\ 2\pi)$ графика не существует). Имеем $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Составим таблицу значений функции для $\varphi \in [0;\ \pi/4]$ (табл. 1.4). Построим ее график для этих значений φ (рис. 1.82). Затем, воспользовавшись периодичностью и четностью функции $\cos 2\varphi$, построим график функции для $\varphi \in [-\pi/4;\ 0] \cup [3\pi/4;\ 5\pi/4]$. В результате получим кривую, которая называется *лемнискатой Бернулли* (см. рис. 1.82). Найдем ее уравнение в декартовой прямоугольной системе координат. Имеем

φ	0	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$
r	1,414	1,314	1,189	1	0

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi = 2a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Применив формулы:

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\ \cos\varphi = x/r = x/\sqrt{x^2+y^2},$$
$$\sin\varphi = y/r = y/\sqrt{x^2+y^2},$$

получим

$$x^2 + y^2 = \frac{2a^2}{x^2+y^2}\,(x^2 - y^2).$$

Тогда искомое уравнение имеет вид

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2).$$

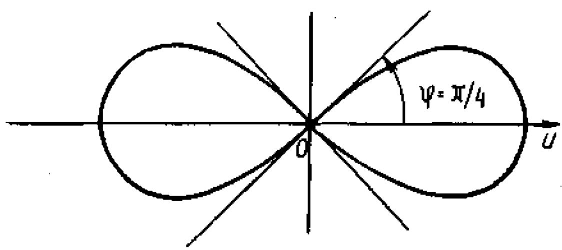


Рис. 1.82

6. Записать уравнение заданной кривой в декартовых прямоугольных координатах и построить эту кривую:

а) $r = \dfrac{9}{5 - 4\cos\varphi}$; б) $r = \dfrac{3}{1-\cos\varphi}$.

Решение. а) Из данного уравнения получим $5r = 9 + 4r\cos\varphi$. Подставив в последнее уравнение $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, имеем $5\sqrt{x^2+y^2} = 9 + 4x$, откуда

$$25(x^2+y^2) = 81 + 72x + 16x^2$$

или

$$9x^2 - 72x + 25y^2 = 81.$$

Выделив полный квадрат при переменной x, приведем последнее уравнение к каноническому виду:

$$9((x-4)^2-16)+25y^2=81,\ 9(x-4)^2+25y^2=225,$$
$$(x-4)^2/25+y^2/9=1.$$

Это уравнение эллипса с центром в точке $O'(4,\ 0)$ и полуосями $a=5$, $b=3$ (рис. 1.83).

б) Преобразуем уравнение к виду $r=3+r\cos\varphi$. Подставив в это уравнение $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=r\cos\varphi$, получим

$$\sqrt{x^2+y^2}=3+x \text{ или } x^2+y^2=9+6x+x^2,$$

откуда $y^2=6(x+1{,}5)$. Это уравнение параболы с вершиной в точке $O'(-1{,}5;\ 0)$ (рис. 1.84).

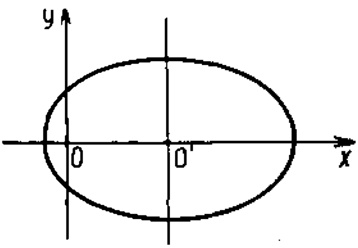


Рис. 1.83

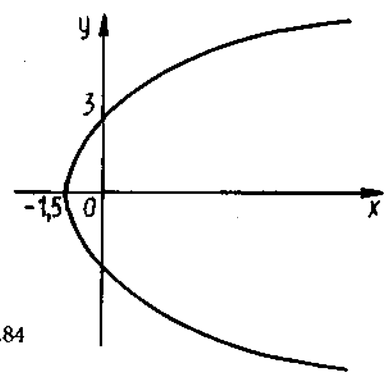


Рис. 1.84

7. Записать уравнение линии в декартовых прямоугольных координатах и построить ее график: а) $r=a$; б) $r\cos\varphi=2$.

Решение. а) Подставив в данное уравнение $r=\sqrt{x^2+y^2}$, получим $x^2+y^2=a^2$. Это уравнение окружности с центром в точке $O(0,\ 0)$ и радиусом a.

б) Подставляя $x=r\cos\varphi$ в данное уравнение линии, получаем $x=2$. Это уравнение прямой, параллельной оси Oy (рис. 1.85).

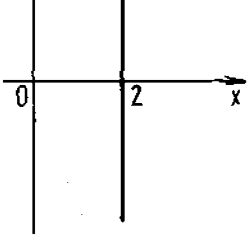


Рис. 1.85

8. Показать, что параметрические уравнения $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ определяют окружность. Записать

ее уравнение в декартовых прямоугольных координатах.

Решение. Так как $x^2 = a^2 \cos^2 t$, $y^2 = a^2 \sin^2 t$, то $x^2 + y^2 = a^2$. Это уравнение окружности с центром в точке $O(0, 0)$ и радиусом a.

Замечание. Легко показать, что уравнения $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ определяют эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

9. Функция задана параметрическими уравнениями $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. Построить график данной функции и записать ее уравнение в декартовых прямоугольных координатах.

Решение. Положим $a = 1$ и составим таблицу значений x и y для $t \in [0; \pi/2]$ (табл. 1.5).

Таблица 1.5

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	1	0,125	$\sqrt{2}/4$	$3\sqrt{3}/8$	0
y	0	$3\sqrt{3}/8$	$\sqrt{2}/4$	0,125	1

Соединив найденные точки плавной линией, получим график для $t \in [0; \pi/2]$ (рис. 1.86). В случае $t \in [\pi/2; 2\pi]$ используем симметричность графика относительно осей координат. Полученная кривая называется *астроидой* (см. рис. 1.86) и является траекторией точки, лежащей

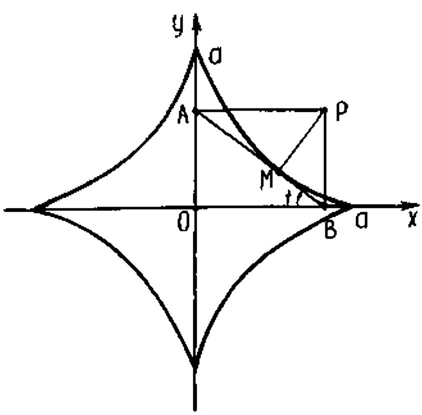


Рис. 1.86

на окружности радиусом $a/4$, которая катится по внутренней стороне неподвижной окружности радиусом a. Характеристическое свойство астроиды состоит в следующем: всякая точка M этой кривой есть основание перпендикуляра PM к отрезку AB постоянной длины a, движущемуся так, что концы его все время находятся на координатных осях.

Найдем уравнение астроиды в декартовых прямоугольных координатах. Так как $x^{2/3}=a^{2/3}\cos^2 t$, $y^{2/3}=a^{2/3}\sin^2 t$, то имеем $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

10. Построить график функции, заданной параметрическими уравнениями $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Решение. Положим $a=1$ и составим таблицу значений x и y для $\varphi\in[0;\ 2\pi]$ (табл. 1.6).

Соединим найденные точки плавной линией. Полученная кривая называется *циклоидой* (рис. 1.87). Приведем

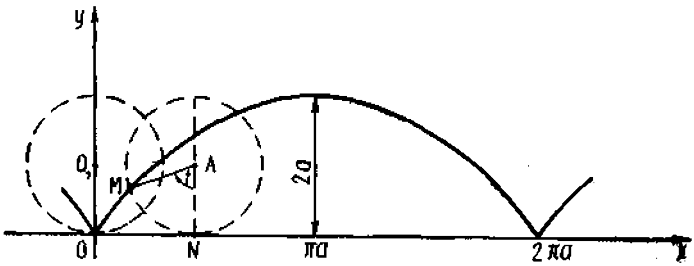


Рис. 1.87

характеристическое свойство циклоиды: эта кривая совпадает с траекторией точки M окружности радиусом a, которая катится без скольжения по оси Ox (в начальный момент точка M находится в начале координат). При $t\in(-\infty;\ +\infty)$ получаем бесконечное множество дуг, называемых *арками* (см. рис. 1.87); каждая дуга соответствует полному обороту катящейся окружности.

Задачи для самостоятельного решения

1.358. Построить кривую, заданную указанным уравнением:

1) $r=a\cos 3\varphi$; 2) $r=a\cos 2\varphi$; 3) $r=2-\cos\varphi$;
4) $r=3-2\sin 2\varphi$; 5) $r=2-\sin 3\varphi$.

Таблица 1.6

t	x	y	t	x	y	t	x	y	t	x	y
0	0	0	$\pi/3$	0,174	0,500	π	3,14	2	$7\pi/4$	6,127	6,280
$\pi/6$	0,020	0,134	$\pi/2$	0,570	1	$5\pi/4$	4,627	1,707	2π	0,293	0
$\pi/4$	0,081	0,293	$3\pi/4$	1,631	1,707	$3\pi/2$	5,610	1			

В задачах 1.359—1.372 линия задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется: 1) построить эту линию по точкам от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, придавая φ значения с шагом $\pi/8$; 2) найти уравнение данной линии в прямоугольной декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс — с полярной осью; 3) по полученному уравнению определить тип этой линии; 4) записать уравнение линии в прямоугольных координатах.

1.359. $r = 6/(1 - \cos\varphi)$. (*Ответ:* $y^2 = 12(x + 3)$ — парабола.)

1.360. $r = 12/(2 - \cos\varphi)$. (*Ответ:* $(x - 4)^2/64 + y^2/48 = 1$ — эллипс.)

1.361. $r = 5/\left(1 - \frac{1}{2}\cos\varphi\right)$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{(x - 10/3)^2}{200/3} + \frac{y^2}{50} = 1 \text{ — эллипс.}\right)$

1.362. $r = 10/\left(1 - \frac{3}{2}\cos\varphi\right)$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{(x + 20)^2}{(8\sqrt{5})^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1 \text{ — гипербола.}\right)$

1.363. $r = \frac{1}{1 + \cos\varphi}$. $\left(\textit{Ответ: } x = \frac{1}{2}(1 - y^2) \text{ — парабола.}\right)$

1.364. $r = \frac{1}{2 + \cos\varphi}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{(x + 1/3)^2}{(2/3)^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{3})^2} = 1 \text{ — эллипс.}\right)$

1.365. $r = \frac{4}{2 - 3\cos\varphi}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{(x + 12/5)^2}{(8/5)^2} - \frac{y^2}{(4/\sqrt{5})^2} = 1 \text{ — гипербола.}\right)$

1.366. $r = 8/(3 - \cos\varphi)$. (*Ответ:* $(x - 1)^2/3^2 + y^2/(2\sqrt{2})^2 = 1$ — эллипс.)

1.367. $r = \frac{1}{3(1 - \cos\varphi)}$. $\left(\textit{Ответ: } 9y^2 = 6\left(x + \frac{1}{6}\right) \text{ — парабола.}\right)$

1.368. $r = \frac{3}{1 + \sin\varphi}$. $\left(\textit{Ответ: } x^2 = -6\left(y - \frac{3}{2}\right) \text{ — парабола.}\right)$

1.369. $r=\dfrac{10}{2+\cos\varphi}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{(x+10/3)^2}{(20/3)^2}+\dfrac{y^2}{(10/\sqrt{3})^2}=\right.$ $\left.=1\text{ — эллипс.}\right)$

1.370. $r=3/(1-2\cos\varphi)$. (*Ответ:* $(x+2)^2/1-y^2/3=$ $=1$ — гипербола.)

1.371. $r=\dfrac{5}{6+3\cos\varphi}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{(x+5/9)^2}{(10/\sqrt{3})^2}+\dfrac{y^2}{(100/(6\sqrt{3}))^2}=\right.$ $\left.=1\text{ — эллипс.}\right)$

1.372. $r=21/(5-2\cos\varphi)$. (*Ответ:* $(x-2)^2/5^2+$ $+y^2/(\sqrt{21})^2=1$ — эллипс.)

В задачах 1.373—1.379 записать уравнение кривой в полярной системе координат.

1.373. $x^2+y^2=16$. (*Ответ:* $r=4$.)

1.374. $x^2+y^2=4x$. (*Ответ:* $r=4\cos\varphi$.)

1.375. $x^2-y^2=9$. (*Ответ:* $r^2\cos 2\varphi=9$.)

1.376. $(x^2+y^2)^2=a^2(4x^2+y^2)$. (*Ответ:* $r^2=a^2(1+$ $+3\cos^2\varphi)$.)

1.377. $(x^2+y^2)^2=a^2(2x^2+3y^2)$. (*Ответ:* $r^2=a^2(2+$ $+\sin^2\varphi)$.)

1.378. $x^2+y^2=by$. (*Ответ:* $r=b\sin\varphi$.)

1.379. $y=x$. (*Ответ:* $\varphi=\pi/4$.)

1.380. Построить линию, заданную уравнением в полярных координатах, записать ее уравнение в декартовых прямоугольных координатах, если:

1) $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cos(\pi/4+\varphi)}$; 2) $r^2\sin 2\varphi=2a^2$.

(*Ответ:* 1) $x-y-1=0$; 2) $xy=a^2$.)

В задачах 1.381—1.390, исключив параметр t из данных параметрических уравнений линии, записать ее уравнение в виде $y=f(x)$ или $F(x,\ y)=0$. Построить данную линию.

1.381. $x=2+5\cos t$, $y=-3+5\sin t$. (*Ответ:* $(x-$ $-2)^2+(y+3)^2=5^2$ — окружность.)

1.382. $x=2e^t$, $y=e^{-t}$. (*Ответ:* $y=2/x$ — гипербола.)

1.383. $x=3t$, $y=6t-t^2$. (*Ответ:* $y=2x-x^2/9$ — парабола.)

1.384. $x=t^2-2t+1$, $y=t-1$. (*Ответ:* $x=y^2$ — парабола.)

1.385. $x=\sin t$, $y=\cos 2t$. (*Ответ:* $y=1-2x^2$ — парабола.)

1.386. $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$. (*Ответ:* $y = (y - x)^2/16 + (y - x)/2$.)

1.387. $x = (t + 1)/t$, $y = (t - 1)/t$. (*Ответ:* $y = 2 - x$ — прямая.)

1.388. $x = -1 + 2t$, $y = 2 - t$. (*Ответ:* $y = (3 - x)/2$ — прямая.)

1.389. $x = 1 + 2 \sec t$, $y = -1 + \operatorname{tg} t$. (*Ответ:* $(x - 1)^2/4 - (y + 1)^2 = 1$ — гипербола.)

1.390. $x = \sec t$, $y = 2 \operatorname{tg} t$. (*Ответ:* $x^2/1 - y^2/4 = 1$ — гипербола.)

2. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1. ФУНКЦИЯ И ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Пусть даны два непустых множества X и Y. Если каждому элементу $x \in X$ по определенному правилу f поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$. Символически функцию можно записать в виде f: $X \to Y$. Если X, $Y \in \mathbf{R}$, то функцию называют *числовой*. Множество X называют *областью определения функции* f и обозначают $D(f)$, а множество Y — *множеством значений функции* f и обозначают $E(f)$.

Аналитический способ задания функции является наиболее распространенным. При этом область определения функции обычно не указывают, понимая под нею то множество значений аргумента x, для которого данная функция имеет смысл (естественная область определения функции).

Пусть функция f: $X \to Y$ такова, что для любых x_1, $x_2 \in X$ из условия $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. В этом случае любому элементу $y \in Y$ может быть поставлен в соответствие единственный элемент $x \in X$, такой, что $f(x) = y$; тем самым определена новая функция f^{-1}: $Y \to X$, называемая *обратной заданной функции* f.

Если φ: $X \to U$, F: $U \to Y$, где X, Y, $U \in \mathbf{R}$, то функция $y = F(\varphi(x))$ называется *сложной функцией*, или *суперпозицией функции* φ *и* F, или *композицией функций* φ *и* F.

Степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические функции называются *основными элементарными функциями*. Все функции, которые можно задать одним аналитическим выражением, составленным из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и композиций, образуют *класс элементарных функций*.

Функция, областью определения которой является множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел, называется *функцией натурального аргумента* или *последовательностью* и обозначается $u_n = f(n)$.

Число a называется *пределом последовательности* $\{u_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что при $n > N(\varepsilon)$ $|u_n - a| < \varepsilon$. Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*, в противном случае — *расходящейся*.

Число a называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon)$, что для любого $x \in D(f)$ из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ (рис. 2.1). Это записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Число a называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to \pm\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M(\varepsilon)$, что из неравенства

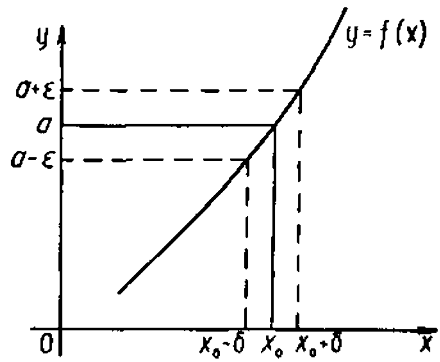


Рис. 2.1

$|x| > M$ следует неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ (рис. 2.2). В данном случае принята следующая запись: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x \to x_0$, если для любого $N > 0$ существует такое число $\delta(N)$, что из неравенства

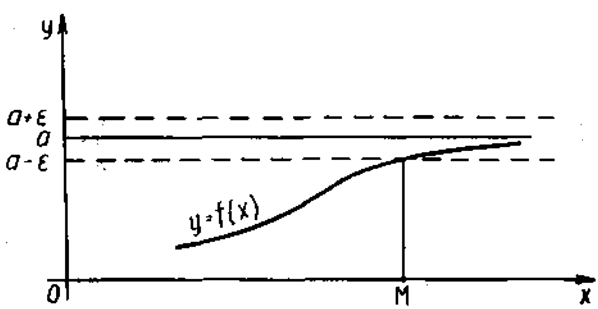


Рис. 2.2

$0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x)| > N$ (рис. 2.3). Это записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty\,(-\infty)$.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x \to \pm\infty$, если для любого $M > 0$ существует такое число $N(M)$, что из неравенства $|x| > M$ следует неравенство $|f(x)| > N$ (рис. 2.4). Это записывают в виде

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty \right).$$

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой при* $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x)| < \varepsilon$. Принята следующая запись: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

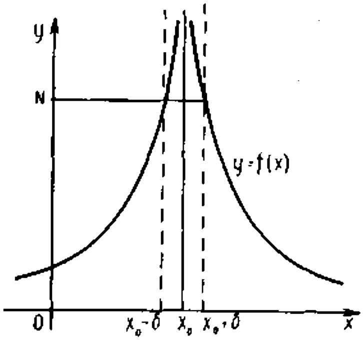


Рис. 2.3

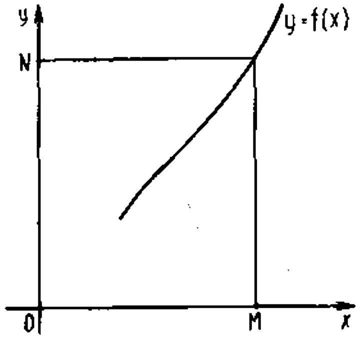


Рис. 2.4

Если $x < x_0$ и $x \to x_0$, то пишут: $x \to x_0 - 0$; аналогично если $x > x_0$ и $x \to x_0$, то это записывают так: $x \to x_0 + 0$.

Числа

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ и } f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

называются соответственно *пределом слева функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и *пределом справа функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если эти пределы существуют. Пределы слева и справа называются *односторонними*. Для существования предела функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы оба односторонних предела в точке x_0 существовали и были равны, т. е. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Практическое вычисление пределов основывается на теоремах о пределах алгебраической суммы, произведения и частного двух функций.

Теорема. *Если существуют* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ $(\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0)$.

Если условия этих теорем не выполнены, то могут возникнуть неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, которые в простейших случаях раскрываются с помощью алгебраических преобразований данного выражения. Кроме того, будем пользоваться тем фактом, что для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0).$$

Укажем следующие простейшие случаи, которые встречаются при вычислении пределов различных выражений ($a > 0$):

1) $\lim\limits_{x\to -0} \frac{a}{x} = -\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to +0} \frac{a}{x} = +\infty$; 3) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{a}{x} = 0$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < a < 1, \\ +\infty, & \text{если } a > 1; \end{cases}$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{если } a > 1, \\ +\infty, & \text{если } 0 < a < 1; \end{cases}$

6) $\lim\limits_{x\to \infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 1, \\ -\infty, & \text{если } 0 < a < 1; \end{cases}$

7) $\lim\limits_{x\to +0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{если } a > 1, \\ +\infty, & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases}$

Примеры

1. Найти область определения функции:

а) $y = \lg(5x - x^2 - 6)$; б) $y = \frac{\sqrt{8 + 2x - x^2}}{\lg(2x - 1)}$.

Решение. а) Имеем: $5x - x^2 - 6 > 0$, $x^2 - 5x + 6 < 0$, откуда $(x-2)(x-3) < 0$. С помощью метода интервалов находим, что $x \in (2; 3)$.

б) Имеем систему

$$\left.\begin{aligned} 8 + 2x - x^2 &\geqslant 0, \\ 2x - 1 &> 0, \\ 2x - 1 &\neq 1, \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} &x^2 - 2x - 8 \leqslant 0, \\ &x > 1/2, \\ &x \neq 1, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} &(x+2)(x-4) \leqslant 0, \\ &x \in (1/2;\ 1) \cup (1;\ +\infty). \end{aligned}\right\}$$

С помощью метода интервалов получаем

$$\left.\begin{aligned} &x \in (-2;\ 4), \\ &x \in (1/2;\ 1) \cup (1;\ +\infty). \end{aligned}\right\}$$

Окончательно имеем $x \in (1/2;\ 1) \cup (1;\ 4]$.

2. Доказать, что выражение $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ стремится к 1 при $n \to \infty$. Начиная с какого n абсолютная величина разности между u_n и 1 не превосходит 10^{-4}?

Решение. При $n \to \infty$ имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть ее, разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на n. Тогда получим

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/n}{1+1/n} = \frac{1}{1} = 1.$$

Подставив в неравенство $|u_n - a| < \varepsilon$ вместо u_n, a и ε их значения, имеем

$$\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < 10^{-4},$$

откуда $\frac{2}{n+1} < 10^{-4}$, т. е. $\frac{n+1}{2} > 10\,000$, $n > 19\,999$.

3. Показать, что $\lim_{x\to 3}(2x-1) = 5$. Найти $\delta(\varepsilon)$, если $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение. Подставив в формулу $y = 2x - 1$ предельное значение аргумента x, имеем

$$\lim_{x\to 3}(2x-1) = 2\cdot 3 - 1 = 5.$$

Затем подставим в неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ данные из условия задачи. Получим $|2x - 6| < 0{,}01$, откуда $|x - 3| < 0{,}005$. Следовательно, $\delta = 0{,}005$.

4. При $x \to \pm\infty$ функция $y = \frac{1}{x^2+1}$ стремится к нулю: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$. Каково должно быть M, чтобы из неравенства $|x| > M$ следовало $|f(x)| < \varepsilon$, если $\varepsilon = 1/10\,001$?

Решение. Подставив в неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ $f(x) = 1/(x^2+1)$, $a = 0$, $\varepsilon = 1/10\,001$, имеем

$$\frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{10\,001},$$

или $x^2 + 1 > 10\,001$. Отсюда получаем $|x| > 100$. Таким образом, $M = 100$.

5. Функция $y = 1/(x-1)^2$ неограниченно возрастает при $x \to 1$. Каково должно быть δ, чтобы из неравенства $|x - 1| < \delta$ следовало неравенство $|f(x)| > 10^4$?

Решение. Так как $1/(x-1)^2 > 10^4$, то $(x-1)^2 < 10^{-4}$. Отсюда $|x - 1| < 0{,}01$, следовательно, $\delta = 0{,}01$.

6. При $x \to +\infty$ функция $y = \lg x$ неограниченно возрастает. Каково должно быть M, чтобы из неравенства $x > M$ следовало неравенство $y > 100$?

Решение. Так как $\lg x > 100$, то $x > 10^{100}$. Следовательно, $M = 10^{100}$.

7. Найти предел:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^3-4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Решение. Непосредственная подстановка в данные выражения предельных значений аргумента приводит во всех случаях к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем исходные выражения, разложив на множители многочлены, входящие в них, а затем вычислим их пределы.

а) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1/2)\cdot 2}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{2x+1}=\frac{3}{3}=1.$$

б) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^3-4x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x(x-2)(x+2)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x(x+2)}=\frac{0}{2\cdot 4}=0.$$

в) Многочлен $x^3-6x^2+11x-6$ при $x=1$ обращается в нуль, следовательно, согласно теореме Безу, делится без остатка на $x-1$. Тогда

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6),$$

и, следовательно, имеем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{(x-1)(x-2)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\frac{1-5+6}{1-2}=-2.$$

8. Вычислить предел, содержащий иррациональность:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{2-\sqrt{x+4}}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

Решение. Непосредственная подстановка в исходные выражения предельных значений аргумента приводит во всех случаях к неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

а) Переведем иррациональность из знаменателя в числитель, умножив числитель и знаменатель на $2 + \sqrt{x+4}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{x+4}} = \lim_{x\to 0}\frac{x(2+\sqrt{x+4})}{(2-\sqrt{x+4})(2+\sqrt{x+4})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(2+\sqrt{x+4})}{4-x-4} = \lim_{x\to 0}(-2-\sqrt{x+4}) = -4.$$

б) Умножив и числитель, и знаменатель исходного выражения на $(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)$, имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)(\sqrt{x+2}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2-4)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x+5-9)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{3}{4}.$$

в) Умножаем и числитель, и знаменатель на такой множитель, чтобы получить в числителе разность кубов, т. е.

$$(\sqrt[3]{1+x})^3 - (\sqrt[3]{1-x})^3 = 1 + x - 1 + x = 2x.$$

Так как $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, то, приняв выражение $(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x})$ за разность оснований, замечаем, что его необходимо умножить на неполный квадрат суммы, т. е. на

$$(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2}).$$

На этот же множитель надо умножить и знаменатель. Тогда имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x})(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \frac{2}{3}.$$

9. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+1}{5x^2+2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$.

Решение. Во всех случаях имеем отношение бесконечно больших величин, т. е. неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{\infty}{-\infty}$, для раскрытия которых необходимо разделить числители и знаменатели данных дробей на старшую степень x.

а) Разделив числитель и знаменатель исходного выражения на x^4, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x+1/x^3}{1-3/x^2+1/x^4}=\frac{0}{1}=0.$$

б) Разделив числитель и знаменатель данного выражения на x^2, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+1}{5x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-1/x+1/x^2}{5+2/x}=\frac{3-0+0}{5+0}=3/5.$$

в) Разделив числитель и знаменатель дроби на x^4, находим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-5/x^3}{1/x^2-3/x^3+1/x^4}=\infty.$$

г) Так как старшая степень x в данном выражении равна x^1, то, разделив его числитель и знаменатель на $x=\sqrt{x^2}=\sqrt[4]{x^4}$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}/\sqrt{x^2}+\sqrt{x}/\sqrt{x^2}}{\sqrt[4]{x^3+x}/\sqrt[4]{x^4}-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+1/x^2}+\sqrt{1/x}}{\sqrt[4]{1/x+1/x^3}-1}=\frac{1+0}{0-1}=-1.$$

10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$, для раскрытия которой приведем выражение в скобках к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2-3}{1-x^3}.$$

Получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которая легко раскрывается путем разложения на множители числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=\frac{-3}{3}=-1.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Доказать, что предел последовательности $x_n=n/(3n-1)$ при $n\to\infty$ равен $1/3$. При каких значениях $n>N$ будет выполнено неравенство $|x_n-1/3|<\varepsilon$? (*Ответ:* $n>1/3+1/(9\varepsilon)$.)

2.2. Доказать, что предел последовательности $x_n=\frac{1-3n^2}{2+6n^2}$ равен $-1/2$. При каких значениях $n>N$ будет выполнено неравенство $|x_n+1/2|<\varepsilon$? $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ n>\sqrt{\frac{1}{3\varepsilon}-\frac{1}{3}}.\right)$

2.3. Пусть $y=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. Показать, что

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=1.$$

Каково должно быть δ, чтобы из неравенства $|x-3|<\delta$ следовало неравенство $|y-1|<\varepsilon$? (*Ответ:* $\varepsilon=\delta$.)

2.4. Пусть $y=\frac{2x^2+13x+21}{2x+7}$. Показать, что

$$\lim_{x\to -7/2}\frac{2x^2+13x+21}{2x+7}=-\frac{1}{2}.$$

Каково должно быть δ, чтобы из неравенства $|x+7/2| < \delta$ следовало неравенство $|y+1/2| < \varepsilon$? (*Ответ*: $\varepsilon = \delta$.)

В задачах 2.5—2.16 найти предел.

2.5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1000x+3x^2}{x^2-16}$. (*Ответ*: 3.)

2.6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5+6x-5x^2}{x^3+x^2+1}$. (*Ответ*: 0.)

2.7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+9}}$. (*Ответ*: ∞.)

2.8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$. (*Ответ*: 72.)

2.9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)^3}{2x^3+3x+1}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \dfrac{1}{2}.\right)$

2.10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-4}{\sqrt[4]{x^4+5}}$. (*Ответ*: 1.)

2.11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^2+x}}{x+1}$. (*Ответ*: 0.)

2.12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{16x^4+1}}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \dfrac{1}{2}.\right)$

2.13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x-1)^2}$. (*Ответ*: 3.)

2.14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x+4}{\sqrt{x^4-5}}$. (*Ответ*: 3.)

2.15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$. (*Ответ*: ∞.)

2.16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. (*Ответ*: 1.)

В задачах 2.17—2.51 вычислить предел отношения бесконечно малых.

2.17. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \dfrac{1}{8}.\right)$

2.18. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-11x+28}{x^2-5x+4}$. (*Ответ*: -1.)

2.19. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2-10x+24}{x^2-7x+6}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \dfrac{2}{5}.\right)$

2.20. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-x-12}{x^2+4x+3}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{7}{2}.\right)$

2.21. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+5x+6}$. $(\textit{Ответ:}\ -6.)$

2.22. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4x}{x^2+4x-12}$. $(\textit{Ответ:}\ 1.)$

2.23. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+x-20}{x^2+5x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{9}{5}.\right)$

2.24. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-4x-21}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\dfrac{1}{5}.\right)$

2.25. $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{x^2+2x-35}{x^2-49}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{6}{7}.\right)$

2.26. $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{x^2+3x-18}{x^2+5x-6}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{9}{7}.\right)$

2.27. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+6x-27}{x^2-2x-3}$. $(\textit{Ответ:}\ 3.)$

2.28. $\lim\limits_{x\to11}\dfrac{x^2-9x-22}{x^2-121}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{13}{22}.\right)$

2.29. $\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$. $(\textit{Ответ:}\ +\infty.)$

2.30. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{5}{2}.\right)$

2.31. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-3x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{1}{12}.\right)$

2.32. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2+2x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\dfrac{1}{8}.\right)$

2.33. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2x+11}-3}{x^2+x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\dfrac{1}{3}.\right)$

2.34. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{1}{12}.\right)$

2.35. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-5x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\dfrac{1}{20}.\right)$

2.36. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x^2+7x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{1}{7}.\right)$

2.37. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\dfrac{1}{3}.\right)$

2.38. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$. (*Ответ:* 12.)

2.39. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+14}-2\sqrt{x+2}}{x^2-4}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\dfrac{3}{32}.\right)$

2.40. $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{\sqrt{x}-3}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{6}{5}.\right)$

2.41. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\dfrac{1}{16}.\right)$

2.42. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-16}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{1}{48}.\right)$

2.43. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{1}{8}.\right)$

2.44. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{3}{2}.\right)$

2.45. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. (*Ответ:* 3.)

2.46. $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\sqrt{x+6}-4}{x^2-10x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{1}{80}.\right)$

2.47. $\lim\limits_{x\to64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$. (*Ответ:* 3.)

2.48. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{1}{24}.\right)$

2.49. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x^2+2x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\dfrac{1}{4}.\right)$

2.50. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x^2+x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\dfrac{1}{2}.\right)$

2.51. $\lim\limits_{x\to2+0}\left(\dfrac{1}{x(x-2)}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$. (*Ответ:* $+\infty$.)

2.2. ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

При вычислениях часто используются следующие два предела:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ *(первый замечательный предел)*;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$ или $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e$ *(второй замечательный предел.)*

Число e — иррациональное. Позднее будет указан метод его вычисления с любой степенью точности. Приведем его значение с пятнадцатью верными знаками после запятой:

$$e\approx 2,718\,281\,828\,459\,045\ \ldots$$

Логарифм числа x по основанию e называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln x$.

При нахождении пределов вида $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}$ необходимо иметь в виду, что если:

1) существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0}((u(x))=a$ $(a>0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to x_0}((u(x))^{v(x)}=a^b$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>1$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=+\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a$ $(0<a<1)$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=0$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>1$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=0$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a$ $(0<a<1)$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=$ $=+\infty$;

6) $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$, то для вычисления пределов вида $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}$ используют второй замечательный предел в виде $\lim\limits_{x\to\infty}(1+$ $+1/x)^x=e$ или $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e$. При этом функцию $u(x)^{v(x)}$ преобразуют так, чтобы можно было применить второй замечательный предел

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}(1+(u(x)-1))^{\frac{1}{u(x)-1}(u(x)-1)v(x)}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}((1+(u(x)-1))^{\frac{1}{u(x)-1}(u(x)-1)v(x)}=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}$$

В последнем случае можно также использовать метод введения новой переменной, при этом полагают $y=u(x)-1$, где $y(x)\to 0$ при $x\to x_0$.

Примеры

1. Найти предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a}{x-a}$; ж) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$;

з) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

Решение. а) В данном случае имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Используя первый замечательный предел, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

б) Так как при $x\to 0$ $3x$ также стремится к нулю, то, умножая и числитель, и знаменатель на 3 и используя первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=1$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

в) Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x\cdot\sin 5x}.$$

Преобразуем числитель и знаменатель последнего выражения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}\,\frac{\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{\sin 5x}{5x}}\,\frac{1}{\cos 2x}=$$

$$=\left|\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1\right|=\frac{2}{5}.$$

г) Полагая $y=\arcsin x$, имеем $x=\sin y$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim_{y\to 0}\frac{2y}{3\sin y}=\frac{2}{3}\lim_{y\to 0}\frac{1}{(\sin y)/y}=\frac{2}{3}.$$

д) Раскрывая неопределенность вида $\frac{0}{0}$ с помощью первого замечательного предела, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)\cdot\sin(x/2)}{(x/2)(x/2)\cdot 2}=$$

$$=\left|\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}=1\right|=\frac{1}{2}.$$

е) Применив формулу $\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a=\dfrac{\sin(a-x)}{\sin x\sin a}$, находим

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin(a-x)}{\sin x\sin a\cdot(x-a)}=\frac{1}{\sin a}\times$$

$$\times\lim_{x\to a}\frac{\sin(a-x)}{-(a-x)\sin x}=\left|\lim_{x\to a}\frac{\sin(a-x)}{a-x}=1\right|=$$

$$=-\frac{1}{\sin a}\,\frac{1}{\sin a}=-\frac{1}{\sin^2 a}.$$

ж) Так как в этом случае имеет место неопределенность вида $0\cdot\infty$, то, преобразовав данное выражение к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и применив первый замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\pi/2-x)\sin x}{\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\pi/2-x)\sin x}{\sin(\pi/2-x)}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x}{\dfrac{\sin(\pi/2-x)}{(\pi/2-x)}}=$$

$$=\left|\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin(\pi/2-x)}{\pi/2-x}=1\right|=\frac{1}{1}=1.$$

з) Произведем замену переменной $x=\pi+y$, $y=\pi-x$. Тогда имеем

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3(\pi+y)}{\sin 2(\pi+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(3\pi+3y)}{\sin(2\pi+2y)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin 3y}{\sin 2y}=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y\cdot 3y}{3y\,\dfrac{\sin 2y}{2y}\cdot 2y}=$$

$$=\left|\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{3y}=1,\ \lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{2y}=1\right|=-\frac{3}{2}.$$

и) Умножая и числитель, и знаменатель исходного выражения на $\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}$, преобразуем его к виду

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x})(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}\times$$

$$\times\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

2. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^x$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{x+1}\right)^{-2x}$

Решение. а) Разделив числитель и знаменатель основания степени на x, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+1/x}{2+1/x}\right)^x.$$

Так как при $x\to\infty$ данная функция представляет собой степень, предел основания которой равен $1/2$, а показатель стремится к бесконечности, то имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+1/x}{2+1/x}\right)^x=0.$$

б) Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-2/x}{1+1/x}\right)^x.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2/x}{1+1/x}=3$, а показатель степени стремится к бесконечности, то получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-2/x}{1+1/x}\right)^x=\infty.$$

в) Преобразуем исходное выражение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{x+1}\right)^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5-3/x}{1+1/x}\right)^{-2x}$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-3/x}{1+1/x}=5$, а показатель степени стремится к $-\infty$, то имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5-3/x}{1+1/x}\right)^{-2x}=0.$$

3. Применяя второй замечательный предел, вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-2x+6}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{1/(2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

Решение. а) *I способ.* В данном случае предел основания степени равен 1 (в этом легко убедиться, разделив числитель и знаменатель на x), а показатель стремится к бесконечности; следовательно, имеем неопределенность вида 1^∞. Преобразуя функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+5}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(x-1)/5}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{(x-1)/5}\right)^{\frac{x-1}{5}}\right)^{\frac{5x}{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{(x-1)/5}\right)^{\frac{x-1}{5}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{x-1}}=$$

$$=\left|\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(x-1)/5}\right)^{\frac{x-1}{5}}=e\right|=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{1-1/x}}=e^5.$$

II способ. Вычислим предел исходного выражения с помощью метода введения новой переменной. Положим $5/(x-1)=1/y$. Тогда $x=5y+1$ и при $x\to\infty$ $y\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-1}\right)^x=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{5y+1}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^5\left(1+\frac{1}{y}\right)\right)=\lim_{y\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^5\times$$

$$\times\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)=\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^5\cdot 1=e^5.$$

б) Делением числителя дроби на знаменатель выделим целую часть в основании степени:

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x+6}=1+\frac{6x-3}{x^2-2x+6}.$$

Так как при $x \to \infty$ исходное выражение представляет собой неопределенность вида 1^∞, то, используя второй замечательный предел, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x+6}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6x-3}{x^2-2x+6}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6x-3}{x^2-2x+6}\right)^{\frac{x^2-2x+6}{6x-3}}\right)^{\frac{x(6x-3)}{x^2-2x+6}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6x-3}{x^2-2x+6}\right)^{\frac{x^2-2x+6}{6x-3}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6-3/x}{1-2/x+6/x^2}} = e^6.$$

в) При $x \to \infty$ данная функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель — к бесконечности. Тогда, используя второй замечательный предел, получаем

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2x}} =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}\,\operatorname{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,\sqrt{x}}} =$$

$$= \left|\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1\right| = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

г) Исходное выражение при $x \to 0$ представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя второй замечательный предел, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x) = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x} =$$

$$= \log_a(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}) = |\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e| = \log_a e.$$

(Здесь мы воспользовались тем, что для логарифмической функции в любой точке ее области определения имеет место равенство $\lim\limits_{x\to x_0}\log_a x = \log_a x_0$.)

Если $a = e$, то имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

д) При $x \to 0$ имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Положим $a^x - 1 = y$, откуда $a^x = 1 + y$, $x = \log_a(1+y)$. Так как при $x \to 0$ $y \to 0$ то имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+y)}{y}}=$$

$$=\left|\lim_{y\to 0}\log_a\frac{(1+y)}{y}=\log_a e\right|=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

Если $a=e$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1$.

Замечание. В дальнейшем при решении примеров полезно иметь в виду следующие равенства, полученные при решении примера 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

4. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение. а) При $x\to 0$ исходное выражение представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразовав исходное выражение, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}(e^{ax-bx}-1)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}(e^{x(a-b)}-1)(a-b)}{x(a-b)}=(a-b)\lim_{x\to 0}\frac{e^{x(a-b)}-1}{x(a-b)}=$$

$$=\left|\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\right|=(a-b)\cdot 1=a-b.$$

б) Умножая на k числитель и знаменатель данного выражения, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{k\ln(1+kx)}{kx}=k\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{kx}=k\cdot 1=k.$$

в) Данное выражение представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Выполнив простейшие преобразования, получаем

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=$$

$$= \lim_{x\to e} \frac{\ln\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}{\frac{x-e}{e}e} = \frac{1}{e}\lim_{x\to e} \frac{\ln\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}{\frac{x-e}{e}} =$$

$$= \left| \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \right| = \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e}.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 2.52—2.69, используя первый замечательный предел, вычислить данный предел.

2.52. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{\sin^2 7x}$. $\left(Ответ: \frac{9}{98}.\right)$

2.53. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$. $\left(Ответ: \frac{\alpha^2-\beta^2}{2}.\right)$

2.54. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$. $\left(Ответ: \frac{1}{\sqrt{2}}.\right)$

2.55. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 2x}{16x^2}$. $\left(Ответ: \frac{3}{8}.\right)$

2.56. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$. $\left(Ответ: \frac{2}{\pi}.\right)$

2.57. $\lim\limits_{\alpha\to \beta} \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$. $\left(Ответ: \frac{\sin 2\beta}{2\beta}.\right)$

2.58. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$. $\left(Ответ: \frac{1}{4}.\right)$

2.59. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$. $\left(Ответ: \frac{9}{98}.\right)$

2.60. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a}$. (*Ответ*: $-\sin a$.)

2.61. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \frac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$. $\left(Ответ: \frac{1}{8}.\right)$

2.62. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$. (*Ответ*: π.)

2.63. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{x^2-\pi^2}{\sin 2x}$. (*Ответ*: π.)

2.64. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$. (*Ответ*: $\cos^3 a$.)

2.65. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2}$. $\left(Ответ: \frac{1}{2}.\right)$

2.66. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-x^2/\pi^2}$. $\left(\textit{Ответ}: \dfrac{\pi}{2}.\right)$

2.67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{\sec x-1}$. (*Ответ*: 4.)

2.68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$. (*Ответ*: 3.)

2.69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$. (*Ответ*: 1.)

В задачах 2.70—2.85, применяя второй замечательный предел, вычислить данный предел.

2.70. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^x$. (*Ответ*: e^3.)

2.71. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x}$. (*Ответ*: e^2.)

2.72. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$. (*Ответ*: e^6.)

2.73. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+3x}{3x}\right)^{x-2}$. (*Ответ*: $e^{2/3}$.)

2.74. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{x^2-6}$. (*Ответ*: e^4.)

2.75. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)/2}$. (*Ответ*: e.)

2.76. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+4}$. (*Ответ*: e.)

2.77. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-7}\right)^{x-3}$. (*Ответ*: e^9.)

2.78. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{3+x}\right)^x$. (*Ответ*: e^{-1}.)

2.79. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-1}\right)^{3x^2-5}$. (*Ответ*: e^{15}.)

2.80. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{3x}$. (*Ответ*: e^3.)

2.81. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$. (*Ответ*: 1.)

2.82. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-5}\right)^x$. (*Ответ*: e^4.)

2.83. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$. (*Ответ*: e^4.)

2.84. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+7}{x^2-1}\right)^{x+1}$. (*Ответ*: 1.)

2.85. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x^2-4x+2}\right)^x$. (*Ответ*: e^2.)

В задачах 2.86—2.96 найти предел, используя следующие равенства:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

2.86. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{2x}$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{1}{2}(\ln a+\ln b).\right)$

2.87. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin x}$. (*Ответ*: 1.)

2.88. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{-x}}{\sin 3x}$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{2}{3}\ln a.\right)$

2.89. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{\sin \pi(x+4)}$. $\left(\textit{Ответ}: -\frac{2}{\pi}.\right)$

2.90. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{5^x-1}$. (*Ответ*: $4/\ln 5$.)

2.91. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3^x-3}{\ln x}$. (*Ответ*: $3\ln 3$.)

2.92. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt{x^3})}{e^{x^2}-1}$. (*Ответ*: ∞.)

2.93. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{3}{2}.\right)$

2.94. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{2x}}{x}$. (*Ответ*: 5.)

2.95. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\log_4(x-2)}{2^x-8}$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{1}{16\ln^2 2}.\right)$

2.96. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\ln x}$. (*Ответ*: e.)

2.3. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *сравнимыми*, если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ или $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — сравнимые бесконечно малые при $x\to x_0$ и пусть, для определенности, существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$ Тогда:

1) если $c \neq 0$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *бесконечно малыми одного порядка*. Если же $c = 1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными* и пишут: $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

2) если $c = 0$, то $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой более высокого порядка, чем* $\beta(x)$, и пишут: $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

3) если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$. Таким образом, $\beta(x)$ является *бесконечно малой высшего порядка по сравнению с* $\alpha(x)$, т. е. $\beta(x) = o(\alpha(x))$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c$, где $c \neq 0$, $c \neq \infty$, то $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой порядка* k *относительно* $\beta(x)$.

Отметим следующие *свойства бесконечно малых:*

1) произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с сомножителями, т. е. если $\alpha(x)\beta(x) = \gamma(x)$, то $\gamma(x) = o(\alpha(x))$ и $\gamma(x) = o(\beta(x))$;

2) бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность $\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, т. е. $\gamma(x) = o(\alpha(x))$, $\gamma(x) = o(\beta(x))$;

3) если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой, т. е. если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$, $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = c$.

Приведем *примеры эквивалентных бесконечно малых при* $x \to 0$:

$$\left.\begin{array}{r} \sin x \sim x, \ \arcsin x \sim x, \ \operatorname{arctg} x \sim x, \\ \ln(1 + x) \sim x, \ e^x - 1 \sim x. \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

Подобно тому, как это сделано выше для бесконечно малых, вводится понятие *сравнимых бесконечно больших* и их классификация.

Примеры

1. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x) = x^2 \sin^2 x$ и $\beta(x) = x \operatorname{tg} x$ при $x \to 0$.

Решение. Так как предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если эти бесконечно малые заменить равносильными им величинами, то имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x \operatorname{tg} x} = \left| \begin{array}{l} \sin x \sim x \\ \operatorname{tg} x \sim x \end{array} \text{ при } x \to 0 \right| =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

2. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ и $\beta(x) = 1 - \sqrt{x}$ при $x \to 1$.

Решение. Находим

$$\lim_{x\to 1}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(1+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\lim_{x\to 1}\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2}{3}.$$

Отсюда следует, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости.

3. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)=1-\cos x$ и $\beta(x)=\dfrac{x^3}{3-x}$ при $x\to 0$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(3-x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}(3-x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3}=$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^3}=3\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x/2)\cdot\sin(x/2)}{x^3}=$$

$$=\left|\sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}\ \text{при}\ x\to 0\right|=3\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot x^2/4}{x^3}=\infty.$$

Отсюда следует, что $\beta(x)=o(\alpha(x))$.

4. Определить порядок малости бесконечно малой $\alpha(x)=x^3+1000x^2$ относительно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Решение. Вычисляем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+1000x^2}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+1000)}{x^k}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(x+1000)\cdot\lim_{x\to 0}x^{2-k}=1000\lim_{x\to 0}x^{2-k}=1000,$$

если $k=2$. Следовательно, $\alpha(x)$ является бесконечно малой порядка $k=2$ по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)$ при $x\to 0$.

5. Определить порядок малости бесконечно малой $\alpha(x)=\ln(1+\sqrt{x\sin x})$ относительно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Решение. Найдем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt{x\sin x})}{x^k}=|\sin x\sim x\ \text{при}\ x\to 0|=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^k} = |\ln(1+x) \sim x \text{ при } x\to 0| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^k} = \lim_{x\to 0} x^{1-k} = 1,$$

если $k=1$. Отсюда следует, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны при $x\to 0$.

6. Определить порядок малости бесконечно малой $\alpha(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$ относительно $\beta(x) = x$ при $x\to 0$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x^k} = |e^{\sqrt{x}} - 1 \sim \sqrt{x} \text{ при } x\to 0| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x^k} = \lim_{x\to 0} x^{1/2-k} = 1,$$

если $k=1/2$. Следовательно, $\alpha(x)$ является бесконечно малой порядка $k=1/2$ по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)$ при $x\to 0$.

7. Определить порядок малости $\alpha(x) = \ln(1+x^3) - 2\sqrt[4]{(e^x-1)^3}$ относительно $\beta(x) = x$ при $x\to 0$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta^{k(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3) - 2\sqrt[4]{(e^x-1)^3}}{x^k} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \ln(1+x^3) \sim x^3, \\ e^x - 1 \sim x \end{matrix} \text{ при } x\to 0 \right| = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 2\sqrt[4]{x^3}}{x^k} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{4/3}(x^{5/3}-2)}{x^k} = \lim_{x\to 0}(x^{5/3}-2)\cdot \lim_{x\to 0} x^{4/3-k} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0} x^{4/3-k} = -2,$$

если $k=4/3$. Отсюда следует, что $\alpha(x)$ является бесконечно малой порядка $k=4/3$ по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)$ при $x\to 0$.

8. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{2\sin^2 x + x \operatorname{tg} 7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{\arcsin 3x \cdot \sin x/2}$.

Решение. а) Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, для раскрытия которой воспользуемся свойствами бесконечно малых величин и соотношениями (2.1). Находим

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{2\sin^2 x + x \operatorname{tg} 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 2x}{2\sin^2 x + x\operatorname{tg} 7x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sin 2x \sim 2x, \\ \operatorname{tg} 7x \sim 7x, \text{ при } x \to 0 \\ \sin x \sim x \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot(2x)^2}{2x^2 + x\cdot 7x} = \frac{8}{9}.$$

б) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{\arcsin 3x \cdot \sin x/2} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x^2 \sim x^2, \\ \arcsin 3x \sim 3x, \text{ при } x \to 0 \\ \sin(x/2) \sim x/2 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x\cdot(x/2)} = \frac{2}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 2.97—2.103 сравнить бесконечно малые.

2.97. $\alpha(x) = \dfrac{3x^4 - 4}{x+1}$, $\beta(x) = x^3$ при $x \to 0$. (*Ответ*: $\beta(x)$— высшего порядка малости.)

2.98. $\alpha(x) = e^{2x} - e^x$, $\beta(x) = \sin^2 x$ при $x \to 0$. (*Ответ*: $\beta(x)$ — высшего порядка малости.)

2.99. $\alpha(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, $\beta(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ при $x \to 1$. (*Ответ*: $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — эквивалентные бесконечно малые.)

2.100. $\alpha(x) = 1 - \cos 2x$, $\beta(x) = x^3/2$ при $x \to 0$. (*Ответ*: $\beta(x)$ — высшего порядка малости.)

2.101. $\alpha(x) = \dfrac{x}{1-x}$, $\beta(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ при $x \to 0$. (*Ответ*: $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — эквивалентные бесконечно малые.)

2.102. $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^4 + 2x^3}$, $\beta(x) = \ln(1 + 3x)$ при $x \to 0$. (*Ответ*: $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — эквивалентные бесконечно малые.)

2.103. $\alpha(x) = \sqrt{\sin^2 x + x^3}$, $\beta(x) = e^{x^2} - 1$ при $x \to 0$. (*Ответ*: $\beta(x)$ — высшего порядка малости.)

В задачах 2.104—2.115 определить порядок малости $\alpha(x)$ относительно x при $x \to 0$.

2.104. $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt[4]{x^5})$. (*Ответ*: $k = 5/4$.)

2.105. $\alpha(x) = \sin(\sqrt{1+x} - 1)$. (*Ответ*: $k = 1$.)

2.106. $\alpha(x) = e^{\sin x^3} - 1$. (*Ответ*: $k = 3$.)

2.107. $\alpha(x) = \sqrt[3]{(e^{2x} - 1)^2}$. (*Ответ*: $k = 2/3$.)

2.108. $\alpha(x) = 1 - \cos^3 2x$. (*Ответ*: $k = 2$.)

2.109. $\alpha(x) = \dfrac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}$ (*Ответ*: $k = 1$.)

2.110. $\alpha(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x^3} - \sqrt[3]{x}}{1+2x}$. (*Ответ*: $k = 1/3$.)

2.111. $\alpha(x)=\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{tg}\,\pi x/2$. (*Ответ*: $k=1$.)
2.112. $\alpha(x)=\ln^2(1+2x)$. (*Ответ*: $k=2$.)
2.113. $\alpha(x)=3\sin^2 x-x^4$. (*Ответ*: $k=2$.)
2.114. $\alpha(x)=\ln(1+\sqrt{x\sin x^6})$. (*Ответ*: $k=7/2$.)
2.115. $\alpha(x)=\ln(1+2x)+\sqrt[3]{e^{x^2}-1}$. (*Ответ*: $k=2/3$.)

2.4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на множестве X, состоящем из одного или нескольких промежутков.

I. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если:

1) $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;
2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0;
3) этот предел совпадает со значением функции в точке x_0, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

На практике часто используют другое определение непрерывности функции в точке.

II. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если выполняются условия:

1) $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;
2) существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0) \text{ и } \lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0);$$

3) эти пределы равны между собой и равны значению функции в точке x_0.

Существует и эквивалентное данному определение непрерывности функции $y=f(x)$ в точке x_0.

III Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в этой точке и ее окрестности и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0.$$

Точка $x=x_0$ называется *точкой разрыва*, если нарушено хотя бы одно из четырех усиливающихся требований:

1) односторонние пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ существуют;
2) $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ конечны;
3) $f(x_0-0)=f(x_0+0)$;
4) $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

Если нарушены условия 1, 2 определения, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода*, а если нарушены условия 3, 4 — *точкой разрыва первого рода*. При нарушении условия 1 точка x_0 называется *точкой неопределенности*, при нарушении условия 2 — *точкой бесконечного скачка*, при нарушении условия 3 — *точкой конечного скачка*, а при нарушении условия 4 — *точкой устранимого разрыва*.

Часто приходится рассматривать непрерывность функции в точке x_0 справа или слева (т. е. одностороннюю непрерывность). Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0. Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$, то говорят, что функция $y=f(x)$ *непрерывна в точке x_0 справа*; если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$, то функция называется *непрерывной в точке x_0 слева*.

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна во внутренних точках отрезка, непрерывна справа на левом конце интервала и непрерывна слева на правом конце интервала.

Укажем *основные свойства непрерывных функций*.

1. Простейшие элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то и функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ непрерывны в точке x_0. Если, кроме того, $g(x_0)\neq 0$, то функция $f(x)/g(x)$ также непрерывна в точке x_0.

3. Суперпозиция непрерывных функций есть функция непрерывная: если $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

4. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и возрастает (или убывает) на этом отрезке, то обратная функция $x=f^{-1}(y)$ на соответствующем отрезке оси Oy существует и является также непрерывной возрастающей (убывающей) функцией.

Примеры

1. Доказать, что функция $y=4x^2+3x-5$ будет всюду непрерывной.

Решение. Областью определения данной функции является вся числовая ось.

Придадим аргументу x приращение Δx и найдем Δy:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=4(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)-5-$$
$$-(4x^2+3x-5)=4x^2+8x\Delta x+4(\Delta x)^2+3x+3\Delta x-5-$$
$$-4x^2-3x+5=4(\Delta x)^2+8x\Delta x+3\Delta x.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(4(\Delta x)^2+8x\Delta x+3\Delta x)=0.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ при любом значении x, то, согласно определению непрерывности, функция будет непрерывна при любом значении x, т. е. во всей своей области определения.

2. Функция $y=\dfrac{1+x^3}{1+x}$ не определена при $x=-1$. Каким должно быть значение $f(-1)$, чтобы доопределенная им функция стала непрерывной?

Решение. Функция не определена в точке $x=-1$. Вычисляем:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{1+x^3}{1+x} = \lim_{x\to -1-0} \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} =$$
$$= \lim_{x\to -1-0} (1-x+x^2) = 3,$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} =$$
$$= \lim_{x\to -1+0} (1-x+x^2) = 3.$$

Так как $f(-1-0) = f(-1+0)$, а при $x = -1$ $f(x)$ не определена, то $x = -1$ является точкой разрыва первого рода (устранимый разрыв).

В чем различие графиков функций $y = (1+x^3)/(1+x)$ и $y = 1 - x + x^2$? График функции $y = 1 - x + x^2$ представляет собой параболу (рис. 2.5) с вершиной в точке $A(1/2, 3/4)$. Точка $(-1, 3)$ не принадлежит графику функции $y = (1+x^3)/(1+x)$; следовательно, он представляет собой параболу (рис. 2.6), на которой «выколота» точка $B(-1, 3)$.

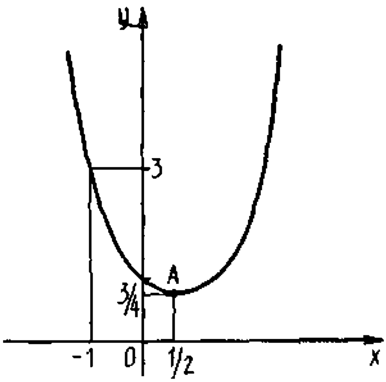


Рис 2.5

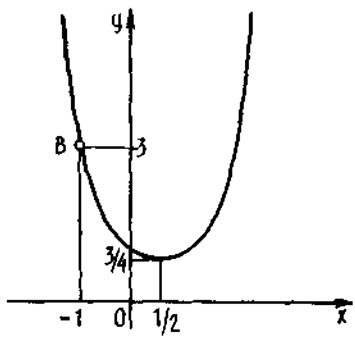


Рис 2.6

Положив

$$f(x) = \begin{cases} (1+x^3)/(1+x), & \text{если } x \neq -1, \\ 3, & \text{если } x = -1, \end{cases}$$

разрыв можно устранить, и функция становится непрерывной, так как выполняются равенства $f(-1+0) = f(-1-0) = f(-1)$.

3. Найти точки разрыва функции $f(x) = |x-3|/(x-3)$, определить их характер и построить схематичный график функции.

Решение. Точка $x=3$ — точка разрыва, так как функция определена в любой ее окрестности, за исключением самой этой точки.

Поскольку

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, & \text{если } x\geqslant 3, \\ -(x-3), & \text{если } x<3, \end{cases}$$

то

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\frac{|x-3|}{x-3}=\lim_{x\to 3-0}\frac{-(x-3)}{x-3}=-1,$$

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}\frac{|x-3|}{x-3}=\lim_{x\to 3+0}\frac{x-3}{x-3}=1.$$

Таким образом, в точке $x=3$ функция имеет конечный скачок, и эта точка является точкой разрыва первого рода (рис. 2.7).

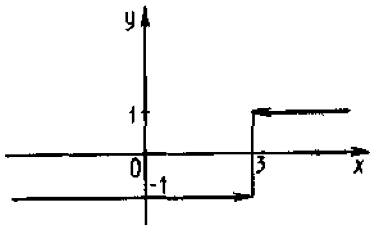


Рис. 2.7

4. Определить точки разрыва функции $f(x)=3^{1/x}$ и их характер. Построить схематичный график функции.

Решение. Функция $f(x)$ определена на всем множестве $\mathbf{R}$, за исключением точки $x=0$. Следовательно, точка $x=0$ является точкой разрыва данной функции. Выясним характер точки разрыва, для чего найдем односторонние пределы в этой точке.

Так как $\lim\limits_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty$, то

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0} 3^{1/x}=0.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to +0}\frac{1}{x}=+\infty$, то

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0} 3^{1/x}=+\infty.$$

Следовательно, в точке $x=0$ данная функция имеет точку разрыва второго рода (бесконечный скачок). Для схематичного построения графика функции $y = 3^{1/x}$ найдем $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$. Так как $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, то

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} 3^{1/x} = 3^0 = 1.$$

Схематичный график функции изображен на рис. 2.8.

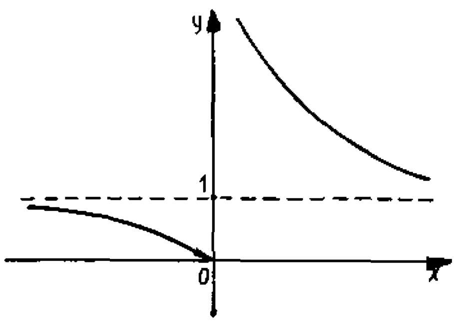


Рис 2.8

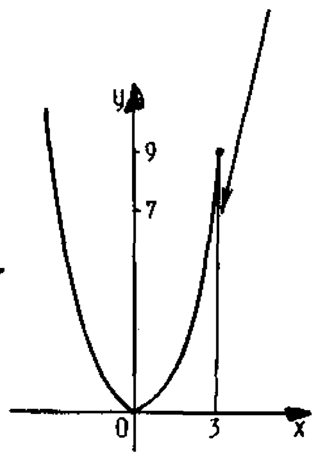


Рис. 2.9

5. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant 3, \\ 2x + 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Является ли она непрерывной? Если нет, определить точки ее разрыва и их характер.

Решение. Данная функция непрерывна для $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$, так как на каждом из этих интервалов формулы, задающие функцию, определяют элементарные непрерывные функции. Точкой разрыва может быть лишь точка $x = 3$, в которой меняется аналитическое выражение функции $f(x)$. Найдем односторонние пределы:

$$f(3-0) = \lim_{x \to 3-0} x^2 = 9, \quad f(3+0) = \lim_{x \to 3+0} (2x + 1) = 7.$$

Так как $f(3-0)$, $f(3+0)$ конечны и $f(3-0) \neq f(3+0)$, то в точке $x = 3$ исходная функция имеет точку разрыва первого рода (конечный скачок) (рис. 2.9).

6. Определить точки разрыва функции $y = 1/\lg|x|$, их характер и построить ее схематичный график.

Решение. Точка $x=0$ — точка разрыва, так как функция не определена при $x=0$. Так как $\lg|x|=0$ при $x=\pm 1$, то точки $x=1$, $x=-1$ также являются точками разрыва. Исследуем каждую из этих точек. При $x \to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{\lg|x|}=0, \quad \lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{1}{\lg|x|}=0.$$

Таким образом, $f(+0)=f(-0)=0$, т. е. x — точка разрыва первого рода (устранимый разрыв).

Найдем односторонние пределы при $x\to 1$. Так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\lg|x|=-0$, то

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{\lg|x|}=-\infty.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 1+0}\lg|x|=+0$, то

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{\lg|x|}=+\infty.$$

Следовательно, в точке $x=1$ функция имеет разрыв второго рода (бесконечный скачок). Данная функция четная, поэтому при $x=-1$ также имеем бесконечный скачок.

Разрыв в точке $x=0$ можно устранить, доопределив функцию следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 1/\lg|x|, & \text{если } x\neq 0, \\ 0, & \text{если } x=0. \end{cases}$$

Для построения графика функции находим

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\lg|x|}=0.$$

На рис. 2.10 изображен схематичный график данной функции.

7. Найти точки разрыва функции $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, определить их характер и построить схематичный график данной функции.

Решение. Функция не определена при $x=0$, т. е. $x=0$ — точка разрыва.

Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции при $x\to 0$:

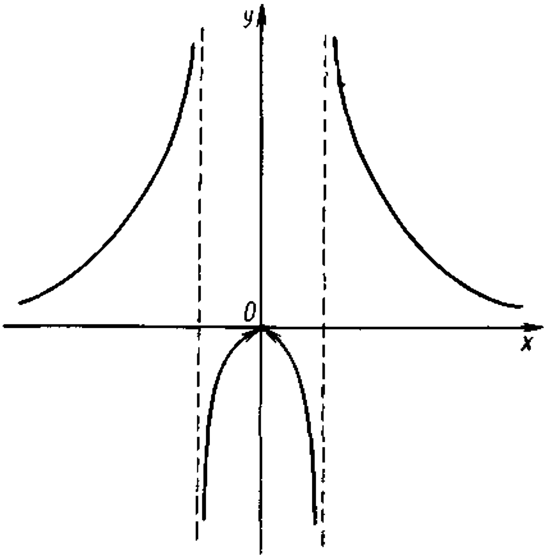


Рис 2.10

$$\lim_{x\to+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg}(+\infty)=\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, при $x=0$ функция имеет разрыв первого рода (конечный скачок) (рис. 2.11). Найдем величину скачка h:

$$h=\lim_{x\to+0}f(x)-\lim_{x\to-0}f(x)=f(+0)-f(-0)=$$
$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

Для построения схематичного графика найдем:

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg}(+0)=0,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg}(-0)=0.$$

Схематичный график данной функции изображен на рис. 2.11.

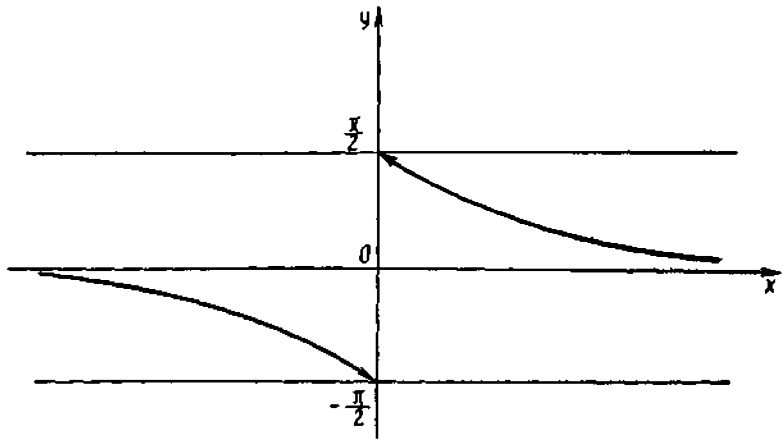


Рис. 2.11

8. Какого рода разрывы имеют функции $y=\sin x/x$ и $y=\cos x/x$ при $x=0$? Исследовать характер графиков этих функций в окрестности точки $x=0$.

Решение. Функция $f(x)=\sin x/x$ не определена при $x=0$, следовательно, $x=0$ — точка разрыва. Так как

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1,\ f(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=1$$

и точка $x=0$ не принадлежит области определения функции, то при $x=0$ функция имеет точку разрыва первого рода (устранимый разрыв). Учитывая четность функции и то, что амплитуда колебаний падает по мере удаления от точки $O(0,\ 0)$, строим схематичный график данной функции (рис. 2.12).

Если функцию $y=\frac{\sin x}{x}$ доопределить в точке $x=0$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 1, & \text{если } x=0,\end{cases}$$

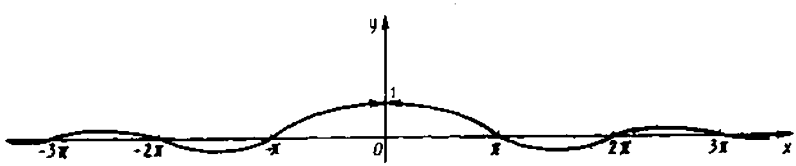


Рис. 2.12

то $f(x)$ будет непрерывной в точке $x=0$ для всех $x \in \mathbf{R}$.

Рассмотрим функцию $y=\frac{\cos x}{x}$. Здесь также $x=0$ — точка разрыва. Исследуем характер разрыва, для чего найдем левосторонний и правосторонний пределы этой функции:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\cos x}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{\cos x}{x}=-\infty.$$

Следовательно, при $x=0$ имеем точку разрыва второго рода (бесконечный скачок). Учитывая нечетность данной функции и то, что амплитуда колебаний уменьшается по мере удаления от точки $O(0, 0)$, строим схематичный график данной функции (рис. 2.13).

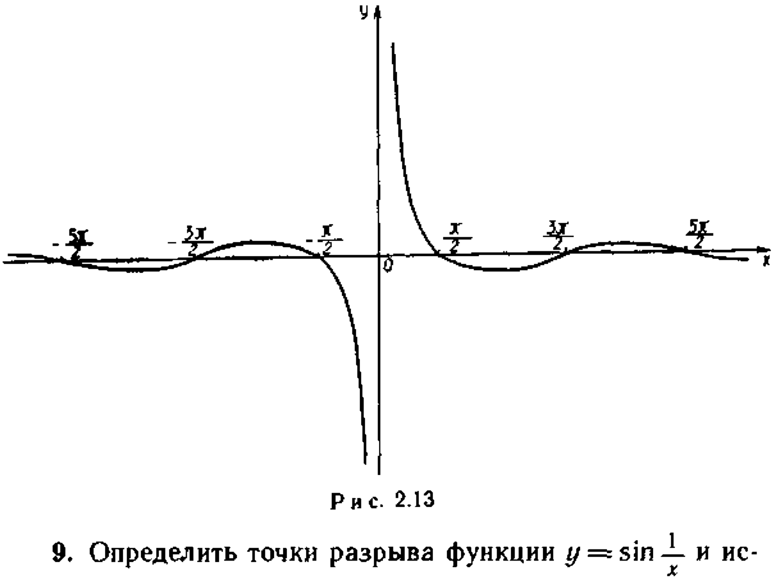


Рис. 2.13

9. Определить точки разрыва функции $y=\sin\frac{1}{x}$ и исследовать их характер.

Решение. Очевидно, что $x=0$ — точка разрыва. Пусть $x\in(-2/\pi;\ 0)\cup(0;\ 2/\pi)$. Функция нечетная, так как $f(-x)=-f(x)$.

Рассмотрим последовательность убывающих до 0 значений x: $\left\{\frac{2}{n\pi}\right\}$, $n\in\mathbf{N}$, или

$$\frac{2}{\pi},\ \frac{1}{\pi},\ \frac{2}{3\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{2}{5\pi},\ \frac{1}{3\pi},\ \frac{2}{7\pi},\ \ldots,$$

$$\frac{2}{(2n-1)\pi}, \ \frac{1}{n\pi}, \ \frac{2}{(2n+1)\pi}, \ \ldots$$

Им отвечают возрастающие до $+\infty$ значения $1/x$, составляющие последовательность $\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$, $n \in \mathbf{N}$:

$$\frac{\pi}{2}, \ \pi, \ \frac{3\pi}{2}, \ 2\pi, \ \frac{5\pi}{2}, \ 3\pi, \ \frac{7\pi}{2}, \ \ldots, \ \frac{(2n-1)\pi}{2}, \ n\pi, \ \frac{(2n+1)\pi}{2}, \ldots$$

В промежутках между указанными значениями (при убывании x) функция $y = \sin\frac{1}{x}$ попеременно убывает от 1 до 0 и от 0 до -1, затем возрастает от -1 до 0 и от 0 до 1 и т. д.

Таким образом, функция $y = \sin\frac{1}{x}$ совершает бесконечное множество колебаний подобно функции $y = \sin x$, но в то время, как для функции $y = \sin x$ эти колебания распределяются на бесконечном промежутке, здесь все они умещаются в конечном промежутке, сгущаясь к нулю (рис. 2.14). График изображен не полностью (бесконечное число колебаний воспроизвести невозможно).

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\pm 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует, и в точке $x=0$ функция имеет разрыв второго рода (точка неопределенности).

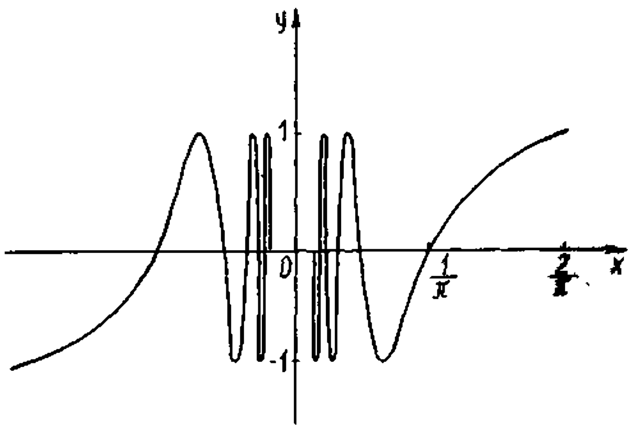


Рис 2.14

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 2.116—2.136 определить точки разрыва функции, их характер и построить схематичный график функции.

2.116. $y=\begin{cases} x+2, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x^2+1, & \text{если } -1 < x \leqslant 1, \\ 3-x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

(*Ответ*: $x=-1$ — точка разрыва первого рода.)

2.117. $y=1/|x-2|$. (*Ответ*: $x=2$ — точка разрыва второго рода.)

2.118. $y=e^{1/(x+1)}$. (*Ответ*: $x=-1$ — точка разрыва второго рода.)

2.119. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3}$. (*Ответ*: $x=3$ — точка разрыва первого рода.)

2.120. $y=3^{1/(1-x)}$. (*Ответ*: $x=1$ — точка разрыва второго рода.)

2.121. $y=2^{1/x^2}$. (*Ответ*: $x=0$ — точка разрыва второго рода.)

2.122. $y=\dfrac{1}{2+3^{1/(x-2)}}$. (*Ответ*: $x=2$ — точка разрыва первого рода.)

2.123. $y=\begin{cases} x^2-1, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x+2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

(*Ответ*: $x=0$ — точка разрыва первого рода.)

2.124. $y=\begin{cases} -x, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leqslant 2, \\ x+1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

(*Ответ*: $x=2$ — точка разрыва первого рода.)

2.125. $y=\begin{cases} e^x, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 1-x, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 1/(x-1), & \text{если } x > 1. \end{cases}$

(*Ответ*: $x=1$ — точка разрыва второго рода.)

2.126. $y=4/(x-3)^2$. (*Ответ*: $x=3$ — точка разрыва второго рода.)

2.127. $y=2-|x|/x$. (*Ответ*: $x=0$ — точка разрыва первого рода.)

2.128. $y=\begin{cases} -x, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 < x \leqslant \pi, \\ x-2, & \text{если } x > \pi. \end{cases}$

(*Ответ*: $x=\pi$ — точка разрыва первого рода.)

2.129. $y=|\lg|x-1||$. (*Ответ*: $x=1$ — точка разрыва второго рода.)

2.130. $y=\begin{cases} 0, & \text{если } x<0, \\ x, & \text{если } 0\leqslant x<1, \\ -x^2+4x-2, & \text{если } 1\leqslant x<3, \\ 4-x, & \text{если } x\geqslant 3. \end{cases}$

(*Ответ*: точек разрыва нет.)

2.131. $y=\dfrac{3^{1/x}-1}{3^{1/x}+1}$. (*Ответ*: $x=0$ — точка разрыва первого рода.)

2.132. $y=1/(x^2-9)$. (*Ответ*: $x=\pm 3$ — точки разрыва второго рода.)

2.133. $y=\begin{cases} 2-x, & \text{если } x>0, \\ 2^{1/(x+1)}, & \text{еслн } x<0. \end{cases}$

(*Ответ*: $x=-1$ — точка разрыва второго рода.)

2.134. $y=\begin{cases} -3x, & \text{если } x\geqslant -1, \\ x/(x+4), & \text{если } x<-1. \end{cases}$

(*Ответ*: $x=-4$ — точка разрыва второго рода, $x=-1$ — точка разрыва первого рода.)

2.135. $y=1/\log_{1/2}|x|$. (*Ответ*: $x=\pm 1$ — точки разрыва второго рода, $x=0$ — точка разрыва первого рода, устранимый разрыв.)

2.136. $y=\begin{cases} 3x-2, & \text{если } x>2, \\ 5^{1/(x+2)}, & \text{если } x\leqslant 2. \end{cases}$

(*Ответ*: $x=-2$ — точка разрыва второго рода, $x=2$ — точка разрыва первого рода.)

2.137. Функция $y=(x^3+8)/(x+2)$ не определена при $x=-2$. Каким должно быть $f(-2)$, чтобы доопределенная этим значением функция стала непрерывной? (*Ответ*: 12.)

3. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

3.1. ПРОИЗВОДНАЯ. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке X. Исходя из некоторого значения $x = x_0$ аргумента x, придадим ему приращение Δx, такое, что и новое значение $x + \Delta x$ принадлежит промежутку X. Тогда функция $y = f(x)$ получит в точке x_0 приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения Δy в этой точке к приращению аргумента Δx (при условии, что этот предел существует), когда Δx произвольным образом стремится к нулю. Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$. Таким образом, по определению имеем

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{3.1}$$

Если для некоторого значения x_0 выполняется условие

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \quad \left(\text{или} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty\right),$$

то говорят, что в точке x_0 функция имеет *бесконечную производную*. В отличие от бесконечной производной определенную выше производную функции иногда называют *конечной производной*. Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в каждой точке $x \in X$, то производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию от x, также определенную на X. Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной функции употребляются другие обозначения, например: y', $y'(x)$, y'_x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Геометрический смысл производной: производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ (рис. 3.1).

Механический смысл производной: если функция $s = s(t)$ описывает закон прямолинейного движения материальной точки, то производная $s'(t)$ есть ее скорость в момент времени t.

Непрерывность функции есть необходимое, но не достаточное условие дифференцируемости функции.

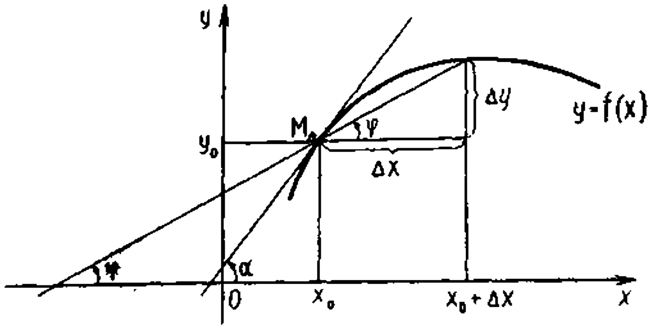


Рис. 3.1

Перечислим *основные правила дифференцирования*. Пусть c — постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функции, имеющие производные. Тогда справедливы следующие формулы:

1) $c' = 0$, 2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
3) $(cu)' = cu'$; 4) $(uv)' = u'v + uv'$,
5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Приведем *таблицу производных основных элементарных функций*, составленную на основании определения производной и правил дифференцирования:

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$; 2) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 3) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

4) $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0)$, 5) $(e^x)' = e^x$,

6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, 7) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,

8) $(\sin x)' = \cos x$, 9) $(\cos x)' = -\sin x$,

10) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, 11) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

12) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; 13) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

14) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$; 15) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f(u(x))$, где функции $f(u)$, $u(x)$ имеют производные, то

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Эту формулу называют *правилом дифференцирования сложной функции*.

Если для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$, которая в рассматриваемой точке y имеет производную $\varphi'(y)$, отличную от нуля, то в соответствующей точке x функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$, равную $1/\varphi'(y)$, т. е. справедлива формула

$$y'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \text{ или } y'_x=\frac{1}{x'_y}\ (x'_y\neq 0).$$

Примеры

1. Найти производную функции $y=x^3$, пользуясь формулой (3.1) и таблицей производных. Сравнить результаты.

Решение. По определению производной имеем:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2.$$

С другой стороны, на основании формулы 1 из таблицы производных при $n=3$ получаем $y'=(x^3)'=3x^2$.

2. Найти угловой коэффициент касательной к параболе $y=x^2$ в точках $O(0, 0)$ и $M(3, 9)$. В какой точке касательная к параболе $y=x^2$ образует с осью Ox угол в 45°?

Решение. Согласно формуле 1 из таблицы производных, имеем $y'=2x$. Так как угловой коэффициент касательной к кривой в точке A $k(A)=f'(x_0)$, где x_0 — абсцисса точки A, то $k(O)=2\cdot 0=0$, $k(M)=2\cdot 3=6$. Поскольку $k(A)=2x_0=\operatorname{tg}45°=1$, то $x_0=1/2$, $y_0=(1/2)^2=1/4$.

Итак, касательная к параболе $y=x^2$ образует угол в 45° с осью Ox в точке $N(1/2, 1/4)$ (рис. 3.2).

3. Точка движется по прямой согласно закону $s(t)=3t^2+2t$, где t — время; s — путь. Найти скорость точки в моменты времени $t=3$ и $t=4$.

Решение. Так как $s'(t)=6t+2$, то $v(t)=6t+2$. Тогда $v(3)=6\cdot 3+2=20$, $v(4)=6\cdot 4+2=26$.

4. Найти угол между двумя кривыми $y=2x^2$ и $y=x^3+2x^2-1$ в точке их пересечения.

Решение. Угол между кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ в их общей точке $M_0(x_0, y_0)$ определяется как угол между двумя касательными к этим кривым в точке M_0 (рис. 3.3) и вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)f_2'(x_0)}.$$

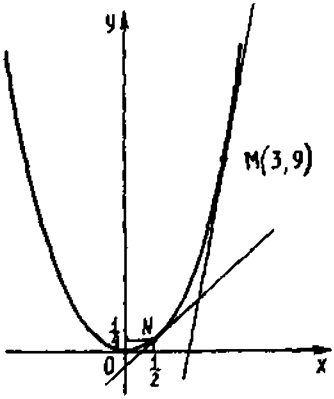


Рис. 3.2

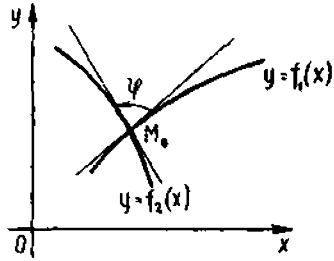


Рис. 3.3

Найдем точку пересечения данных кривых. Решив систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x^2, \\ y &= x^3 + 2x^2 - 1, \end{aligned}\right\}$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} x^3 - 1 &= 0, \\ y &= 2x^2 \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} (x-1)(x^2+x+1) &= 0, \\ y &= 2x^2, \end{aligned}\right\}$$

получим: $x = 1$, $y = 2$.

Итак, $M_0(1, 2)$ — точка пересечения данных кривых. Найдем угловые коэффициенты касательных к кривым при $x = 1$. Имеем: $y' = 4x$, $y'(1) = 4$, $k_1 = 4$; $y' = 3x^2 + 4x$, $y'(1) = 7$, $k_2 = 7$. По формуле $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{7-4}{1+4\cdot 7} = \frac{3}{29} \approx 0{,}1034,$$

т. е. $\varphi \approx 5°54'$.

5. Найти производную функции $y = 3x^2 - 5x + 1$.

Решение. Применяя правила дифференцирования, с помощью таблицы производных получаем $y' = 6x - 5$.

6. Найти производную данной функции:

а) $y = \frac{x+1}{x-1}$; б) $y = e^x \cos x$;

в) $y = \frac{x}{4^x}$; г) $y = \sqrt[3]{x^2} - x\sqrt[4]{x}$.

Решение. а) Применяя формулы $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$ и $x' = 1$, $c' = 0$, получаем

$$y' = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \\ = \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

б) Применяя формулы $(uv)' = u'v + uv'$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, находим

$$y' = (e^x)'\cos x + e^x(\cos x)' = e^x\cos x + e^x(-\sin x) = \\ = e^x(\cos x - \sin x).$$

в) Используя формулы $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$, $(a^x)' = a^x \ln a$, $(x)' = 1$, получаем

$$y' = \left(\frac{x}{4^x}\right)' = \frac{(x)'\cdot 4^x - x(4^x)'}{4^{2x}} = \frac{4^x - x\cdot 4^x \ln 4}{4^{2x}} = \\ = \frac{4^x(1 - x\ln 4)}{4^{2x}} = \frac{1 - x\ln 4}{4^x}.$$

г) Имеем

$$y = \sqrt[3]{x^2} - x\sqrt[4]{x} = x^{2/3} - x^{5/4}.$$

Тогда

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{5}{4}x^{1/4}.$$

7. Найти производную функции:

а) $y = \operatorname{tg} x \cdot \log_3 x$; б) $y = \dfrac{e^x - \ln x}{e^x + \ln x}$; в) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.

Решение. Применяя правила дифференцирования и используя таблицу производных, находим:

а) $$y' = (\operatorname{tg} x \cdot \log_3 x)' = (\operatorname{tg} x)'\log_3 x + \operatorname{tg} x \cdot (\log_3 x)' = \\ = \frac{\log_3 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x \ln 3};$$

б) $$y' = \left(\frac{e^x - \ln x}{e^x + \ln x}\right)' = \frac{(e^x - \ln x)'(e^x + \ln x) - (e^x - \ln x)(e^x + \ln x)'}{(e^x + \ln x)^2} = \\ = \frac{(e^x - 1/x)(e^x + \ln x) - (e^x - \ln x)(e^x + 1/x)}{(e^x + \ln x)^2} = \\ = \frac{e^{2x} - e^x/x + e^x \ln x - \ln x/x - e^{2x} + \ln x \cdot e^x - e^x/x + \ln x/x}{(e^x + \ln x)^2} =$$

$$= \frac{2e^x \ln x - 2e^x/x}{(e^x + \ln x)^2} = \frac{2e^x(\ln x - 1/x)}{(e^x + \ln x)^2};$$

в) $$y' = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(1+\cos x) - \sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot (1+\cos x) + \sin x \sin x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}.$$

8. Найти производную данной функции:

а) $y = 5^{2x-3}$; б) $y = \ln \sin x$;

в) $y = \sin^2 x$; г) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

Решение. а) Введем обозначение $2x - 3 = u$. Тогда $y = 5^u$, и, применив формулу для производной сложной функции, получим:

$$y' = (5^u)' = 5^u \ln 5 \cdot u' = 5^{2x-3} \ln 5 \cdot (2x-3)' = 5^{2x-3} \ln 5 \cdot 2.$$

б) Пусть $u = \sin x$, тогда $y = \ln u$. Имеем:

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} u' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

в) Если $u = \sin x$, то $y = u^2$ и

$$y' = (u^2)' = 2uu' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

г) Если $u = \sqrt{x}$, то $y = \operatorname{arctg} u$ и

$$y' = (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} u' =$$

$$= \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}(\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

9. Найти производную данной функции:

а) $y = \ln \operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}$; б) $y = \log_2(\log_3(\log_5 x))$;

в) $y = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$; г) $y = 10^{1-\sin^4 3x}$;

д) $y = \arcsin^2(\ln(a^3 + x^3))$.

Решение. а) Пусть $u = \operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}$, тогда $y = \ln u$ и

$$y' = \frac{1}{u} u' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}}\left(\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}} \frac{1}{\cos^2\frac{2x+1}{4}} \times$$

$$\times \left(\frac{2x+1}{4}\right)' = \frac{1}{\sin\frac{2x+1}{4} \cdot \cos\frac{2x+1}{4}} \frac{1}{2} = \frac{1}{\sin\frac{2x+1}{2}}.$$

б) Запишем данную функцию в виде $y=\log_2 u$, где $u=\log_3(\log_5 x)$. Тогда

$$y'=\frac{1}{u\ln 2}u'=\frac{1}{\log_3(\log_5 x)\cdot\ln 2}(\log_3(\log_5 x))'=$$
$$=\frac{1}{\log_3(\log_5 x)\cdot\ln 2}\,\frac{1}{\log_5 x\cdot\ln 3}(\log_5 x)'=$$
$$=\frac{1}{\log_3(\log_5 x)\cdot\ln 2}\,\frac{1}{\log_5 x\cdot\ln 3}\,\frac{1}{x\ln 5}.$$

в) Записав данную функцию в виде $y=e^u$, где $u=\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}$, имеем

$$y'=e^u u'=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}\left(\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}\right)'=$$
$$=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}\frac{1}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}(\ln(ax^2+bx+c))'=$$
$$=\frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}\,\frac{1}{ax^2+bx+c}(ax^2+bx+c)'=$$
$$=\frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}\,\frac{1}{(ax^2+bx+c)}(2ax+b)=$$
$$=\frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}(2ax+b)}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}(ax^2+bx+c)}.$$

г) Пусть $u=1-\sin^4 3x$, тогда $y=10^u$ и

$$y'=10^u\ln 10\cdot u'=10^{1-\sin^4 3x}\ln 10\cdot(1-\sin^4 3x)'=$$
$$=10^{1-\sin^4 3x}\ln 10\cdot(-4\sin^3 3x)(\sin 3x)'=$$
$$=10^{1-\sin^4 3x}\ln 10\cdot(-4\sin^3 3x)\cos 3x\cdot 3=$$
$$=-12\ln 10\cdot 10^{1-\sin^4 3x}\sin^3 3x\cos 3x.$$

д) Если $u=\arcsin\ln(6+x^3)$, то $y=u^2$ и

$$y'=2uu'=2\arcsin\ln(6+x^3)\cdot(\arcsin\ln(6+x^3))'=$$
$$=2\arcsin(\ln(x^3+6))\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2(6+x^3)}}(\ln(6+x^3))'=$$
$$=2\arcsin(\ln(x^3+6))\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2(6+x^3)}}\,\frac{1}{6+x^3}(6+x^3)'=$$
$$=2\arcsin(\ln(x^3+6))\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2(6+x^3)}}\,\frac{3x^2}{6+x^3}=$$
$$=\frac{6x^2\arcsin(\ln(x^3+6))}{(6+x^3)\sqrt{1-\ln^2(6+x^3)}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Пользуясь определением (см. формулу (3.1)), найти производную данной функции: 1) $y=x^4$; 2) $y=1/x$; 3) $y=\operatorname{tg} x$. (*Ответ*: 1) $4x^3$; 2) $-1/x^2$; 3) $1/\cos^2 x$.)

3.2. Найти $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, если $f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$. (*Ответ*: $f'(0)=-8$, $f'(1)=0$, $f'(2)=0$.)

3.3. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=\sin x$ в точке $(\pi, 0)$. (*Ответ*: -1.)

3.4. Чему равны угловые коэффициенты касательных к кривым $y=1/x$ и $y=x^2$ в точке их пересечения? Найти угол между этими касательными. (*Ответ*: -1; 2; $\operatorname{tg}\varphi=3$, $\varphi\approx 71°34'$.)

В задачах 3.5—3.12 найти производную указанной функции.

3.5. $y=\dfrac{(x+2)^2}{x^{3/2}}$. $\left(\textit{Ответ}: \ y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}-\dfrac{6}{x^2\sqrt{x}}.\right)$

3.6. $y=(x-2)/(x+2)$. (*Ответ*: $y'=4/(x+2)^2$.)

3.7. $y=(x^2-3x+5)/x$. (*Ответ*: $y'=(x^2-5)/x^2$.)

3.8. $y=x\ln x-x$. (*Ответ*: $y'=\ln x$.)

3.9. $y=(1+x^2)\operatorname{arctg} x$. (*Ответ*: $y'=1+2x\operatorname{arctg} x$.)

3.10. $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$. $\left(\textit{Ответ}: \ y'=\dfrac{2x-\sin x\cos x}{2x\sqrt{x}\cos^2 x}.\right)$

3.11. $y=\dfrac{\arccos x}{1-x^2}$. $\left(\textit{Ответ}: \ y'=\dfrac{2x\arccos x-\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}.\right)$

3.12. $y=3^x\arcsin x$. $\left(\textit{Ответ}: \ y'=\dfrac{3^x}{\sqrt{1-x^2}}+3^x\ln 3\times\right.$ $\left.\times\arcsin x.\right)$

В задачах 3.13—3.38 найти производную сложной функции.

3.13. $y=\sqrt{3x^3-x^2-5}$. $\left(\textit{Ответ}: \ y'=\dfrac{x(9x-2)}{2\sqrt{3x^3-x^2+5}}.\right)$

3.14. $y=(2x+3x^2)^{-3/4}$. $\left(\textit{Ответ}: \ y'=\dfrac{-3(1+3x)}{2\sqrt[4]{(2x+3x^2)^7}}.\right)$

3.15. $y=\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$. $\left(\textit{Ответ}: \ y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.\right)$

3.16. $y=\sqrt[5]{(2x^2-4x^3)^4}$. $\left(\textit{Ответ}: \ y'=\dfrac{16x(1-3x)}{5\sqrt[5]{2x^2(1-2x)}}.\right)$

3.17. $y=\dfrac{1}{\sqrt{(x+2)(x^2-1)}}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y'=\dfrac{1-3x^2-4x}{2\sqrt{(x+2)^3(x^2-1)^3}}.\right)$

3.18. $y=\dfrac{\sqrt{5-x^2}}{5+x}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y'=\dfrac{-5(x+1)}{(5+x)^2\sqrt{5-x^2}}.\right)$

3.19. $y=\dfrac{x^3}{3\sqrt{1+x^2}}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y'=\dfrac{x^2(3+2x^2)}{3(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.\right)$

3.20. $y=\cos^4 x$. (*Ответ*: $y'=-4\cos^3 x\sin x$.)

3.21. $y=4^{\cos x}$. (*Ответ*: $y'=-4^{\cos x}\ln 4\cdot\sin x$.)

3.22. $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y'=-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.\right)$

3.23. $y=\sqrt{e^x}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{e^x}.\right)$

3.24. $y=\ln\sin x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y'=\dfrac{\cos^3 x}{\sin x}.\right)$

3.25. $y=\ln\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^4}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y'=\dfrac{2(6-5x^2)}{3x(x^2-1)}.\right)$

3.26. $y=\ln\sqrt{x^2+\sqrt{x^4-5}}$. $\Bigl($*Ответ*: $y'=$

$=\dfrac{x(\sqrt{x^4-5}+x^2)}{(x^2+\sqrt{x^4-5})\sqrt{x-5}}.\Bigr)$

3.27. $y=\operatorname{tg} x/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$. (*Ответ*: $y'=\cos x$.)

3.28. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.\right)$

3.29. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{2}$. (*Ответ*: $y'=\sqrt{a^2-x^2}$.)

3.30. $y=\ln\dfrac{\sqrt{4\operatorname{tg}x+1}-2\sqrt{\operatorname{tg}x}}{\sqrt{4\operatorname{tg}x+1}+2\sqrt{\operatorname{tg}x}}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y'=\dfrac{-2\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}x}(4\operatorname{tg}x+1)}\right)$

3.31. $y=\ln\cos\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y'=\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}.\right)$

3.32. $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.

$\left(\text{\textit{Ответ}: } y'=\dfrac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)(2+\ln(2x+3))\sqrt{1+\ln(2x+3)}}.\right)$

3.33. $y=\ln\sin\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$.

$\left(Ответ:\ y' = \dfrac{\operatorname{ctg}\left(\sqrt[3]{\operatorname{arctg}(e^{3x})}\right)\cdot e^{3x}}{(1+e^{6x})\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 e^{3x}}}.\right)$

3.34. $y = 7^{\frac{x\sin x}{1-x}}$. $\Big($Ответ: $y' = 7^{\frac{x\sin x}{1-x}}\times$
$\times\dfrac{(\sin x + x\cos x - x^2\cos x)\ln 7}{(1-x)^2}.\Big)$

3.35. $y = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$. (Ответ: $y' = 1/\sqrt{a^2+x^2}$.)

3.36. $y = \sqrt[3]{\ln\sin\dfrac{x+3}{4}}$. $\left(Ответ:\ y' = \dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\sin\dfrac{x+3}{4}}}\right)$

3.37. $y = \ln\dfrac{2\ln^2\sin x+3}{2\ln^2\sin x-3}$. $\left(Ответ: y' = -\dfrac{24\ln\sin x\operatorname{ctg} x}{4\ln^4\sin x-9}\right)$

3.38. $y = 1 - e^{\sin^2 3x}\cos^2 3x$.
(Ответ: $y' = 3e^{\sin^2 3x}\sin 6x\sin^2 3x$)

В задачах 3.39—3.47 найти **производную данной** функции.

3.39. $y = \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$.

$\left(Ответ:\ y' = \dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}.\right)$

3.40. $y = \arccos\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-4x^2}$. (Ответ: $y' =$
$=\sqrt{2/x-4}$.)

3.41. $y = \operatorname{arctg} e^{2x} + \ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$. $\left(Ответ: y' = \dfrac{4e^{2x}}{1-e^{8x}}.\right)$

3.42. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$. $\left(Ответ:\ y' = -\dfrac{1}{1+x^2}.\right)$

3.43. $y = x\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{2}\ln(x^2+a^2)$. $\left(Ответ: \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}\right)$

3.44. $y = \ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})$.

(Ответ: $y' = \cos x/\sqrt{1+\sin^2 x}$.)

3.45. $y = \sqrt{4x-x^2}+4\arcsin(\sqrt{x}/2)$. (**Ответ:** $y' =$
$= -\sqrt{4/x-1}$.)

3.46. $y = \ln \frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\sin x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ y' = \frac{2}{\cos x\sqrt{\sin x}}.\right)$

3.47. $y = \frac{3}{4}\ln\frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x$. $\left(\textit{Ответ:}\ y' = \frac{x^2-3x}{x^4-1}.\right)$

3.2. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ. ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ, И ПРОИЗВОДНЫЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Дифференцирование многих функций значительно упрощается после их предварительного логарифмирования. Если требуется найти производную y' функции $y = f(x)$ с помощью *логарифмического дифференцирования*, то необходимо выполнить следующие действия:

1) прологарифмировать обе части уравнения (по основанию e):

$$\ln y = \ln f(x) = \varphi(x);$$

2) продифференцировать обе части полученного равенства, где $\ln y$ есть сложная функция от x:

$$\frac{1}{y}y' = \varphi'(x);$$

3) заменить y его выражением через x и определить y':

$$y' = y\varphi'(x) = f(x)\varphi'(x).$$

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня) и, в частности, для нахождения производной от показательно-степенной функции $y = u^v$, где u, v — функции от x.

Найдем производную функции $y = u^v$, где $u = f(x)$; $v = \varphi(x)$. Прологарифмировав данную функцию по основанию e, имеем

$$\ln y = v \ln u.$$

Продифференцируем обе части полученного равенства:

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{1}{u}u'.$$

Отсюда

$$y' = y\left(v'\ln u + \frac{v}{u}u'\right) = u^v\left(v'\ln u + \frac{v}{u}u'\right) =$$

$$= u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1}u'.$$

Таким образом, получена *формула для нахождения производной от степенно-показательной функции:*

$$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1}u'. \qquad (3.2)$$

Пусть функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Предположим, что функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ имеют производные, причем $\varphi'(t) \neq 0$ для $t \in [\alpha; \beta]$. В этом случае для функции $x = \varphi(t)$ существует обратная функция $t = \Phi(x)$, которая является однозначной. Согласно теореме о производной обратной функции, функция $\Phi(x)$ имеет производную $\Phi'(x) = 1/\varphi'(t)$, а по теореме о производной сложной функции функция $y = \psi(\Phi(x))$ также имеет производную $y'(x) = \psi'(\Phi(x))\Phi'(x)$. Тогда

$$y'(x) = \left.\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|_{t=\Phi(x)} \qquad (3.3)$$

или

$$\begin{cases} y'_x = \psi'_t/\varphi'_t = y'_t/x'_t, \\ x = \varphi(t). \end{cases} \qquad (3.4)$$

Рассмотрим дифференцирование неявных функций. Пусть значения двух переменных x и y связаны между собой уравнением $F(x, y) = 0$. Если функция $y = f(x)$, определенная на интервале $(a; b)$, такова, что для всех $x \in (a; b)$ $F(x, f(x)) \equiv 0$, то $y = f(x)$ — неявная функция, определенная уравнением $F(x, y) = 0$. Но не всякую неявно заданную функцию $F(x, y) = 0$ можно представить в виде $y = f(x)$

Чтобы найти *производную неявной функции*, надо обе части уравнения $F(x, y) = 0$ продифференцировать по x, считая y функцией от x, а затем полученное уравнение решить относительно y'; в результате найдем выражение производной от неявной функции в виде $y' = \varphi(x, y)$.

Рассмотрим *производные высших порядков*. Производная функции y' называется *второй производной функции* y и обозначается y''. Таким образом, $y'' = (y')'$. Аналогично $y''' = (y'')'$, ..., $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Для того чтобы получить производную высшего порядка от данной функции, необходимо последовательно найти все ее производные низших порядков.

В случае произведения двух функций производную n-го порядка можно найти, пользуясь *формулой Лейбница:*

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.$$

Пусть функция задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и существуют вторые производные функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в некоторой точке t. Тогда можно вычислить *вторую производную от функции, заданной параметрически.* Заметим, что функция $y'(x)$, в свою очередь, задана параметрическими уравнениями $y'_x = \psi'(t)/\varphi'(t) = \psi_1(t)$, $x = \varphi(t)$. Тогда по формуле $y'_x = \left.\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|_{t=\Phi(x)}$ имеем

$$y''(x) = y''_{xx} = (y'(x))'_x = \left.\frac{(\psi_1(t))'}{\varphi'(t)}\right|_{t=\Phi(x)}$$

или

$$y''_{xx}=\left.\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}\right|_{t=\Phi(x)}.$$

Аналогично получаем:

$$y'''_{x^3}=\left.\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}\right|_{t=\Phi(x)}, \ \ldots, \ y^{(n)}_{x^n}=\left.\frac{(y^{(n-1)}_{x^{n-1}})'_t}{x'_t}\right|_{t=\Phi(x)}.$$

Пусть уравнение $F(x, y)=0$ определяет y как неявную функцию от x и найдена первая производная этой функции $y'=\varphi(x, y)$. *Вторую производную y'' функции, заданной неявно*, получаем, дифференцируя функцию $\varphi(x, y)$ по переменной x и считая при этом y функцией от x:

$$y''=(\varphi(x, y))'=F_1(x, y, y').$$

Заменяя здесь y' на $\varphi(x, y)$, получаем выражение второй производной через x и y: $y''=F_1(x, y, \varphi(x, y))=F_2(x, y)$.

Точно так же и все производные высших порядков от неявной функции можно выразить только через x и y: каждый раз, когда при дифференцировании появляется производная y', ее следует заменять на $\varphi(x, y)$.

Примеры

1. Найти y', если $y=(\sin x)^{\cos x}$.

Решение. *I способ.* С помощью логарифмического дифференцирования имеем:

$$\ln y=\cos x\cdot\ln\sin x,$$

$$\frac{1}{y}y'=-\sin x\cdot\ln\sin x+\cos x\cdot\frac{1}{\sin x}\cos x,$$

откуда

$$y'=(\sin x)^{\cos x}(-\sin x\cdot\ln\sin x+\cos^2 x/\sin x).$$

II способ. Применив формулу (3.2), получим

$$y'=\cos x\cdot(\sin x)^{\cos x-1}(\sin x)'+(\sin x)^{\cos x}\ln(\sin x)\cdot(\cos x)'=$$
$$=\cos^2 x(\sin x)^{\cos x-1}-(\sin x)^{\cos x+1}\ln\sin x=$$
$$=(\sin x)^{\cos x}(\cos^2 x/\sin x-\sin x\cdot\ln(\sin x)).$$

2. Найти y', если $y=\sqrt[3]{x(x^2+1)/(x^2-1)^2}$

Решение. Логарифмируя данную функцию, получаем

$$\ln y=\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{3}\ln(x^2+1)-\frac{2}{3}\ln(x^2-1).$$

Продифференцировав обе части последнего равенства, имеем

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{3x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} - \frac{4x}{3(x^2-1)}.$$

Отсюда

$$y' = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{4x}{x^2-1}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}\,\frac{x^4 - 1 + 2x^4 - 2x^2 - 4x^4 - 4x^2}{3x(x^4-1)} =$$

$$= \frac{x^4 + 6x^2 + 1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}.$$

3. Найти y', если $y = x^{\ln x}$.

Решение. Прологарифмировав данную функцию, имеем $\ln y = \ln x \ln x$, т. е. $\ln y = \ln^2 x$. Продифференцируем обе части полученного равенства:

$$\frac{1}{y}y' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}.$$

Отсюда

$$y' = \frac{2\ln x}{x}y = \frac{2\ln x}{x}x^{\ln x} = 2\ln x \cdot x^{\ln x - 1}.$$

4. Найти y'_x, если

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{-t}\sin t,\\ y &= e^{t}\cos t, \end{aligned}\quad t \in (-\infty;\ +\infty).\right\}$$

Решение. Используя формулу (3.4), получаем:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(e^t\cos t)'}{(e^{-t}\sin t)'} = \frac{e^t\cos t - e^t\sin t}{-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t} =$$

$$= \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^{-t}(\cos t - \sin t)} = e^{2t}.$$

Запишем искомую производную как функцию, заданную параметрически:

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= t/2,\\ x &= e^{-t}\sin t, \end{aligned}\quad t \in (-\infty;\ +\infty).\right\}$$

5. Найти y'_x, если

$$\left.\begin{aligned} x &= \ln(1+t^2),\\ y &= t - \operatorname{arctg} t, \end{aligned}\quad t \in (-\infty;\ +\infty).\right\}$$

Решение. Применив формулу (3.4), имеем

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=\frac{t}{2}.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}&y'_x=t/2,\\&x=\ln(1+t^2),\end{aligned}\quad t\in(-\infty;\ +\infty).\right\}$$

6. Найти угловой коэффициент касательной к эллипсу $x=3\cos t$, $y=4\sin t$ в точке $M(3\sqrt{2}/2,\ 2\sqrt{2})$ (рис. 3.4).

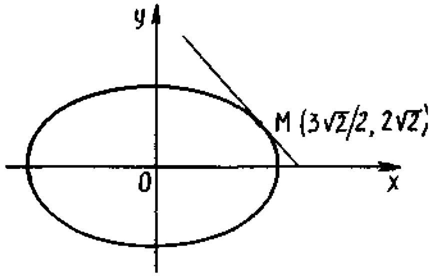


Рис 3 4

Решение. По определению первой производной для функции, заданной параметрически, имеем

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{4\cos t}{-3\sin t}=-\frac{4}{3}\operatorname{ctg} t.$$

Подставив координаты точки M в параметрическое уравнение эллипса, определим, какое значение параметра t соответствует точке M:

$$\left.\begin{aligned}3\sqrt{2}/2&=3\cos t,\\2\sqrt{2}\quad&=4\sin t,\end{aligned}\right\}$$

т. е. $\cos t=\sqrt{2}/2$, откуда $t=\pi/4$. Тогда

$$y'_x\Big|_M=-\frac{4}{3}\operatorname{ctg} t\,\Big|_{t=\pi/4}=-\frac{4}{3}.$$

Следовательно, $k_M=y'_x|_M=-\frac{4}{3}$.

7. Найти производную y'_x от неявной функции, заданной следующим уравнением:

а) $x^3+y^3-3axy=0$; б) $y=1+xe^y$.

Решение. а) Продифференцируем обе части данного равенства, считая y функцией от x:

$$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0.$$

Отсюда имеем

$$(y^2-ax)y'=ay-x^2.$$

Следовательно,

$$y'=(ay-x^2)/(y^2-ax).$$

б) Дифференцируя обе части исходного равенства по x, имеем

$$y'=e^y+xe^yy',$$

откуда $y'(1-xe^y)=e^y$. Тогда

$$y'=e^y/(1-xe^y).$$

Так как по условию $xe^y=y-1$, то окончательно получаем

$$y'=\frac{e^y}{1-y+1}=\frac{e^y}{2-y}.$$

8. Чему равен угловой коэффициент касательной к окружности $(x-1)^2+(y+3)^2=17$, проведенной в точке $M(2,\ 1)$?

Решение. Продифференцируем обе части уравнения, считая y функцией от x:

$$2(x-1)+2(y+3)y'=0.$$

Отсюда

$$y'=\frac{1-x}{y+3},\quad y'|_M=\frac{1-2}{1+3}=-\frac{1}{4}.$$

Следовательно, $k_M=-1/4$.

9. Используя формулу Лейбница, найти $y^{(24)}$, если $y=e^x(x^2-1)$.

Решение. По формуле Лейбница имеем:

$$y^{(24)}=(e^x)^{(24)}(x^2-1)+24(e^x)^{(23)}(x^2-1)'+$$
$$+\frac{24\cdot 23}{1\cdot 2}(e^x)^{(22)}(x^2-1)''.$$

Остальные слагаемые равны нулю, так как все высшие производные функции $x^2 - 1$, начиная с третьей, тождественно равны нулю. Тогда

$$y^{(24)} = e^x(x^2 - 1) + 24e^x \cdot 2x + 12 \cdot 23e^x \cdot 2 = \\ = e^x(x^2 + 48x + 551).$$

10. Найти y'_x, y''_{xx}, если

$$\left.\begin{array}{l} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1, \end{array} \; t \in (0;\ +\infty).\right\}$$

Решение. По определению первой производной для функции, заданной параметрически, получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t}{1/t} = 2t^2.$$

Окончательно первую производную запишем как функцию, заданную параметрически:

$$\left.\begin{array}{l} y'_x = 2t^2, \\ x = \ln t, \end{array} \; t \in (0;\ +\infty).\right\}$$

Тогда

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(2t^2)'}{1/t} = \frac{4t}{1/t} = 4t^2.$$

Следовательно, вторая производная имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} y''_{xx} = 4t^2, \\ x = \ln t. \end{array}\right\}$$

11. Найти y'_x, y''_{xx}, если

$$\left.\begin{array}{l} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1 - t^2), \end{array} \; t \in (-1;\ 1).\right\}$$

Решение. Имеем:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-2t/(1 - t^2)}{1/\sqrt{1 - t^2}} = -\frac{2t}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Тогда первую производную как функцию, заданную параметрически, запишем в виде:

$$\left.\begin{array}{l} y'_x = -2t/\sqrt{1 - t^2}, \\ x = \arcsin t, \end{array} \; t \in (-1;\ 1).\right\}$$

Теперь находим y''_{xx}:

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{-2\sqrt{1-t^2}+2t\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}(-2t)}{1-t^2}:\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=-\frac{2}{1-t^2}.$$

Окончательно получаем:

$$\left.\begin{array}{l} y''_{xx}=-2/(1-t^2), \\ x=\arcsin t, \end{array} \quad t\in(-1;\ 1).\right\}$$

12. Найти y', y'', если $y=\operatorname{tg}(x+y)$.

Решение. Продифференцируем обе части данного выражения, считая y функцией от x:

$$y'=\frac{1}{\cos^2(x+y)}(1+y').$$

Отсюда

$$y'(1-1/\cos^2(x+y))=1/\cos^2(x+y).$$

Тогда $y'=-\sin^{-2}(x+y)$. Дифференцируя полученное равенство, имеем

$$y''=(-1)(-2)\sin^{-3}(x+y)\cdot\cos(x+y)(1+y').$$

Подставив в последнее равенство вместо y' его выражение, получим:

$$y''=\frac{2\cos(x+y)(\sin^2(x+y)-1)}{\sin^5(x+y)}=-\frac{2\cos^3(x+y)}{\sin^5(x+y)}=$$

$$=-\frac{2\cos^{-2}(x+y)}{\operatorname{tg}^5(x+y)}.$$

Так как из условия $\operatorname{tg}(x+y)=y$, а $\cos^{-2}(x+y)=$ $=1+\operatorname{tg}^2(x+y)=1+y^2$, то окончательно имеем

$$y''=-2(1+y^2)/y^5.$$

13. Найти y'', если $y=1+xe^y$.

Решение. Первая производная данной функции была найдена при решении примера 7б:

$$y'=e^y/(2-y).$$

Продифференцировав обе части последнего равенства по x, имеем

$$y''=\frac{e^y y'(2-y)+e^y y'}{(2-y)^2}=\frac{y'(2e^y-ye^y+e^y)}{(2-y)^3}=\frac{y'e^y(3-y)}{(2-y)^3}.$$

Подставив в полученное равенство выражение для y', найдем вторую производную данной функции:

$$y'' = \frac{e^y}{2-y} \frac{e^y(3-y)}{(2-y)^3} = \frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^4}.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 3.48—3.58 найти производную данной функции, используя правило логарифмического дифференцирования.

3.48. $y = x^{2x}$. (*Ответ:* $y' = 2x^{2x}(\ln x + 1)$.)

3.49. $y = (\sin x)^x$. (*Ответ:* $y' = (\sin x)^x(\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x)$.)

3.50. $y = x^{\cos x}$. $\left(\textit{Ответ: } y' = x^{\cos x}\left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}\right).\right)$

3.51. $y = (\sin x)^{\ln x}$. $\left(\textit{Ответ: } y' = (\sin x)^{\ln x}(\ln x \cdot \operatorname{ctg} x + \frac{\ln\sin x}{x}).\right)$

3.52. $y = (\cos x)^{1/x}$. $\left(\textit{Ответ: } y' = -\frac{(\cos x)^{1/x}}{x^2}(\ln\cos x + x\operatorname{tg} x).\right)$

3.53. $y = x^{x^2}$. (*Ответ:* $y' = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$.)

3.54. $y = (\operatorname{tg} x)^x$. (*Ответ:* $y' = (\operatorname{tg} x)^x(\ln\operatorname{tg} x + 2x/\sin 2x)$.)

3.55. $y = (x+1)^{2/x}$. $\left(\textit{Ответ: } y' = 2(x+1)^{2/x}\left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}\right).\right)$

3.56. $y = \frac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$.

$\left(\textit{Ответ: } y' = -\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}.\right)$

3.57. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$.

$\left(\textit{Ответ: } y' = -\frac{5x^2+x-24}{3(x-1)^{1/2}(x+2)^{5/3}(x+3)^{5/2}}.\right)$

3.58. $y = \frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

$\left(\textit{Ответ: } y' = \frac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)} \frac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}.\right)$

В задачах 3.59—3.69 найти производные y'_x и y''_{xx} данной параметрической функции.

3.59. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin^2 t. \end{cases}$ $\frac{y_t}{x_t}$

$\left(Ответ: \left.\begin{matrix} y'_x = -4\cos t, \\ x = 2\cos t; \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y''_{xx} = -2, \\ x = 2\cos t. \end{matrix}\right\}\right)$

3.60. $\begin{cases} x = 3t - t^2, \\ y = 3t^2. \end{cases}$

$\left(Ответ: \left.\begin{matrix} y'_x = 6t/(3-2t), \\ x = 3t - t^2; \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y''_{xx} = 18/(3-2t)^3, \\ x = 3t - t^2. \end{matrix}\right\}\right)$

3.61. $\begin{cases} x = \ln\cos t, \\ y = \ln\sin t. \end{cases}$

$\left(Ответ: \left.\begin{matrix} y'_x = -\operatorname{ctg}^2 t, \\ x = \ln\cos t; \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y''_{xx} = -2\cos^2 t/\sin^4 t, \\ x = \ln\cos t. \end{matrix}\right\}\right)$

3.62. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t} \end{cases}$

$\left(Ответ: \left.\begin{matrix} y'_x = -2e^{3t}, \\ x = e^{-t}; \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y''_{xx} = 6e^{4t}, \\ x = e^{-t}. \end{matrix}\right\}\right)$

3.63. $\begin{cases} x = \cos at, \\ y = \sin at. \end{cases}$

$\left(Ответ: \left.\begin{matrix} y'_x = -\operatorname{ctg} at, \\ x = \cos at; \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y''_{xx} = -1/\sin^3 at, \\ x = \cos at. \end{matrix}\right\}\right)$

3.64. $\begin{cases} x = 1/\cos t, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$

$\left(Ответ: \left.\begin{matrix} y'_x = 1/\sin t, \\ x = 1/\cos t; \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y''_{xx} = \operatorname{ctg}^3 t, \\ x = 1/\cos t. \end{matrix}\right\}\right)$

3.65. $\begin{cases} x = 1/\sin t, \\ y = \operatorname{ctg} t. \end{cases}$

$\left(Ответ: \left.\begin{matrix} y'_x = 1/\cos t; \\ x = 1/\sin t; \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y''_{xx} = -\operatorname{tg}^3 t, \\ x = 1/\sin t. \end{matrix}\right\}\right)$

3.66. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

$\left(Ответ: \left.\begin{matrix} y'_x = \operatorname{tg} t, \\ x = a\cos^3 t; \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y''_{xx} = -1/3a\cos^4 t\sin t, \\ x = a\cos^3 t. \end{matrix}\right\}\right)$

3.67. $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t. \end{cases}$

$$\left(Ответ: \left.\begin{matrix} y'_x = \dfrac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}, \\ x = at\cos t; \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y''_{xx} = \dfrac{2+t^2}{a(\cos t - t\sin t)^3}, \\ x = at\cos t. \end{matrix}\right\}\right)$$

3.68. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \cos t. \end{cases}$

$\left(\textit{Ответ:}\ \left.\begin{array}{l} y'_x = -t\sin t, \\ x = \ln t; \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} y''_{xx} = -t(\sin t + t\cos t), \\ x = \ln t. \end{array}\right\}\right)$

3.69. $\begin{cases} x = e^t + 1, \\ y = e^{3t}. \end{cases}$

$\left(\textit{Ответ:}\ \left.\begin{array}{l} y'_x = 3e^{2t}, \\ x = e^t + 1; \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} y''_{xx} = 6e^t, \\ x = e^t + 1. \end{array}\right\}\right)$

В задачах 3.70—3.75 найти производную y' неявной функции.

3.70. $x^2 + y^2 - xy = 0$. $\left(\textit{Ответ:}\ y' = \frac{2x - y}{x - 2y}.\right)$

3.71. $e^y - e^{-x} + xy = 0$. $\left(\textit{Ответ:}\ y' = -\frac{e^{-x} + y}{e^y + x}.\right)$

3.72. $e^x \sin y - e^{-y}\cos x = 0$.

$\left(\textit{Ответ:}\ y' = -\frac{e^x \sin y + e^{-y}\sin x}{e^x \cos y + e^{-y}\cos x}.\right)$

3.73. $xy = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$. $\left(\textit{Ответ:}\ y' = \frac{y}{x}\,\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}.\right)$

3.74. $x^y = y^x$. $\left(\textit{Ответ:}\ y' = \frac{x\ln y - y}{y\ln x - x}\,\frac{y}{x}.\right)$

3.75. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$. $\left(\textit{Ответ:}\ y' = \frac{2x - ye^{xy})}{xe^{xy} + 3y^2}.\right)$

В задачах 3.76—3.80 найти первую и вторую производные неявной функции.

3.76. $x = y - \operatorname{arctg} y$. ($\textit{Ответ:}$ $y' = y^{-2} + 1$, $y'' = -2(y^{-3} + y^{-5})$.)

3.77. $e^y = x + y$. $\left(\textit{Ответ:}\ y' = \frac{1}{e^y - 1} = \frac{1}{x + y - 1},\ y'' = -\frac{x + y}{(x + y - 1)^3}.\right)$

3.78. $\operatorname{arctg}(x + y) = x$. ($\textit{Ответ:}$ $y' = (x + y)^2$, $y'' = 2(x + y)(1 + (x + y)^2)$.)

3.79. $\ln y - \frac{x}{y} = C$. $\left(\textit{Ответ:}\ y' = \frac{y}{x + y},\ y'' = -\frac{y^2}{(x + y)^3}.\right)$

3.80. $\ln x + e^{-y/x} = C$. $\left(\textit{Ответ:}\ y' = \frac{y}{x} + e^{y/x},\ y'' = \frac{(1 + e^{y/x})e^{y/x}}{x}.\right)$

3.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ, ЕГО СВОЙСТВА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если ее приращение $\Delta y(x_0, \Delta x)$ может быть представлено в виде

$$\Delta y(x_0, \Delta x) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Главная линейная часть $A\Delta x$ приращения Δy называется *дифференциалом этой функции в точке* x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначается dy, т. е. $dy = A\Delta x$.

Для того чтобы функция $y=f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $f'(x_0)$. При этом выполняется равенство $A=f'(x_0)$. Это утверждение позволяет называть дифференцируемой всякую функцию, имеющую производную.

Таким образом,

$$\Delta y = y'_x\Delta x + o(\Delta x).$$

Выражение для дифференциала имеет вид

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Дифференциалом аргумента считается приращение аргумента $dx = \Delta x$, при этом:

$$dy = f'(x)dx, \tag{3.5}$$
$$\Delta y = dy + o(\Delta x). \tag{3.6}$$

Из формулы (3.6) следует, что если $f'(x_0) \neq 0$, то при $\Delta x \to 0$ приращение функции Δy и ее дифференциал dy в фиксированной точке являются эквивалентными бесконечно малыми, поэтому $\Delta y \approx dy$ при $\Delta x \to 0$.

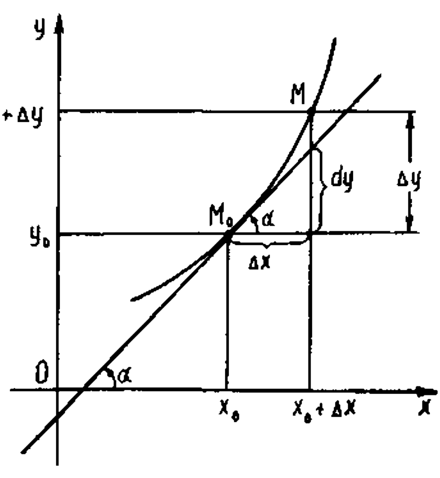


Рис. 3.5

Геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ при приращении аргумента, равном Δx (рис. 3.5).

Перечислим *основные свойства дифференциала:*

1) $d(c)=0$, $c=\text{const}$;
2) $d(cu)=cdu$;
3) $d(u\pm v)=du\pm dv$,
4) $d(uv)=duv+udv$;
5) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{duv-udv}{v^2}$ $(v\neq 0)$;
6) $df(u)=f'(u)du$.

Если приращение Δx аргумента мало по абсолютной величине, то $\Delta y\approx dy$ и получаем *формулу приближенных вычислений с помощью дифференциалов*

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{3.7}$$

Дифференциалом второго порядка функции $y=f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка, т. е. $d^2(y)=d(dy)$. Аналогично определяется *дифференциал третьего порядка* $d^3y=$ $=d(d^2y)$. Вообще,

$$d^ny=d(d^{n-1}y).$$

Если $y=f(x)$ и x — независимая переменная, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам:

$$d^2y=y''(dx)^2,\ d^3y=y'''(dx)^3,\ \dots,\ d^ny=y^{(n)}(dx)^n.$$

Примеры

1. Дана функция $y=x^2+2x$. Найти значения приращения и его главной линейной части, соответствующие изменению аргумента от $x_0=2$ до $x=2,1$.

Решение. Так как $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, то найдем сначала приращение данной функции при переходе аргумента от значения $x_0=2$ к значению $x_0+\Delta x=2,1$:

$$\Delta y\Big|_{\substack{x_0=2\\ \Delta x=0,1}}=f(2,1)-f(2)=(2,1)^2+2\cdot 2,1-(2^2+2\cdot 2)=0,61.$$

Учитывая, что $dy=f'(x_0)\Delta x=(2x_0+2)\Delta x$, при заданных числовых значениях аргумента получаем

$$dy\Big|_{\substack{x_0=2\\ \Delta x=0,1}}=(2\cdot 2+2)\cdot 0,1=0,6.$$

2. Сторона квадрата равна 8 см. На сколько увеличится его площадь, если каждую сторону увеличить на 1 см? Найти главную линейную часть приращения площади квадрата.

Решение. Пусть сторона квадрата равна x. Тогда его площадь $S(x)=x^2$. Из условия известно, что $x_0=8$, $\Delta x=1$. Следовательно,

$$\Delta S = S(x_0+\Delta x) - S(x_0),\ dS = 2x_0\Delta x,$$

а при переходе от значения аргумента $x_0 = 8$ к значению $x_0 + \Delta x = 9$, имеем:

$$\Delta S\Big|_{\substack{x_0=8\\ \Delta x=1}} = S(9) - S(8) = 9^2 - 8^2 = 17 \ \ (\text{см}^2),$$

$$dS\Big|_{\substack{x_0=8\\ \Delta x=1}} = 2\cdot 8\cdot 1 = 16 \ \ (\text{см}^2).$$

3. Ребра куба увеличены на 1 см. При этом дифференциал dV объема V куба оказался равным 12 см^3. Найти первоначальную длину ребер.

Решение. Пусть x — ребро куба. Тогда $V(x) = x^3$, $\Delta x = 1$ см, $dV = 12$. Необходимо найти x_0. Так как

$$dV = V'(x_0)\Delta x = 3x_0^2\Delta x,$$

то $12 = 3x_0^2\cdot 1$, $x_0^2 = 4$, откуда $x_0 = 2$.

4. Найти дифференциал функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = \pi/4$, если $\Delta x = 0{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}01$.

Решение. Так как

$$dy = f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{\cos^2 x_0}\Delta x,$$

то при $x_0 = \pi/4$, $\Delta x = 0{,}5$ имеем

$$dy\Big|_{\substack{x_0=\pi/4\\ \Delta x=0,5}} = \frac{1}{(\sqrt{2}/2)^2}\ \frac{1}{2} = 1.$$

Для $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta x = 0{,}01$ соответственно получаем:

$$dy\Big|_{\substack{x_0=\pi/4\\ \Delta x=0,1}} = 2\cdot 0{,}1 = 0{,}2,$$

$$dy\Big|_{\substack{x_0=\pi/4\\ \Delta x=0,01}} = 2\cdot 0{,}01 = 0{,}02.$$

5. Найти дифференциал функции $y = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$ при произвольных значениях аргумента x и при произвольном его приращении $\Delta x = dx$.

Решение. Так как

$$y' = 1\cdot\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x,$$

а $dy = y'dx$, то $dy = \operatorname{arctg} x dx$.

6. Вычислить приближенно $\cos 61°$.

Решение. Применим формулу (3.7). Здесь $f(x) = \cos x$, $x_0 = 60°$, $\Delta x = 1° = \pi/180$, $f'(x) = -\sin x$. Тогда:

$$\cos(x_0+\Delta x)\approx\cos x_0-\sin x_0\Delta x,$$

$$\cos(60^\circ+1^\circ)\approx\cos 60^\circ-\sin 60^\circ\cdot\frac{\pi}{180}=$$

$$=0{,}5-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}\approx 0{,}5-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3{,}14}{180}\approx 0{,}4868.$$

7. Вычислить приближенно $\operatorname{tg} 44^\circ$.

Решение. Воспользовавшись формулой (3.7), где $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x_0=45^\circ$, $\Delta x=-1^\circ=-\pi/180$, $f'(x)=1/\cos^2 x$, получим:

$$\operatorname{tg}(x_0+\Delta x)\approx\operatorname{tg} x_0-\frac{1}{\cos^2 x_0}\Delta x,$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ-1^\circ)\approx\operatorname{tg} 45^\circ-\frac{1}{\cos^2 45^\circ}\frac{\pi}{180}\approx$$

$$\approx 1+\frac{4}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right)\approx 0{,}9657.$$

8. Вычислить приближенно $\sqrt{5}$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.7) и будем рассматривать $\sqrt{5}$ как частное значение функции $y=\sqrt{x}$ при $x=x_0+\Delta x=5$. Пусть $x_0=4$, $\Delta x=1$. Тогда $f(x_0)=\sqrt{4}=2$, а

$$f'(x_0)=\left.\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\right|_{x_0=4}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{5}=\sqrt{4+1}\approx\sqrt{4}+\frac{1}{4}\cdot 1\approx 2{,}25.$$

9. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{10}$.

Решение. Будем рассматривать $\sqrt[3]{10}$ как частное значение функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ при $x=x_0+\Delta x=10$. Пусть $x_0=8$, $\Delta x=2$. Тогда $f(x_0)=\sqrt[3]{8}=2$,

$$f'(x_0)=\left.\frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}\right|_{x_0=8}=\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{3\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{12}$$

Применяя формулу (3.7), получаем

$$\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{8+2}\approx 2+\frac{1}{12}\cdot 2\approx 2{,}166.$$

10. Вычислить arctg 1,04.

Решение. Воспользуемся формулой (3.7). Здесь $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}04$, $f'(x_0)=1/(1+x_0^2)$. Тогда

$$\operatorname{arctg} 1{,}04 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{1+1^2}\cdot 0{,}04 = \frac{\pi}{4}+0{,}02 \approx$$
$$\approx 0{,}785+0{,}02 \approx 0{,}805 \approx 46°7'.$$

11. Убедиться в том, что функция y, заданная уравнением

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}, \qquad (1)$$

удовлетворяет соотношению $x(dy-dx)=y(dy+dx)$.

Решение. Исходная функция задана неявно. Найдем дифференциалы от обеих частей уравнения (1). Имеем:

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = d\left(ln\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

т. е.

$$\frac{1}{1+(y/x)^2}\,\frac{xdy-ydx}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2xdx+2ydy),$$
$$\frac{x^2}{x^2+y^2}\,\frac{xdy-ydx}{x^2} = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}.$$

Отсюда

$$xdy-ydx=xdx+ydy,\ dy=\frac{x+y}{x-y}dx,$$
$$x(dy-dx)=y(dy+dx),$$

что и требовалось доказать.

12. Найти dy, d^2y, если $y=4^{-x^2}$.

Решение. Так как $d^2y=d(dy)$, найдем сначала dy:

$$dy=f'(x)dx=4^{-x^2}\ln 4\cdot(-2x)dx.$$

Далее имеем

$$d^2y=f''(x)(dx)^2=-2\ln 4\cdot(4^{-x^2}x)'(dx)^2=$$
$$=-2\ln 4\cdot(4^{-x^2}\ln 4\cdot(-2x^2)+4^{-x^2})(dx)^2=$$
$$=-4^{-x^2}\cdot 2\ln 4\cdot(1-2x^2\ln 4)(dx)^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 3.81—3.86 найти дифференциал функции.

3.81. $y=\frac{a}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{a^3dx}{x^2(a^2+x^2)}.\right)$

3.82. $y=\sqrt{1+x^2}$. (*Ответ*: $xdx/\sqrt{1+x^2}$.)

3.83. $y=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$. $\left(\text{Ответ}: -\frac{4xdx}{1-x^4}.\right)$

3.84. $y=\arcsin\frac{1}{x}$. $\left(\text{Ответ}: -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.\right)$

3.85. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$. $\left(\text{Ответ}: \frac{dx}{2x\sqrt{4x-1}}.\right)$

3.86. $y=\operatorname{ctg}x+\frac{1}{\sin x}$. $\left(\text{Ответ}: -\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}dx.\right)$

3.87. Найти приближенное выражение для приращения: 1) ΔS площади кругового кольца; 2) ΔV объема сферической оболочки. (*Ответ*: 1) $\Delta S\approx dS=2\pi R dR$; 2) $\Delta V\approx dV=4\pi R^2 dR$.)

3.88. Найти dy, если $y=\cos x$ при $x=\pi/6$ и $\Delta x=\pi/36$. (*Ответ*: $dy=-\pi/72\approx-0{,}0436$.)

3.89. Пусть $y=x^3$. Определить Δy и dy и вычислить их при изменении x от 2 до 1,98. (*Ответ*: $\Delta y=-0{,}2376$, $dy=-0{,}24$.)

3.90. Период колебаний маятника $T=2\pi\sqrt{l/980}$ с, где l — длина маятника, см. Как нужно изменить длину маятника $l=20$ см, чтобы его период колебаний уменьшился на 0,1 с? (*Ответ*: $dl\approx 4{,}46$ см.)

В задачах 3.91—3.100 вычислить с помощью дифференциала приближенное значение данного выражения.

3.91. $\arcsin 0{,}4983$. (*Ответ*: 0,52164.)
3.92. $\operatorname{tg}45°3'$. (*Ответ*: 1,0018.)
3.93. $\ln 1{,}005$. (*Ответ*: 0,005.)
3.94. $\sin 30°2'$. (*Ответ*: 0,5005.)
3.95. $\sqrt[3]{511}$. (*Ответ*: 7,995.)
3.96. $\sqrt[4]{624}$. (*Ответ*: 4,998.)
3.97. $\sqrt{902}$. (*Ответ*: 30,03.)
3.98. $\sqrt[4]{257}$. (*Ответ*: 4,0039.)
3.99. $\sqrt[3]{730}$. (*Ответ*: 9,004.)

3.100. $\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-1}{(2{,}037)^2+1}}$. (*Ответ*: 0,782.)

3.4. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ РАСКРЫТИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

При раскрытии неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ применяется

Правило Лопиталя. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в δ-окрестности точки x_0 и $\varphi'(x) \neq 0$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, т. е. частное $f(x)/\varphi(x)$ в точке $x = x_0$ представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

при условии, что существует предел отношения производных.

Правило Лопиталя справедливо и в случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены при $x = x_0$, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$. Для того чтобы свести этот случай к уже рассмотренному, надо доопределить функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x = x_0$ так, чтобы они стали непрерывными в точке x_0. Для этого достаточно положить $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\varphi(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, так как предел отношения $f(x)/\varphi(x)$ при $x \to x_0$ не зависит от того, определены ли функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x = x_0$. Если $f'(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi'(x) = \infty$, $\varphi''(x) \neq 0$ и существует $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$, то приходим к формуле

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$$

и т. д.

Рассмотрим неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$. Тогда неопределенность вида $0 \cdot \infty$ преобразуют к неопределенности вида $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1/\varphi(x)}$$

или к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{1/f(x)}.$$

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, то выражение $f(x) - \varphi(x)$ можно преобразовать слудующим образом:

$$f(x) - \varphi(x) = f(x)(1 - \varphi(x)/f(x)),$$

а затем раскрыть неопределенность $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ вида $\frac{\infty}{\infty}$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{f(x)} \neq 1$, то $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - \varphi(x)) = \infty$.

Если же $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=1$, то получаем неопределенность вида $\infty\cdot 0$, рассмотренную выше.

Неопределенность вида $\infty-\infty$ можно также преобразовать к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}\frac{1/\varphi(x)-1/f(x)}{1/(f(x)\varphi(x))}\quad (\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty).$$

Рассмотрим неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞. Необходимо найти $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{\varphi(x)}$, где $f(x)$ при $x\to x_0$ в первом случае — бесконечно малая, во втором случае — бесконечно большая, в третьем случае — функция, имеющая предел, равный единице. Функция же $\varphi(x)$ при $x\to x_0$ в первых двух случаях является бесконечно малой, а в третьем — бесконечно большой.

Логарифмируя функцию $y=(f(x))^{\varphi(x)}$, получаем равенство $\ln y=\varphi(x)\ln f(x)$ и находим предел $\ln y$ при $x\to x_0$, после чего определяем предел y при $x\to x_0$. Во всех трех случаях $\ln y$ при $x\to x_0$ является неопределенностью вида $0\cdot\infty$, метод раскрытия которой изложен выше.

При вычислении пределов с помощью правила Лопиталя возможно использование эквивалентных бесконечно малых, ранее известных замечательных пределов и т. д.

Примеры

Вычислить пределы путем раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$.

Решение. Убедившись, что при $x\to 0$ имеет место неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-1/\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos^2 x}{\cos^2 x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(\cos x-1)\cos^2 x}{(\cos x-1)(\cos x+1)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1+\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, для раскрытия которой применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}.$$

Поскольку полученное выражение также представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то, применив еще два раза правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^4}$.

Решение. Так как данное выражение представляет собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, то, применив 5 раз правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{4x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{12x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{24x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{24}=\infty.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую раскрываем по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1/(1+x^2)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{(1+x^2)\cdot 2x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2(1+x^2)}=0.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$.

Решение. Раскрывая неопределенность вида $\frac{0}{0}$ по правилу Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{2\sin 5x\cdot\cos 5x\cdot 5}=\lim_{x\to 0}\frac{3(e^{3x}-1)}{5\sin 10x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}}{5\cdot 10\cos 10x}=\frac{9}{50}.$$

Найти пределы выражений, представляющих собой неопределенности вида $0\cdot\infty$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x^2}.$$

Полученное выражение представляет собой неопределенность вида $\frac{-\infty}{\infty}$. Для раскрытия ее применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-2/x^3} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

7. $\lim\limits_{x\to\pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Решение. Убедившись в том, что имеет место неопределенность вида $0 \cdot \infty$, преобразуем ее к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{1}{\pi - x}},$$

а затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{1}{\pi - x}} = \lim_{x\to\pi} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{-\frac{1}{(\pi - x)^2} \cdot (-1)} = \lim_{x\to\pi} \frac{(\pi - x)^2}{2\cos^2 \frac{x}{2}}.$$

В результате получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, для раскрытия которой применим два раза правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{(\pi - x)^2}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x\to\pi} \frac{2(\pi - x)(-1)}{4\cos \frac{x}{2} \cdot \left(-\sin \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{-2(\pi - x)}{-2\sin x} = \lim_{x\to\pi} \frac{-1}{\cos x} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Вычислить пределы, раскрывая неопределенности вида $\infty - \infty$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x - 1/x)$.

Решение. Записав $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$ и приведя данное выражение к общему знаменателю, получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x},$$

к которой применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=|\sin x\sim x \text{ при } x\to 0|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{1+\cos x}=\frac{0}{2}=0.$$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Решение. Приведя дроби к общему знаменателю, преобразуем неопределенность вида $\infty-\infty$ к неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)},$$

а затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+xe^x+e^x}=\frac{1}{2}.$$

Найти пределы выражений, раскрытия неопределенности вида 1^∞, 0^0, ∞^0.

10. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞. Положим $y=(e^x+x)^{1/x}$ и прологарифмируем обе части этого равенства:

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln(e^x+x).$$

Найдем

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}.$$

Так как последнее выражение представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то по правилу Лопиталя имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(e^x+x)}(e^x+1)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x}=\frac{1+1}{1+0}=2.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to0}\ln y=2$, то

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}(e^x+x)^{1/x}=e^2.$$

11. $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}$.

Решение. Данное выражение представляет собой неопределенность вида 0^0. Введем обозначение $y=x^{\sin x}$. Прологарифмировав обе части этого равенства, получим $\ln y=\sin x\ln x$. Отсюда

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}(\sin x\ln x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{1/\sin x}.$$

Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{1/\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1/x}{(-1/\sin^2x)\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x\cos x}=$$
$$=\left|\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\right|=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to0}\operatorname{tg}x=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}=e^0=1$.

12. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$.

Решение. Данное выражение представляет собой неопределенность вида ∞^0. Полагая $y=(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$ и логарифмируя обе части этого равенства, получаем

$$\ln y=(2x-\pi)\ln\operatorname{tg}x.$$

Тогда:

$$\lim_{x\to\pi/2}\ln y=\lim_{x\to\pi/2}(2x-\pi)\ln\operatorname{tg}x=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\dfrac{1}{2x-\pi}}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\,\dfrac{1}{\cos^2x}}{\dfrac{1}{(2x-\pi)^2}\cdot2}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x}=$$
$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2(2x-\pi)\cdot2}{2\cos2x}=0,$$
$$\lim_{x\to\pi/2}y=\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}=e^0=1.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 3.101—3.110 с помощью правила Лопиталя найти предел.

3.101. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{1/x^2}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\pi}$. (*Ответ*: 0.)

3.102. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \dfrac{4}{7}.\right)$

3.103. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a^{\ln x}-x}{\ln x}$. (*Ответ*: $\ln a-1$.)

3.104. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln e^x}{1-xe^x}$. (*Ответ*: 0.)

3.105. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-e^x}{\operatorname{tg}x-x}$. (*Ответ*: 1.)

3.106. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x-5}{7x^3-1}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \dfrac{4}{7}.\right)$

3.107. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$. (*Ответ*: 1.)

3.108. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \dfrac{1}{128}.\right)$

3.109. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln(1+1/x)}$. (*Ответ*: 2.)

3.110. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$. (*Ответ*: 1.)

В задачах 3.111—3.117 раскрыть неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$, преобразовав их предварительно к неопределенностям вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

3.111. $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}x)\ln x$. (*Ответ*: 0.)

3.112. $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\operatorname{ctg}(x-a)$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \dfrac{1}{a}.\right)$

3.113. $\lim\limits_{x\to\infty}(a^{1/x}-1)x$ $(a>0)$. (*Ответ*: $\ln a$.)

3.114. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } -\dfrac{1}{2}.\right)$

3.115. $\lim\limits_{x\to0}(1/x^2-\operatorname{ctg}^2 x)$. (*Ответ*: 1.)

3.116. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \dfrac{1}{2}.\right)$

3.117. $\lim\limits_{x\to1}\ln x\ln(x-1)$. (*Ответ*: 0.)

В задачах 3.118—3.124 раскрыть неопределенности вида 1^{∞}, 0^0, ∞^0, предварительно преобразовав их с помощью логарифмирования исходного выражения к неопределенности вида $0\cdot\infty$, а затем к $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

3.118. $\lim\limits_{x\to 0}(1/x)^{\operatorname{tg} x}$. (*Ответ:* 1.)

3.119. $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/\ln(e^x-1)}$. (*Ответ:* e.)

3.120. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x^2)^x$. (*Ответ:* 1.)

3.121. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$. (*Ответ:* 1.)

3.122. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$. (*Ответ:* e^{-6}.)

3.123. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{1/\sin x}$. (*Ответ:* $e^{-1/30}$.)

3.124. $\lim\limits_{x\to a}(2-x/a)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$. (*Ответ:* $e^{2/\pi}$.)

3.5. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Если функция $y=f(x)$ имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно в некотором интервале, содержащем точку $x=a$, то она может быть представлена в виде суммы многочлена n-й степени и остаточного члена $R_n(x)$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n, \tag{3.8}$$

где

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{3.9}$$

есть *остаточный член в форме Лагранжа*, $\xi=a+\theta(x-a)$; $0<\theta<1$. Формула (3.8) называется *формулой Тейлора*.

При $a=0$ получаем *формулу Маклорена:*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x), \tag{3.10}$$

где $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}}{(n+1)!}$; $0<\theta<1$

С помощью формулы Тейлора можно приближенно представить (аппроксимировать) функцию $f(x)$ в виде многочлена:

$$f(x)\approx f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \tag{3.11}$$

называемого *многочленом Тейлора* (или при $a=0$ *многочленом Маклорена*), если для функции $f(x)$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(a+\Theta(x-a))(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0,\ 0<\Theta<1. \quad (3.12)$$

Формула Тейлора позволяет оценить возникающую при этом погрешность R_n, которая может быть сделана сколь угодно малой только при тех значениях x, при которых $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

Приведем разложения некоторых функций по формуле Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n, \quad (3.13)$$

где $R_n(x) = \dfrac{e^{\Theta x} x^{n+1}}{(n+1)!}$; $0<\Theta<1$;

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}, \quad (3.14)$$

где $R_{2n}(x) = \dfrac{\sin\left(\Theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$; $0<\Theta<1$;

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}, \quad (3.15)$$

где $R_{2k+1}(x) = \dfrac{\cos\left(\Theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$; $0<\Theta<1$;

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 +$$
$$+ \ldots + \frac{m(m-1)\cdots(m-(n-1))}{n!}x^n + R_n, \quad (3.16)$$

где $R_n(x) = \dfrac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1}(1+\Theta x)^{m-n-1}$; $0<\Theta<1$;

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_n(x), \quad (3.17)$$

где $R_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+1}\left(\dfrac{x}{1+\Theta x}\right)^{n+1}$; $0<\Theta<1$.

Для многих функций формула Маклорена неприменима, ибо при $x=0$ они или их производные не существуют (например, $\ln x$, $\sqrt{x}$, $\operatorname{ctg} x$, $1/x$).

Формулу Тейлора используют при вычислении значений функции с заданной степенью точности. Пусть, например, требуется вычислить значение функции $f(x)$ в точке x_0 с абсолютной погрешностью, не превосходящей ε, если известно значение этой функции и ее производных в точке a. Из формулы Тейлора следует, что

$$f(x_0) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x_0 - a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n_0!}(x_0 - a)^{n_0},$$

где n_0 — минимальный из номеров n, для которых $|R_{n+1}(x_0)| < \varepsilon$.

Примеры

1. Разложить многочлен $x^4-5x^3+x^2-3x+4$ по степеням $x-4$.

Решение. Если $a=4$, то

$$f(4)=4^4-5\cdot4^3+4^2-3\cdot4+4=-56.$$

Так как $f'(x)=4x^3-15x^2+2x-3$, то

$$f'(4)=4^4-15\cdot4^2+2\cdot4-3=21.$$

Аналогично получаем:

$$f''(x)=12x^2-30x+2,\ f''(4)=12\cdot4^2-30\cdot4+2=74;$$
$$f'''(x)=24x-30,\ f'''(4)=24\cdot4-30=66;$$
$$f^{(IV)}(x)=24,\ f^{(IV)}(4)=24;\ f^{(V)}(x)=0.$$

Подставляя найденные значения в формулу (3.11), получаем

$$x^4-5x^3+x^2-3x+4=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+$$
$$+11(x-4)^3+(x-4)^4.$$

2. Найти первые 3 члена разложения по формуле Тейлора при $x=2$ функции $f(x)=x^8-2x^7+5x^6-x+3$. Подсчитать приближенно значения $f(2{,}02)$ и $f(1{,}97)$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.11) для $n=$ $=2$. Так как

$$f(2)=2^8-2^8+5\cdot2^6-2+3=321,$$
$$f'(x)=8x^7-14x^6+30x^5-1,$$
$$f'(2)=8\cdot2^7-14\cdot2^6+30\cdot2^5-1=1087,$$
$$f''(x)=56x^6-14\cdot6x^5+150x^4,$$
$$f''(2)=56\cdot2^6-14\cdot6\cdot2^5+150\cdot2^4=$$
$$=2^5(112-84+75)=3296,$$

то

$$f(x)\approx321+1087(x-2)+1648(x-2)^2.$$

Следовательно,

$$f(2{,}02)\approx321+1087(2{,}02-2)+1648(2{,}02-2)^2=343{,}3992,$$
$$f(1{,}97)\approx321+1087(1{,}97-2)+1648(1{,}97-2)^2=289{,}8732;$$

3. Записать формулу Тейлора n-го порядка для функции $y=1/x$ при $x_0=-1$.

Решение. Находим значения функции и всех ее производных в точке $x_0=-1$:

$$f(-1)=1;\ f'(x)=-1/x^2=-x^{-2},\ f'(-1)=-1;$$
$$f''(x)=(-1)(-2)x^{-3},\ f''(-1)=(-1)^2\cdot2!;$$

$$f'''(x)=(-1)(-2)(-3)x^{-4},\ f'''(-1)=(-1)^3\cdot 3!;$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,x^{-(n+1)},\ f^{(n)}(-1)=\frac{n!(-1)^n}{(-1)^{n+1}}=-n!$$

Так как $x_0+\Theta(x-x_0)=-1+\Theta(x+1)$, то

$$f^{(n+1)}(-1+\Theta(x+1))=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(-1+\Theta(x+1))^{n+2}}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу Тейлора (3.11), имеем:

$$\frac{1}{x}=-1-(x+1)-\frac{2}{2!}(x+1)^2-\frac{6}{3!}(x+1)^3-\ldots-$$
$$-\frac{n!}{n!}(x+1)^n+\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!(x+1)^{n+1}}{(-1+\Theta(x+1))^{n+2}(n+1)!}$$

или

$$\frac{1}{x}=-1-(x+1)-(x+1)^2-(x+1)^3-\ldots-(x+1)^n+$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{(-1+\Theta(x+1))^{n+2}}.$$

4. Вычислить с точностью до 10^{-3} приближенное значение $\sqrt[3]{29}$.

Решение. Выполним преобразования:

$$\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{27+2}=\sqrt[3]{27(1+2/27)}=3(1+2/27)^{1/3}.$$

Воспользуемся разложением (3.16), для которого погрешность R_n можно сделать сколь угодно малой при $|x|<1$ и достаточно большом n. Имеем

$$\sqrt[3]{29}=3\left(1+\frac{2}{27}\right)^{1/3}\approx 3\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{2}{27}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}\,\frac{4}{27\cdot 27}+\right.$$
$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{2\cdot 3}\,\frac{8}{27^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{2\cdot 3\cdot 4}\times$$
$$\left.\times\frac{2^4}{27^4}+\ldots+R_n\right)=$$
$$=3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{2}{81}\,\frac{2}{81}+\frac{5}{3}\left(\frac{2}{81}\right)^3-\frac{5}{3}\,\frac{2^5}{81^4}+\ldots\right).$$

Оценивая величины последовательных ошибок вычисления $3|R_n|$, находим:

$$3|R_1|=3\cdot\left|\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(\frac{2}{27}\right)\left(1+\frac{2\Theta}{27}\right)^{-5/3}\right|<\frac{3\cdot 4}{81}<0{,}002,$$

$$3|R_2|=3\cdot\left|\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}\left(\frac{2}{27}\right)^3\left(1+\frac{2\Theta}{27}\right)^{-8/3}\right|<$$

$$<\frac{3\cdot 8\cdot 5}{81^3}<0{,}0003.$$

Следовательно, для вычисления с заданной точностью достаточно взять сумму трех первых членов из формулы (3.16), которые предшествуют остатку R_2, т. е.

$$\sqrt[3]{29}\cong 3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{4}{81^2}\right)\approx 3{,}072.$$

5. Вычислить $\cos 10°$ с точностью до 0,001 с помощью формулы Тейлора.

Решение. Избавляясь от неизвестного параметра Θ, в силу неравенства $\left|\cos\Theta x+(2n+2)\frac{\pi}{2}\right|\leqslant 1$, получаем неравенство

$$|R_{2n+1}|\leqslant x^{2n+2}/(2n+2)!,$$

которое позволяет легко оценить погрешность при замене функции $\cos x$ многочленом. Воспользовавшись разложением (3.15) с учетом того, что $10°=\pi/18\approx 0{,}174$, получаем

$$|R_3|\leqslant\left(\frac{\pi}{18}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}\approx\frac{0{,}174^4}{24}<\frac{0{,}2^4}{24}\approx 0{,}0006.$$

Таким образом, для достижения требуемой точности достаточно взять два первых члена формулы Тейлора. Следовательно,

$$\cos 10°\approx 1-0{,}174^2/2\approx 0{,}9847.$$

Замечание При любом значении x и $n\to\infty$ остаточный член R_{2n+1} формулы Маклорена для функции $\cos x$ сремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}R_{2n+1}=0$. Отсюда следует, что при любом значении x функцию $\cos x$ можно аппроксимировать ее многочленом Маклорена с любой заданной точностью, причем последовательное повышение точности аппроксимации достигается путем простого увеличения числа членов аппроксимирующего многочлена. Полагая $n=1, 2, 3$, получаем простейшие приближенные формулы для $\cos x$:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \ |R_3| \leqslant \frac{x^4}{4!}; \ \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \ |R_5| \leqslant \frac{x^6}{6!};$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}, \ |R_7| \leqslant \frac{x^8}{8!},$$

которые расположены в порядке повышающейся точности.

Задачи для самостоятельного решения

3.125. Разложить многочлен $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ по степеням двучлена $x + 1$. (*Ответ:* $(x+1)^3 - 5(x+1) + 8$.)

3.126. Записать формулу Тейлора n-го порядка для функции $y = \sqrt{x}$ при $a = 4$. $\Bigl($*Ответ:* $\sqrt{x} = 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!(x-4)^n}{n!(n-1)! \cdot 2^{4n-2}} + \frac{(-1)^n(2n)!(x-4)^{n+1}}{2^{2n+1}n!(n+1)!\sqrt{4+\Theta(x-4)}^{2n+1}}$, $0 < \Theta < 1$.$\Bigr)$

3.127. Дан многочлен $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$. Найти первые три члена разложения по степеням $x - 2$. Вычислить приближенно $f(2,1)$. Вычислить $f(2,1)$ точно и найти абсолютную δ и относительную δ' погрешности вычислений. (*Ответ:* $f(x) = -6 + 21(x-2) + 50(x-2)^2 + \ldots$; $f(2,1) \approx -3{,}4$; $f(2,1) = -3{,}36399$; $\delta = 0{,}036$; $\delta' \approx 0{,}011 = 1{,}1\ \%$.)

3.128. Пользуясь приближенной формулой $e^x \approx 1 + x + x^2/2$, найти $1/\sqrt[4]{e}$ и оценить погрешность вычислений. (*Ответ:* 0,78, $\delta < 0{,}01$.)

3.129. Вычислить с точностью до 0,001: 1) $\sin 18°$; 2) $\sqrt[5]{33}$. (*Ответ:* 1) 0,309; 2) 2,012.)

3.130. Вычислить с точностью до 0,001 $\cos 41°$. (*Ответ:* 0,754.)

3.131. Вычислить с точностью до 0,001 $\sin 36°$. (*Ответ:* 0,587.)

3.6. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей в интервале* $(a;\ b)$, если для $x_1 > x_2$, где x_1, $x_2 \in (a;\ b)$, выполняется условие $f(x_1) > f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей в интервале* $(a;\ b)$, если для $x_1 > x_2$, где x_1, $x_2 \in (a;\ b)$, выполняется условие $f(x_1) < f(x_2)$.

Теорема 1 (**достаточное условие возрастания и убывания функции**). *Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в интервале $(a;\ b)$ и $f'(x)>0$ при всех $x\in(a;\ b)$, то функция $f(x)$ возрастает в $(a;\ b)$; если $f'(x)<0$ для всех $x\in(a;\ b)$, то $f(x)$ убывает в $(a;\ b)$.*

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $y=f(x)$, если существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, что для $x\in U_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$; если же для $x\in U_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой максимума*. При этом число $f(x_0)$ называется *максимумом (минимумом)* функции. Точки минимума и максимума функции называются ее *точками экстремума*.

Теорема 2 (**необходимое условие существования экстремума**). *Если функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.*

Точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует, называются *критическими*. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Теорема 3 (**достаточные условия существования экстремума**). 1. *Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ критической точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки. Если $f'(x)>0$ для $x\in(x_0-\delta;\ x_0)$ и $f'(x)<0$ для $x\in(x_0;\ x_0+\delta)$, то x_0 — точка максимума. Если же $f'(x)<0$ для $x\in$ $\in(x_0-\delta;\ x_0)$ и $f'(x)>0$ для $x\in(x_0;\ x_0+\delta)$, то x_0 — точка минимума. Если $f'(x)$ при $x\in(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, $x\neq x_0$, сохраняет знак, то точка x_0 не является точкой экстремума.*

2. *Пусть $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$. Тогда функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, если $f''(x_0)<0$, и минимум, если $f''(x_0)>0$.*

3. *Пусть $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Если $n=$ $=2k+1$, $k\in\mathbf{N}$, то в точке x_0 экстремума нет. Если же $n=2k$, то в точке x_0 будет максимум при $f^{(n)}(x_0)<0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0)>0$.*

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то она достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значений.

Для нахождения *наибольшего (наименьшего) значения функции $y=f(x)$ на отрезке* $[a;\ b]$ необходимо вычислить значения функции на концах этого отрезка и в критических точках, принадлежащих ему, а затем из всех полученных значений выбрать наибольшее (наименьшее).

Примеры

Найти промежутки возрастания, убывания и точки экстремума данных функций.

1. $y=\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x+\frac{9}{4}$.

Решение. Функция определена для $x\in(-\infty;\ +\infty)$. Находим ее производную:

$$y'=x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3).$$

Так как $y'=0$ при $x=1$, $x=2$, $x=3$, то $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ — критические точки данной функции.

Область определения разбивается критическими точками на четыре интервала: $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup(2;\ 3)\cup$ $\cup(3;\ +\infty)$. Определим знак y' на каждом из них. Для этого в каждом интервале возьмем точку и выясним, какой знак имеет y' в этой точке, затем применим достаточное условие возрастания или убывания функции. В результате получим, что для $x \in (-\infty;\ 1) \cup (2;\ 3)$ функция убывает, а для $x \in (1;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$ возрастает. Следовательно, при $x = 1$, $x = 3$ функция имеет минимум, а при $x = 2$ максимум. Вычислим значения функции в этих точках: $y(1) = 0$, $y(2) = 1/4$, $y(3) = 0$.

Таким образом, $(1, 0)$, $(3, 0)$ — точки минимума, $(2, 1/4)$— точка максимума (рис. 3.6).

2. $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4.$

Решение. Функция определена для $x \in (-\infty;\ +\infty)$, ее производная

$$y' = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2) = 3(x + 1)(x - 2).$$

Поскольку $y' = 0$ при $x = -1$ и $x = 2$, то разбиваем область определения функции на три интервала: $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$. Определив знак y' в каждом из этих интервалов, получим: $y' > 0$ для $x \in (-\infty;\ -1) \cup \cup (2;\ +\infty)$, следовательно, $f(x)$ возрастает в данном интервале; $y' < 0$ для $x \in (-1;\ 2)$ и $f(x)$ убывает в этом интервале.

Так как при переходе через точку $x = -1$ производная y' меняет знак с «+» на «−», то в точке $x = -1$ функция имеет максимум. При переходе

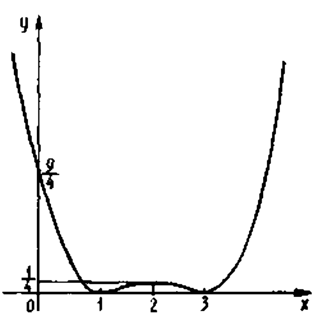


Рис 36

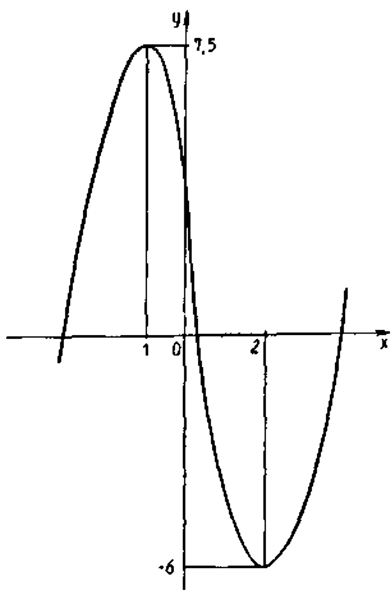


Рис 37

через точку $x=2$ y' меняет знак с «—» на «+», т. е. при $x=2$ функция имеет минимум. Вычислив значения функции в этих точках, получим: $y(-1)=7{,}5$, $y(2)=-6$.

Таким образом, $(-1;\ 7{,}5)$ — точка максимума, $(2, -6)$ — точка минимума (рис. 3.7).

3. $y=x^2e^{-x}$.

Решение. Функция определена для всех $x\in(-\infty;\ +\infty)$. Ее производная

$$y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}x(2-x).$$

Так как $y'=0$ при $x=0$ и $x=2$, то $x_1=0$, $x_2=2$ — критические точки данной функции. Область определения функции разобьем на три интервала: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 2)\cup\cup(2;\ +\infty)$. Определив знак y' в каждом из этих интервалов, получим, что: для $x\in(-\infty;\ 0)$ $y'<0$, для $x\in(0;\ 2)$ $y'>0$ и для $x\in(2;\ +\infty)$ $y'<0$. Следовательно, при $x\in(-\infty;\ 0)\cup(2;\ +\infty)$ функция $f(x)$ убывает, а при $x\in\in(0;\ 2)$ — возрастает.

Так как при переходе через точку $x=0$ производная y' меняет знак с «—» на «+», то при $x=0$ функция имеет минимум; при переходе через точку $x=2$ y' меняет знак с «+» на «—», следовательно, при $x=2$ функция имеет максимум. Вычислим значения функции в этих точках: $f(0)=0$, $f(2)=4/e^2$. Следовательно, имеем: $(0,\ 0)$ — точка максимума, $(2{,}4/e^2)$ — точка минимума.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=3x-x^3$ на отрезке $[-2;\ 3]$.

Решение. Имеем

$$f'(x)=3-3x^2=3(1-x^2)=3(1-x)(1+x).$$

Так как $f'(x)=0$ при $x=-1$, $x=1$, то $x_1=-1$, $x_2==1$ — критические точки данной функции, причем обе они принадлежат отрезку $[-2;\ 3]$. Вычислив значение функции в этих точках и на концах отрезка, получим:

$$f(-1)=-3+1=-2,\ f(1)=3-1=2,$$
$$f(-2)=3(-2)-(-2)^3=2,\ f(3)=3\cdot 3-3^3=-18.$$

Следовательно, наибольшее значение функции на данном отрезке равно 2, а наименьшее равно -18.

5. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R.

Решение. Обозначим высоту конуса BD через x (рис. 3.8). Так как $OB=R$, то $OD=x-R$, $AD^2=R^2-(x-R)^2=2Rx-x^2$. Учитывая, что объем конуса определяется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi AD^2 BD$, получаем

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi(2Rx - x^2)x = \frac{1}{3}\pi(2Rx^2 - x^3).$$

Найдем производную:

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(4Rx - 3x^2) = \frac{\pi x}{3}(4R - 3x).$$

Так как $V'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 4R/3$, то отсюда следует, что $x_1 = 0$, $x_2 = 4R/3$ — критические точки функции $V(x)$.

Проверим достаточные условия экстремума с помощью второй производной:

$$V''(x) = \frac{1}{3}\pi(4R - 6x).$$

Поскольку

$$V''\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(4R - 6\cdot\frac{4R}{3}\right) = -\frac{4\pi R}{3} < 0,$$

то в точке $x = 4R/3$ функция $V(x)$ имеет максимум, а наибольший объем конуса

$$V_{\text{наиб}} = \frac{\pi}{3}\left(2R\frac{16R^2}{9} - \frac{64R^3}{27}\right) = \frac{32\pi R^3}{81}.$$

6. Завод A отстоит от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через город B, на a км (считая по кратчайшему расстоянию). Под каким углом φ к железной дороге следует построить подъездной путь, чтобы транспортировка грузов из A в B была наиболее экономичной, если стоимость провоза 1 т груза на расстояние 1 км со-

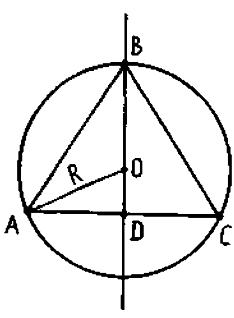


Рис. 3.8

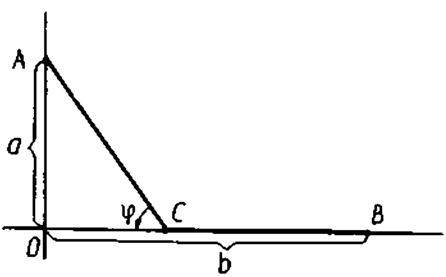


Рис. 3.9

ставляет по подъездному пути p р., по железной дороге q р. $(p > q)$ и город B расположен на b км севернее завода A (рис. 3.9)?

Решение. Пусть Q — стоимость провоза 1 т груза из A в B, Q_1 — стоимость провоза 1 т груза по подъездному пути AC, Q_2 — стоимость провоза 1 т груза по железной дороге CB (см. рис. 3.9). Тогда $Q = Q_1 + Q_2$. Так как $OA = a$, $OB = b$, $AC = a \sin\varphi$, $BC = OB - OC = b - a \operatorname{ctg}\varphi$, то

$$Q_1(\varphi) = AC \cdot p = ap/\sin\varphi, \quad Q_2(\varphi) = BC \cdot q = (b - a \operatorname{ctg}\varphi)q,$$

$$Q(\varphi) = ap/\sin\varphi + (b - a \operatorname{ctg}\varphi)q$$

Находим критические точки функции $Q(\varphi)$:

$$Q'(\varphi) = \frac{ap}{\sin^2\varphi}(-\cos\varphi) + \frac{aq}{\sin^2\varphi} = \frac{a}{\sin^2\varphi}(q - p\cos\varphi).$$

Поскольку $Q'(\varphi) = 0$, если $q - p\cos\varphi = 0$, то $\cos\varphi = q/p$, откуда следует, что $\varphi = \arccos(q/p)$ — критическая точка функции $Q(\varphi)$ (значение $\varphi = 0$ не подходит по смыслу). Так как $a/\sin^2\varphi > 0$, то $Q'(\varphi) < 0$, если $\cos\varphi < q/p$, и $Q'(\varphi) > 0$, если $\cos\varphi > q/p$.

Следовательно, при $\varphi = \arccos(q/p)$ функция $Q(\varphi)$ имеет минимум, т. е. транспортировка грузов при полученном значении φ будет наиболее экономичной.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 3.132—3.140 найти интервалы монотонности функции.

3.132. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$. (*Ответ*: возрастает на $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, убывает на $(-1; 1)$.)

3.133. $y = x/\ln x$. (*Ответ*: убывает на $(0; 1) \cup (1; e)$, возрастает на $(e; +\infty)$.)

3.134. $y = \ln\sqrt{1 + x^2}$. (*Ответ*: убывает на $(-\infty; 0)$, возрастает на $(0; +\infty)$.)

3.135. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 1$. (*Ответ*: возрастает на $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$, убывает на $(-2; 1)$.)

3.136. $y = e^x/x$. (*Ответ*: убывает на $(-\infty; 1)$, возрастает на $(1; +\infty)$.)

3.137. $y = x + \cos x$. (*Ответ*: возрастает на $(-\infty; +\infty)$.)

3.138. $y = (x-3)\sqrt{x}$. (*Ответ*: возрастает на $(1; +\infty)$, убывает на $(0; 1)$.)

3.139. $y = \arcsin(1+x)$. (*Ответ*: возрастает на $(-2; 0)$.)

3.140. $y = x/(x^2 - 6x - 16)$. (*Ответ*: убывает на $(-\infty; -2) \cup (-2; 8) \cup (8; +\infty)$.)

В задачах 3.141—3.148 найти экстремумы функции.

3.141. $y = \frac{2}{3} x^2 \sqrt[3]{6x-7}$. (*Ответ*: (0, 0) — точка максимума, (1, $-2/3$) — точка минимума.)

3.142. $y = \frac{16}{x(4-x^2)}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } (-2/\sqrt{3}, \ -3\sqrt{3})\right.$ — точка максимума, $(2/\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ — точка минимума.)

3.143. $y = x - \operatorname{arctg} x$. (*Ответ*: экстремума нет.)

3.144. $y = (x-2)(8-x)/x^2$. (*Ответ*: (3, 2; 9/16) — точка максимума.)

3.145. $y = 2\sin 2x + \sin 4x$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi,\ -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\right.$ — точка минимума, $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi,\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ — точка максимума, $\left. k \in \mathbf{Z}.\right)$

3.146. $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$. (*Ответ*: $(\pm 1,\ 0)$ — точка минимума, (0, 1) — точка максимума.)

3.147. $y = (x^2 - 2x)\ln x - \frac{3}{2} x^2 + 4x$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } (1;\ 2{,}5)\right.$ — точка максимума, $\left(e,\ \frac{e(4-e)}{2}\right)$ — точка минимума.$\left.\right)$

3.148. $y = x\ln^2 x$. (*Ответ*: $(1/e^2,\ 4/e^2)$ — точка максимума, (1, 0) — точка минимума.)

В задачах 3.149—3.152 найти наименьшее m и наибольшее M значения функции на отрезке.

3.149. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$; 1) $x \in [-1; 5]$; 2) $x \in [-10; 12]$. (*Ответ*: 1) $m = -6$ при $x = 1$, $M = 266$ при $x = 5$; 2) $m = -1579$ при $x = -10$, $M = 3745$ при $x = 12$.)

3.150. $y = (x-1)/(x+1)$, $x \in [0; 4]$. (*Ответ*: $m = -1$ при $x = 0$, $M = 3/5$ при $x = 4$.)

3.151. $y = \sin 2x - x$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$. (*Ответ*: $m = -\pi/2$ при $x = \pi/2$, $M = \pi/2$ при $x = -\pi/2$.)

3.152. $y=\sqrt{x(10-x)}$, $x\in[0;\ 10]$. (*Ответ*: $m=0$ при $x=0$ и $x=10$, $M=5$ при $x=5$.)

3.153. В шар радиусом $2\sqrt{3}$ вписан цилиндр. Найти высоту цилиндра, при которой он имеет наибольший объем. (*Ответ*: 4.)

3.154. В равнобедренный треугольник с длинами сторон 15, 15 и 18 см вписан параллелограмм наибольшей площади так, что угол при основании у них общий. Найти стороны параллелограмма. (*Ответ*: 9; 7,5.)

3.155. Каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника, вписанного в данный круг, чтобы его периметр был наибольшим? (*Ответ*: 60°.)

3.156. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиусом R таким образом, что центр основания конуса лежит в центре шара. (*Ответ*: $R\sqrt{3}$.)

3.157. Найти высоту H прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиусом R. (*Ответ*: $4R$.)

3.158. Из круглого бревна диаметром d требуется вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина x и высота y этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление: 1) на сжатие; 2) на изгиб? (*Указание*. Сопротивление балки на сжатие пропорционально площади ее поперечного сечения, а сопротивление на изгиб — произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты.) (*Ответ*: 1) $x=y=d/\sqrt{2}$; 2) $x=d/\sqrt{3}$, $y=d\sqrt{2/3}$.)

3.159. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей? (*Ответ*: $18/(4+\pi)$.)

3.160. Определить наименьшую высоту $h=OB$ двери вертикальной башни $ABCD$, чтобы через эту дверь в башню можно было внести жесткий стержень MN длиной l, конец которого M скользит вдоль горизонтальной прямой AB. Ширина башни $d<l$. (*Ответ*: $h=(l^{2/3}-d^{2/3})^{3/2}$.)

3.161. Два источника света расположены в 30 м друг от друга. Найти наименее освещенную точку на прямой, соединяющей их, если силы света источников относятся как 27:8. (*Ответ*: в 18 м от более сильного источника.)

3.162. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала. (*Ответ*: 4; 4; 2.)

3.163. Балка прямоугольного сечения со свободно опертыми концами равномерно нагружена по всей длине. Стрелка ее прогиба обратно пропорциональна моменту инерции сечения балки $I = xy^3/12$, где x, y — размеры балки. Определить размеры балки при наименьшей стреле прогиба, если балка вырезана из круглого бревна диаметром d. (*Ответ*: $x = d/2$, $y = d\sqrt{3}/2$.)

3.164. Два самолета летят в одной плоскости и прямолинейно под углом 120° с одинаковой скоростью v км/ч. В некоторый момент один самолет достиг точки пересечения траекторий движения, а другой не дошел до нее на a км. Через какое время расстояние между самолетами будет наименьшим? Вычислить это расстояние. (*Ответ*: через $a/(2v)$ ч; $a/2$ км.)

3.7. ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ КРИВОЙ, ТОЧКИ ПЕРЕГИБА. АСИМПТОТЫ

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым в интервале* (a, b), если на этом интервале дуга кривой расположена ниже касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в любой точке $x \in (a; b)$ (рис. 3.10). График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым в интервале* $(a; b)$, если на этом интервале дуга кривой расположена выше касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в любой точке $x \in (a; b)$ (рис. 3.11).

Теорема 1 **(достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции).** *Если функция $y = f(x)$ в интервале (a, b) дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ для любого $x \in (a; b)$, то график функции в интервале $(a; b)$ выпуклый; если же $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a, b)$, то график функции $y = f(x)$ в интервале $(a; b)$ вогнутый.*

Точка $(x_0, f(x_0))$ графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его выпуклую (вогнутую) часть от вогнутой (выпуклой), называется *точкой перегиба*.

Теорема 2 **(необходимое условие существования точки перегиба графика функции).** *Если x_0 — точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.*

Теорема 3 **(достаточное условие существования точки перегиба).** *Если x_0 — критическая точка второго рода для функции $y = f(x)$ и при*

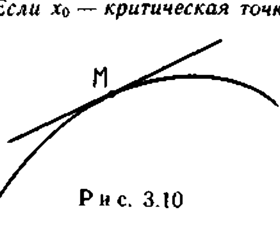


Рис. 3.10

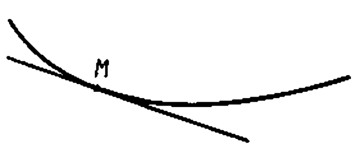


Рис. 3.11

$\delta > 0$ *выполняются неравенства* $f''(x_0 - \delta) < 0$, $f''(x_0 + \delta) > 0$ (*или неравенства* $f''(x_0 - \delta) > 0$, $f''(x_0 + \delta) < 0$), *то точка кривой* $y = f(x)$ *с абсциссой* x_0 *является точкой перегиба.*

Прямая L называется *асимптотой* кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, y)$ кривой до прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от $O(0, 0)$ (т. е. при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности)

Для нахождения асимптот пользуются следующими утверждениями.

1°. Если при $x = a$ кривая $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, то прямая $x = a$ является ее *вертикальной асимптотой.* Заметим, что непрерывные функции не имеют вертикальных асимптот

2°. *Наклонные асимптоты* кривой $y = f(x)$, если они существуют, имеют уравнения $y = kx + b$, где параметры k и b определяются формулами:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx),$$

причем в обеих формулах $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Если $k = 0$, получаем *горизонтальную асимптоту* $y = b$.

Замечание. Если $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ не существует или бесконечен, либо $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$ не существует или бесконечен, то наклонных асимптот нет.

Примеры

1. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$.

Решение. Находим первую и вторую производные данной функции:

$$y' = 3x^2 - 10x + 3, \quad y' = 6x - 10.$$

Так как $y'' = 6x - 10 = 0$ при $x = 5/3$, исследуем знак второй производной y'' в окрестности точки $x = 5/3$. Для $x \in (-\infty;\ 5/3)$ $y'' < 0$, следовательно, на этом интервале график выпуклый; для $x \in (5/3;\ +\infty)$ $y'' > 0$, значит, на этом интервале график вогнутый. Таким образом, $x = 5/3$ — абсцисса точки перегиба. Поскольку

$$f(5/3) = (5/3)^3 - 5(5/3)^2 + 3 \cdot 5/3 - 5 = -250/27,$$

то окончательно имеем: $(5/3,\ -250/27)$ — точка перегиба графика данной функции.

2. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3a^2}$ $(a > 0)$.

Решение. Находим первую и вторую производные данной функции:

$$y' = \frac{3x^2(x^2+3a^2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+3a^2)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 + 9a^2x^2}{(x^2+3a^2)^2} = \frac{x^4+9a^2x^2}{(x^2+3a^2)^2},$$

$$y'' = \frac{(4x^3+18a^2x)(x^2+3a^2)^2 - 2(x^2+3a^2)\cdot 2x(x^4+9a^2x^2)}{(x^2+3a^2)^4} =$$

$$= \frac{4x^5+18a^2x^3+12x^3a^2+54a^4x - 4x^5 - 36a^2x^3}{(x^2+3a^2)^3} =$$

$$= \frac{54a^4x - 6a^2x^3}{(x^2+3a^2)^3} = \frac{6a^2x(9a^2-x^2)}{(x^2+3a^2)^3}.$$

Решая уравнение $y''=0$ или $x(9a^2-x^2)=0$, получаем: $x_1=-3a$, $x_2=0$, $x_3=3a$.

Разбиваем область определения функции на интервалы: $(-\infty; -3a)$, $(-3a; 0)$, $(0; 3a)$, $(3a; +\infty)$ и на каждом из них определяем знак второй производной. Тогда для $x \in (-\infty; -3a)$ $y''>0$, график вогнутый; для $x \in \in (-3a; 0)$ $y''<0$, график выпуклый; для $x \in (0; 3a)$ $y''>0$, график вогнутый; для $x \in (3a; +\infty)$ $y''<0$, график выпуклый. Следовательно, $x_1=-3a$, $x_2=0$, $x_3=3a$ — абсциссы точек перегиба.

Находим ординаты точек перегиба:

$$y(-3a) = \frac{(-3a)^3}{(-3a)^2+3a^2} = \frac{-27a^3}{9a^2+3a^2} = -\frac{9}{4}a,$$

$$y(0)=0,\ y(3a) = \frac{(3a)^3}{(-3a)^2+3a^2} = \frac{27a^3}{9a^2+3a^2} = \frac{9}{4}a.$$

Окончательно имеем: $(-3a, -9a/4)$, $(0, 0)$, $(3a, 9a/4)$ — точки перегиба графика данной функции.

3. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{2x^2-9}{x+2}$.

Решение. При $x=-2$ данная функция имеет бесконечный разрыв, так как $\lim\limits_{x\to -2+0} \dfrac{2x^2-9}{x+2} = -\infty$. Поэтому прямая $x=-2$ является вертикальной асимптотой кривой.

Определим, существуют ли наклонные асимптоты. Для этого вычислим:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-9}{x(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-9/x^2}{1+2/x^2} = 2,$$

$$b = \lim_{x \to \infty}(f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{2x^2 - 9}{x+2} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty}\frac{2x^2 - 9 - 2x^2 - 4x}{x+2} = \lim_{x \to \infty}\frac{-4x - 9}{x+2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty}\frac{-4 - 9/x}{1 + 2/x} = -4.$$

Подставляя найденные значения k и b в формулу $y = kx + b$, получаем уравнение наклонной асимптоты $y = 2x - 4$. Других наклонных асимптот кривая не имеет, поскольку при $x \to -\infty$ значения k и b будут такими же.

4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба, асимптоты графика функции $y = \frac{2x^2}{2x-1}$.

Решение. Область определения данной функции: $(-\infty;\ 1/2) \cup (1/2;\ +\infty)$, а $x = 1/2$ — точка разрыва второго рода, так как $\lim_{x \to 1/2 - 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1/2 + 0} f(x) = +\infty$. Следовательно, $x = 1/2$ — вертикальная асимптота.

Проверим, существуют ли наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty}\frac{2x^2}{x(2x-1)} = \lim_{x \to \infty}\frac{2x^2}{2x^2 - x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty}\frac{4x}{4x-1} = \lim_{x \to \infty}\frac{4}{4 - 1/x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty}(f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{2x^2}{2x-1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty}\frac{2x^2 - x(2x-1)}{2x-1} = \lim_{x \to \infty}\frac{2x^2 - 2x^2 + x}{2x-1} =$$

$$= \lim_{x \to \infty}\frac{x}{2x-1} = \lim_{x \to \infty}\frac{1}{2 - 1/x} = \frac{1}{2}.$$

Подставляя найденные значения k и b в уравнение $y = kx + b$, получаем уравнение наклонной асимптоты $y = x + 1/2$ графика данной функции при $x \to +\infty$. Так как $\lim_{x \to -\infty}(f(x)/x) = 1$ и $\lim_{x \to -\infty}(f(x) - x) = 1/2$, то эта же прямая $y = x + 1/2$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$.

Находим первую и вторую производные данной функции:

$$y' = \frac{4x(2x-1) - 2x^2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{8x^2 - 4x - 4x^2}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x}{(2x-1)^2},$$

$$y'' = \frac{(16x - 4)(2x-1)^2 - 2(2x-1) \cdot 2(4x^2 - 4x)}{(2x-1)^4} = \frac{4}{(2x-1)^3}.$$

Исследуем знак y'' в окрестности точки $x=1/2$. Для $x\in(-\infty;\ 1/2)$ $y''<0$, график выпуклый; для $x\in(1/2;\ +\infty)$ $y''>0$, график вогнутый, но $x=1/2$ не может быть абсциссой точки перегиба, так как в этой точке функция не определена. Следовательно, данная функция не имеет точек перегиба.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 3.165—3.172 найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции.

3.165. $y=x+36x^2-2x^3-x^4$. (*Ответ:* $(-3,\ 294)$, $(2,\ 114)$—точки перегиба; график выпуклый на $(-\infty;\ -3)\cup(2;\ +\infty)$, вогнутый на $(-3;\ 2)$.)

3.166. $y=1/(x^2-4)$. (*Ответ:* точек перегиба нет; график вогнутый на $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$, выпуклый на $(-2;\ 2)$.)

3.167. $y=a-\sqrt[3]{x-b}$. (*Ответ:* (b,a) — точка перегиба; график выпуклый на $(-\infty;\ b)$, вогнутый на $(b;\ +\infty)$.)

3.168. $y=\sqrt[3]{4x^3-12x}$. (*Ответ:* $(\pm\sqrt{3};\ 0)$ и $(0,\ 0)$ — точки перегиба; график вогнутый на $(-\infty;\ -\sqrt{3})\cup(0;\ \sqrt{3})$, выпуклый на $(-\sqrt{3};\ 0)\cup(\sqrt{3};\ +\infty)$.)

3.169. $y=(1+x^2)e^x$. (*Ответ:* $(-3;\ 10/e^3)$ и $(-1;\ 2/e)$— точки перегиба; график вогнутый на $(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ +\infty)$, выпуклый на $(-3;\ -1)$.)

3.170. $y=\ln(1+x^2)$. (*Ответ:* $(\pm1,\ \ln 2)$ — точки перегиба; график выпуклый на $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$, вогнутый на $(-1;\ 1)$.)

3.171. $y=x^3/(x^2+3)$. (*Ответ:* $(-3,\ -9/4)$, $(0,\ 0)$, $(3;\ 9/4)$ — точки перегиба; график вогнутый на $(-\infty;\ -3)\cup(0;\ 3)$, выпуклый на $(-3;\ 0)\cup(3;\ +\infty)$.)

3.172. $y=(x+2)^6+2x+2$. (*Ответ:* точек перегиба нет; график вогнутый.)

3.173. При каких значениях a и b точка $(1,\ 3)$ будет точкой перегиба линии $y=ax^3+bx^2$? (*Ответ:* $a=-3/2$, $b=9/2$.)

3.174. При каких значениях a и b линия $x^2y+ax+by=0$ будет иметь точку перегиба $(2;\ 2{,}5)$? Найти другие точки перегиба (если они существуют). (*Ответ:* $a=-20/3$, $b=4/3$; $(-2;\ -2{,}5)$, $(0,\ 0)$ — точки перегиба.)

3.175. Дана функция $y=x^4+8x^3+18x^2+8$. Показать, что между абсциссами точек перегиба ее графика может и не быть точек экстремума.

В задачах 3.176—3.186 найти асимптоты кривой.

3.176. $y=1/(x^2-4x+5)$. (*Ответ:* $y=0$.)
3.177. $y=2x+\operatorname{arctg}(x/2)$. (*Ответ:* $y=2x\pm\pi/2$.)
3.178. $y=2+12/(x^2-4)$. (*Ответ:* $x=\pm 2$, $y=2$.)
3.179. $y=(e\ln x)/x$. (*Ответ:* $x=0$, $y=0$.)
3.180. $y=x^4/(x^3-1)$. (*Ответ:* $x=1$, $y=x$.)
3.181. $y=(2x^2-9)/(x+2)$. (*Ответ:* $x=-2, y=2x-4$.)
3.182. $y=x-2+x^2/\sqrt{x^2+9}$. (*Ответ:* $y=-2$ (левая асимптота), $y=2x-2$ (правая асимптота).)
3.183. $y=(x^2+1)/\sqrt{x^2-1}$. (*Ответ:* $x=\pm 1$; $y=-x$ (левая асимптота), $y=x$ (правая асимптота).)
3.184. $y=xe^{2/x}+1$. (*Ответ:* $x=0$, $y=x+3$.)
3.185. $2y(x+1)^2=x^3$. $\left(\textit{Ответ: } x=-1,\ y=\frac{1}{2}x-1.\right)$
3.186. $y=\dfrac{x^3-3x^2+1}{x^2-3x+2}$. (*Ответ:* $x=1$, $x=2$, $y=x$.)

3.8. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЮ ГРАФИКОВ

Приведем *схему полного исследования* функции.

1. Найти область определения функции
2. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.
3. Найти точки разрыва функции, пределы функции при x, стремящемся к концам промежутков области определения, вертикальные и наклонные асимптоты (если они имеются).
4. Определить интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума; вычислить значения экстремумов.
5. Указать интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.
6. Найти точки пересечения графика функции с осями координат, построить график

Примеры

1. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ и построить ее график.

Решение. Воспользуемся приведенной выше схемой.

1. Функция $f(x)$ определена, если $x+1\neq 0$ или $x\neq -1$, следовательно, $D(f)$: $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ +\infty)$.

2. Так как область определения функции $D(f)$ не является симметричным множеством относительно начала координат, то функция $f(x)$ не может быть четной, нечетной и периодической.

3. Найдем пределы функции при x, стремящемся к

концам промежутков области определения. Так как $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ представляет собой неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, то, применив правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{4(x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{4}=-\infty.$$

Аналогично получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}=+\infty$. Поскольку

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty,\quad \lim_{x\to-1+0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty,$$

то $x=-1$ — точка разрыва второго рода (бесконечный скачок), а прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

График функции ~~имеет наклонную~~ асимптоту $y=kx+b$, если существуют пределы $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)/x$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$. Вычислим их для данной функции, раскрывая неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ с помощью правила Лопиталя:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2x(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2(x+1)^2}=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{4(x+1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{x}{2}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x(x+1)^2}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{2(x+1)^2}=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x-1}{4(x+1)}=\frac{-4}{4}=-1.$$

Следовательно, $y=x/2-1$ — уравнение наклонной асимптоты.

4. Находим первую производную функции:

$$y'=\frac{3x^2\cdot2(x+1)^2-x^3\cdot4(x+1)}{4(x+1)^4}=\frac{2x^3+6x^2}{4(x+1)^3}=\frac{2x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$$

Она определена для $x\in D(f)$. Поскольку $y'=0$ при $x=-3$, $x=0$, то $x_1=-3$, $x_2=0$ — критические точки данной функции.

Область определения разбиваем критическими точками на четыре интервала: $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ -1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$ и определяем знак y' на каждом из них. Получаем, что для $x \in (-\infty;\ -3)$ $y' > 0$, функция возрастает; для $x \in (-3;\ -1)$ $y' < 0$, функция убывает; для $x \in (-1;\ 0)$ $y' > 0$, функция возрастает; для $x \in (0;\ +\infty)$ $y' > 0$, функция возрастает.

При $x = -3$ функция имеет максимум, так как при переходе через эту точку y' меняет знак с «+» на «−», при $x = 0$ экстремума нет. Так как $f(-3) = -27/8$, то $(-3,\ -27/8)$ — точка максимума.

5. Находим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^3 + 3x^2}{2(x+1)^3}\right)' = \frac{(3x^2 + 6x)\cdot 2(x+1)^3 - (x^3 + 3x^2)\cdot 6(x+1)^2}{4(x+1)^6} =$$

$$= \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

Она определена для $x \in D(f)$. Поскольку $y'' = 0$ при $x = 0$, то, определив знак y'' на каждом из интервалов $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$, получим, что для $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0)$ $y'' < 0$, график выпуклый; для $x \in (0;\ +\infty)$ $y'' > 0$, график вогнутый. При переходе через точку $x = 0$ производная y'' меняет знак, поэтому $x = 0$ — абсцисса точки перегиба. Так как $f(0) = 0$, то $(0,\ 0)$ — точка перегиба графика данной функции.

6. График функции пересекает координатные оси в точке $O(0,\ 0)$.

Результаты исследования записываем в таблицу (см. табл. 3.1).

Таблица 3.1

x	$(-\infty;\ -3)$	-3	$(-3,\ -1)$	-1	$(-1,\ 0)$	0	$(0;\ +\infty)$
y'	+	0	−	Не существует	+	0	+
y''	−	−	−	Не существует	−	0	+
y	↗ График выпуклый	$-27/8$ max	↘ График выпуклый	Не существует	↗ График выпуклый	Точка перегиба 0	↗ График вогнутый

График данной функции изображен на рис. 3.12.

2. Провести полное исследование функции $y = 8x/(x - 2)^2$ и построить ее график.

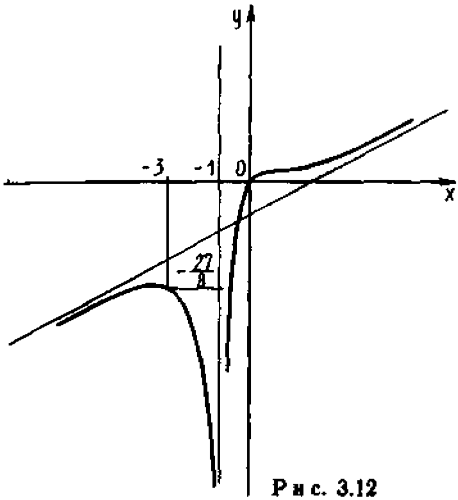


Рис. 3.12

Решение. 1. Область определения функции — ось Ox, за исключением точки $x = 2$, т. е. $D(f)$: $(-\infty;\ 2) \cup \cup (2;\ +\infty)$.

2. Так как $D(f)$ не является симметричным множеством относительно начала координат, то данная функция не является четной, нечетной, периодической.

3. Найдем пределы функции при x, стремящемся к концам промежутков области определения:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x}{(x-2)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8}{2(x-2)} = 0,$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{8x}{(x-2)^2} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{8x}{(x-2)^2} = \infty.$$

Так как при $x = 2$ функция имеет точку разрыва второго рода, то $x = 2$ — вертикальная асимптота.

Для нахождения наклонных асимптот вычислим пределы:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x}{x(x-2)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8}{(x-2)^2} = 0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x}{(x-2)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{2(x-2)}=0.$$

Подставляя вычисленные значения k и b в уравнение $y=kx+b$, получаем, что $y=0$ — горизонтальная асимптота.

4. Находим первую производную данной функции:

$$y'=\frac{8(x-2)^2-8x\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{-8(x+2)}{(x-2)^3}.$$

Она определена для $x\in D(f)$. Так как $y'=0$ при $x=-2$, то $x=-2$ — критическая точка. Область определения функции разбиваем на три интервала: $(-\infty;\ -2)$, $(-2;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$ и определяем знак производной y' на каждом из них. Получим, что для $x\in(-\infty;\ -2)$ $y'<0$, $f(x)$ убывает; для $x\in(-2;\ 2)$ $y'>0$, $f(x)$ возрастает; для $x\in(2;\ +\infty)$ $y'<0$, $f(x)$ убывает. Таким образом, при переходе через точку $x=-2$ производная y' меняет знак с «$-$» на «$+$», следовательно, $x=-2$ — абсцисса точки минимума. Поскольку $f(-2)=8(-2)/(-4)^2=-1$, то $(-2,\ -1)$ — точка минимума.

5. Найдем вторую производную данной функции:

$$y''=\frac{-8(x-2)^3+8(x+2)\cdot 3(x-2)^2}{(x-2)^6}=\frac{16(x+4)}{(x-2)^4}.$$

Она определена для $x\in D(f)$. Поскольку $y''=0$ при $x=-4$, разобьем область определения на три интервала и определим знак y'' на каждом из них. Для $x\in(-\infty;\ -4)$ $y\leqslant<0$, график выпуклый; для $x\in(-4;\ 2)$ $y''>0$, график вогнутый; для $x\in(2;\ +\infty)$ $y''<0$, график вогнутый. Отсюда следует, что $x=-4$ является абсциссой точки перегиба, а $f(-4)=-8/9$ — ее ордината.

6. График данной функции пересекает координатные оси в точке $O(0,\ 0)$.

Результаты исследования запишем в таблицу (см. табл. 3.2).

На основании полученных данных строим график исходной функции (рис. 3.13).

3. Провести исследование и построить график функции $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$.

Решение. Проведем исследование функции по рекомендуемой схеме.

1. Область определения $D(f)$: $(-\infty;\ +\infty)$.

2. Функция не является четной, нечетной, периоди-

Таблица 3.2

x	$(-\infty;\ -4)$	-4	$(-4;\ -2)$	-2	$(-2,\ 2)$	2	$(2,\ +\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	Не существует	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	Не существует	$+$
y	↘ График выпуклый	Точка перегиба $-8/9$	↘ График вогнутый	-1 min	↗ График вогнутый	Не существует	↘ График вогнутый

ческой, так как $D(f)$ не будет симметричным относительно точки $O(0,\ 0)$ множеством.

3. Функция не имеет точек разрыва, вертикальных асимптот. Находим пределы функции при x, стремящемся к граничным точкам области определения:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{6x^2-x^3}=+\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{6x^2-x^3}=-\infty.$$

Найдем наклонные асимптоты. Уравнение такой асимптоты имеет вид $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{6x^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{6/x-1}}{1}=-1,$$

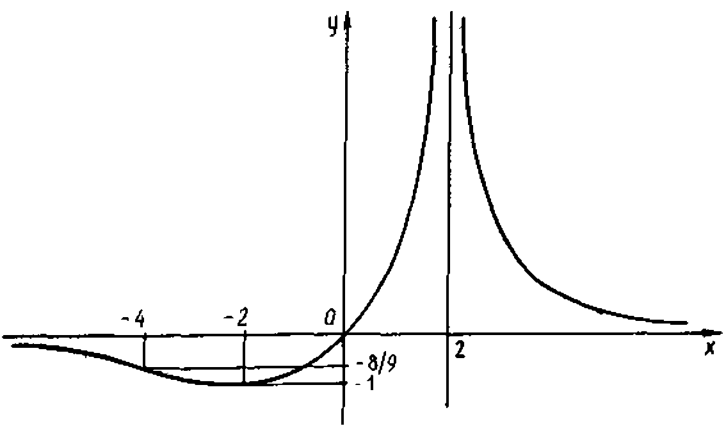


Рис. 3.13

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} (\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x).$$

Так как последнее выражение представляет собой неопределенность вида $\infty - \infty$, то, заменив x на $1/\alpha$ и применив затем правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x \to \pm\infty} (\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x) = \lim_{\alpha > 0} (\sqrt[3]{6/\alpha^2 - 1/\alpha^3} + 1/\alpha) =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sqrt[3]{6\alpha - 1} + 1}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{1}{3}(6\alpha - 1)^{-2/3} \cdot 6}{1} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{2}{\sqrt[3]{(6\alpha - 1)^2}} = 2.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ данная кривая имеет асимптоту $y = -x + 2$.

4. Находим первую производную данной функции:

$$y' = \frac{12x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}} = \frac{3x(4 - x)}{3\sqrt[3]{x^4(6 - x)^2}} = \frac{4 - x}{\sqrt[3]{x(6 - x)^2}}.$$

Тогда $y' = 0$ при $x = 4$, $y' = \infty$ при $x = 0$ и $x = 6$. При $x = 0$, $x = 6$ производная y' терпит бесконечный разрыв. Так как точки $x = 0$, $x = 6$ входят в область определения функции, будем рассматривать их в качестве критических.

Итак, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$ — критические точки. Разбиваем область определения критическими точками на четыре интервала: $(-\infty; 0)$, $(0; 4)$, $(4; 6)$, $(6; +\infty)$ и определяем знак y' на каждом из них. Для $x \in (-\infty; 0)$ $y' < 0$, функция убывает; для $x \in (0; 4)$ $y' > 0$, функция возрастает; для $x \in (4; 6)$ $y' < 0$, функция убывает; для $x \in (6; +\infty)$ $y' < 0$, функция убывает. Отсюда следует, что при $x = 0$ функция имеет минимум, а при $x = 4$ — максимум. Так как $f(0) = 0$, $f(4) = \sqrt[3]{32}$, то $(0, 0)$ — точка минимума, $(4, \sqrt[3]{32})$ — точка максимума.

5. Находим вторую производную данной функции:

$$y'' = \left(\frac{4 - x}{\sqrt[3]{x(6 - x)^2}}\right)' = \frac{-\sqrt[3]{x(6 - x)^2} - (4 - x)\dfrac{6 - x - 2x}{3\sqrt[3]{x^2 \cdot (6 - x)^4}}}{(6 - x)\sqrt[3]{x^2 \cdot (6 - x)}} =$$

$$= -\frac{8}{\sqrt[3]{x^4(6 - x)^5}}.$$

Она не равна нулю для любого конечного x. Поэтому точками перегиба могут быть только точки $x_1 = 0$, $x_2 = 6$. Определим знак второй производной y'' в интервалах: $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$, $(6; +\infty)$. Получим, что для $x \in (-\infty; 0)$ $y'' < 0$, график выпуклый; для $x \in (0; 6)$ $y'' < 0$, график выпуклый; для $x \in (6; +\infty)$ $y'' > 0$, график вогнутый; отсюда следует, что $x = 6$ — абсцисса точки перегиба, $f(6) = 0$, $(6, 0)$ — точка перегиба.

6. График функции пересекает координатные оси в точках $(0, 0)$ и $(6, 0)$.

Полученные результаты запишем в таблицу (см. табл. 3.3).

Таблица 3.3

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 4)	4	(4, 6)	6	$(6, +\infty)$
y'	−	Не существует	+	0	−	Не существует	−
y''	−	Не существует	−	−	−	Не существует	+
y	↘ График выпуклый	0 min	↗ График выпуклый	$\sqrt[3]{32}$ max	↘ График выпуклый	Точка перегиба 0	↘ График вогнутый

График данной функции изображен на рис. 3.14.

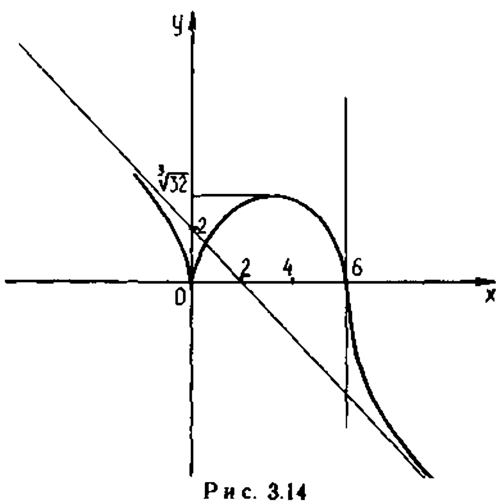


Рис. 3.14

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 3.187—3.205 провести полное исследование функции и построить ее график.

3.187. $y=x^4/(x^3-1)$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$, $(0,\ 0)$ — точка максимума, $\left(\sqrt[3]{4},\ \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}\right)$ — точка минимума, $\left(-\sqrt[3]{2},\ -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$ — точка перегиба; $x=1$, $y=x$ — асимптоты; интервалы: возрастания $(-\infty;\ 0)\cup\cup(\sqrt[3]{4};\ +\infty)$, убывания $(0;\ 1)\cup(1;\ \sqrt[3]{4})$, вогнутости $(-\infty;\ -\sqrt[3]{2})\cup(1;\ +\infty)$, выпуклости $(-\sqrt[3]{2};\ 1)$.)

3.188. $y=x/(x^2-1)$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ -1)\cup\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; функция нечетная; экстремумов нет; всюду убывает; $(0,0)$ — точка перегиба; $x=\pm1$, $y=0$ — асимптоты; интервалы: выпуклости $(-\infty;\ -1)\cup\cup(0;\ 1)$, вогнутости $(-1,\ 0)\cup(1;\ +\infty)$.)

3.189. $y=x^3/(x-3)^2$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; $y=x+6$, $x=3$ — асимптоты; $(9,\ 81/4)$ — точка минимума; $(0,0)$ — точка перегиба; интервалы: возрастания $(-\infty;\ 3)\cup(9;\ +\infty)$, убывания $(3;\ 9)$, выпуклости $(-\infty;\ 0)$, вогнутости $(0;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$.)

3.190. $y=3x^2/(x-1)^2$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$, $(0,\ 0)$ — точка минимума; $(-1/2,\ 1/3)$ — точка перегиба; $x=1$, $y=3$ — асимптоты; интервалы: возрастания $(0;\ 1)$, убывания $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$, выпуклости $(-\infty;\ -1/2)$, вогнутости $(-1/2;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.)

3.191. $y=2(x-1)^2/x^2$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; $(1,\ 0)$ — точка минимума, $(3/2,\ 2/9)$ — точка перегиба; $x=0$, $y=2$ — асимптоты; интервалы: возрастания $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$, убывания $(0;\ 1)$, выпуклости $(3/2;\ +\infty)$, вогнутости $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 3/2)$.)

3.192. $y=\ln(1+x^2)$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ +\infty)$; $(0,\ 0)$ — точка минимума, $(\pm1,\ \ln 2)$ — точки перегиба; интервалы: убывания $(-\infty;\ 0)$, возрастания $(0;\ +\infty)$, выпуклости $(-\infty;\ -1)\cup(1,\ +\infty)$, вогнутости $(-1;\ 1)$; асимптот нет.)

3.193. $y=(3x^4+1)/x^3$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; функция нечетная; $x=0$, $y=3x$ — асимптоты; $(-1,\ -4)$—точка максимума, $(1,\ 4)$—точка минимума; интервалы: возрастания $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$, убывания $(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)$, выпуклости $(-\infty;\ 0)$, вогнутости $(0;\ +\infty)$.)

3.194. $y=x-\ln(x+1)$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-1;\ +\infty)$; $(0,\ 0)$ — точка минимума; точек перегиба нет; $x=-1$ — асимптота; функция убывает на интервале $(-1;\ 0)$, возрастает на интервале $(0;\ +\infty)$; график функции всюду вогнут.)

3.195. $y=1/x+4x^2$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; $(1/2,\ 3)$ — точка минимума, $(-\sqrt[3]{2}/2,\ 0)$ — точка перегиба; $x=0$ — асимптота; интервалы: возрастания $(1/2;\ +\infty)$, убывания $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1/2)$.)

3.196. $y=x^2e^{-x}$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ +\infty)$; $(2,\ 4/e^2)$ — точка максимума, $(0,\ 0)$ — точка минимума, $(2\pm\sqrt{2})$ — абсциссы точек перегиба; $y=0$ — асимптота; интервалы: убывания $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ +\infty)$, возрастания $(0;\ 2)$.)

3.197. $y=\ln(x^2-1)+1/(x^2-1)$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$; $(\pm\sqrt{2},\ 1)$ — точки минимума, $(\pm 1{,}89;\ 1{,}33)$ — точки перегиба; $x=\pm 1$ — асимптоты; интервалы: возрастания $(-\sqrt{2};\ -1)\cup(1;\ \sqrt{2})$, убывания $(-\infty;\ -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ +\infty)$.)

3.198. $y=x-2\operatorname{arctg}x$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ +\infty)$; $(-1,\ \pi/2-1)$ — точка максимума, $(1,\ 1-\pi/2)$ — точка минимума, $(0,\ 0)$ — точка перегиба; $y=x\pm\pi$ — асимптоты.)

3.199. $y=x^2-4|x|+3$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ +\infty)$; $(0,\ 3)$ — точка максимума, $(\pm 2,\ -1)$ — точки минимума; график функции не имеет асимптот и точек перегиба; $(0,\ 3)$ — угловая точка графика с двумя различными касательными.)

3.200. $y=\arcsin x/\sqrt{1-x^2}$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-1;\ 1)$; $(0,\ 0)$ — точка перегиба; $x=\pm 1$ — асимптоты.)

3.201. $y=x^2e^{-x^2}$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ +\infty)$; $(\pm 1,\ 1/e)$ — точка максимума, $(0,\ 0)$ — точка минимума, $\pm(5\pm\sqrt{17})/2$ — абсциссы точек перегиба; $y=0$ — асимптота.)

3.202. $y=\pm\sqrt{x^2(1-x^2)}$. (*Ответ:* $D(f)$: $[-1;\ 1]$; функция двузначная; $(\pm\sqrt{2}/2,\ 1/2)$ — точки максимума; $(0,\ 0)$ — точка перегиба; асимптот нет.)

3.203. $y=(x^3+2x^2+7x-3)/(2x^2)$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; $(1,\ 7/2)$, $(-3,\ -11/6)$ — точки максимума, $(2,\ 27/8)$ — точка минимума; $9/7$ — абсцисса точки перегиба графика; $x=0$, $y=\frac{1}{2}x+1$ — асимптоты.)

3.204. $y = x - 1 + \frac{1}{x-1}$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; $x = 1$, $y = x - 1$ — асимптоты; $(0,\ -2)$ — точка максимума; $(2,\ 2)$ — точка минимума; интервалы: возрастания $(-\infty;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$, убывания $(0;\ 1) \cup (1;\ 2)$, выпуклости $(-\infty;\ 1)$, вогнутости $(1;\ +\infty)$; точек перегиба нет.)

3.205. $y = (4x - 12)/(x - 2)^2$. (*Ответ:* $D(f)$: $(-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$; $(4,\ 1)$ — точка максимума, $(5,\ 8/9)$ — точка перегиба; $x = 2$, $y = 0$ — асимптоты.)

3.9. ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА И ЕЕ ПРОИЗВОДНАЯ. КРИВИЗНА КРИВОЙ. КАСАТЕЛЬНАЯ К ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ. НОРМАЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Если каждому значению действительной переменной $t \in D \subset \mathbf{R}$ поставлен в соответствие вектор $\mathbf{r}(t) \in \mathbf{R}^3$, то говорят, что на множестве D задана *вектор-функция действительной переменной* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Задание вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ равносильно заданию трех скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координат вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Годографом вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ называется множество точек, являющихся концами всех векторов $\mathbf{r}(t)$, которые приложены к началу координат (радиусов-векторов). *Параметрические уравнения годографа* имеют вид $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ (рис. 3.15)

Постоянный вектор $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ называется *пределом вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ при $t \to t_0$ (обозначается $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$, такое, что из неравенства $|t - t_0| < \delta$ следует неравенство $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| < \varepsilon$. Для того чтобы $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0.$$

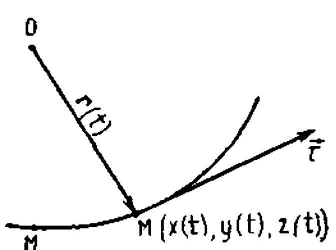


Рис 3.15

Если существует предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t},$$

то он называется *производной вектор-функции* $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ *по скалярному аргументу* t и обозначается $\mathbf{r}'(t)$ или $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Производная $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ есть вектор, направленный по касательной к годографу вектора $\mathbf{r}$ в сторону возрастания параметра t. Если t — время, то $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ — вектор скорости конца вектора $\mathbf{r}$, а $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ — вектор ускорения.

Перечислим *основные правила дифференцирования вектор-функции скалярного аргумента*:

1) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)=\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\pm\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$;

2) $\frac{d\mathbf{c}}{dt}=\mathbf{0}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор;

3) $\frac{d(\lambda\mathbf{r})}{dt}=\lambda\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\mathbf{r}\frac{d\lambda}{dt}$, где $\lambda=\lambda(t)$ — **скалярная функция** от t;

4) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)=\left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt},\ \mathbf{r}_2\right)+\left(\mathbf{r}_1,\ \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right)$;

5) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2]=\left[\frac{d\mathbf{r}_1}{dt},\ \mathbf{r}_2\right]+\left[\mathbf{r}_1,\ \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right]$.

Уравнения касательной к пространственной кривой $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ *в точке* $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ записываются в виде

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

где $x_0=x(t_0)$; $y_0=y(t_0)$; $z_0=z(t_0)$.

Нормальной плоскостью называется плоскость, проходящая через точку касания и перпендикулярная к касательной. *Уравнение нормальной плоскости* имеет вид

$$(x-x_0)x'(t_0)+(y-y_0)y'(t_0)+(z-z_0)z'(t_0)=0.$$

Производная от функции $\mathbf{r}'(t)$ в точке t называется *второй производной вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}.$$

Пусть кривая в плоскости Oxy является годографом вектор-функции. *Кривизной линии в точке* M называется число

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}|\Delta\varphi/\Delta s|,$$

где $\Delta\varphi$ — угол поворота касательной к линии при переходе от точки M_0 к точке M; Δs — длина дуги M_0M (рис. 3.16).

Рассмотрим следующие случаи:

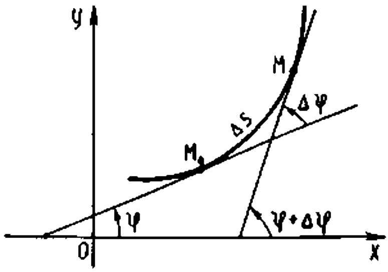


Рис. 3.16

1) если уравнение кривой имеет вид $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, то

$$K = \left|\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]\right| \Big/ \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3; \tag{3.18}$$

2) если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то

$$K = |y''|/(1 + y'^2)^{3/2}, \tag{3.19}$$

3) если кривая задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, то

$$K = \frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}; \tag{3.20}$$

4) если кривая задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, то

$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - 2rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}. \tag{3.21}$$

Радиусом кривизны R называется величина, обратная кривизне K: $R = 1/K$. Так как кривизна линии, вообще говоря, изменяется при переходе от данной ее точки к другой, то и радиус кривизны является переменной величиной.

Во всякой неособой точке $M(x, y, z)$ пространственной кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ можно построить *трехгранник* с вершиной в точке M, состоящий из трех взаимно перпендикулярных плоскостей (рис. 3.17):

1) *соприкасающейся плоскости* MM_1M_2, содержащей векторы $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ и $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$;

2) *нормальной плоскости* MM_2M_3, перпендикулярной к вектору $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$;

3) *спрямляющей плоскости* MM_1M_3, перпендикулярной к двум первым плоскостям.

В попарных пересечениях этих плоскостей получаются три прямые:

1) *касательная* MM_1, определяемая вектором $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$;

2) *бинормаль* MM_3, определяемая вектором $\mathbf{B} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]$;

3) *главная нормаль* MM_2, определяемая вектором $\mathbf{N} = [\mathbf{B}, \mathbf{T}]$

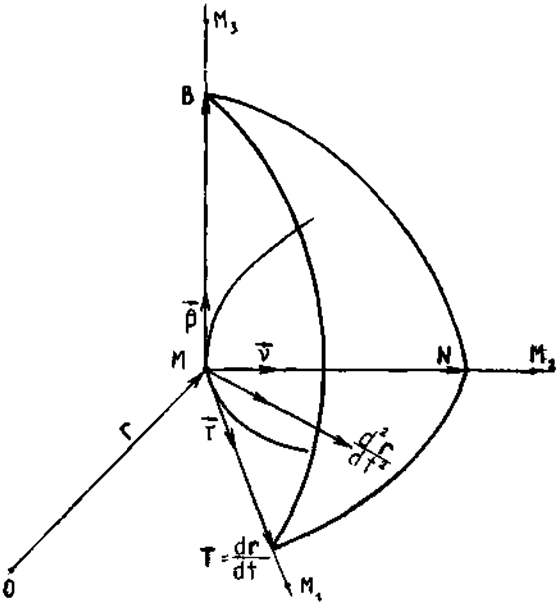


Рис. 3.17

Единичные векторы $\vec{\tau} = \mathbf{T}/|\mathbf{T}|$, $\vec{\beta} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$, $\vec{\nu} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$ могут быть вычислены по формулам:

$$\vec{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \vec{\nu} = \frac{\frac{d\vec{\tau}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|}, \quad \vec{\beta} = [\vec{\tau}, \ \vec{\nu}],$$

где ds — элемент длины дуги.

Примеры

1. Какая линия является годографом вектор-функции $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$?

Решение. Параметрические уравнения линии имеют вид $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ct$ *(винтовая линия)*.

2. Показать, что векторы $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ перпендикулярны.

Решение. Так как

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{x}'(t)\mathbf{i} + \mathbf{y}'(t)\mathbf{j} + \mathbf{z}'(t)\mathbf{k} = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k},$$

то

$$\left(\mathbf{r},\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = -\cos t \sin t + \sin t \cos t + 1 \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, векторы $\mathbf{r}$ и $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ перпендикулярны.

3. Найти $\frac{d[\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2]}{dt}$, если $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

Решение. Найдем векторное произведение векторов $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$:

$$[\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t & t^2 & t^3 \\ t^2 & t^3 & t \end{vmatrix} = (t^3 - t^6)\mathbf{i} + (t^5 - t^2)\mathbf{j} + (t^4 - t^4)\mathbf{k} =$$
$$= (t^3 - t^6)\mathbf{i} + (t^5 - t^2)\mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}.$$

Тогда

$$\frac{d[\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2]}{dt} = (3t^2 - 6t^5)\mathbf{i} + (5t^4 - 2t)\mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}.$$

4. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к винтовой линии

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \sqrt{3}\,t\mathbf{k}$$

в точке $t = \pi/2$.

Решение. Так как $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{dy}{dt} = \cos t$, $\frac{dz}{dt} = \sqrt{3}$, то канонические уравнения касательной в точке $t = \pi/2$ имеют вид

$$\frac{x - \cos \pi/2}{-\sin \pi/2} = \frac{y - \sin \pi/2}{\cos \pi/2} = \frac{z - \sqrt{3} \cdot \pi/2}{\sqrt{3}}$$

или

$$\frac{x}{-1} = \frac{y - 1}{0} = \frac{z - \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Тогда уравнение нормальной плоскости к винтовой линии в этой же точке:

$$-1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 1) + \sqrt{3}(z - \pi\sqrt{3}/2) = 0,$$
$$-x + \sqrt{3}z - \frac{3}{2}\pi = 0 \text{ или } x - \sqrt{3}z + \frac{3}{2}\pi = 0.$$

5. На кривой $x = t + 1$, $y = t^2 - 1$, $z = t^2$ найти точку, в которой касательная параллельна плоскости $x + 2y + z - 1 = 0$.

Решение. Имеем: $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 2t$, $\frac{dz}{dt} = 3t^2$, т. е. $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$. Условие параллельности касательной и данной плоскости имеет вид $\left(\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = 0$ или в координатной форме

$$A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} = 0.$$

Так как $\mathbf{n} = (1, 2, 1)$, то в нашем случае получим:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2t + 1 \cdot 3t^2 = 0,\ 3t^2 + 4t + 1 = 0.$$

Отсюда $t_1 = -1/3$, $t_2 = -1$. Таким образом, найдены две точки: $M_1(2/3, -8/9, -1/27)$ и $M_2(0, 0, -1)$.

6. Найти кривизну K винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $r = \sqrt{R^2 - a^2}\,t$ $(0 < a < R)$.

Решение. В данном случае кривая — годограф функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Для вычисления кривизны воспользуемся формулой (3.18). Имеем:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(-a\sin t,\ a\cos t,\ \sqrt{R^2 - a^2}\right),$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0).$$

Найдем векторное произведение векторов $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ и $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$:

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & \sqrt{R^2 - a^2} \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a\sin t\sqrt{R^2 - a^2}\,\mathbf{i} - a\sqrt{R^2 - a^2}\cos t\,\mathbf{j} + a^2(\sin^2 t +$$

$$+ \cos^2 t)\mathbf{k} = a\sin t\sqrt{R^2 - a^2}\,\mathbf{i} - a\cos t\sqrt{R^2 - a^2}\,\mathbf{j} + a^2\mathbf{k},$$

$$\left|\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]\right| =$$

$$= \sqrt{a^2\sin^2 t(R^2 - a^2) + a^2\cos^2 t(R^2 - a^2) + a^4} =$$

$$=\sqrt{a^2(R^2-a^2)+a^4}=\sqrt{a^2R^2}=aR.$$

Учитывая, что $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|=\sqrt{a^2+R^2-a^2}=R$, получаем $K=\frac{aR}{R^3}=\frac{a}{R^2}$.

7. Вычислить кривизну кривой $y=x^2$ в точках $O(0, 0)$ и $M(1, 1)$.

Решение. Кривая задана уравнением $y=f(x)$, поэтому для вычисления ее кривизны воспользуемся формулой (3.19). Найдем: $y'=2x$, $y''=2$, $y'(0)=0$, $y'(1)=2$. Тогда:

$$K\Big|_O=\frac{2}{(1+0)^{3/2}}=2,\quad K\Big|_M=\frac{2}{(1+4)^{3/2}}=\frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

8. Вычислить кривизну кривой $r=a(1-\cos\varphi)$ в любой точке и при $\varphi=\pi$.

Решение. Так как кривая задана уравнением $r=r(\varphi)$, то для вычисления ее кривизны воспользуемся формулой (3.21). Имеем: $r'(\varphi)=a\sin\varphi$, $r''(\varphi)=a\cos\varphi$,

$$\begin{gathered}r^2+r'^2=a^2(1-\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi=\\=a^2-2a^2\cos\varphi+a^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi=2a^2(1-\cos\varphi)=\\=2a^2\cdot2\sin^2(\varphi/2)=2^2a^2\sin^2(\varphi/2).\end{gathered}$$

Тогда:

$$\begin{gathered}(r^2+r'^2)^{3/2}=2^3a^3\sin^3(\varphi/2),\\ r^2+2r'^2-rr''=a^2((1-\cos\varphi)^2+2\sin^2\varphi-\\-(1-\cos\varphi)\cos\varphi)=a^2(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\\+2\sin^2\varphi-\cos\varphi+\cos^2\varphi)=a^2(3-3\cos\varphi)=\\=3a^2\cdot2\sin^2(\varphi/2)=6a^2\sin^2(\varphi/2).\end{gathered}$$

Следовательно,

$$K=\frac{6a^2\sin^2(\varphi/2)}{2^3a^3\sin^3(\varphi/2)}=\frac{3}{4a\sin(\varphi/2)},$$

$$K\Big|_{\varphi=\pi}=\frac{3}{4a}.$$

9. Составить уравнение соприкасающейся плоскости, спрямляющей плоскости, нормальной плоскости кривой $x=6t$, $y=3t^2$, $z=t^3$ в точке $t=1$.

Решение. При $t=1$ получаем точку $M_0(6, 3, 1)$. Соприкасающаяся плоскость проходит через точку M_0 и перпендикулярна к вектору бинормали $\mathbf{B}=\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]$. Найдем этот вектор. Так как

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = 6\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = 0\cdot\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6t\mathbf{k},$$

$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=1} = (6,\ 6,\ 3)$, $\left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_{t=1} = (0,\ 6,\ 6)$, то

$$\left.\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt},\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]\right|_{t=1} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 18\mathbf{i} - 36\mathbf{j} + 36\mathbf{k},$$

т. е. $\mathbf{B} = (18,\ -36,\ 36)$. Тогда уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид

$$18(x-6) - 36(y-3) + 36(z-1) = 0,$$
$$x - 6 - 2(y-3) + 2(z-1) = 0$$

или

$$x - 2y + 2z - 2 = 0.$$

Спрямляющая плоскость проходит через точку $M_0(6,\ 3,\ 1)$ перпендикулярно к вектору главной нормали $\mathbf{N} = \left[\mathbf{B},\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$. В данном случае имеем:

$$\mathbf{N} = \left.\left[\mathbf{B},\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]\right|_{t=1} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 18 & -36 & 36 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= -324\mathbf{i} + 162\mathbf{j} + 324\mathbf{k}.$$

Так как вектор $\mathbf{N}$ коллинеарен вектору $(-2,\ 1,\ 2)$, то последний можно считать нормальным вектором спрямляющей плоскости, уравнение которой имеет вид

$$2(x-6) + y - 3 - 2(z-1) = 0 \text{ или } 2x + y - 2z - 7 = 0.$$

Нормальная плоскость проходит через точку $M_0(6,\ 3,\ 1)$ перпендикулярно к вектору касательной $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Так как $\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=1} = (6,\ 6,\ 3)$, то уравнение нормальной плоскости имеет вид

$$6(x-6) + 6(y-3) + 3(z-1) = 0$$

или

$$2x + 2y + z - 19 = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.206. Составить уравнение касательной прямой, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали и спрямляющей плоскости к данной линии в точке M:

1) $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{tg} t$, $M(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$;
2) $x = t^3 - t^2 - 5$, $y = 3t^2 + 1$, $z = 2t^3 - 16$, точка M соответствует значению параметра $t = 2$. $\Big($*Ответ:* 1) $\dfrac{x - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} = \dfrac{y - \sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}} = \dfrac{z-1}{4}$, $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 4z = 4$; $\dfrac{x - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} = \dfrac{y - \sqrt{2}/2}{3\sqrt{2}} = \dfrac{z-1}{1}$, $\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + z - 5 = 0$; $\dfrac{x - \sqrt{2}/2}{13} = \dfrac{y - \sqrt{2}/2}{-3} = \dfrac{z-1}{-4\sqrt{2}}$, $-13x + 3y + 4\sqrt{2}z + \sqrt{2} = 0$; 2) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-13}{3} = \dfrac{z}{6}$, $2x + 3y + 6z - 37 = 0$; $\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-13}{2} = \dfrac{z}{-3}$, $6x + 2y - 3z - 20 = 0$; $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-13}{-6} = \dfrac{z}{2}$, $3x - 6y + 2z + 81 = 0.\Big)$

3.207. Найти $\frac{d}{dt}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, если $\mathbf{a} = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$. (*Ответ:* $(3t^2 - 2t)\mathbf{i} + (3t^2 - 2t)\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$.)

3.208. Записать уравнение касательной и уравнение нормальной плоскости к кривой $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $x = at$ при $t = 0$. (*Ответ:* $y = z$, $x = a$ — касательная; $y + z = 0$ — нормальная плоскость.)

3.209. Дано уравнение движения $\mathbf{z} = 2(t - \sin t)\mathbf{i} + 2(1 - \cos t)\mathbf{j}$. Определить ускорение этого движения. Построить векторы ускорения для моментов времени $t = \pi/2$, $t = \pi$. (*Ответ:* $\vec{\omega} = 2\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j}$, $\vec{\omega}|_{t=\pi/2} = 2\mathbf{i}$, $\vec{\omega}|_{t=\pi} = -2\mathbf{j}$.)

3.210. Вычислить кривизну кривой $x = t^2$, $y = t - t^3/3$ при $t = 1$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \dfrac{1}{2}.\right)$

3.211. Вычислить кривизну кривой $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ при $\varphi = \pi/4$. (*Ответ:* $3/a$.)

3.212. Вычислить кривизну кривой $xy = 4$ в точке $(2, 2)$. (*Ответ:* $\sqrt{2}/4$.)

3.213. Вычислить кривизну кривой $y^2=8x$ в точке $(9/8, 3)$. (*Ответ:* 0,128.)

3.214. Записать уравнения плоскостей, образующих естественный трехгранник кривой $x=t/\sqrt{2}$, $y=t/\sqrt{2}$, $z=\ln\sin t$ при $t=\pi/2$. (*Ответ:* $y=x$ — соприкасающаяся плоскость, $x+y=\pi/\sqrt{2}$ — нормальная плоскость, $z=0$ — спрямляющая плоскость.)

3.215. Найти единичные векторы $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ и составить уравнения касательной, главной нормали и бинормали кривой $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t$ при $t=0$. $\Big($*Ответ:* $\vec{\tau}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $\vec{\nu}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$, $\vec{\beta}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k})$; $x-1=-(y-1)=z$ — касательная; $x=y$, $z=0$ — главная нормаль; $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ — бинормаль.$\Big)$

В задачах 3.216—3.222 найти радиус кривизны (в любой точке) данной линии.

3.216. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$. (*Ответ:* $R=(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}/a^4b^4$.)

3.217. $x=y^2/4-\ln y/2$. (*Ответ:* $R=(y^2+1)^2/(4y)$.)

3.218. $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$. (*Ответ:* $R=|3\sin 2t|$.)

3.219. $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t).\end{cases}$ (*Ответ:* $R=|at|$.)

3.220. $r=a(1+\cos\varphi)$. $\Big($*Ответ:* $R=\left|\frac{4}{3}a\cos\frac{\varphi}{2}\right|$.$\Big)$

3.221. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. $\Big($*Ответ:* $R=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$ $\Big)$

3.222. $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t.\end{cases}$ $\Big($*Ответ:* $R=\left|4\sin\frac{t}{2}\right|$.$\Big)$

4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

4.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. ИНТЕГРАЛЫ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К ТАБЛИЧНЫМ

Функция $F(x)$ называется *первообразной функции* $f(x)$, заданной на некотором множестве X, если она дифференцируема для любых $x \in X$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in X$.

Если $\Phi(x)$, $F(x)$ — две первообразные одной и той же функции $f(x)$, то $\Phi(x) = F(x) + C$.

Совокупность $F(x) + C$ всех первообразных функций $f(x)$ на множестве X называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Здесь $\int$ — знак интеграла, $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение, x — переменная интегрирования.

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то для нее существует первообразная (а значит, и неопределенный интеграл).

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых, зависящих от одного параметра C, которые получаются одна из другой путем параллельного сдвига вдоль оси Oy.

Перечислим *основные правила интегрирования:*

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2) $\int f'(x)dx = f(x) + C$;
3) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad (a = \mathrm{const})$;
4) $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$;
5) если $\int f(x)dx = F(x) + C$, $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Приведем *таблицу основных неопределенных интегралов:*

1) $\int 1 \cdot dx = x + C$;
2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$;
3) $\int \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$;
4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
5) $\int e^x dx = e^x + C$;
6) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;

7) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$,

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

9) $\int \sin x dx = -\cos x + C$,

10) $\int \cos x dx = \sin x + C$,

11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,

12) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$,

13) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln |\operatorname{tg}(x/2 + \pi/4)| + C$,

14) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln |\operatorname{tg} x/2| + C$,

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$,

16) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$,

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$;

18) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

Интегралы 1—18 называются *табличными*

Справедливость формул 1—18 можно проверить путем дифференцирования, т е надо убедиться в том, что производные от правых частей формул будут равны соответствующим подынтегральным функциям

Непосредственным интегрированием называют интегрирование с помощью правил 3 и 4 интегрирования, тождественных преобразований подынтегральной функции и таблицы основных интегралов

Рассмотрим *интегралы, приводящиеся к табличным* Пусть требуется найти $\int f(x)dx$ Предположим, что существуют дифференцируемая функция $u = \varphi(x)$ и функция $g(u)$, такие, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ может быть записано в виде

$$f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(u)du$$

Это преобразование называется *подведением функции $u = \varphi(x)$ под знак дифференциала* Выполняется соотношение

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(u)du \Big|_{u=\varphi(x)}$$

Следовательно, вычисление интеграла $\int f(x)dx$ сводится к вычислению интеграла $\int g(u)du$ (который может оказаться проще исходного) и подстановке $u = \varphi(x)$

Итак, *операция подведения функции $\varphi(x)$ под знак дифференциала эквивалентна замене переменной x на новую переменную $u = \varphi(x)$*

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, $u = \varphi(x)$, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Примеры

Путем непосредственного интегрирования найти следующие интегралы

1. $\int \frac{dx}{x^2}$.

Решение. Представив подынтегральную функцию в виде $1/x^2 = x^{-2}$ и применив формулу 2 таблицы основных интегралов, получим:

$$\int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

2. $\int x\sqrt{x}dx$.

Решение. Согласно формуле 2 таблицы интегралов, имеем:

$$\int x\sqrt{x}dx = \int x^{3/2}dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + C.$$

3. $\int 10^x dx$.

Решение. Применяя формулу 6 таблицы интегралов, находим:

$$\int 10^x dx = 10^x/\ln 10 + C.$$

4. $\int (1-2x)dx$.

Решение. Используя правила 3 и 4 интегрирования и формулу 2 таблицы интегралов, получаем:

$$\int (1-2x)dx = \int dx - 2\int xdx = x - x^2 + C.$$

5. $\int \frac{dx}{x^2+5}$.

Решение. С помощью формулы 16 таблицы интегралов, находим:

$$\int \frac{dx}{x^2+5} = \int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

6. $\int \frac{\sqrt{x} - x^3e^x + x^2}{x^3} dx$.

Решение. Используя правило 4 интегрирования и формулы 2, 5, 4 таблицы интегралов, получаем:

$$\int \frac{\sqrt{x} - x^3e^x + x^2}{x^3}\,dx = \int \left(x^{-5/2} - e^x + \frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \int x^{-5/2}dx - \int e^x dx + \int \frac{dx}{x} = -\frac{2}{3}x^{-3/2} - e^x + \ln|x| + C.$$

7. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$

Решение. Выполним преобразования под знаком интеграла:

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2}\,dx.$$

Применяя правило 4 интегрирования и формулы 2, 4 таблицы интегралов, имеем

$$\int \frac{1-2x+x^2}{x^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2} - 2\int \frac{dx}{x} + \int dx =$$

$$= \int x^{-2}dx - 2\int \frac{dx}{x} + \int dx = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$$

8. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\,dx.$

Решение. Имеем

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\,dx = \int \frac{(e^x)^2-1^2}{e^x-1}\,dx = \int (e^x+1)\,dx = e^x + x + C.$$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}.$

Решение. С помощью формулы 15 таблицы интегралов находим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x + C.$$

10. $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}\,dx.$

Решение. Используя правило 4 интегрирования и формулу 6 таблицы интегралов, находим

$$\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}\,dx = \int \left(3 - 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)dx =$$

$$= 3\int dx - 2\int \left(\frac{3}{2}\right)^x dx = 3x - 2\cdot\frac{(3/2)^x}{\ln(3/2)} + C.$$

11. $\int a^x e^x dx$.

Решение. Согласно формуле 4 таблицы интегралов, имеем:

$$\int a^x e^x dx = \int (ae)^x dx = \frac{(ae)^x}{\ln(ae)} + C = \frac{(ae)^x}{\ln a + 1} + C.$$

12. $\int \mathrm{tg}^2 x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}\, x - x + C.$$

13. $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx$.

Решение. Записав числитель в виде $(1 + x^2) + x^2$ и почленно разделив его на знаменатель, получим сумму двух табличных интегралов 2 и 16:

$$\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx = \int \frac{(1 + x^2) + x^2}{x^2(1 + x^2)} dx =$$
$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1 + x^2} = -\frac{1}{x} + \mathrm{arctg}\, x + C.$$

14. $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$.

Решение. Применяя формулу $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, имеем

$$\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{1 + \cos^2 x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int dx =$$
$$= \frac{1}{2} \mathrm{tg}\, x + \frac{1}{2} x + C.$$

15. $\int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx$.

Решение. Используя формулу $2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$, находим:

$$\int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx = \int (1 - \cos x) dx = \int dx - \int \cos x dx =$$
$$= x - \sin x + C.$$

С помощью метода подведения функции под знак дифференциала найти следующие интегралы.

16. $\int (x + 1)^{15} dx$.

Решение. Так как $d(x+1)=1\cdot dx$, то данный интеграл можно представить следующим образом:

$$\int(x+1)^{15}dx=\int(x+1)^{15}d(x+1),$$

т. е. переменной интегрирования является $x+1$ и

$$\int(x+1)^{15}d(x+1)=\frac{(x+1)^{16}}{16}+C.$$

17. $\int(3x-5)^{12}dx.$

Решение. Представляя заданный интеграл в виде

$$\int(3x-5)^{12}dx=\frac{1}{3}\int(3x-5)^{12}\cdot 3dx$$

и учитывая, что $3dx=d(3x-5)$, имеем

$$\int(3x-5)^{12}dx=\frac{1}{3}\int(3x-5)^{12}d(3x-5)=$$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{(3x-5)^{13}}{13}+C=\frac{(3x-5)^{13}}{39}+C.$$

18. $\int\sin(3x-4)dx.$

Решение. Заметив, что $d(3x-4)=3dx$, имеем:

$$\int\sin(3x-4)dx=\frac{1}{3}\int\sin(3x-4)\cdot 3dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\sin(3x-4)d(3x-4)=-\frac{1}{3}\cos(3x-4)+C.$$

19. $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx.$

Решение. Так как $d(x^3+2)=3x^2dx$, то, применяя метод подведения под знак дифференциала, приводим интеграл к формуле 2 таблицы интегралов:

$$\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx=\frac{1}{3}\int(x^3+2)^{1/5}\cdot 3x^2dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int(x^3+2)^{1/5}d(x^3+2)=\frac{5(x^3+2)^{6/5}}{18}+C.$$

20. $\int\frac{dx}{2x-3}.$

Решение. Данный интеграл можно свести к формуле 4 таблицы интегралов, преобразовав его к следующему виду:

$$\int\frac{dx}{2x-3}=\frac{1}{2}\int\frac{2dx}{2x-3}=|d(2x-3)=2dx|=$$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{d(2x-3)}{2x-3} = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C.$$

21. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$.

Решение. Так как $d(\operatorname{tg} x + 1) = \frac{1}{\cos^2 x}dx$, то интеграл можно привести к формуле 2 таблицы интегралов с помощью подведения под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}} = \int (1+\operatorname{tg} x)^{-1/2} d(1+\operatorname{tg} x) =$$
$$= \frac{(1+\operatorname{tg} x)^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + C.$$

22. $\int \cos^3 x \sin 2x dx$.

Решение. Так как $d(\cos x) = -\sin x dx$, то **имеем**

$$\int \cos^3 x \sin 2x dx = 2\int \cos^4 x \sin x dx = |d(\cos x) =$$
$$= -\sin x dx| = -2\int \cos^4 x d(\cos x) = -2\cdot\frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

23. $\int \frac{x^2 dx}{x^6+4}$.

Решение. Представим данный интеграл следующим образом:

$$\int \frac{x^2 dx}{x^6+4} = \int \frac{x^2 dx}{(x^3)^2+2^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2 dx}{(x^3)^2+2^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+2^2}.$$

Здесь переменной интегрирования является x^3. Тогда с помощью формулы 16 таблицы интегралов имеем

$$\frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+2^2} = \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2} + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2} + C.$$

24. $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^4}}$.

Решение. Преобразовав интеграл, приведем его к формуле 15 таблицы интегралов:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x dx}{\sqrt{3^2-(x^2)^2}} = |d(x^2) = 2x dx| =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{3^2-x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{3} + C.$$

25. $\int \frac{x dx}{x^2+7}$.

Решение. Так как $d(x^2+7)=2xdx$, то, согласно формуле 4 таблицы интегралов, имеем

$$\int \frac{xdx}{x^2+7} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+7} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+7)}{x^2+7} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+7| + C.$$

26. $\int \cos^2 xdx.$

Решение. Применяя формулу $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, имеем

$$\int \cos^2 xdx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x \cdot 2dx =$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\int \cos 2xd(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

27. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-1}.$

Решение. Применяя формулу 18 таблицы основных интегралов, получаем

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-1} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C.$$

28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-6\ln x}}.$

Решение. Так как $d(1-6\ln x) = -\frac{6}{x}dx$, то с помощью метода подведения под знак дифференциала и формулы 3 таблицы основных интегралов, имеем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-6\ln x}} = -\int \frac{d(1-6\ln x)}{\sqrt{1-6\ln x}} = -2\sqrt{1-6\ln x} + C.$$

29. $\int \frac{x}{x+4}dx$

Решение. Записав числитель в виде $(x+4)-4$, почленно разделив его на знаменатель и применив формулы 1 и 4 таблицы интегралов, имеем:

$$\int \frac{xdx}{x+4} = \int \frac{(x+4)-4}{x+4}dx = \int \left(1 - \frac{4}{x+4}\right)dx =$$
$$= \int dx - 4\int \frac{dx}{x+4} = x - 4\int \frac{d(x+4)}{x+4} =$$
$$= x - 4\ln|x+4| + C.$$

30. $\int \frac{x(1-x^2)}{2+x^4}dx.$

Решение. Разделив почленно числитель на знаменатель, получим сумму двух интегралов:

$$\int \frac{x(1-x^2)}{2+x^4}dx=\int \frac{xdx}{2+x^4}-\int \frac{x^3dx}{2+x^4}=$$
$$=\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{(x^2)^2+(\sqrt{2})^2}-\frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{2+x^4}=$$
$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+(\sqrt{2})^2}-\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4+2)}{x^4+2}.$$

В первом из них переменной интегрирования является x^2, а во втором — x^4+2. Применяя табличные формулы 16 и 4, получаем:

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+(\sqrt{2})^2}-\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4+2)}{x^4+2}=$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\ln(x^4+2)+C.$$

31. $\int \frac{x+(\arccos 2x)^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

Решение. Разделив почленно числитель на знаменатель, с помощью метода подведения функции под знак дифференциала и формулы 2 таблицы интегралов, получаем

$$\int \frac{x+(\arccos 2x)^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}}+\int \frac{(\arccos 2x)^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx=$$
$$=-\frac{1}{8}\int (1-4x^2)^{-1/2}(-8x)dx-\frac{1}{2}\int \frac{(\arccos 2x)^2(-2)dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}=$$
$$=-\frac{1}{8}\int (1-4x^2)^{-1/2}d(1-4x^2)-$$
$$-\frac{1}{2}\int (\arccos 2x)^2 d(\arccos 2x)=$$
$$=-\frac{1}{4}(1-4x^2)^{1/2}-\frac{1}{6}(\arccos 2x)^3+C=$$
$$=-\frac{\sqrt{1-4x^2}}{4}-\frac{\arccos^3 2x}{6}+C.$$

32. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$

Решение. Умножая числитель и знаменатель подкоренного выражения на $1-x$, имеем

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=\int\sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1-x)}}\,dx=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$
$$=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+$$
$$+\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-1/2}(-2x)dx=\arcsin x+$$
$$+\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-1/2}d(1-x^2)=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

33. $\int\frac{2x-1}{x-2}\,dx.$

Решение. Записав числитель в виде $(2x-4)+3$ и почленно разделив его на знаменатель, получим сумму двух табличных интегралов 1 и 4:

$$\int\frac{2x-1}{x-2}\,dx=\int\frac{(2x-4)+3}{x-2}\,dx=\int\left(2+\frac{3}{x-2}\right)dx=$$
$$=|d(x-2)=dx|=2\int dx+3\int\frac{d(x-2)}{x-2}=$$
$$=2x+3\ln|x-2|+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 4.1—4.40 найти интеграл.

4.1. $\int\frac{3x-1}{x^2+9}\,dx.$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{3}{2}\ln|x^2+9|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.\right)$

4.2. $\int\frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}.$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{1}{\arcsin x}+C.\right)$

4.3. $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+8}\,dx.$ (*Ответ:* $\ln|x^2-3x+8|+C.$)

4.4. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C.\right)$

4.5. $\int\frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx.$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \arcsin x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C.\right)$

4.6. $\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx.$ (*Ответ:* $x-2\operatorname{arctg}x+C.$)

4.7. $\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}.$ (*Ответ:* $-\sqrt{1+2\cos x}+C.$)

4.8. $\int \frac{dx}{x(2+\ln x)}$. (*Ответ:* $\ln|2+\ln x| + C$.)

4.9. $\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 4}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^4-2}{x^4+2}\right| + C\right)$

4.10. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{1}{2\ln^2 x} + C.\right)$

4.11. $\int x\sqrt{2x^2+5}\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{6}(2x^2+5)^{3/2} + C.\right)$

4.12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + 2\sqrt{x-1} + C.\right)$

4.13. $\int \operatorname{tg}(3x+4)\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{1}{3}\ln|\cos(3x+4)| + C.\right)$

4.14. $\int \frac{(1+x)^2 dx}{1+x^2}$. (*Ответ:* $x + \ln(1+x^2) + C$.)

4.15. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2} + C.\right)$

4.16. $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{2}{3}x^3 - x - \frac{2}{3}(x^2-1)^{3/2} + C.\right)$

4.17. $\int \frac{dx}{x(x-1)}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C.\right)$

4.18. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2/3}}{x+\sqrt{2/3}}\right| + C.\right)$

4.19. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$. (*Ответ:* $-2\sqrt{2+\cos^2 x} + C$.)

4.20. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{1}{5}\operatorname{ctg} 5x + C.\right)$

4.21. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(3x^2-2)^2}}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{3x^2-2} + C\right)$

4.22. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-2}}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{3}\ln|x^3 + \sqrt{x^6-2}| + C.\right)$

4.23. $\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{2}{3}\sqrt{\ln^3|x|} - 6\sqrt{\ln|x|} + C.\right)$

4.24. $\int e^{x^3} x^2 dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{3}e^{x^3} + C.\right)$

4.25. $\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}}$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x} + C.\right)$

4.26. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin 2x\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}.\right)$

4.27. $\int \frac{x-\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{8}\ln(1+4x^2)-\frac{1}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} 2x)^3}+C.\right)$

4.28. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}.$

$\left(\textit{Ответ:}\ 2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}+C.\right)$

4.29. $\int \frac{\sin 4x dx}{\cos^4(2x+4)}.$ $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{\cos^2 2x}{2}+C.\right)$

4.30. $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{3x}-1}.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3}\ln|e^{3x}-1|+C.\right)$

4.31. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \sqrt{x^2-4}+3\ln|x+\sqrt{x^2-4}|+C.\right)$

4.32. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$ $(\textit{Ответ:}\ -2\operatorname{ctg} 2x+C.)$

4.33. $\int \frac{\cos 2x dx}{4+\cos^2 2x}.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\sin 2x}{\sqrt{5}-\sin 2x}\right|+C.\right)$

4.34. $\int \frac{x^3-1}{x+1}dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|+C.\right)$

4.35. $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{\sqrt{2+3x^2}}dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)-\right.$
$\left.-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{2+3x^2}|+C.\right)$

4.36. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ x-\frac{5}{2}\ln(x^2+4)+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.\right)$

4.37. $\int \frac{xdx}{(x+1)^2}.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \ln|x+1|+\frac{1}{(x+1)}+C.\right)$

4.38. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{(x+1)}{2}+C.\right)$

4.39. $\int x\operatorname{ctg}(x^2+1)dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\ln|\sin(x^2+1)|+C.\right)$

4.40. $\int \sin^3 5x\cos 5x dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{20}\sin^4 5x+C.\right)$

4.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, где функция $f(x)$ определена на некотором множестве X. Перейдем к переменной t по формуле

$$x = \varphi(t)\colon\ T \to X,$$

где функция $\varphi(t)$ дифференцируема на некотором множестве T и осуществляет взаимно однозначное отображение T на X, т. е. имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)\colon\ X \to T$.

Подставив $x = \varphi(t)$ в исходное подынтегральное выражение, получим

$$f(x)dx = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = g(t)dt.$$

Далее, справедливо равенство

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \int g(t)dt\,\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)},$$

т. е. вычисление интеграла $\int f(x)dx$ сводится к вычислению интеграла $\int g(t)dt$ и последующей подстановке $t = \varphi^{-1}(x)$.

Если $t = \psi(x)$, где t — новая переменная, то формула замены переменной при такой подстановке имеет вид

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int f(t)dt.$$

Если $u(x)$, $v(x)$ — дифференцируемые функции, то справедлива следующая *формула интегрирования по частям:*

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{4.1}$$

С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int udv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int vdu$. Применение формулы (4.1) целесообразно в тех случаях, когда интеграл $\int vdu$ более прост для нахождения, чем исходный, либо подобен ему. При этом в качестве u следует брать такую функцию, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве dv — ту часть подынтегрального выражения, интеграл от которого известен или может быть найден. Формула (4.1) может применяться неоднократно.

Например, для интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax}dx,\ \int P(x)\sin axdx,\ \int P(x)\cos axdx,$$

где $P(x)$ — многочлен, в качестве u следует взять $P(x)$, а в качестве dv — выражения $e^{ax}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$ соответственно. Для интегралов вида

$$\int P(x)\ln xdx,\ \int P(x)\arcsin xdx,\ \int P(x)\arccos xdx,$$
$$\int P(x)\operatorname{arctg} xdx,\ \int P(x)\operatorname{arcctg} xdx$$

в качестве u берут функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, а в качестве dv — выражение $P(x)dx$.

Примеры

Найти интегралы методом замены переменной.

1. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx.$

Решение. Выполним подстановку $t=\cos x$. Тогда $dt=-\sin x dx$ и интеграл сводится к двум табличным интегралам:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = -\int \frac{\sin^2 x(-\sin x)dx}{\cos^4 x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x)d(\cos x)}{\cos^4 x} =$$

$$= |\cos x = t| = -\int \frac{(1-t^2)dt}{t^4} = -\int t^{-4}dt + \int t^{-2}dt =$$

$$= -\frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C,$$

где $t=\cos x$.

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. Произведем подстановку $x=2/t$. Тогда $dx=-\frac{2}{t^2}dt$. Подставив в подынтегральное выражение найденные данные, получим табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \left|x=\frac{2}{t},\ dx=-\frac{2}{t^2}dt\right| =$$

$$= -2\int \frac{dt}{t^2 \frac{2}{t}\sqrt{4-\frac{4}{t^2}}} = -2\int \frac{t^2 dt}{2t^2\sqrt{4t^2-4}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\frac{1}{2}\ln|t+\sqrt{t^2-1}| + C,$$

где $t=2/x$.

3. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

Решение. Применяя подстановку $x=t^2$, получаем

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = |x=t^2,\ dx=2tdt| = \int \frac{2tdt}{t^2+t} = 2\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln|\sqrt{x}+1| + C.$$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$.

Решение. Полагая $3+e^x=t^2$, $e^x=t^2-3$, $x=\ln(t^2-3)$, $dx=\frac{2tdt}{t^2-3}$, имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}} = \int \frac{2t\,dt}{(t^2-3)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-3} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| + C,$$

где $t = \sqrt{e^x+3}$.

Найти интегралы методом интегрирования по частям.

5. $\int (x^2+1)e^{-2x}dx$.

Решение. Положим $u = x^2+1$, $dv^{-2x}dx$. Тогда $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $du = 2x\,dx$. Использовав формулу (4.1) интегрирования по частям, получим

$$\int (x^2+1)\, e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}(x^2+1)\, e^{-2x} + \int e^{-2x}x\,dx.$$

Итак, мы понизили степень x на единицу. Чтобы найти $\int xe^{-2x}dx$, применим еще раз интегрирование по частям.

Положим $u = x$, $dv = e^{-2x}dx$. Тогда $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $du = dx$. Для упрощения вычислений при переходе от dv к v можно считать, что $C=0$. Следовательно,

$$\int (x^2+1)e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-2x} - \frac{x}{2}e^{-2x} +$$

$$+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-2x} - \frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

6. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

Решение. Применяя метод интегрирования по частям, находим

$$\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x,\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}}, \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ v = 2\sqrt{x+1} \end{array} \right| =$$

$$= 2\sqrt{x+1}\,\arcsin x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{x+1}\,\arcsin x +$$

$$+ 2\int (1-x)^{-1/2}d(1-x) = 2\sqrt{x+1}\,\arcsin x +$$

$$+ 4\sqrt{1-x} + C.$$

7. $\int x\,\mathrm{tg}^2\,x\,dx$.

Решение Положим $u=x$, $dv=\operatorname{tg}^2 x dx$. Тогда

$$v=\int \operatorname{tg}^2 x dx=\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx=\int \frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=$$
$$=\operatorname{tg} x-x,\ du=dx.$$

Согласно формуле (4.1), имеем

$$\int x \operatorname{tg}^2 x dx=x(\operatorname{tg} x-x)-\int(\operatorname{tg} x-x) dx=x \operatorname{tg} x-x^2-$$
$$-\int \frac{\sin x}{\cos x} dx+\frac{x^2}{2}=x \operatorname{tg} x-\frac{x^2}{2}+\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}+C=$$
$$=x \operatorname{tg} x-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C.$$

8. $\int (x^2+x-3) \sin 3x dx$.

Решение. Найдем данный интеграл, применив последовательно два раза формулу (4.1) интегрирования по частям, так как одним из множителей является многочлен второй степени:

$$\int (x^2+x-3) \sin 3x dx=$$
$$=\left|\begin{array}{c} u=x^2+x-3,\ dv=\sin 3x dx, \\ du=(2x+1) dx,\ v=-\cos 3x/3 \end{array}\right|=$$
$$=-\frac{x^2+x-3}{3} \cos 3x+\frac{1}{3} \int (2x+1) \cos 3x dx=-$$
$$=\left|\begin{array}{c} u=2x+1,\ dv=\cos 3x dx, \\ du=2dx,\ v=\frac{1}{3} \sin 3x \end{array}\right|=-\frac{x^2+x-3}{3} \cos 3x+$$
$$+\frac{1}{9}(2x+1) \sin 3x-\frac{2}{9} \int \sin 3x dx=-\frac{x^2+x-3}{3} \cos 3x+$$
$$+\frac{2x+1}{9} \sin 3x+\frac{2}{27} \cos 3x+C=\frac{2x+1}{9} \sin 3x+$$
$$+\frac{1}{3}\left(-x-x^2+\frac{29}{9}\right) \cos 3x+C.$$

9. $\int e^{ax} \cos (bx) dx$.

Решение. Обозначив исходный интеграл через I, путем интегрирования по частям получим

$$I=\int e^{ax} \cos (bx) dx=\left|\begin{array}{c} u=e^{ax},\ dv=\cos (bx) dx, \\ du=ae^{ax} dx,\ v=\frac{1}{b} \sin (bx) \end{array}\right|=$$

$$= \frac{e^{ax}\sin(bx)}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)dx.$$

К полученному интегралу вновь применим формулу (4.1) интегрирования по частям. Приняв $u = e^{ax}$, $dv = \sin(bx)dx$, имеем: $v = -\frac{1}{b}\cos(bx)$, $du = ae^{ax}dx$, откуда

$$I = \frac{e^{ax}\sin(bx)}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos(bx)dx.$$

Применив дважды операцию интегрирования по частям, в правой части последнего равенства получим исходный интеграл, т. е.

$$I = \frac{e^{ax}}{b^2}(b\sin(bx) + a\cos(bx)) - \frac{a^2}{b^2}I.$$

Из последнего уравнения находим

$$\frac{(a^2+b)^2}{b^2}I = \frac{e^{ax}}{b^2}(b\sin(bx) + a\cos(bx)).$$

Отсюда

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin(bx) + a\cos(bx)) + C.$$

10. $\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$.

Решение. Находим

$$\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x, \ dv = (1+x^2)^{-2}xdx, \\ du = dx, v = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-2}d(1+x^2) = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

11. Получить рекуррентную формулу для $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.

Решение. Представив числитель в виде $\frac{1}{a^2}((a^2+x^2)-$
$-x^2)$ и почленно разделив его на знаменатель, получим два интеграла. Применяя ко второму из них формулу (4.1), имеем

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=x,\ dv=(x^2+a^2)^{-n}xdx, \\ du=dx,\ v=\frac{1}{2}\int(x^2+a^2)^{-n}d(x^2+a^2)= \\ =\frac{(x^2+a^2)^{1-n}}{2(1-n)} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}-$$

$$-\frac{1}{2a^2(n-1)}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

Отсюда

$$I_n=\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2}\left(2-\frac{1}{n-1}\right)I_{n-1}=$$

$$=\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}.$$

Учитывая, что

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a},$$

и полагая $n=2$, находим интеграл I_2. Затем, полагая $n=3$, получаем интеграл I_3. Таким образом, можно найти I_n при любом целом положительном n.

12. $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$.

Решение. Обозначив исходный интеграл через I и применив метод интегрирования по частям, получим

$$I=\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} u=\sqrt{x^2+a^2},\ dv=dx, \\ du=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}},\ v=x \end{array}\right|=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=x\sqrt{x^2+a^2}-$$

$$-\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=x\sqrt{x^2+a^2}-$$

$$-\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C,$$

т. е.

$$I=x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|-I+C.$$

Отсюда

$$2I=x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$$

Следовательно,

$$I=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|)+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 4.41—4.65 найти интеграл

V 4.41. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. (*Ответ*: $2(\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x}))+C$.)

4.42. $\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$.

(*Ответ*: $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$.)

4.43. $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

(*Ответ*: $x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+$
$+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$.)

4.44. $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$. (*Указание*. Положить $e^x+1=t^4$.)

(*Ответ*: $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+C$.)

4.45. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$. (*Указание*. Положить $x=\frac{1}{t}$.)

$\left(\text{Ответ: } -\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C.\right)$

4.46. $\int x^2 \ln(1+x)dx$.

$\left(\text{Ответ: } \dfrac{(x^2+1)\ln(1+x)}{3}-\dfrac{x^3}{9}+\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x}{3}+C.\right)$

4.47. $\int x^3 \sin x dx$.

(Ответ: $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+C$.)

4.48. $\int x \operatorname{arctg} x dx$. $\left(\text{Ответ: } \dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\dfrac{x}{2}+C.\right)$

4.49. $\displaystyle\int\frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x^5}}$.

$\left(\text{Ответ: } -\dfrac{8}{27\sqrt{x^3}}\left(\dfrac{9}{4}\ln^2 x+3\ln|x|+2\right)+C.\right)$

4.50. $\int x\ln(x-1)dx$.

$\left(\text{Ответ: } \dfrac{x^2-1}{2}\ln|x-1|-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{2}+C.\right)$

4.51. $\int x\cos 3x dx$.

$\left(\text{Ответ: } \dfrac{1}{9}(3x\sin 3x+\cos 3x)+C.\right)$

4.52. $\int e^{\sqrt{x}}dx$. (Ответ: $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$.)

4.53. $\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

(Ответ: $2(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x})+C$.)

4.54. $\int\cos(\ln x)dx$.

$\left(\text{Ответ: } \dfrac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C.\right)$

4.55. $\int x^2e^{-x/2}dx$. (Ответ: $-2e^{-x/2}(x^2+4x+8)+C$.)

4.56. $\displaystyle\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$. $\left(\text{Ответ: } \dfrac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}+C.\right)$

4.57. $\displaystyle\int\frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

(Ответ: $-2\sqrt{1-x}\arccos\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$.)

4.58. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$. (*Указание*. Положить $x=\operatorname{tg} t$.)

$\left(\textit{Ответ:}\ \sqrt{x^2+1}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C.\right)$

4.59. $\int(x^2-2x+5)e^{-x}dx$. $(\textit{Ответ:}\ -e^{-x}(x^2+5)+C.)$

4.60. $\int\frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.\right)$

4.61. $\int\arcsin^2 x dx$.

$(\textit{Ответ:}\ x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.)$

4.62. $\int\frac{\sin^2 x}{e^x}dx$.

$\left(\textit{Указание.}\right.$ Положить $\left.\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.\right)$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{\cos 2x-2\sin 2x}{5}-1\right)+C.\right)$

4.63. $\int(3x+1)\cos 2x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}(3x+1)\sin 2x+\frac{3}{4}\cos 2x+C.\right)$

4.64. $\int(2x^2+7)\sin 3x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{3}(2x^2+7)\cos 3x+\frac{4}{9}x\sin 3x+\right.$

$$\left.+\frac{4}{27}\cos 3x+C.\right)$$

4.65. $\int(2x+3)\ln(x-2)dx$.

$(\textit{Ответ:}\ (x^2+3x)\ln(x-2)-x^2/2-5x-$

$$-10\ln|x-2|+C.)$$

4.3. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Рассмотрим интегралы вида

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},\quad\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

С помощью выделения полного квадрата

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

и последующей замены $x+\dfrac{b}{2a}=t$ интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ в зависимости от знака выражения $\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{4a^2}$ приводится к одному из интегралов вида

$$\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C,\quad \int\frac{dt}{t^2-k^2}=\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+C, \tag{4.2}$$

а интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к интегралу

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm k^2}\right|+C, \tag{4.3}$$

если $a>0$, и к интегралу вида

$$\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{k}+C, \tag{4.4}$$

если $a<0$.

Рассмотрим интегралы вида

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx,\quad \int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

Если $m\neq 0$, то в числителях подынтегральных дробей выделяют выражение $2ax+b=(ax^2+bx+c)'$, а в знаменателях — полный квадрат. После этого интеграл $\displaystyle\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$ представляют в виде суммы двух интегралов, первый из которых сводится к интегралу $\displaystyle\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$, а второй — к интегралу $\displaystyle\int\frac{dt}{t^2+k^2}$ или $\displaystyle\int\frac{dt}{t^2-k^2}$. Интеграл $\displaystyle\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ также представляют в виде суммы двух интегралов, первый из которых приводится к интегралу $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C$, а второй — к интегралу $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}}$ или $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$.

Интегралы вида

$$\int\frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}\quad (r=1,2)$$

сводятся к рассмотренным ранее интегралам с помощью подстановки $mx+n=1/t$

Рассмотрим интегралы вида

$$\int \frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx,$$

где квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет комплексные корни. Интегрирование начинают с выделения полного квадрата

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

и последующей подстановки $x+\dfrac{b}{2a}=t$, приводящей интеграл к виду

$$\int \frac{At+B}{(t^2+l^2)^k}\,dt=A\int \frac{t\,dt}{(t^2+l^2)^k}+B\int \frac{dt}{(t^2+l^2)^k},$$

где A, B — некоторые числа Первый интеграл из правой части полученного выражения сводится к табличному

$$\int \frac{du}{u^k}=\frac{u^{1-k}}{1-k}+C,$$

а второй находят с помощью рекуррентной формулы, полученной в § 4.2

Примеры

Найти интегралы.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$.

Решение. Выделив в знаменателе подынтегрального выражения полный квадрат, получим:

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+13}=\int \frac{dx}{(x+3)^2+4}=\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2-5x+6}\,dx$.

Решение. Преобразуем интеграл следующим образом:

$$\int \frac{3x-5}{x^2-5x+6}\,dx=\int \frac{(3x-5)\,dx}{(x-5/2)^2-1/4}=$$

$$=\left|\begin{matrix} x-5/2=t, \ x=5/2+t, \\ dx=dt \end{matrix}\right|=\int \frac{3t+2{,}5}{t^2-1/4}\,dt=$$

$$=\int\frac{3t\,dt}{t^2-1/4}+\frac{5}{2}\int\frac{dt}{t^2-1/4}=\frac{3}{2}\ln\left|t^2-\frac{1}{4}\right|+$$
$$+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{t-1/2}{t+1/2}\right|+C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно имеем

$$\int\frac{3x-5}{x^2-5x+6}\,dx=\frac{3}{2}\ln|x^2-5x+6|+$$
$$+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.$$

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

Решение. Выделив в подкоренном выражении полный квадрат, имеем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}}=$$
$$=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{2^2-(x+1)^2}}=\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$$

Замечание Если в интегралах вида

$$\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,\quad\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$$

в знаменателе коэффициент $a\neq 0$, то его можно вынести за скобки: ax^2+ $+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$.

4. $\int\frac{2-5x}{\sqrt{4x^2+9x+1}}\,dx$.

Решение. Так как

$$4x^2+9x+1=4\left(x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}\right)=$$
$$=4\left(x^2+2\cdot\frac{9}{8}x+\left(\frac{9}{8}\right)^2+\frac{1}{4}-\left(\frac{9}{8}\right)^2\right)=$$
$$=4\left(\left(x+\frac{9}{8}\right)^2-\frac{65}{64}\right),$$

то представим интеграл в виде

$$\int\frac{2-5x}{\sqrt{4x^2+9x+1}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2-5x}{\sqrt{(x+9/8)^2-65/64}}\,dx.$$

Применим подстановку $x+9/8=t$, $x=t-9/8$, $dx=dt$. Тогда имеем

$$\frac{1}{2}\int\frac{2-5x}{\sqrt{(x+9/8)^2-65/64}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{61/8-5t}{\sqrt{t^2-65/64}}\,dt=-\frac{5}{2}\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-65/64}}+$$

$$+\frac{61}{16}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-65/64}}=-\frac{5}{4}\int\frac{d(t^2-65/64)}{\sqrt{t^2-65/64}}+$$

$$+\frac{61}{16}\ln\left|t+\sqrt{t^2-65/64}\right|=-\frac{5}{2}\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}+$$

$$+\frac{61}{16}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}\right|+C=-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+$$

$$+\frac{61}{16}\ln\left|x+\frac{9}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+9x+1}\right|+C.$$

5. $\displaystyle\int\frac{4+3x}{\sqrt{2-6x-9x^2}}\,dx.$

Решение. Преобразуем интеграл к виду

$$\int\frac{4+3x}{\sqrt{2-6x-9x^2}}\,dx=\int\frac{4+3x}{\sqrt{3-(3x+1)^2}}\,dx.$$

Применив подстановку $3x+1=t$, $x=\frac{1}{3}(t-1)$, $dx=\frac{1}{3}dt$, получим

$$\int\frac{4+3x}{\sqrt{3-(3x+1)^2}}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{t+3}{\sqrt{3-t^2}}\,dt=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{3-t^2}}-\frac{1}{6}\int\frac{d(3-t^2)}{\sqrt{3-t^2}}=\arcsin\frac{t}{3}-$$

$$-\frac{1}{3}\sqrt{3-t^2}+C=\arcsin\frac{3x+1}{3}-\frac{\sqrt{2-6x-9x^2}}{3}+C.$$

6. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}.$

Решение. Положим $x=1/t$, тогда $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. Находим

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}=-\int\frac{1\cdot dt}{t\sqrt{1/t^2+8/t+1}}=$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+8t+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(t+4)^2-15}} =$$

$$= -\int \frac{d(t+4)}{\sqrt{(t+4)^2-(\sqrt{15})^2}} = -\ln|t+4+$$

$$+\sqrt{(t+4)^2-(\sqrt{15})^2}| + C = -\ln|t+4+$$

$$+\sqrt{t^2+8t+1}\,| + C,$$

где $t = 1/x$.

7. $\int \frac{5x-13}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{5x-13}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = 5\int \frac{x-13/5}{((x+2)^2+1)^2}\,dx.$$

Произведем замену переменной $x+2=t$, $x=t-2$, $dx=dt$. Тогда получим

$$5\int \frac{x-13/5}{((x+2)^2+1)^2}\,dx = 5\int \frac{t-23/5}{(t^2+1)^2}\,dt =$$

$$=5\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^2} - 23\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{5}{2}\int (t^2+1)^{-2}d(t^2+1) -$$

$$-23\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{5}{2(t^2+1)} - 23\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Применив рекуррентную формулу для вычисления интеграла $\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$, имеем

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C.$$

Перейдя к переменной x, окончательно получим

$$\int \frac{5x-13}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = -\frac{5}{2(x^2+4x+5)} -$$

$$-\frac{23}{2}\,\frac{x+2}{x^2+4x+5} - \frac{23}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 4.66—4.87 найти интеграл.

4.66. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+2}\right|+C.\right)$

4.67. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)\right)+C.\right)$

4.68. $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ 3\sqrt{x^2-4x+5}+\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+C.\right)$

4.69. $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\left(7\arcsin\frac{2x-1}{2}-\sqrt{3+4x-4x^2}\right)+C.\right)$

4.70. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-1}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3}\ln\left|3x+1+\sqrt{9x^2+6x-1}\right|+C.\right)$

4.71. $\int \sqrt{x^2-4x+1}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x-2}{2}\sqrt{x^2-4x+1}+\frac{3}{2}\ln\left|x-2+\right.\right.$

$\left.\left.+\sqrt{x^2-4x+1}\right|+C.\right)$

4.72. $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{x-1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}+2\arcsin\frac{x-1}{2}+C\right)$

4.73. $\int \frac{4dx}{3x^2+8x-2}$.

$\left(\textit{Ответ}\ \frac{2}{\sqrt{22}}\ln\left|\frac{3x+4-\sqrt{22}}{3x+4+\sqrt{22}}\right|+C.\right)$

4.74. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ 3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|x+1+\right.\right.$

$\left.\left.+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.\right)$

4.75. $\int \frac{x+2}{(x^2+2x+2)^3}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{3}{8}\,\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\right.$

$\left.+\frac{x}{4(x^2+2x+2)^2}+C.\right)$

4.76. $\int \frac{3x+2}{(x^2-3x+3)^2}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)}+\frac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C.\right)$

4.77. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ: } x-\frac{5}{2}\ln|x^2+3x+4|+\frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C.\right)$

4.78. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left|x\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\right.\right.$

$\left.\left.+\sqrt{5x^2-2x+1}\right|+C.\right)$

4.79. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}.$

$(\textit{Ответ: } x+3\ln(x^2-6x+10)+8\operatorname{arctg}(x-3)+C.)$

4.80. $\int \frac{4x+8}{3x^2+2x+5}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{3}\ln|3x^2+2x+5|+\frac{20}{3\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{14}}+C.\right)$

4.81. $\int \frac{5x-7}{8x^2+x+1}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{5}{16}\ln|8x^2+x+1|-\frac{117}{8\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{16x+1}{\sqrt{31}}+C.\right)$

4.82. $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\ln|2x^2+2x+3|+\frac{9}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.\right)$

4.83. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-6\sin x+12}.$

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{3-\sin x}{\sqrt{3}}+C.\right)$

4.84. $\int \frac{x\,dx}{x^4-4x^2+3}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right|+C.\right)$

4.85. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$.

$\left(\textit{Ответ: } -\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}-2\arcsin\frac{2+\ln x}{\sqrt{5}}+C.\right)$

4.86. $\int \frac{x+5}{x^2-2x-8}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-8|+\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|+C.\right)$

4.87. $\int \frac{3x-4}{x^2+8x+15}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{2}\ln|x^2+8x+15|-16\ln\left|\frac{x+3}{x+5}\right|+C.\right)$

4.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЯ ИХ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$; в противном случае она называется *неправильной*.

Простейшей дробью называется правильная дробь одного из следующих четырех типов:

I $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^m}$, где $m\geqslant 2$, $m\in\mathbf{N}$;

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $p^2/4-q<0$, т. е. квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней;

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^r}$, где $r\geqslant 2$, $r\in\mathbf{N}$, и квадратный трехчлен x^2+ $+px+q$ не имеет действительных корней.

Во всех четырех случаях предполагается, что A, B, p, q, $a\in\mathbf{R}$.

Перед интегрированием рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ необходимо выполнить следующие алгебраические преобразования и вычисления.

1. Если дана неправильная рациональная дробь, выделить из нее целую часть, т. е. представить эту дробь в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ — многочлен; $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь.

2. Разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x)=(x-a)^m(x-b)\cdots(x^2+px+q)^r\ldots,$$

где квадратичные множители имеют комплексные сопряженные корни.

3. Правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_m}{x-a}+\frac{B_1}{(x-b)^s}+$$
$$+\frac{B_2}{(x-b)^{s-1}}+\ldots+\frac{B_s}{x-b}+\ldots+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+px+q)^r}+$$
$$+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^{r-1}}+\ldots+\frac{C_rx+D_r}{x^2+px+q}+\ldots$$

4. Вычислить неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_s, \ldots, C_1, D_1, C_2, D_2, \ldots, C_r, D_r, \ldots,$ для чего привести последнее равенство к общему знаменателю, приравнять в числителе коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Можно определить коэффициенты и другим способом, придавая в полученном тождестве переменной x произвольные числовые значения. Часто бывает полезно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов

В результате *интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.*

Примеры

1. Найти $\displaystyle\int\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}\,dx.$

Решение. Разложим на множители знаменатель подынтегрального выражения:

$$x^3-5x^2+6x=x(x^2-5x+6)=x(x-2)(x-3).$$

Так как каждый из множителей x, $x-2$, $x-3$ входит в знаменатель в первой степени, то данная правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей типа I:

$$\frac{2x^2-1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

Освободившись от знаменателей, получим

$$2x^2-1=A(x^2-5x+6)+B(x^2-3x)+C(x^2-2x).$$

Сгруппируем члены при одинаковых степенях x:

$$2x^2-1=(A+B+C)x^2+(-5A-3B-2C)x+6A.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} A+\ B+\ C=\ \ 2, \\ -5A-3B-2C=\ \ 0, \\ 6A \qquad\qquad\ =-1, \end{array}\right\}$$

из которой находим: $B=-7/2$, $C=17/3$, $A=-1/6$.

Таким образом, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{2x^2-1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{-1/6}{x}-\frac{7/2}{x-2}+\frac{17/3}{x-3}.$$

Неизвестные A, B, C можно определить и другим способом: после освобождения от знаменателя придать x столько частных значений, сколько неизвестных содержится в системе (в данном случае — три числовых значения). Особенно удобно придавать x значения, являющиеся действительными корнями знаменателя. Применим этот прием к решению данного примера.

После освобождения от знаменателя было получено равенство

$$2x^2-1=A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2). \quad (1)$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 0, 2, 3. Положим в равенстве (1) $x=0$. Тогда

$$-1=A(0-2)(0-3)+B\cdot 0\cdot(0-3)+C\cdot 0\cdot(0-2),$$
$$6A=-1,\ A=-1/6.$$

Полагая $x=3$, получаем: $17=3C$, $C=3/17$. Далее, полагая $x=2$, имеем: $7=-2B$, $B=-7/2$. В результате получились те же значения, что и при первом способе определения неизвестных.

Итак,

$$\int\frac{2x^2-1}{x(x-2)(x-3)}dx=-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x}-$$
$$-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{17}{3}\int\frac{dx}{x-3}=$$
$$=-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C.$$

2. Найти $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx.$

Решение. Знаменатель подынтегрального выражения имеет лишь действительные корни: 1 и -2, причем первый корень — кратный, а второй — простой. Тогда множителю $(x-1)^2$ соответствует сумма двух простейших дробей $\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{x-1}$, а множителю $x+2$ — простейшая дробь $\dfrac{C}{x+2}$. Таким образом, имеем

$$\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}.$$

Освободимся от знаменателей:

$$3x^2+2x-1=A(x+2)+B(x+2)(x-1)+C(x-1)^2.$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 1 и -2. Полагая $x=1$, получаем: $4=3A$, $A=3/4$. При $x=-2$ имеем: $7=9C$, $C=7/9$.

Приравнивая коэффициенты при старшей степени x, т. е. при x^2, находим: $B+C=3$, $B=3-C=3-7/9=$ $=20/9$. Следовательно, разложение данной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{3/4}{(x-1)^2}+\frac{20/9}{x-1}+\frac{7/9}{x+2}.$$

Тогда

$$\int\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+$$
$$+\frac{20}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x+2}=-\frac{3}{4(x-1)}+$$
$$+\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C.$$

3. Найти $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^3-1}.$

Решение. Разложим знаменатель на множители:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

Данный многочлен имеет три корня: один — простой действительный и два простых комплексных. Тогда

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$
$$=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Освобождаемся от знаменателей:

$$x=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1).$$

Действительным корнем знаменателя является число 1. При $x=1$ имеем: $1=3A$, $A=1/3$.

Сравнивая коэффициенты при x^2, x, получаем: $A+B=0$, $A+C-B=1$, откуда $B=-1/3$, $C=1/3$, т. е.

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{1/3}{x-1}-\frac{(1/3)(x-1)}{x^2+x+1}.$$

Тогда

$$\int\frac{xdx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x-1|-$$
$$-\frac{1}{6}\int\frac{(2x+1)-3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4}=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+$$
$$+\frac{1}{2}\ \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}+C=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

4. Найти $\displaystyle\int\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx.$

Решение. Разложим знаменатель на множители:

$$x^4+6x^2+8=(x^2+2)(x^2+4).$$

Данный многочлен имеет две пары комплексно-сопряженных простых корней. Тогда

$$\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}=\frac{x^3-6}{(x^2+2)(x^2+4)}=$$
$$=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Освободившись от знаменателей, имеем

$$x^3-6=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+2).$$

Отсюда, приведя подобные члены, находим

$$x^3-6=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(4A+2C)x+4B+2D.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$A+C=1,\ B+D=0,\ 4A+2C=0,\ 4B+2D=-6,$$

решение которой: $A=-1$, $C=2$, $B=-3$, $D=3$. Тогда

$$\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}=-\frac{x+3}{x^2+2}+\frac{2x+3}{x^2+4}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx=-\int\frac{x+3}{x^2+2}dx+\int\frac{2x+3}{x^2+4}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+2}-3\int\frac{dx}{x^2+2}+\int\frac{2xdx}{x^2+4}+$$

$$+3\int\frac{dx}{x^2+4}=-\frac{1}{2}\ln|x^2+2|-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+$$

$$+\ln|x^2+4|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

5. Найти $\int\frac{2xdx}{(1+x)(1+x^2)^2}$.

Решение. Так как x^2+1 — двукратный множитель, то имеем

$$\frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}+$$

$$+\frac{Dx+E}{(1+x^2)^2}.$$

Освободившись от знаменателей, получим равенство

$$2x=A(1+x^2)^2+(Bx+C)(1+x)(1+x^2)+$$

$$+(Dx+E)(1+x).$$

Полагая в нем $x=-1$, имеем: $-2=4A$, $A=-1/2$. Приведем подобные члены:

$$2x=(A+B)x^4+(B+C)x^3+(2A+B+C+D)x^2+$$

$$+(B+C+D+E)x+A+C+E.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений

$$A+B=0,\ B+C=0,\ 2A+B+C+D=0,$$
$$B+C+D+E=2,\ A+C+E=0,$$

из которой найдем: $B=1/2$, $C=-1/2$, $E=-A-C=1$, $D=-2A-B-C=1-1/2+1/2=1$. Следовательно,

$$\frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}=\frac{-1/2}{1+x}+\frac{x/2-1/2}{x^2+1}+$$
$$+\frac{x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Тогда

$$\int\frac{2xdx}{(1+x)(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}+$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx+\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\ln|1+x|+\frac{1}{4}\ln|x^2+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-$$
$$-\frac{1}{2(x^2+1)}+\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Для нахождения последнего интеграла применим рекуррентную формулу

$$I_n=\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}.$$

Для случая $n=2$, $a=1$ имеем

$$I_2=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$
$$=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x.$$

Окончательно получаем

$$\int\frac{2xdx}{(1+x)(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\ln|1+x|+\frac{1}{4}\ln|x^2+1|-$$
$$-\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{x}{2(1+x^2)}+C=\frac{1}{2}\ln|1+x|+$$
$$+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{x-1}{2(1+x^2)}+C.$$

6. Найти $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}\,dx.$

Решение. Выделим целую часть данной неправильной рациональной дроби, разделив ее числитель на знаменатель по правилу деления многочленов:

$$\begin{array}{r|l} x^4+3x^3+3x^2-5 & x^3+3x^2+3x+1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^4+3x^3+3x^2+x} & x \\ -x-5 & \end{array}$$

Тогда

$$\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}\,dx=$$

$$=\int\left(x-\frac{x+5}{x^3+3x^2+3x+1}\right)dx=\int\left(x-\frac{x+5}{(x+1)^3}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\int\frac{(x+1)+4}{(x+1)^3}\,dx=\frac{x^2}{2}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}-$$

$$-4\int\frac{dx}{(x+1)^3}=\frac{x^2}{2}-\frac{(x+1)^{-1}}{-1}-\frac{4(x+1)^{-2}}{-2}+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{(1+x)^2}+C.$$

7. Найти интеграл $\int \frac{x^2-x}{(x+1)^9}\,dx$, не применяя метода неопределенных коэффициентов.

Решение. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, поэтому можно было бы найти интеграл, представив эту дробь в виде суммы простейших дробей. Однако нахождение интеграла можно значительно упростить, если произвести замену переменной $x+1=t$. Тогда $x=t-1$, $dx=dt$. Находим

$$\int\frac{x^2-x}{(x+1)^9}\,dx=\left|\begin{matrix} x+1=t,\ x=t-1, \\ dx=dt \end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{(t-1)^2-t+1}{t^9}\,dt=\int\frac{t^2-3t+2}{t^9}\,dt=$$

$$=\int(t^{-7}-3t^{-8}+2t^{-9})\,dt=\frac{t^{-6}}{-6}-\frac{3t^{-7}}{-7}+\frac{2t^{-8}}{-8}+C=$$

$$=-\frac{1}{6t^6}+\frac{3}{7t^7}+\frac{1}{4t^8}+C,$$

где $t=x+1$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 4.88—4.119 найти интеграл.

4.88. $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ 3\ln\left|\frac{(x-1)}{x+2}\right| - \frac{2}{x+2} + C.\right)$

4.89. $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2(x-2)}\right| + C.\right)$

4.90. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.\right)$

4.91. $\int \frac{dx}{x^3-8}.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.\right)$

4.92. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ 3\ln\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|} + 2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.\right)$

4.93. $\int \frac{x+1}{x^4+4x^2+4}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x-2}{4(x^2+2)} + \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.\right)$

4.94. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{16}\ln\frac{x^2+1}{x^2+9} + \frac{1}{8}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{24}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.\right)$

4.95. $\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2(x-1)^2} + 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C.\right)$

4.96. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-1)}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.\right)$

4.97. $\int \frac{x^5 dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{(x+2)^2}{2} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{9}{4(x-1)} + \frac{31}{8}\ln|x-1| + \right.$

$\left. + \frac{1}{8}\ln|x+1| + C.\right)$

4.98. $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.\right)$

4.99. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{(x+1)^2}{2} + \ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg} x + C.\right)$

4.100. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln(x^2+2x+2) - \right.$

$\left. - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C.\right)$

4.101. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x^2+1)}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{5}\left(9\operatorname{arctg} x + \ln\frac{x^2+1}{(x-2)^2}.\right)\right)$

4.102. $\int \frac{(x+1)^3}{x^3-1}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ x + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln\left((x-1)^8 \times \right.\right.$

$\left.\left. \times \sqrt{x^2+x+1}\right).\right)$

4.103. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx$.

$(\textit{Ответ:}\ 5x + 2\ln|x| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2| + C.)$

4.104. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{(x+2)}-\frac{4}{(x+4)}+2\ln\left|\frac{(x+4)}{(x+2)}\right|+C.\right)$

4.105. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x}-\frac{1}{(x-1)}+3\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C.\right)$

4.106. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{52}\ln|x-3|-\frac{1}{20}\ln|x-1|+\frac{1}{65}\ln(x^2+\right.$

$\left.+4x+5)+\frac{7}{130}\operatorname{arctg}(x+2)+C.\right)$

4.107. $\int \frac{x^4dx}{x^4-1}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.\right)$

4.108. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ 5x+\ln\left|\frac{x^{1/2}(x-4)^{161/6}}{(x-1)^{7/3}}\right|+C.\right)$

4.109. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ x+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C.\right)$

4.110. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{11}\ln|3x+1|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|-\frac{1}{3}\ln|x|+C.\right)$

4.111. $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C.\right)$

4.112. $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{57}{8}\operatorname{arctg} x-\frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}+C.\right)$

4.113. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C.\right)$

4.114. $\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{13}{2(x-4)^2}+\frac{3}{x-4}+2\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|+C.\right)$

4.115. $\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg} x+C.\right)$

4.116. $\int \frac{3x^3-x^2-4x+13}{x^2(x^2-4x+13)}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\ln|x^2-4x+13|+\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C.\right)$

4.117. $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x+2}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\right.$

$\left.+2\operatorname{arctg} x+C.\right)$

4.118. $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C.\right)$

4.119. $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{4x}-\frac{1}{4(x-2)}+C.\right)$

4.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПОДСТАНОВОК И ФОРМУЛ ТРИГОНОМЕТРИИ

Интегрирование тригонометрических выражений с помощью подстановок. Условимся через $R(u, v)$ обозначать рациональную функцию относительно u, v, т. е. выражение, которое получено из любых величин u, v с помощью четырех арифметических действий.

Рассмотрим интегралы вида $\int \mathbf{R}(\sin x, \cos x)\,dx$, где $\mathbf{R}$ — рациональная функция аргументов $\sin x$ и $\cos x$. Такие интегралы приводятся к интегралам от рациональных функций, т. е. рационализируются с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. В результате этой подстановки имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\\
&\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\\
&x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},\\
&\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Универсальная подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ во многих случаях приводит к сложным вычислениям, так как при ее применении $\sin x$ и $\cos x$ выражаются через t в виде рациональных дробей, содержащих t^2.

В некоторых случаях нахождение интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ можно осуществить с помощью других подстановок. Укажем эти случаи.

1. Если $R(\sin x, \cos x)$ — четная функция относительно $\sin x$, $\cos x$, т. е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то интегралы $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ рационализируются подстановкой $t = \operatorname{tg} x$. При этом используются формулы:

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}. \tag{4.6}$$

2. Если $R(\sin x, \cos x)$ — нечетная функция относительно $\sin x$, т. е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интегралы $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ рационализируются с помощью подстановки $t = \cos x$.

3. Если $R(\sin x, \cos x)$ — нечетная функция относительно $\cos x$, т. е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интегралы $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ рационализируются с помощью подстановки $t = \sin x$.

4. Интегралы $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$ приводятся к рациональному виду с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} x$.

5. Интегралы $\int R(\operatorname{ctg} x)\,dx$ приводятся к рациональному виду с помощью подстановки $t = \operatorname{ctg} x$.

Замечание. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin^{2n+1}x}$, $\int \frac{dx}{\cos^{2n+1}x}$ лучше всего находить с помощью подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Интегрирование тригонометрических выражений с помощью тригонометрических формул. Рассмотрим следующие случаи.

1. Интегралы вида

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx,\quad \int \cos mx \cdot \cos nx dx,$$
$$\int \sin mx \cdot \sin nx dx$$

находят с помощью формул тригонометрии:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin (m-n)x + \sin (m+n)x), \tag{4.7}$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos (m-n)x + \cos (m+n)x), \tag{4.8}$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos (m-n)x - \cos (m+n)x).$$

2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $m, n \in \mathbb{N}$, находят при нечетном n с помощью подстановки $t = \sin x$, при нечетном m — с помощью подстановки $t = \cos x$. Если же m и n — четные положительные числа, то подынтегральную функцию необходимо преобразовать с помощью формул тригонометрии:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \tag{4.9}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \tag{4.10}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x). \tag{4.11}$$

3. Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x dx$, $\int \operatorname{ctg}^m x dx$, где $m \in \mathbb{N}$, находят с помощью формул:

$$\operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x - 1,\quad \operatorname{ctg}^2 x = 1/\sin^2 x - 1, \tag{4.12}$$

последовательно понижая степень тангенса или котангенса.

4. Интегралы вида

$$\int \operatorname{tg}^m x \cdot \frac{1}{\cos^n x} dx,\quad \int \operatorname{ctg}^m x \cdot \frac{1}{\sin^n x} dx,$$

где n — целое четное положительное число, и интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n}x},\quad \int \frac{dx}{\cos^{2m}x},$$

где n, m — целые положительные числа, находят с помощью формул:

$$\operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x - 1, \ \operatorname{ctg}^2 x = 1/\sin^2 x - 1.$$

Примеры

Найти интегралы с помощью тригонометрических подстановок.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}$.

Решение. Выпишем подынтегральную функцию:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}.$$

Так как выполняется условие $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применяем подстановку $t = \operatorname{tg} x$ и используем формулы (4.6). Получаем

$$\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \ x = \operatorname{arctg} t, \ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{(1+t^2)\dfrac{4t^2-7}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{4t^2-7} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(2t)}{(2t)^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{1}{4\sqrt{7}} \ln\left|\frac{2t-\sqrt{7}}{2t+\sqrt{7}}\right| + C,$$

где $t = \operatorname{tg} x$.

2. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^6 x}$.

Решение. Выпишем подынтегральную функцию:

$$R(\sin x \cos x) = \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x}.$$

Так как выполняется условие $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то, применив подстановку $t = \sin x$, имеем

$$\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^6 x} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x, \ dt = \cos x dx, \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| =$$

$$=\int \frac{(1-t^2)^2}{t^6}\,dt=\int \frac{1-2t^2+t^4}{t^6}\,dt=$$

$$=\int (t^{-6}-2t^{-4}+t^{-2})\,dt=\frac{t^{-5}}{-5}-\frac{2t^{-3}}{-3}+\frac{t^{-1}}{-1}+C=$$

$$=-\frac{1}{5t^5}+\frac{2}{3t^3}-\frac{1}{t}+C,$$

где $t=\sin x$.

3. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

Решение. Так как для подынтегральной функции

$$R(\sin x,\ \cos x)=\frac{1}{5-4\sin x+3\cos x}$$

не выполняются условия: $R(-\sin x,\ -\cos x)=R(\sin x,\ \cos x)$, $R(-\sin x,\ \cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$, $R(\sin x,\ -\cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$, то, применив подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и формулы (4.5), получим

$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}=$$

$$=\left|\begin{matrix} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x=2\operatorname{arctg} t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix}\right|=$$

$$=\int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(5-\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}\right)}=$$

$$=2\int \frac{dt}{5+5t^2-8t+3-3t^2}=2\int \frac{dt}{2t^2-8t+8}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2-4t+4}=\int \frac{dt}{(t-2)^2}=-\frac{1}{t-2}+C,$$

где $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

4. $\int \operatorname{ctg}^5 x\,dx$.

Решение. Это интеграл вида $\int R(\operatorname{ctg} x)\,dx$. Применив подстановку $\operatorname{ctg} x=t$, найдем:

$$I=\int \operatorname{ctg}^5 x\,dx=\big|\,t=\operatorname{ctg} x,\ x=\operatorname{arcctg} t,$$

$$dx=-\frac{dt}{1+t^2}\Bigg| = -\int\frac{t^5dt}{1+t^2}.$$

Выделяя целую часть полученной неправильной рациональной дроби, имеем

$$I=-\int\left(t^3-t+\frac{t}{t^2+1}\right)dt=-\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}-$$
$$-\frac{1}{2}\ln\,(t^2+1)+C,$$

где $t=\operatorname{ctg} x$.

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^3 x}$.

Решение. Данный интеграл относится к интегралам вида $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^{2n+1} x}$, поэтому применим подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и воспользуемся формулами (4.5). Тогда

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=$$
$$=2\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^3}=2\int\frac{(1+t^2)^2dt}{8t^3}=$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^3}\,dt=\frac{1}{4}\int\left(t^{-3}+\frac{2}{t}+t\right)dt=$$
$$=\frac{t^{-2}}{-8}+\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{t^2}{8}+C.$$

6. $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{tg} x\cos 2x}$.

Решение. Так как $R(-\sin x,\ -\cos x)=R(\sin x,\ \cos x)$, то, положив $t=\operatorname{tg} x$, получим

$$\int\frac{dx}{\operatorname{tg} x\cos 2x}=\int\frac{dx}{\operatorname{tg} x(\cos^2 x-\sin^2 x)}=$$
$$=\int\frac{dx}{\operatorname{tg} x\cos^2 x(1-\operatorname{tg}^2 x)}=\left|\ t=\operatorname{tg} x,\ dt=\frac{1}{\cos^2 x}\,dx\right|=$$
$$=\int\frac{dt}{t(1-t^2)}=\int\frac{(1-t^2)+t^2}{t(1-t^2)}\,dt=\int\frac{dt}{t}+\int\frac{tdt}{1-t^2}=$$

$$=\ln|t|-\frac{1}{2}\int\frac{(-2t)\,dt}{1-t^2}=\ln|t|-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-t^2)}{1-t^2}=$$

$$=\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|1-t^2|+C,$$

где $t=\operatorname{tg} x$.

7. $\int\frac{dx}{5-3\cos x}$

Решение. Так как функция $R(\sin x,\ \cos x)=$ $=\frac{1}{5-3\cos x}$ не является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$, нечетной относительно $\sin x$, нечетной относительно $\cos x$, то применим универсальную подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Использовав формулы (4.5), получим

$$\int\frac{dx}{5-3\cos x}=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x=2\operatorname{arctg} t,\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=2\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(5-3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{8t^2+2}=$$

$$=\int\frac{dt}{1+4t^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2t)+C,$$

где $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Найти интегралы с помощью тригонометрических формул.

8. $\int\sin 3x\cos 5x dx$.

Решение. Воспользуемся формулой (4.7). Имеем

$$\int\sin 3x\cos 5x dx=\frac{1}{2}\int(\sin 8x-\sin 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin 8x dx-\frac{1}{2}\int\sin 2x dx=-\frac{1}{16}\cos 8x+$$

$$+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

9. $\int\cos 2x\cos x\cos 3x dx$.

Решение. Применив формулу (4.8), получим

$$\int\cos 2x\cos x\cos 3x dx=\frac{1}{2}\int\cos 2x(\cos 2x+\cos 4x)dx=$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos^2 2x dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+\cos 4x) dx + \frac{1}{4}\int (\cos 2x + \cos 6x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{24}\sin 6x + C.$$

10. $\int \cos^4 x \sin^5 x dx$.

Решение Выполним преобразования:

$$\int \cos^4 x \sin^5 x dx = -\int \cos^4 x (1-\cos^2 x)^2 d(\cos x) =$$

$$= -\int \cos^4 x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) d(\cos x) =$$

$$= -\int (\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x) d(\cos x) =$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C.$$

11. $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$.

Решение. Используя формулы (4.9) и (4.10), имеем

$$\int \cos^2 x \sin^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx -$$

$$- \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \times$$

$$\times \frac{1}{2} d(\sin 2x) = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{16}\,\frac{\sin^3 2x}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

12. $\int \sin^6 x dx$.

Решение. Используя формулу (4.10), получаем

$$\int \sin^6 x dx = \int (\sin^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos 2x dx + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x dx -$$

$$- \frac{1}{8}\int \cos^3 2x dx = \frac{x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{16}\int (1 +$$

$$+ \cos 4x) dx - \frac{1}{8}\int (1 - \sin^2 2x)\cdot \frac{1}{2} d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{64}\sin 4x -$$

$$-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C=\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+$$
$$+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

13. $\int \mathrm{tg}^5 2x dx$.

Решение. Применив первую из формул (4.12), находим

$$\int \mathrm{tg}^5 2x dx=\frac{1}{2}\int \mathrm{tg}^5 2x dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int \mathrm{tg}^3 2x\left(\frac{1}{\cos^2 2x}-1\right)d(2x)=$$
$$=\frac{1}{2}\int \mathrm{tg}^3 2x d(\mathrm{tg}\, 2x)-\frac{1}{2}\int \mathrm{tg}^3 2x d(2x)=$$
$$=\frac{1}{8}\mathrm{tg}^4 2x-\frac{1}{2}\int \mathrm{tg}\, 2x\left(\frac{1}{\cos^2 2x}-1\right)d(2x)=$$
$$=\frac{1}{8}\mathrm{tg}^4 2x-\frac{1}{2}\int \mathrm{tg}\, 2x d(\mathrm{tg}\, 2x)+\frac{1}{2}\int \mathrm{tg}\, 2x d(2x)=$$
$$=\frac{\mathrm{tg}^4 2x}{8}-\frac{\mathrm{tg}^2 2x}{4}+\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x d(2x)}{\cos 2x}=$$
$$=\frac{\mathrm{tg}^2 2x}{8}-\frac{\mathrm{tg}^2 2x}{4}+\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C.$$

14. $\int \mathrm{tg}^6 x\frac{1}{\cos^4 x}dx$.

Решение. Применяя формулу $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2 x$, получаем

$$\int \mathrm{tg}^6 x\cdot\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int \mathrm{tg}^6 x(1+\mathrm{tg}^2 x)\frac{dx}{\cos^2 x}=$$
$$=\int \mathrm{tg}^6 x(1+\mathrm{tg}^2 x)d(\mathrm{tg}\, x)=\int \mathrm{tg}^6 x d(\mathrm{tg}\, x)+$$
$$+\int \mathrm{tg}^8 x d(\mathrm{tg}\, x)=\frac{\mathrm{tg}^7 x}{7}+\frac{\mathrm{tg}^9 x}{9}+C.$$

15. $\int\frac{dx}{\sin^6 x}$.

Решение. Используя формулу $\frac{1}{\sin^2 x}=1+\mathrm{ctg}^2 x$, имеем

$$\int\frac{dx}{\sin^6 x}=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$= -\int (1+\operatorname{ctg}^2 x)^2 d(\operatorname{ctg} x) =$$
$$= -\int (1+2\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^4 x)\, d(\operatorname{ctg} x) =$$
$$= -\operatorname{ctg} x - \frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 4.120—4.153 найти интеграл.

4.120. $\int \frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C.\right)$

4.121. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\, dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}(\operatorname{tg} x+\ln|\operatorname{tg} x|)+C.\right)$

4.122. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C.\right)$

4.123. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}+C.\right)$

4.124. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\operatorname{tg} x+C.\right)$

4.125. $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C.\right)$

4.126. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C.\right)$

4.127. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)+2\ln|\operatorname{tg} x|+C.\right)$

4.128. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ x-\frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x+\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+3.\right)$

4.129. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \ln \frac{|\sqrt[3]{\operatorname{tg} x - 1}|}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{3}} + C.\right)$

4.130. $\int \sin^8 x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{35}{128} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{7}{128} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin^3 2x +\right.$

$\left. + \frac{1}{1024} \sin 8x + C.\right)$

4.131. $\int \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} + C.\right)$

4.132. $\int \cos 2x \cos 3x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + C.\right)$

4.133. $\int \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - x + C.\right)$

4.134. $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x) \cos^2 x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{5} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 5}{\operatorname{tg} x} \right| + C.\right)$

4.135. $\int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - \cos x + 2}{\sin x - \cos x - 2} \right| + C.\right)$

4.136. $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C.\right)$

4.137. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}$.

$(\textit{Ответ:}\ \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x - 2) + C.)$

4.138. $\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{5} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} \right| + C.\right)$

4.139. $\int \frac{\sin x dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.\right)$

4.140. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C.\right)$

4.141. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x-3}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{\cos^2 x}{2}+3\cos x+8\ln|\cos x-3|+C.\right)$

4.142. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}+C.\right)$

4.143. $\int \cos^5 x\sin^2 x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C.\right)$

4.144. $\int \frac{\cos^3 x dx}{4\sin^2 x-1}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{4}\sin x+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1}\right|+C.\right)$

4.145. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ 4\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}+C.\right)$

4.146. $\int \sin^{3/5} x\cos^5 x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{5}{8}\sqrt[5]{\sin^8 x}-\frac{5}{9}\sqrt[5]{\sin^{18} x}-\frac{5}{28}\sqrt[5]{\sin^{28} x}+C.\right)$

4.147. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x\sin x}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}+2\sqrt{\operatorname{tg} x}+C.\right)$

4.148. $\int \cos x\cos 2x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x+C.\right)$

4.149. $\int(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C.\right)$

4.150. $\int \frac{dx}{19\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 3}$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{16}\ln\left|\frac{4\,\mathrm{tg}\, x - 3}{4\,\mathrm{tg}\, x + 1}\right| + C.\right)$

4.151. $\int \sin^4 x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.\right)$

4.152. $\int \frac{\mathrm{tg}\, x dx}{1 + \mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}^2 x}$.

$\left(\textit{Ответ: } x - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1 + 2\,\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{3}} + C.\right)$

4.153. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^3 x - \sin^2 x - 1}$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{2}{5}\ln|1 - \cos x| + \frac{2}{5}\ln|\cos^2 x + 2\cos x + 2| - \right.$

$\left. - \frac{6}{5}\,\mathrm{arctg}\,|1 + \cos x| + C.\right)$

4.6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_r/n_r}\right)dx,$$

где R — рациональная функция, $m_1, n_1, \ldots, m_r, n_r$ — целые ненулевые числа. С помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\lambda},$$

где $\lambda = K(n_1, \ldots, n_r)$ ($K(n_1, \ldots, n_r)$ — наименьшее общее кратное чисел $n_1, \ldots, n_r$), указанный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции.

Рассмотрим два частных случая.

1. Если $c = 0$, $d = 1$, то данный интеграл имеет вид

$$\int R(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, \ldots, (ax+b)^{m_r/n_r})dx$$

и преобразуется в интеграл от рациональной функции с помощью подстановки $ax + b = t^{\lambda}$, где $\lambda = K(n_1, \ldots, n_r)$

2. Если $b = c = 0$, $a = d = 1$, то интеграл имеет вид $\int R(x, x^{m_1/n_1}, \ldots, x^{m_r/n_r})dx$ и приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x = t^{\lambda}$, где $\lambda = K(n_1, \ldots, n_r)$.

Примеры

Найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$.

Решение. Так как интеграл имеет вид $\int R(x^{1/2}, x^{1/3})dx$, а $K(2, 3)=6$, т. е. $\lambda=6$, то применим подстановку $x=t^6$. Тогда

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x=t^6, \\ dx=6t^5dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{6t^5dt}{(t^2+4)t^3} = 6\int \frac{t^2dt}{t^2+4} =$$

$$= 6\int \frac{(t^2+4)-4}{t^2+4}dt = 6\int \left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt =$$

$$= 6\left(t-4\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)+C = 6t-24\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C,$$

где $t=\sqrt[6]{x}$.

2. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

Решение. Интеграл имеет вид $\int R(x, (1+x)^{1/2}, (1+x)^{1/3})dx$, поэтому применим подстановку $1+x=t^6$, так как $K(2, 3)=6$, $\lambda=6$. Тогда имеем: $x=t^6-1$, $dx=6t^5dt$,

$$\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx = \left| \begin{matrix} x=t^6-1, \\ dx=6t^5dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{(t^6-1)^2+t^3}{t^2}\cdot 6t^5dt = 6\int t^3(t^{12}-2t^6+$$

$$+t^3+1)dt = 6\int (t^{15}-2t^9+t^6+t^3)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^{16}}{16}-\frac{t^{10}}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^7}{7}\right)+C=$$

$$= \frac{3}{8}t^{16}-\frac{6}{5}t^{10}+\frac{3}{2}t^4+\frac{6}{7}t^7+C,$$

где $t=\sqrt[6]{1+x}$.

3. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{x}$.

Решение. Это интеграл вида $\int R\left(x, \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}\right) dx$. Применив подстановку

$$\frac{1+x}{1-x}=t^2,\ x=\frac{t^2-1}{t^2+1},\ dx=\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2},$$

получим:

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{x}=4\int\frac{t^2(t^2+1)}{(t^2+1)^2(t^2-1)}\,dt=$$
$$=4\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)(t^2-1)}.$$

Разложим рациональную дробь $\frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}$ на простейшие. Тогда

$$\frac{t^2}{(t^2+1)(t-1)(t+1)}=\frac{At+B}{t^2+1}+\frac{C}{t-1}+\frac{D}{t+1}.$$

Освободившись от знаменателей, получим:

$$t^2=(At+B)(t^2-1)+C(t+1)(t^2+1)+D(t-1)(t^2+1),$$
$$t^2=(A+C+D)t^3+(B+C-D)t^2+(C+D-A)t+$$
$$+C-D-B.$$

Полагая $t=1$, находим: $4C=1$, $C=1/4$; при $t=-1$ имеем: $-4D=1$, $D=-1/4$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему уравнений:

$$A+C+D=0,\ B+C-D=1,$$
$$C+D-A=0,\ C-D-B=0.$$

Подставляя в нее $C=1/4$, $D=-1/4$, находим: $A+1/4-$ $-1/4=0$, $A=0$; $B+1/4-(-1/4)=0$, $B=-1/2$. Тогда

$$\frac{t^2}{(t^2+1)(t-1)(t+1)}=\frac{-1/2}{t^2+1}+\frac{1/4}{t-1}-\frac{1/4}{t+1},$$

т. е.

$$4\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)(t^2-1)}=-2\int\frac{dt}{t^2+1}+\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$= -2\,\mathrm{arctg}\,t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + C =$$
$$= -2\,\mathrm{arctg}\,t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C,$$

где $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

Решение. Умножив и разделив подынтегральную функцию на $\sqrt[3]{1+x}$, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \frac{\sqrt[3]{x+1}\,dx}{\sqrt[3]{(x+1)^3(x-1)}} =$$
$$= \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}.$$

Применим подстановку $\frac{x+1}{x-1} = t^3$. Отсюда $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$. Тогда

$$dx = \frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2},\quad x+1 = \frac{2t^3}{t^3-1},$$
$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1} = -6\int \frac{tt^2(t^3-1)\,dt}{(t^3-1)^2 2t^3} =$$
$$= -6\int \frac{dt}{t^3-1} = -6\int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Разложим рациональную дробь на простейшие:
$$\frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}.$$

Освободившись от знаменателей, имеем:
$$1 = A(t^2+t+1) + (Bt+C)(t-1) =$$
$$= (A+B)t^2 + (A+C-B)t + A - C.$$

Полагая $t=1$, находим: $3A=1$, $A=1/3$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему уравнений:
$$A+B=0,\quad A+C-B=0,\quad A-C=1,$$

из которой находим: $B=-1/3$, $C=-2/3$. Тогда имеем

$$\int\frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{3}\int\frac{t+2}{t^2+t+1}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\int\frac{2t+4}{t^2+t+1}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\int\frac{(2t+1)dt}{t^2+t+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}-$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2}+C=\frac{1}{3}\ln|t-1|-$$

$$-\frac{1}{6}\ln|t^2+t+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,$$

где $t=\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 4.154—4.168 найти интеграл.

4.154. $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{4}{3}\left(t^3-\ln(t^3+1)\right)+C,\text{ где } t=\sqrt[4]{x}.\right)$

4.155. $\int\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{(x-2)\sqrt{2x-1}}{3}+C.\right)$

4.156. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ t^3-\frac{3}{2}t^2+3t-\ln(t+1)^3+C,\text{ где } t=\sqrt[6]{2x+1}.\right)$

4.157. $\int x\sqrt{a-x}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{15}(3x^2-ax-2a^2)\sqrt{a-x}+C.\right)$

4.158. $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C.\right)$

4.159. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+1}$. (*Ответ:* $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$.)

4.160. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C.\right)$

4.161. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{(x-1)^3}$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+C.\right)$

4.162. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.\right)$.

4.163. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}\,dx}{1+\sqrt[3]{3x+4}}$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{3}(3x+4)-\frac{1}{2}(3x+4)^{2/3}+(3x+4)^{1/3}-\right.$

$\left.-\ln|\sqrt[3]{3x+4}+1|+C.\right)$

4.164. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x-3}}$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2}+C.\right)$

4.165. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \ln\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{3}}+C.\right)$

4.166. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

(*Ответ:* $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+C$.)

4.167. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+2}$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}+C.\right)$

4.168. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

(*Ответ*: $2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{1+x}+C$.)

4.7. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ БИНОМОВ

Дифференциальным биномом называется выражение вида $x^m(a+bx^n)^p dx$, где m, n, p — рациональные числа, $a, b \in \mathbb{R}$.

Интегралы от дифференциальных биномов выражаются через элементарные функции только в следующих трех случаях

1) p — целое число, $m=r_1/s_1$, $n=r_2/s_2$. Тогда данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x=t^\lambda$, где $\lambda=K(s_1, s_2)$;

2) $(m+1)/n$ — целое число, $p=r/s$. В этом случае исходный интеграл рационализируется с помощью подстановки $a+bx^n=t^s$,

3) $\left(\frac{m+1}{n}+p\right)$ — целое число, $p=r/s$. Тогда данный интеграл рационализируется с помощью подстановки $a+bx^n=x^nt^s$, где s — знаменатель дроби p.

Примеры

Найти интегралы.

1. $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^4 dx$.

Решение. Здесь подынтегральную функцию можно записать в виде $x^{1/2}(1+x^{1/3})^4$, т. е. $p=4$ — целое число. Следовательно, имеем первый случай интегрируемости дифференциального бинома. Поэтому применим подстановку $x=t^6$, так как $K(2, 3)=6$. Тогда $dx=6t^5dt$,

$$\int x^{1/2}(1+x^{1/3})^4 dx=|x=t^6,\ dx=6t^5dt|=$$
$$=\int t^3(1+t^2)^4 6t^5dt=6\int t^8(1+t^2)^4dt.$$

Применив формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-(k-1))}{1\cdot 2\cdots k}a^{m-k}b^k+\ldots+mab^{m-1}+b^m,$$

имеем

$$6\int t^8(1+t^2)^4dt=6\int t^8(1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8)dt=$$

$$=6\int(t^8+4t^{10}+6t^{12}+4t^{14}+t^{16})dt=$$
$$=6\left(\frac{t^9}{9}+\frac{4t^{11}}{11}+\frac{6t^{13}}{13}+\frac{4t^{15}}{15}+\frac{t^{17}}{17}\right)+C=$$
$$=\frac{2}{3}t^9+\frac{24}{11}t^{11}+\frac{36}{13}t^{13}+\frac{8}{5}t^{15}+\frac{6}{17}t^{17}+C,$$

где $t=\sqrt[6]{x}$.

2. $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Переписав подынтегральную функцию в виде $x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}$, имеем: $m=-1/2$, $n=1/4$, $p=1/3$. Так как $\frac{m+1}{n}=\frac{1/2}{1/4}=\frac{1/2}{1/4}=2$ — целое число, то имеет место второй случай интегрируемости дифференциального бинома. Использовав подстановку $1+x^{1/4}=t^3$, получим: $x=(t^3-1)^4$, $dx=4(t^3-1)^3\cdot 3t^2dt$,

$$\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}dx=\int(t^3-1)^{-2}t\cdot 12t^2(t^3-1)^3dt=$$
$$=12\int t^3(t^3-1)dt=12\int(t^6-t^3)dt=$$
$$=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C,$$

где $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$.

3. $\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

Решение. Здесь $m=-11$, $n=4$, $p=-\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-11+1}{4}-\frac{1}{2}=-3$ — целое число. Имеет место третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Полагаем $1+x^4=x^4t^2$. Тогда $x=(t^2-1)^{-1/4}$, $dx=\frac{-1}{2}(t^2-1)^{-5/4}tdt$. Переходя в подынтегральном выражении к переменной t, имеем

$$\int x^{-11}(1+x^4)^{-1/2}dx=$$
$$=\int(t^2-1)^{11/4}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)(t^2-1)^{-5/4}tdt=$$

$$= -\frac{1}{2}\int (t^2-1)^2 dt = -\frac{1}{2}\int (t^4-2t^2+1)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t\right) + C = -\frac{t^5}{10} + \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + C,$$

где $t = \sqrt{1+x^4}\,/x^2$.

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

Решение. Запишем подынтегральную функцию в виде $x^{-3}(2-x^3)^{-1/3}$. Здесь $m=-3$, $n=-3$, $p=-\frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{-3+1}{3} = -\frac{2}{3}$, $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1$ — целое число, т. е. имеем третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Положим $2 - x^3 = x^3t^3$, $x^3 = \frac{2}{t^3+1}$, $x = 2^{1/3}(t^3+1)^{-1/3}$, $dx = 2^{1/3}\left(-\frac{1}{3}\right)(t^3+1)^{-4/3} \times 3t^2dt$. Тогда

$$\int x^{-3}(2-x^3)^{-1/3}dx = -\frac{1}{2}\int (t^3+1)\left(\frac{2t^3}{t^3+1}\right)^{-1/3} \times$$

$$\times 2^{1/3}(t^3+1)^{-4/3}t^2dt = -\frac{1}{2}\int t\,dt = -\frac{t^2}{4} + C,$$

где $t = \sqrt[3]{2-x^3}\,/x$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 4.169—4.188 найти интеграл.

4.169. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

$$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2+1} - 1\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}} + C.\right)$$

4.170. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ: } 6t + 2\ln\dfrac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}} - 2\sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \right.$

$\left. \text{где } t = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}. \right)$

4.171. $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5} + C. \right)$

4.172. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

$$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C. \right)$$

4.173. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx.$

$$\left(\textit{Ответ: } \frac{u}{2(u^3+1)} - \frac{1}{6}\ln\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{3} + C, \text{ где } u = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}. \right)$$

4.174. $\int \dfrac{\sqrt{(1+x^2)^5}\,dx}{x^6}.$

$$\left(\textit{Ответ: } \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{5x^5} - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C. \right)$$

4.175. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}.$

$$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{\sqrt[4]{1+x^3}+1}\right| + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x^3} + C. \right)$$

4.176. $\int x\sqrt{1+x^4}\,dx.$

$$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}x^2\sqrt{1+x^4} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right| + C. \right)$$

4.177. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}}+C.\right)$

4.178. $\int \frac{x^3dx}{(a-bx^2)^{3/2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2a-bx^2}{b^2\sqrt{a-bx^2}}+C.\right)$

4.179. $\int x^3(1+2x^2)^{-3/2}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\ \frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}+C.\right)$

4.180. $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{8}\ \frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{2/3}}+C.\right)$

4.181. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\ \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$.

$(\textit{Ответ:}\ -2\sqrt[3]{(x^{-3/4}+1)^2}+C.)$

4.182. $\int \sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{14}\ (1+3\sqrt[3]{x^2}\ )^{7/3}-\frac{1}{8}\ (1+3\sqrt[3]{x^2}\ )^{4/3}+C.\right)$

4.183. $\int x^{-2/3}(4+x^{1/3})^{1/2}dx$. $(\textit{Ответ:}\ 2(4+x^{1/3})^{3/2}+C.)$

4.184. $\int \sqrt[4]{(1+x^{1/2})^3}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{8}{77}\ (7\sqrt{x}-4)\ (1+\sqrt{x})^{7/4}+C.\right)$

4.185. $\int x^{-1}(x^4-1)^{1/2}dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\ \sqrt{x^4-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x^4-1}+C.\right)$

4.186. $\int x^5(1+x^2)^{2/3}dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{22}\ (1+x^2)^{11/3}-\frac{3}{8}\ (1+x^2)^{8/3}+\right.$

$\left.+\frac{3}{10}\ (1+x^2)^{5/3}+C.\ \right)$

4.187. $\int \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{2}{5}\ (4+3\sqrt[3]{x}\ )\cdot(2-\sqrt[3]{x}\ )^{3/2}+C.\right)$

4.188. $\int x^3(1-x^2)^{-3/2}dx. \left(\text{Ответ: } \frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+C.\right)$.

4.8. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

Некоторые частные случаи нахождения интегралов данного вида уже рассмотрены в § 4 3 Существуют различные методы их нахождения Рассмотрим один из таких методов, основанный на применении тригонометрических подстановок

В квадратном трехчлене выделяют полный квадрат

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right),$$

затем с помощью подстановки $t=x+\frac{b}{2a}$ приводят исходный интеграл к интегралам одного из следующих трех типов

$$\int R\left(t, \sqrt{k^2-t^2}\right)dt, \int R\left(t, \sqrt{k^2+t^2}\right)dt, \int R\left(t, \sqrt{t^2-k^2}\right)dt$$

Эти интегралы с помощью следующих подстановок для первого интеграла $t=k\sin u$ (или $t=k\cos u$), для второго $t=k\operatorname{tg} u$, для третьего $t=k/\cos u$, приводятся к интегралам от рациональной функции относительно $\sin u$ и $\cos u$, т е к интегралам вида $\int R(\sin u, \cos u)du$.

Примеры

Найти интегралы.

1. $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

Решение. Положим $x=3\sin t$. Тогда $dx=3\cos t dt$ и интеграл примет вид

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx=\int 9\sin^2 t\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t dt=$$
$$=81\int\sin^2 t\cos^2 t dt.$$

Применив формулу (4.9), получим

$$81\int\sin^2 t\cos^2 t dt=81\cdot\frac{1}{4}\int\sin^2 2t dt.$$

С помощью формулы (4.10) находим

$$\frac{81}{4}\int\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{81}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C,$$

где $t=\arcsin\frac{x}{3}$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$.

Решение. Применив подстановку $x=a/\cos t$, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = \int \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t \sqrt{\left(\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2\right)^3}} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{\sin t dt}{\cos^2 t \sqrt{\left(\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\right)^3}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\sin t dt}{\cos^2 t \cdot \frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \sin^{-2} t d(\sin t) = \frac{1}{a^2} \frac{\sin^{-1} t}{-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{a^2 \sin t} + C,$$

где $t = \arccos \frac{a}{x}$.

Так как

$$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-a^2/x^2} = \sqrt{x^2-a^2}/x,$$

то окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C.$$

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$.

Решение. Применим подстановку $x=2\operatorname{tg} t$. Тогда $dx=2dt/\cos^2 t$ и интеграл преобразуется к виду

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2dt}{\cos^2 t \cdot 4 \operatorname{tg}^2 t \sqrt{4+4\operatorname{tg}^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t}.$$

Отсюда

$$\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{4} \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4 \sin t} + C,$$

где $t = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$.

Так как

$$\cos t=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}=\frac{2}{\sqrt{4+x^2}},$$

то

$$\sin t=\sqrt{1-\frac{4}{4+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$

и окончательно имеем

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}=-\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}+C.$$

4. $\int\sqrt{x^2-2x+10}\,dx.$

Решение. Выделим в квадратном трехчлене полный квадрат

$$\int\sqrt{x^2-2x+10}\,dx=\int\sqrt{(x-1)^2+3^2}\,d(x-1).$$

Применим подстановку $x-1=3\operatorname{tg} t$, $d(x-1)=3dt/\cos^2 t$, получим

$$\int\sqrt{(x-1)^2+3^2}\,d(x-1)=\int\sqrt{9\operatorname{tg}^2 t+9}\,\frac{3dt}{\cos^2 t}=$$

$$=9\int\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}{\cos^2 t}\,dt=9\int\frac{dt}{\cos^3 t}.$$

Так как $R(\sin t, -\cos t)=-R(\sin t, \cos t)$, то, используя подстановку $z=\sin t$, $t=\arcsin z$, $dt=dz/\sqrt{1-z^2}$, имеем

$$9\int\frac{dt}{\cos^3 t}=9\int\frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{(1-z^2)^2}}=9\int\frac{dz}{(1-z^2)^2}=$$

$$=9\int\frac{(1-z^2)+z^2}{(1-z^2)^2}\,dz=9\int\frac{dz}{1-z^2}+9\int\frac{z^2dz}{(1-z^2)^2}.$$

Второй интеграл найдем интегрированием по частям, где $u=z$, $du=dz$, $dv=zdz/(1-z^2)^2$,

$$v=-\frac{1}{2}\int(1-z^2)^{-2}d(1-z^2)=\frac{1}{2(1-z^2)}.$$

Тогда получим

$$9\int \frac{dz}{1-z^2}+\frac{9}{2}\,\frac{z}{1-z^2}-\frac{9}{2}\int\frac{dz}{1-z^2}=$$
$$=\frac{9}{2}\,\frac{z}{1-z^2}-\frac{9}{4}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C,$$

где $z=\sin\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}$. Так как $\operatorname{tg} t=\frac{x-1}{3}$, то

$$\frac{z}{1-z^2}=\frac{\sin t}{\cos^2 t},$$

$$\cos^2 t=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t}=\frac{1}{1+(x-1)^2/9}=$$
$$=\frac{9}{x^2-2x+10},$$
$$\frac{9}{2}\,\frac{z}{1-z^2}=\frac{(x-1)\sqrt{x^2-2x+10}}{2}.$$

В результате получаем

$$\int\sqrt{x^2-2x+10}\,dx=\frac{9}{2}\,\frac{z}{1-z^2}-\frac{9}{4}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C,$$

где $z=\sin\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}$ или

$$\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+10}-\frac{9}{4}\ln\left|\frac{\sin\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}-1}{\sin\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+1}\right|+C.$$

5. $\int\sqrt{4x-x^2}\,dx$.

Решение. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$\int\sqrt{4x-x^2}\,dx=\int\sqrt{4-(x-2)^2}\,d(x-2).$$

Применив подстановку $x-2=2\sin t$, $d(x-2)=2\cos t\,dt$, получим:

$$\int\sqrt{4-(x-2)^2}\,d(x-2)=\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 4\cos t\,dt=$$
$$=16\int\cos^2 t\,dt=8\int(1+\cos 2t)\,dt=8\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C,$$

где $t=\arcsin\frac{x-2}{2}$. Так как

$$\sin t = \frac{x-2}{2}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \frac{(x-2)^2}{2^2}} = \frac{\sqrt{4x-x^2}}{2},$$

$$\frac{1}{2}\sin 2t = \sin t \cos t = \frac{x-2}{8}\sqrt{4x-x^2},$$

то

$$\int \sqrt{4x-x^2}\,dx = 8\arcsin\frac{x-2}{2} + (x-2)\sqrt{4x-x^2} + C.$$

6. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}$.

Решение. Применив замену переменной $x = \operatorname{tg} t$, $dx = dt/\cos^2 t$, имеем

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})} =$$

$$= \int \frac{dt}{\cos^2 t \, \frac{1}{\cos^2 t}\left(\operatorname{tg} t + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{\operatorname{tg} t + \frac{1}{\cos t}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sin t + 1} =$$

$$= \int \frac{d(\sin t + 1)}{\sin t + 1} = \ln|\sin t + 1| + C,$$

где $t = \operatorname{arctg} x$. Так как

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1+x^2},$$

то

$$\sin t = \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\ln|\sin t + 1| = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right| + C$$

и

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})} = \ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\right| + C$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 4.189—4.208 найти интеграл.

4.189. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C.\right)$

4.190. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-3}}$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-3}| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2-3} + C.\right)$

4.191. $\int \frac{\sqrt{x^2+3}}{x^2} dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \ln |x + \sqrt{x^2+3}| - \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} + C.\right)$

4.192. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$. $\left(\textit{Ответ: } -\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + C.\right)$

4.193. $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4\sqrt{15}} \ln \left| \frac{x\sqrt{15} + 2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15} - 2\sqrt{4x^2+1}} \right| + C.\right)$

4.194. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6} dx$. $\left(\textit{Ответ: } -\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5} + C.\right)$

4.195. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + \ln |x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + C.\right)$

4.196. $\int \sqrt{x^2-2x-1}\, dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \ln |x-1+\right.$

$\left. + \sqrt{x^2-2x-1}| + C.\right)$

4.197. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.\right)$

4.198. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x} + \ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C.\right)$

4.199. $\int \sqrt{x-x^2}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2} + \frac{1}{8}\arcsin(2x-1) + C.\right)$

4.200. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x}{5\sqrt{5-x^2}} + C.\right)$

4.201. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\arccos\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2} + C.\right)$

4.202. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+5)^{3/2}}.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \ln|x+\sqrt{5+x^2}| - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} + C.\right)$

4.203. $\int \sqrt{x^2-6x-7}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7} - 8\ln|x-3+\right.$

$\left.+\sqrt{x^2-6x-7}| + C.\right)$

4.204. $\int (x^2+x+1)^{3/2}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2x+1}{64}(8x^2+8x+17)\sqrt{x^2+x+1} +\right.$

$\left.+\frac{17}{128}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}| + C.\right)$

4.205. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right| + C.\right)$

4.206. $\int \sqrt{2+x^2}\,dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x}{2}\sqrt{2+x^2} + \ln|x+\sqrt{2+x^2}| + C.\right)$

4.207. $\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln\left|x-1+\right.\right.$

$$\left.\left.+\sqrt{x^2-2x+2}\right|+C.\right)$$

4.208. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

$\left(\textit{Ответ}\ \ -\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+C.\right)$

5. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

5.1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ЕГО СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ На каждом из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ возьмем произвольную точку ξ_i и составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ Она называется *n-й интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

Предел интегральной суммы при условии, что число отрезков n стремится к бесконечности, а длина наибольшего из них — к нулю, называется *определенным интегралом функции $f(x)$ в пределах от $x=a$ до $x=b$* и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$, т е предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения $[a, b]$ на частичные отрезки и от выбора точек ξ_i при каждом таком разбиении

Геометрически $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, ограниченных графиком функции $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$, причем площади, расположенные выше оси Ox, входят в эту сумму со знаком «+», а площади, расположенные ниже оси Ox,— со знаком «—»

Перечислим *основные свойства определенного интеграла*

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$

2) $\int_a^a f(x)dx = 0,$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

4) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx,$

5) $\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx;$

6) если $f(x) \geqslant 0$ ($f(x) \leqslant 0$) для $x \in [a, b]$ и $a < b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 \quad \left(\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant 0\right);$$

7) если $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ для $x \in [a;\ b]$ и $a < b$, то

$$\int\limits_a^b f_1(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f_2(x)\,dx;$$

8) если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;\ b]$ и для этого отрезка имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a);$$

9) если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то существует такая точка $c \in [a;\ b]$, что справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

(теорема о среднем значении);

10) если функция $f(x)$ непрерывна и $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, то справедливо равенство $\Phi'(x) = f(x)$, т. е. производная определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$ по его переменному верхнему пределу x существует и равна значению подынтегральной функции при том же x.

Рассмотрим правила вычисления определенного интеграла.

1. *Формула Ньютона — Лейбница.* Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $F(x)$ — какая-либо первообразная для $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. *Замена переменной в определенном интеграле.* Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, функция $x = \varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha;\ \beta]$, причем для любого $t \in [\alpha;\ \beta]$ $\varphi(t) \in [a;\ b]$ Тогда, если $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

3 *Интегрирование по частям* Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$ Тогда справедлива формула

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

4 *Если $f(x)$ — нечетная функция, то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Если $f(x)$ — четная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Примеры

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_4^9 (\sqrt{x} - 1)\,dx.$

Решение. Применим формулу Ньютона — Лейбница:

$$\int_4^9 (\sqrt{x} - 1)\,dx = \int_4^9 (x^{1/2} - 1)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - x\right)\Big|_4^9 =$$

$$= 18 - 9 - \frac{16}{3} + 4 = \frac{23}{3}.$$

Таким образом, найдена площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = 4$, $x = 9$, осью Ox и кривой $y = \sqrt{x} - 1$ (рис. 5 1)

2. $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx.$

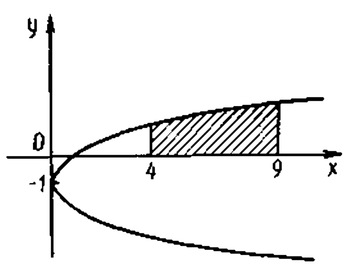


Рис 5 1

Решение. Интегрируем по частям, полагая $u=\ln(x+1)$, $dv=dx$, $du=\frac{1}{x+1}dx$, $v=x$. Тогда

$$\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx=x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1}-\int_0^{e-1}\frac{x}{x+1}dx=$$

$$=(e-1)\ln e-\int_0^{e-1}\frac{(x+1)-1}{x+1}dx=$$

$$=(e-1)-\int_0^{e-1}dx+\int_0^{e-1}\frac{dx}{x+1}=(e-1)-x\Big|_0^{e-1}+$$

$$+\ln|x+1|\Big|_0^{e-1}=(e-1)-(e-1)+\ln e-\ln 1=1.$$

Данный интеграл геометрически выражает площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\ln(x+1)$, прямыми $x=0$, $x=e-1$ и осью Ox (рис. 5.2)

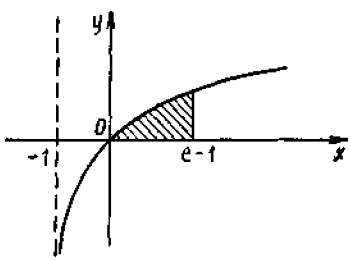


Рис. 5.2

3. $\int_3^8\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение. Положим $\sqrt{1+x}=t$. Тогда $x=t^2-1$, $dx=2tdt$. Если $x=3$, то $t=2$; если $x=8$, то $t=3$. Следовательно,

$$\int_3^8\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}=\int_2^3\frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t}=$$

$$=2\int_2^3(t^2-1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_2^3=2\left(9-3-\frac{8}{3}+2\right)=\frac{32}{3}.$$

4. $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

Решение. Положим $x=\sin t$, тогда $dx=\cos t\,dt$. Если $x=0$, то $t=0$; если $x=1$, то $t=\pi/2$. Отсюда находим

$$\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{16}.$$

5. $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{2\cos x+3}.$

Решение. Применим подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, отсюда $x=\operatorname{arctg} t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Если $x=0$, то $t=0$; если $x=\pi/4$, то $t=1$. Тогда

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{2\cos x+3}=\int\limits_0^1\frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}+3\right)}=$$

$$=2\int\limits_0^1\frac{dt}{2-2t^2+3+3t^2}=2\int\limits_0^1\frac{dt}{t^2+5}=\frac{2}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt5}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{2}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt5}.$$

6. Вычислить среднее значение функции $y=\sqrt{x}+1/\sqrt{x}$ в интервале $(1;\ 4)$.

Решение. Применим теорему о среднем: $\int\limits_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$. Тогда

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

$$f(c)=\frac{1}{4-1}\int\limits_1^4(\sqrt{x}+1/\sqrt{x})\,dx=\frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}x^{3/2}+$$

$$+2\sqrt{x}\Big)\Big|_1^4=\frac{2}{9}\cdot 8+\frac{4}{3}\;\frac{2}{9}-\frac{2}{3}=\frac{20}{9}.$$

7. Решить уравнение $\int\limits_{\ln 2}^{x}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\frac{\pi}{6}.$

Решение. Сделаем замену переменной $\sqrt{e^x-1}=t$. Отсюда $e^x=t^2+1$, $x=\ln(t^2+1)$, $dx=\frac{2t\,dt}{t^2+1}$. Если $x=\ln 2$, то $t=1$. Тогда получим:

$$\int\limits_{\ln 2}^{x}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\limits_1^{\sqrt{e^x-1}}\frac{2t\,dt}{(t^2+1)t}=$$

$$=2\int\limits_1^{\sqrt{e^x-1}}\frac{dt}{t^2+1}=2\operatorname{arctg}t\Big|_1^{\sqrt{e^x-1}}=2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}-$$

$$-2\operatorname{arctg}1=2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}-2\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Имеем уравнение

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}-2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6},$$

откуда

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}=\frac{2\pi}{3},\quad \operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}=\frac{\pi}{3},$$

$$\sqrt{e^x-1}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},$$

т. е. $e^x-1=3$, $e^x=4$, $x=\ln 4$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 5.1—5.25 вычислить интеграл.

5.1. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{x\,dx}{\cos^2 x}.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{18}(5\pi\sqrt{3}-9\ln 3).\right)$

5.2. $\int\limits_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{\pi^2-8}{32}.\right)$

5.3. $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{\pi}{6}.\right)$

5.4. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\left(\ln 2-\frac{1}{4}\right).\right)$

5.5. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\right)$

5.6. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}.\right)$

5.7. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \operatorname{arctg}\frac{1}{7}.\right)$

5.8. $\int\limits_0^{\pi/4} \cos^7 2x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{8}{35}.\right)$

5.9. $\int\limits_0^{\pi} x^3 \sin x dx$. $(\textit{Ответ:}\ \pi^3-6\pi.)$

5.10. $\int\limits_0^1 xe^{-x} dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 1-\frac{2}{e}.\right)$

5.11. $\int\limits_1^2 x\ln x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\ln 2-\frac{3}{4}.\right)$

5.12. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$. $(\textit{Ответ:}\ 1.)$

5.13. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{\pi}{6}.\right)$

5.14. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \operatorname{arctg} e-\frac{\pi}{4}.\right)$

5.15. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$. (*Ответ:* $4-\pi$.)

5.16. $\int\limits_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. (*Ответ:* $\frac{\pi}{6}$.)

5.17. $\int\limits_0^{1} \frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+4}}$. (*Ответ:* $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.)

5.18. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\varphi d\varphi$. (*Ответ:* $\frac{2}{3}$.)

5.19. $\int\limits_1^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$. (*Ответ:* $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$.)

5.20. $\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$. (*Ответ:* $\frac{3}{32}(7\sqrt[3]{4}-12)$.)

5.21. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$. (*Ответ:* $\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)$.)

5.22. $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{(x^2+3)^{5/2}}$. (*Ответ:* $\frac{\sqrt{3}}{24}$.)

5.23. Найти среднее значение функций $f(x)=\sin x$ и $f(x)=\sin^2 x$ для $x\in[0,\ \pi]$. (*Ответ:* $2/\pi$, $1/2$.)

5.24. Найти среднее значение функции $f(x)=\frac{2}{e^x+1}$ для $x\in[0;\ 2]$. (*Ответ:* $2+\ln\frac{2}{e^2+1}$.)

5.25. Решить уравнение $\int\limits_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{12}$. (*Ответ:* $x=2$.)

5.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим следующие случаи

1 Площадь плоской фигуры, ограниченной непрерывной линией $y=f(x)$ ($f(x)\geqslant 0$ для $x\in[a,\ b]$), ординатами $x=a$, $x=b$ и отрезком оси абсцисс (рис 5 3), выражается интегралом

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx \qquad (5.1)$$

2. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$, непрерывной кривой $x=g(y)$ ($g(y)\geqslant 0$ для $y\in[c;\ d]$) и осью Oy (рис. 5.4), выражается интегралом

$$S=\int_c^d g(y)\,dy. \tag{5.2}$$

3 Площадь плоской фигуры, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$ и двумя непрерывными кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ ($f_1(x)\leqslant f_2(x)$ для $x\in$ $\in[a,\ b]$) (рис 5 5), вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx. \tag{5.3}$$

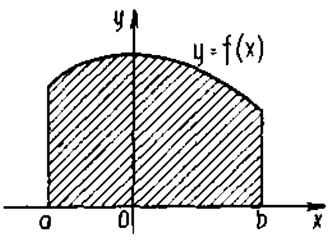


Рис. 5 3

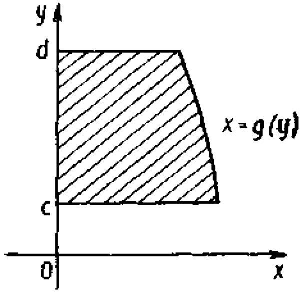


Рис. 5 4

4. Если фигура ограничена прямыми $y=c$, $y=d$ и кривыми $x=g_2(y)$, $x=g_1(y)$ ($g_1(y)\leqslant g_2(y)$ для $y\in[c;\ d]$) (рис. 5.6), то ее площадь определяется формулой

$$S=\int_c^d (g_2(y)-g_1(y))\,dy. \tag{5.4}$$

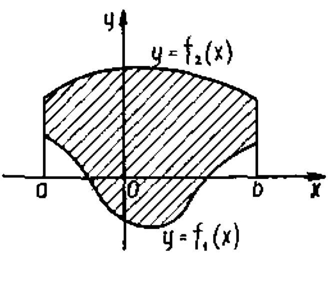


Рис. 5 5

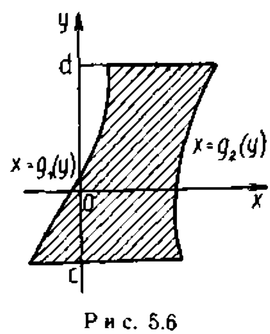


Рис. 5.6

5. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, осью абсцисс и кривой, находится по формуле

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt, \tag{5.5}$$

где α и β определяются из формул $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b(y(t)\geqslant 0$ для $t\in$ $\in[\alpha, \beta]$)

6 Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, и двумя полярными радиусами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$ (рис 5 7), выражается интегралом

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi \tag{5.6}$$

7 Если фигура ограничена двумя полярными радиусами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ и кривыми $r=r_1(\varphi)$, $r=r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi)\leqslant r_2(\varphi)$ для $\varphi\in[\alpha, \beta]$ (рис 5 8), то ее площадь находится по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\varphi)-r_1^2(\varphi))\,d\varphi \tag{5.7}$$

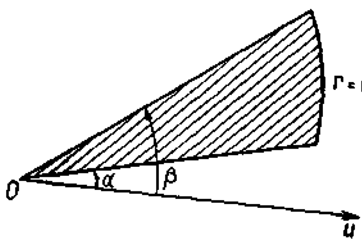


Рис 5 7

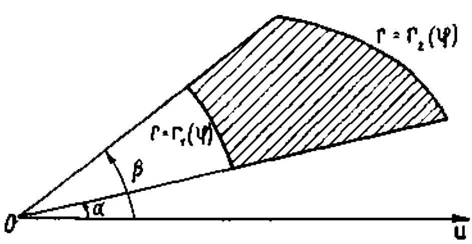


Рис 5 8

Примеры

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=4/x$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ (рис. 5.9).

Решение. Данная фигура является криволинейной трапецией, прилегающей к оси Ox, поэтому ее площадь находим по формуле (5.1):

$$S=\int\limits_{1}^{4}\frac{4}{x}\,dx=4\ln|x|\Big|_{1}^{4}=4\ln 4-4\ln 1=$$

$$=4\ln 2^2=8\ln 2.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2-x^2$ (рис. 5.10).

Решение. Найдем точки пересечения данных кривых. Для этого решим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}y&=x^2,\\ y&=2-x^2,\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}x^2&=2-x^2,\\ y&=x^2,\end{aligned}\right\}$$

откуда $x=\pm 1$, $y=1$.

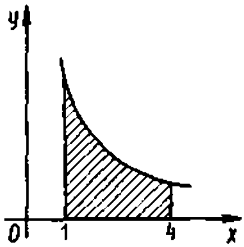


Рис. 5.9

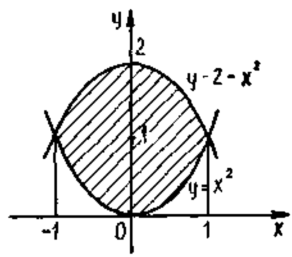


Рис. 5.10

Площадь данной фигуры находим по формуле (5.3):

$$S=\int\limits_{-1}^{1}(2-x^2-x^2)\,dx=\int\limits_{-1}^{1}(2-2x^2)\,dx=$$

$$=\left(2x-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}=2-\frac{2}{3}+2-\frac{2}{3}=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}.$$

3. Вычислить площадь фигур, на которые парабола $y^2=6x$ разбивает окружность $x^2+y^2=16$ (рис. 5.11).

Решение. Находим точки пересечения кривых. Для этого решаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=16,\\ y^2&=6x,\end{aligned}\right\}$$

откуда имеем $x^2+6x-16=0$, т. е. $x_1=2$, $x_2=-8$ (посто-

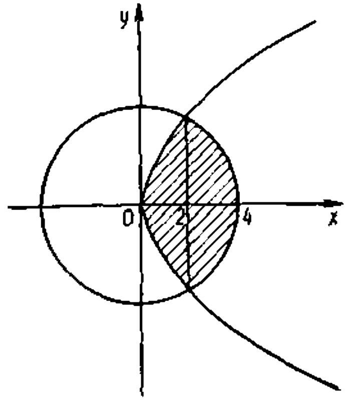


Рис. 5.11

ронний корень.) Для $x\in[0;\ 2]$ фигура ограничена сверху кривой $y=\sqrt{6x}$, для $x\in[2;\ 4]$ — кривой $y=\sqrt{16-x^2}$ Фигура симметрична относительно оси Ox, поэтому можно вычислить половину площади, а затем полученный результат удвоить, т. е.

$$S=2\int_0^2\sqrt{6x}\,dx+2\int_2^4\sqrt{16-x^2}\,dx=$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{6}\,x^{3/2}\Big|_0^2+2\int_2^4\sqrt{16-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{c}x=4\sin t,\\ dx=4\cos t\,dt\end{array}\right|=$$

$$=\frac{16}{3}\sqrt{3}+2\int_{\pi/6}^{\pi/2}4\cdot4\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=$$

$$=\frac{16}{3}\sqrt{3}+16\int_{\pi/6}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{16}{3}\sqrt{3}+$$

$$+16\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}=\frac{16}{3}\sqrt{3}+8\pi-\frac{8\pi}{3}-$$

$$-8\sin\frac{\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}+\frac{16\sqrt{3}}{3}-4\sqrt{3}=\frac{16\pi}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Площадь S_1 другой фигуры можно найти как разность площади круга и уже вычисленной площади S:

$$S_1=\pi\cdot4^2-S=16\pi-\frac{16}{3}\pi-\frac{4}{3}\sqrt{3}=\frac{4}{3}\left(8\pi-\sqrt{3}\right).$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=2x+1$, $x-y-1=0$ (рис 5 12)

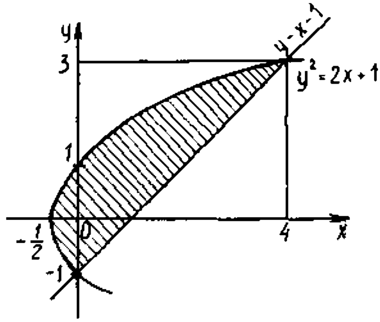


Рис 5 12

Решение Найдем точки пересечения кривых Для этого решим систему

$$\left.\begin{aligned} y^2&=2x+1, \\ x-y-1&=0 \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} x&=y+1, \\ y^2&=2(y+1)+1, \end{aligned}\right\}$$

откуда $y^2-2y-3=0$, т е $y_1=-1$, $y_2=3$

Площадь фигуры находим по формуле (5 4)

$$S=\int_{-1}^{3}\left((y+1)-\frac{y^2-1}{2}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{y^2}{2}+\frac{3}{2}y-\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-1}^{3}=5\frac{1}{3}$$

5. Вычислить площадь фигуры (рис 5 13), ограниченной осью Ox и одной аркой циклоиды

$$\left.\begin{aligned} x&=a(t-\sin t), \\ y&=a(1-\cos t) \end{aligned}\right\}$$

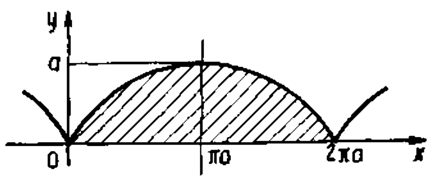


Рис 5 13

Решение. Находим площадь фигуры по формуле (5.5). Если $x=0$, то $t=0$; если $x=2\pi a$, то $t=2\pi$. Отсюда имеем

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=a^2(t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi}+$$

$$+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt=2\pi a^2+\frac{a^2}{2}\Big(t+$$

$$+\frac{1}{2}\sin 2t\Big)\Big|_0^{2\pi}=2\pi a^2+\pi a^2=3\pi a^2.$$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r=a\sqrt{2\cos 2\varphi}$.

Решение. Искомая фигура изображена на рис. 5.14. Применяя формулу (5.6) и учитывая то, что фигура состоит из четырех одинаковых частей, имеем

$$S=\frac{1}{2}\cdot 4\int_0^{\pi/4}(a\sqrt{2\cos 2\varphi})^2d\varphi=$$

$$=2a^2\cdot 2\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi=2a^2\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4}=$$

$$=2a^2\sin\frac{\pi}{2}=2a^2.$$

7. Вычислить площадь фигуры (рис. 5.15), ограниченной линией $r=a\sin 3\varphi$.

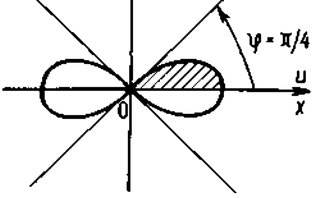


Рис 5.14

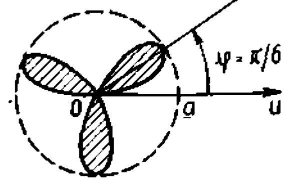


Рис 5.15

Решение. Находим площадь фигуры по формуле (5.6). Фигура состоит из трех лепестков, поэтому можно найти третью часть площади, а затем полученный результат умножить на 3. Имеем

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3\int_0^{\pi/3} a^2\sin^2 3\varphi d\varphi=\frac{3a^2}{4}\int_0^{\pi/3}(1-$$

$$-\cos 6\varphi)d\varphi=\frac{3a^2}{4}\left(\varphi-\frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Big|_0^{\pi/3}=$$

$$=\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 5.26—5.52 найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

5.26. $xy=6$, $x+y-7=0$. (*Ответ:* $17{,}5-6\ln 6$.)
5.27. $4y=x^2$, $y^2=4x$. (*Ответ:* $16/3$.)
5.28. $y^2=1-x$, $x=-3$. (*Ответ:* $32/3$.)
5.29. $y=x^2+4x$, $y=x+4$. $\left(\textit{Ответ: } 20\frac{5}{6}.\right)$
5.30. $y=x^2-6x+9$, $x/3-y/12=1$. (*Ответ:* $32/3$.)
5.31. $y^2+8x=16$, $y^2-24x=48$.
(*Ответ:* $32\sqrt{6}/3$.)
5.32. $y=x^3$, $y=2x$, $y=x$. (*Ответ:* $3/2$.)
5.33. $y=2x-x^2$, $y=-x$. $\left(\textit{Ответ: } 4\frac{1}{2}.\right)$
5.34. $y=3-2x$, $y=x^2$. $\left(\textit{Ответ: } 10\frac{2}{3}.\right)$
5.35. $x^2+y^2+6x-2y+8=0$, $y=x^2+6x+10$.
(*Ответ:* $S_1=(3\pi+2)/6$, $S_2=(9\pi-2)/6$.)
5.36. $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$. (*Ответ:* $(e-1)^2/e$.)
5.37. $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{x^2}{2}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}.\right)$
5.38. $y^2=9x$, $x^2=9y$. (*Ответ:* 27.)
5.39. $y=x^2+2$, $x+y=4$. $\left(\textit{Ответ: } 4\frac{1}{2}.\right)$
5.40. $y=x^2$, $y=7x-10$. (*Ответ:* 4,5.)
5.41. $y=x^2+6$, $y=-5x$. (*Ответ:* $1/6$.)
5.42. $y=x^2+1$, $y=6x-7$. (*Ответ:* $4/3$.)
5.43. $x^2+y^2=9$, $y=3-x$. (*Ответ:* $9(\pi/4-1/2)$.)
5.44. $y=x^2-9$, $y=-7-x$. (*Ответ:* 4,5.)

5.45. $x=y^2$, $y=\frac{1}{3}(4-x)$. $\left(\textit{Ответ: } 20\frac{5}{6}.\right)$

5.46. $x=3$, $x=5$, $3x-2y+4=0$, $3x-2y+1=0$. (*Ответ:* $S=3$.)

5.47. $x=\sqrt{a^2-y^2}$, $x+y=a$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{a^2}{4}(\pi-2).\right)$

5.48. $x^2+y^2=8$, $y=x^2/2$.
(*Ответ:* $S_1=2\pi+4/3$, $S_2=6\pi-4/3$.)

5.49. $r=a\cos 2\varphi$. (*Ответ:* $\pi a^2/2$.)

5.50. $r=a(1-\cos\varphi)$. (*Ответ:* $3\pi a^2/2$.)

5.51. $r^2=a^2\sin 4\varphi$. (*Ответ:* a^2.)

5.52. $r=2+\cos\varphi$. (*Ответ:* $9\pi/2$.)

В задачах 5.53—5.55 найти площадь фигуры, ограниченной данной линией. (*Указание.* Перейти к полярным координатам.)

5.53. $x^4+y^4=x^2+y^2$. (*Ответ:* $\pi/\sqrt{2}$.)

5.54. $(x^2+y^2)^2=a^2(4x^2+y^2)$. (*Ответ:* $5\pi a^2/2$.)

5.55. $(x^2+y^2)^3=a^2x^2y^2$. (*Ответ:* $\pi a^2/8$.)

5.56. Найти площадь фигуры, ограниченной одной ветвью трохоиды

$$\left.\begin{aligned} x&=at-b\sin t,\\ y&=a-b\cos t \end{aligned}\quad (0<b\leqslant a).\right\}$$

(*Ответ:* $\pi(b^2+2ab)$.)

5.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Если площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, является непрерывной функцией на отрезке $[a; b]$, то объем части тела, заключенной между плоскостями $x=a$ и $x=b$, перпендикулярными к оси Ox, находится по формуле

$$V=\int_a^b S(x)\,dx. \tag{5.8}$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$ и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения (рис. 5.16) вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \tag{5.9}$$

Если фигура, ограниченная прямыми $x=a$, $x=b$ и кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ $(0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)$ для $x\in[a;b])$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения находится по формуле

$$V=\pi\int_a^b (f_2^2(x)-f_1^2(x))dx. \tag{5.10}$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$, непрерывной кривой $x=g(y)$ и отрезком оси Oy (рис 5.17), определяется по формуле

$$V=\pi\int_c^d g^2(y)dy \tag{5.11}$$

Если фигура, ограниченная прямыми $y=c$, $y=d$ и кривыми $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$ $(0\leqslant g_1(y)\leqslant g_2(y)$ для $y\in[c;d])$, вращается во-

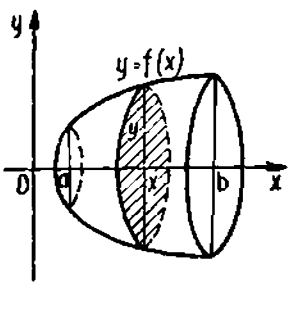


Рис 5.16

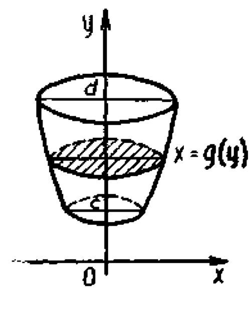


Рис. 5.17

круг оси Oy, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_c^d (g_2^2(y)-g_1^2(y))dy. \tag{5.12}$$

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r=r(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения выражается интегралом

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3\sin\varphi d\varphi. \tag{5.13}$$

Примеры

1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2y=x^2$, $2x+2y-3=0$.

Решение. При вычислении объемов тел вращения нет необходимости изображать сами тела; достаточно построить только фигуры, которые будут вращаться. Найдем точки пересечения кривых, для чего решим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} 2y=x^2, \\ 2y+2x-3=0 \end{array}\right\} \text{ или } \left.\begin{array}{l} y=x^2/2, \\ x^2+2x-3=0, \end{array}\right\}$$

откуда $x_1=-3$, $x_2=1$.

Применяя формулу (5.10), получаем

$$V=\pi\int_{-3}^{1}\left(\left(\frac{3}{2}-x\right)^2-\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right)dx=$$

$$=\pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{9}{4}-3x+x^2-\frac{x^4}{4}\right)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{9}{4}x-\frac{3}{2}x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{20}\right)\Big|_{-3}^{1}=$$

$$=\pi\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{20}+\frac{27}{4}+\frac{27}{2}+9-\frac{243}{20}\right)=$$

$$=18\frac{2}{15}\pi.$$

2. Оси двух круговых цилиндров, радиус основания которых равен R, пересекаются под прямым углом. Найти объем тела, составляющего общую часть цилиндров.

Решение. Рассмотрим два цилиндра $x^2+y^2=R^2$, $x^2+z^2=R^2$. Приведем рисунок только для первого октанта (1/8 часть тела) (рис. 5.18). В данном случае удобнее рассмотреть сечения данного тела плоскостями, перпендикулярными к оси Ox. Тогда объем тела найдем с помощью формулы (5.8). Так как в нашем случае сечение представляет собой квадрат $ABCD$, то имеем:

$$S(x)=S_{ABCD}=AB\cdot BC=$$

$$=\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{R^2-x^2}=R^2-x^2,$$

$$V=8\int_{a}^{b}S(x)dx=8\int_{0}^{R}(R^2-x^2)dx=$$

$$=8\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R=8\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{16}{3}R^3.$$

3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры (рис. 5.19), ограниченной линиями $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ и $y=\pm b$.

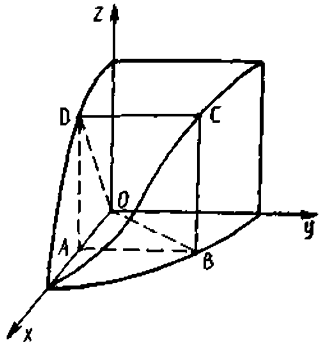


Рис 5.18

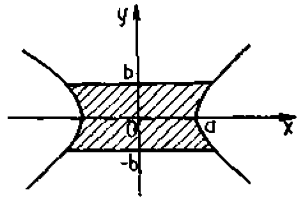


Рис 5.19

Решение. Находим объем тела по формуле (5.11):

$$V=2\pi\int_0^b a^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)dy=$$

$$=2\pi a^2\left(y+\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^b=2\pi a^2\left(b+\frac{b}{3}\right)=\frac{8}{3}\pi a^2 b.$$

4. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной параболой $y=2x-x^2$ и осью Ox, вокруг оси Oy (рис. 5.20).

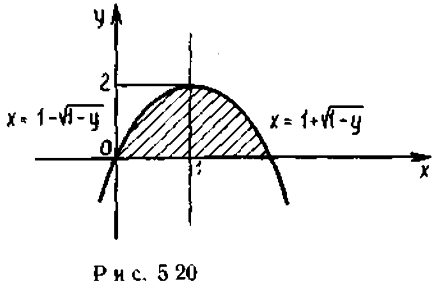


Рис. 5.20

Решение. Построим параболу $y=2x-x^2$, приведя ее уравнение к виду $y=-(x^2-2x)=-(x-1)^2+1$. Точка $(-1,\ -1)$ — вершина данной параболы. Выразив x из уравнения параболы, имеем: $x=1+\sqrt{1-y}$ (для правой ветви параболы), $x=1-\sqrt{1-y}$ (для левой ветви параболы). Применив формулу (5.12), получим

$$V=\pi\int_0^1\left(\left(1+\sqrt{1-y}\right)^2-\left(1-\sqrt{1-y}\right)^2\right)dy=$$

$$=\pi\int_0^1 4\sqrt{1-y}\,dy=4\pi\int_0^1(1-y)^{1/2}dy=$$

$$=-\frac{8\pi(1-y)^{3/2}}{3/2}=\frac{16}{3}\pi.$$

5. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линией $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, вокруг оси Ox (рис. 5.21).

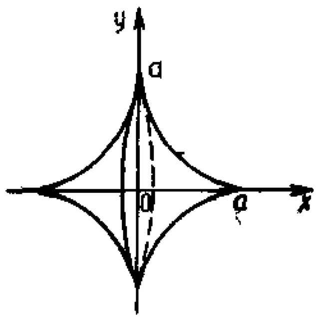


Рис. 5.21

Решение. Фигура, ограниченная астроидой, при вращении вокруг оси Ox образует тело вращения, объем которого определяется формулой (5.13). Из параметрических уравнений астроиды находим, что при $x=0$ $t=\pi/2$, при $x=a$ $t=0$. Тогда

$$V=2\pi\int_{\pi/2}^{0} a^2\sin^6 t\,(-3a)\cos^2 t\sin t\,dt=$$

$$=6a^3\pi\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\,d(\cos t)=$$

$$=6a^3\pi\int_{\pi/2}^{0}(\cos^2 t-3\cos^4 t+3\cos^6 t-\cos^8 t)\,d(\cos t)=$$

$$=6a^3\pi\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{3}{5}\cos^5 t+\frac{3}{7}\cos^7 t-\right.$$

$$-\frac{1}{9}\cos^9 t\Big)\Big|_{\pi/2}^{0}=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

6. Найти объем тела, образованного вращением лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение. Находим объем по формуле (5.13):

$$V=\frac{4}{3}\pi\int_0^{\pi/4} a^3\cos^{3/2}2\varphi\sin\varphi d\varphi=$$

$$=-\frac{4}{3}\pi a^3\int_0^{\pi/4}(2\cos^2\varphi-1)^{3/2}d(\cos\varphi)=|\cos\varphi=t|=$$

$$=-\frac{4}{3}\pi a^3\int_1^{1/\sqrt{2}}(2t^2-1)^{3/2}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix} m=0,\ n=2,\ p=3/2,\ t=(2-z^2)^{-1/2}, \\ \frac{m+1}{n}+p=2,\ 2t^2-1=t^2z^2,\ dt=(2-z^2)^{-3/2}zdz\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{4}{3}\pi a^3\int_1^0\left(\frac{z^2}{2-z^2}\right)^{3/2}\frac{zdz}{(2-z^2)^{3/2}}=$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3\int_0^1\frac{z^4dz}{(2-z^2)^3}=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=z^3,\ dv=(2-z^2)^{-3}zdz, \\ du=3z^2dz,\ v=\frac{1}{4(2-z^2)^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3\left(\frac{z^3}{4(2-z^2)^2}\Big|_0^1-\frac{3}{4}\int_0^1\frac{z^2dz}{(2-z^2)^2}\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=z,\ dv=(2-z^2)^{-2}zdz, \\ du=dz,\ v=\frac{1}{2(2-z^2)}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\ \frac{z}{2-z^2}\Big|_0^1+\frac{3}{8}\int_0^1\frac{dz}{2-z^2}\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\int_0^1\frac{dz}{z^2-(\sqrt{2})^2}\right)=$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3\left(-\frac{1}{8}-\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|\Big|_0^1\right)=$$
$$= \frac{4}{3}\pi a^3\left(-\frac{1}{8}-\frac{3}{16\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right|-\ln 1\right)\right)=$$
$$= \frac{4}{3}\pi a^3\left(\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{8}\right)=$$
$$= \frac{4\pi a^3}{3\cdot 16\sqrt{2}}\left(3\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right|-2\sqrt{2}\right)=$$
$$= \frac{\pi a^3}{12\sqrt{2}}\left(3\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right|-2\sqrt{2}\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 5.57—5.71 найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг указанной оси координат.

5.57. $xy=4$, $x=1$, $x=2$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* 8.)

5.58. $y=x^3$, $x=2$, $y=0$, Ox и Oy. (*Ответ:* $128\pi/7$, $64\pi/5$.)

5.59. $y=\sin x$ $(x\in[0;\ \pi])$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* $\pi^2/2$.)

5.60. $y=\sin^2 x$ $(x\in[0;\ \pi])$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* $3\pi^2/8$.)

5.61. $y=4x-x^2$, $y=x$, Ox. (*Ответ:* $21{,}6\pi$.)

5.62. $y=x^2/2+2x+2$, $y=2$, Oy. (*Ответ:* $64\pi/3$.)

5.63. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, Oy. (*Ответ:* $4\pi a^2 b/3$.)

5.64. $y=1/(1+x^2)$, $x=\pm 1$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* $(\pi+$ $+2)\pi/4$.)

5.65. $x^2-y^2=a^2$, $x=2a$ $(a>0)$, Ox. (*Ответ:* $4\pi a^3/3$.)

5.66. $y=xe^x$, $x=1$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* $\pi(e^2-1)/4$.)

5.67. $xy=4$, $2x+y-6=0$, Ox. (*Ответ:* $4\pi/3$.)

5.68. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x=a$, $x=b$, Ox.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^{2b}-e^{-2b}}{2}-\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{2}\right)+2(b-a).\right)$

5.69. $y=x^2$, $4x-y=0$, Oy. (*Ответ:* $20\pi/3$.)

5.70. $y^2=x^3$, $x=1$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* $\pi/4$.)

5.71. $y^2=4ax$, $x=a$, Oy. (*Ответ:* $16\pi a^3/5$.)

5.72. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, содержащейся внутри петли кривой $(x-4a)y^2=ax(x-3a)$ $(a>0)$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi a^3}{2}(15-16\ln 2).\right)$

5.73. Найти объем тела, ограниченного однополостным гиперболоидом $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1$ и плоскостями $z=0$, $z=h$. (*Ответ:* $\pi abh(1+h^2/(3c^2))$.)

5.74. Найти объем прямого эллиптического конуса, основание которого есть эллипс с полуосями a и b, а высота равна h. (*Ответ:* $\pi abh/3$.)

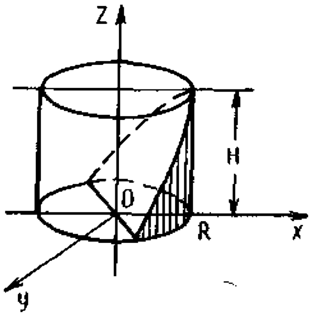


Рис. 5.22

5.75. Найти объем тела, полученного при вращении одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0; 2\pi]$, вокруг оси Ox. (*Ответ:* $5\pi^2a^3$.)

5.76. Найти объем тела (рис. 5.22), отсеченного от круглого цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания, если $R=10$ см, $H=6$ см. (*Указание.* Принять за ось абсцисс ось симметрии основания.) $\left(\text{Ответ: } \frac{2}{3}R^2H = 400 \text{ см}^3.\right)$

5.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ КРИВОЙ И ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим правила вычисления длины дуги кривой.

1. Если дуга кривой задана уравнением $y=f(x)$ в промежутке $[a; b]$ и функция $y=f(x)$ имеет непрерывную производную в указанном промежутке, то длина дуги кривой, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x=a$, $x=b$, определяется по формуле

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx. \qquad (5.14)$$

Если кривая задана уравнением $x=g(y)$ в промежутке $[c; d]$ и функция $x=g(y)$ имеет непрерывную производную в этом промежутке, то длина дуги кривой определяется по формуле

$$l=\int_c^d\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy. \qquad (5.15)$$

2 Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1, t_2]$, где $x(t)$, $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \tag{5 16}$$

Если дуга — пространственная кривая $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t\in[t_1, t_2]$, то ее длина определяется формулой

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt \tag{5 17}$$

3 Если задано полярное уравнение кривой $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha, \beta]$, где $r'(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha\ \beta]$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi \tag{5 18}$$

Рассмотрим правила вычисления площади поверхности вращения

1 Площадь поверхности образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной функцией $y=f(x)$, $x\in[a\ b]$, вычисляется по формуле

$$Q_x=2\pi\int_{a}^{b}f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \tag{5 19}$$

2 Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1, t_2]$, то площадь поверхности вращения определяется по формуле

$$Q_x=2\pi\int_{t_1}^{t_2}y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \tag{5 20}$$

3 Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha, \beta]$, то площадь поверхности вращения находят по формуле

$$Q_x=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}r\sin\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi \tag{5 21}$$

4 Если дуга кривой вращается вокруг произвольной оси, то площадь поверхности вращения выражается интегралом

$$Q=2\pi\int_{A}^{B}R\,dl, \tag{5 22}$$

где R — расстояние от точки на кривой до оси вращения, dl — дифференциал дуги, A, B — пределы интегрирования, соответствующие концам дуги При этом R и dl должны быть выражены через переменную интегрирования

Примеры

1. Найти длину дуги линии $y=\ln x$ (от $x_1=\sqrt{3}$ до $x_2=\sqrt{8}$).

Решение. Применим формулу (5.14). Так как $y'=1/x$, то имеем

$$l=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=$$

$$=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}x^{-1}(1+x^2)^{1/2}dx.$$

Подынтегральное выражение есть дифференциальный бином, где $m=-1$, $n=2$, $p=1/2$, $(m+1)/n=(-1+$ $+1)/2=0$. Используем подстановку $1+x^2=t^2$, $x=$ $=(t^2-1)^{1/2}$, $dx=\frac{1}{2}(t^2-1)^{1/2}\cdot 2tdt$. Если $x=\sqrt{3}$, то $t=2$; если $x=\sqrt{8}$, то $t=3$. Тогда получим

$$l=\int\limits_2^3(t^2-1)^{-1/2}t(t^2-1)^{-1/2}tdt=$$

$$=\int\limits_2^3\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int\limits_2^3\frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt=\int\limits_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

2. Найти длину дуги эвольвенты окружности $x=R(\cos t+t\sin t)$, $y=R(\sin t-t\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant\pi$.

Решение. Так как $x'(t)=Rt\cos t$, $y'(t)=Rt\sin t$, то, применив формулу (5.16), получим

$$l=\int\limits_0^\pi\sqrt{R^2t^2\cos^2 t+R^2t^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=R\int\limits_0^\pi\sqrt{t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt=$$

$$=R\int\limits_0^\pi tdt=\frac{Rt^2}{2}\Big|_0^\pi=\frac{\pi^2R}{2}.$$

3. Найти длину дуги кардиоиды $r = a(1 - \cos\varphi)$.

Решение. Применив формулу (5.18), где $r'(\varphi) = a\sin\varphi$, имеем

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\, d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = -4a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -4a(\cos\pi - \cos 0) = (-4a)(-2) = 8a.$$

4. Найти площадь поверхности вращения, полученной

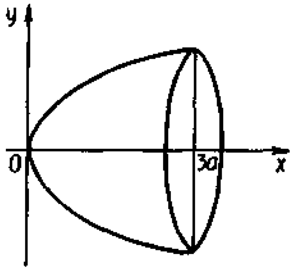


Рис 5 23

вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4ax$, $x = 0$, $x = 3a$, вокруг оси абсцисс (рис. 5.23).

Решение. Применив формулу (5.19), где $y = 2\sqrt{ax}$, $y' = \sqrt{a} / \sqrt{x}$, получим

$$Q_x = 2\pi\int_0^{3a} 2\sqrt{ax}\sqrt{1 + \left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2}\, dx =$$

$$= 4\pi\sqrt{a}\int_0^{3a} \sqrt{x}\,\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}}\, dx = 4\pi\sqrt{a}\int_0^{3a} (x +$$

$$+ a)^{1/2} dx = 4\pi\sqrt{a}\,\frac{(a+x)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^{3a} =$$

$$= \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}(4a\sqrt{4a} - a\sqrt{a}) = \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}(8a\sqrt{a} -$$

$$- a\sqrt{a}) = \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}\cdot 7a\sqrt{a} = \frac{56}{3}\pi a^2.$$

5. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (рис. 5.24).

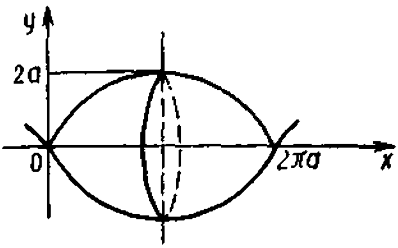


Рис. 5.24

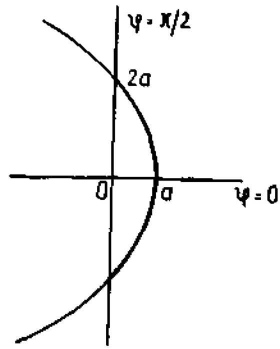


Рис. 5.25

Решение. Применим формулу (5.20). Из уравнений $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ имеем: при $x = 0$ $t = 0$, при $x = 2\pi$ $t = 2\pi$. Так как $x'(t) = 1 - \cos t$, $y'(t) = \sin t$, то

$$Q_x = 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2\pi\sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 -$$

$$- \cos t) \sqrt{1 - \cos t}\, dt = 2\pi\sqrt{2} \int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2} \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\, dt =$$

$$= 8\pi \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\, dt = -16\pi \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right) d\left(\cos\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -16\pi\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -16\pi\left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi.$$

6. Найти площадь поверхности вращения, образованной вращением дуги кривой $r = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, вокруг полярной оси (рис. 5.25).

Решение. Применив формулу (5.21), где $r = a/\cos^2\frac{\varphi}{2}$, $r'(\varphi) = a\sin\frac{\varphi}{2}/\cos^3\frac{\varphi}{2}$, получим

$$Q_x=2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\frac{a^2}{\cos^4\frac{\varphi}{2}}+\frac{a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^6\frac{\varphi}{2}}}\,d\varphi=$$

$$=2\pi a^2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,\frac{d\varphi}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}=4\pi a^2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\cos^4\frac{\varphi}{2}}=$$

$$=-8\pi a^2\int_0^{\pi/2}\cos^{-4}\frac{\varphi}{2}\,d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)=-8\pi a^2\left.\frac{\cos^{-3}\frac{\varphi}{2}}{-3}\right|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{8\pi a^2}{3}\left.\frac{1}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}\right|_0^{\pi/2}=\frac{8\pi a^2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 5.77—5.84 найти длину дуги кривой.

5.77. $y=\ln(1-x^2)$ (от $x_1=0$ до $x_2=1/2$). (*Ответ:* $\ln(3-1/2)$.)

5.78. $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ (от $x_1=0$ до $x_2=b$). $\left(\textit{Ответ: } a\operatorname{sh}\frac{b}{a}.\right)$

5.79. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ (от $t_1=0$ до $t_2=\ln\pi$). (*Ответ:* $\sqrt{2}(\pi-1)$.)

5.80. $y^2=x^3$ (от точки $O(0,0)$ до $A(4,8)$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).\right)$

5.81. $x=\ln\cos y$ (от $y_1=0$ до $y_2=\pi/3$). (*Ответ:* $\ln(2+\sqrt{3})$.)

5.82. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ (от $y_1=1$ до $y_2=e$). $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}(e^2+1).\right)$

5.83. $y=\arcsin e^{-x}$ (от $x_1=0$ до $x_2=1$). (*Ответ:* $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$.)

5.84. $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$, $y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$ (от $t_1=0$ до $t_2=\pi$). (*Ответ:* $\pi^3/3$.)

5.85. Найти длину дуги первого витка винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$. (*Ответ*: $\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2\pi$.)

5.86. Найти длину дуги архимедовой спирали $r=a\varphi$ от начала до конца первого витка. (*Ответ*: $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+$ $+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.)

5.87. Найти длину дуги гиперболической спирали $r=\frac{1}{\varphi}$ $\left(\text{от } \varphi_1=\frac{3}{4} \text{ до } \varphi_2=\frac{4}{3}\right)$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}.\right)$

5.88. Найти длину дуги кривой $y=x^2/2-1$ между точками ее пересечения с осью Ox. (*Ответ*: $\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+$ $+\sqrt{3})$.)

5.89. Найти длину дуги астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=$ $=a\sin^3 t$. (*Ответ*: $6a$.)

5.90. Вычислить длину петли линии $9ay^2=x(x-3a)^2$. (*Ответ*: $4a\sqrt{3}$.)

5.91. Дуга окружности $x^2+y^2=a^2$, лежащая в первом квадранте, вращается вокруг стягивающей ее хорды. Вычислить площадь получающейся при этом поверхности. (*Ответ*: $\pi a^2\sqrt{2}\,(2-\pi/2)$.)

5.92. Найти площадь поверхности «веретена», полученного в результате вращения одной полуволны синусоиды $y=\sin x$ вокруг оси Ox. (*Ответ*: $2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.)

5.93. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(a>b)$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } 2\pi b^2+\frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.\right)$

5.94. Найти площадь поверхности вращения, образованной вращением вокруг оси абсцисс дуги линии $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$ от $t_1=0$ до $t_2=\pi/2$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^\pi-2).\right)$

5.95. Найти площадь поверхности вращения, образованной вращением вокруг оси абсцисс астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \frac{12}{5}\pi a^2.\right)$

5.96. Найти площадь поверхности, образованной вращением петли кривой $x=a(t^2+1)$, $y=\frac{at}{3}(3-t^2)$ вокруг оси Ox. (*Ответ*: $3\pi a^2$.)

5.97. Найти площадь поверхности, образованной вращением окружности $r = 2R \sin \varphi$ вокруг полярной оси. (*Ответ:* $4\pi^2 R^2$.)

5.98. Найти площадь поверхности, образованной при вращении лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ вокруг полярной оси. (*Ответ:* $2\pi a^2 (2 - \sqrt{2})$.)

5.5. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ

Статическим моментом относительно оси l материальной точки A, имеющей массу m и отстоящей от оси l на расстоянии d, называется число $M_l = md$

Статическим моментом относительно оси Ox системы n материальных точек $A_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, n}$, имеющих массы m_i, называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k$$

Статический момент относительно оси Oy системы материальных точек определяется по формуле

$$M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k.$$

Если массы непрерывно заполняют дугу или фигуру плоскости Oxy, то за статические моменты плоских дуг и фигур принимаются моменты условных масс, равномерно распределенных вдоль этих дуг и фигур с плотностью, равной единице. Статические моменты в этом случае выражаются интегралами.

Если дуга плоской материальной кривой задана уравнением $y = f(x)$, где $x \in [a, b]$, и имеет плотность $\rho = \rho(x)$, то *статические моменты* этой дуги M_x и M_y *относительно координатных осей Ox и Oy* находят по формулам:

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx, \tag{5.23}$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x) x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{5.24}$$

Моментом инерции относительно оси l материальной точки массой m, отстоящей от оси l на расстоянии d, называется число $I_l = md^2$ *Моментами инерции I_x, I_y системы материальных точек* $A_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, n}$, имеющих массы m_i, *относительно осей Ox и Oy* называются суммы произведений масс этих точек на квадраты их расстояний до соответствующей оси:

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2, \quad I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2$$

Моменты инерции дуги плоской материальной кривой $y=f(x)$, где $x \in [a; b]$, с заданной плотностью $\rho=\rho(x)$ равны соответственно:

$$I_x=\int_a^b \rho(x) f^2(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx, \tag{5.25}$$

$$I_y=\int_a^b \rho(x) x^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx. \tag{5.26}$$

Координаты центра масс дуги плоской материальной кривой $y=f(x)$, где $x \in [a; b]$, с плотностью $\rho=\rho(x)$ вычисляют по формулам:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b \rho(x) x \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx}{M}, \\ y_C &= \frac{M_x}{M} = \frac{\int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx}{M}, \end{aligned} \tag{5.27}$$

где массу дуги M находят по формуле

$$M=\int_a^b \rho(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx.$$

Работа переменной силы $F=f(x)$, действующей в направлении оси Ox на отрезке $[x_1; x_2]$, вычисляется по формуле

$$A=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{5.28}$$

Если пластинка находится в горизонтальном положении на глубине h от поверхности жидкости, то *сила давления P жидкости* на эту пластинку вычисляется по закону Паскаля:

$$P=\rho g h S,$$

где g — ускорение свободного падения: $g=9{,}8$ м/с^2; S — площадь пластинки, ρ — плотность жидкости.

Если же пластинка погружена в жидкость вертикально, то сила давления жидкости на единицу площади изменяется с глубиной погружения. Пусть пластинка, имеющая вид криволинейной трапеции, погружена вертикально в жидкость так, что боковые стороны этой трапеции параллельны поверхности жидкости. Выберем систему координат так, как показано на рис. 5.26. Если пластинка ограничена линиями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$, то сила давления жидкости на эту пластинку вычисляется по формуле

$$P=g\int_a^b \rho x f(x)dx. \tag{5.29}$$

Если же в жидкость вертикально погружена пластинка, ограниченная линиями $f=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a$, $x=b$ (рис 5 27), то сила давления жидкости на эту пластинку находится по формуле

$$P=g\int_a^b \rho x(f_2(x)-f_1(x))\,dx \qquad (5.30)$$

Примеры

1. Найти координаты центра масс однородной дуги полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$ и момент инерции полуокружности относительно оси Ox (рис. 5.28).

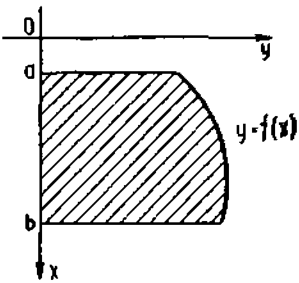


Рис. 5.26

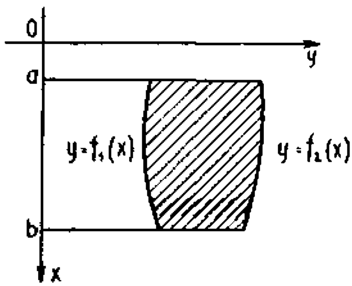


Рис. 5.27

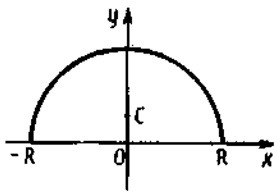


Рис. 5.28

Решение. Применим формулы (5.27), учитывая, что $\rho(x)=1$. Согласно формуле (5.23), имеем

$$M_x=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=$$

$$=R\int_{-R}^{R}dx=Rx\Big|_{-R}^{R}=2R^2.$$

Так как l — длина дуги полуокружности радиусом R, то $l=\pi R$. Тогда

$$y_C=\frac{M_x}{l}=\frac{2R^2}{\pi R}=\frac{2R}{\pi},$$

а $x_C=0$, так как центр масс находится на оси симметрии, а осью симметрии является ось Oy. Находим момент инерции дуги относительно оси Ox по формуле (5.25):

$$I_x=\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=$$

$$=R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

Последний интеграл вычислим с помощью подстановки $x=R\sin t$. Тогда $dx=R\cos t dt$. Если $x=0$, то $t=0$; если $x=R$, то $t=\pi/2$. Следовательно, имеем

$$I_x=2R\int_0^{\pi/2}\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\,R\cos t dt=$$

$$=2R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt=R^2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=$$

$$=R^2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}=R^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)=\frac{\pi R^2}{2}.$$

2. Найти координаты центра масс первой арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, а также ее момент инерции относительно оси Ox.

Решение. Центр масс однородной фигуры лежит на оси симметрии, поэтому $x_C=\pi a$. Координату y_C находим по формуле (5.27). Имеем: $x'(t)=a(1-\cos t)$, $y'(t)=a\sin t$. Так как $x=0$ при $t=0$, $x=2\pi a$ при $t=2\pi$, то отсюда получаем

$$M_x=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\,dt=a^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-$$

$$-\cos t)^{3/2}dt=a^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}2\sqrt{2}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=-8\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=-8a^2\left(\cos\frac{t}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=-8a^2\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{3}a^2,$$

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a\int_{0}^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2a\int_{0}^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=4a\int_{0}^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right)=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_{0}^{2\pi}=8a.$$

Следовательно, $y_C=\frac{4}{3}a.$

Находим:

$$I_x=\int_{\alpha}^{\beta}y^2(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=$$

$$=\int_{0}^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2 a\sqrt{2-2\cos t}\,dt=$$

$$=a^3\sqrt{2}\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^{5/2}dt=\left|\,1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}\right|=$$

$$=a^3\sqrt{2}\int_{0}^{2\pi}2^2\sqrt{2}\,\sin^5\frac{t}{2}\,dt=8a^3\int_{0}^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=-8a^3\cdot 2\int_{0}^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)^2 d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=$$

$$=-16a^3\int_{0}^{2\pi}\left(1-2\cos^2\frac{t}{2}+\cos^4\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=$$

$$=-16a^3\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}+\frac{1}{5}\cos^5\frac{t}{2}\right)\Big|_{0}^{2\pi}=$$

$$=-16a^3\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{256}{15}a^3.$$

3. Пластинка, имеющая форму эллипса, наполовину погружена в жидкость (вертикально), так что одна из осей (длиной $2b$) лежит на поверхности. Найти силу давления жидкости на каждую из сторон этой пластинки (рис. 5.29), если длина большей полуоси эллипса равна a, а плотность жидкости ρ.

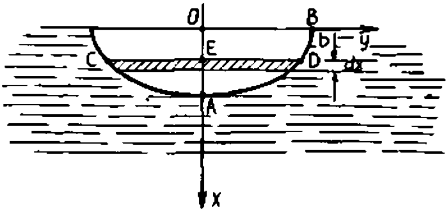


Рис. 5.29

Решение. Имеем: $OA=a$, $OB=b$. Сила давления жидкости на пластинку площадью S при глубине погружения x $P=\rho g x S$.

Полуэллипс разделим на элементарные полоски прямыми, параллельными поверхности жидкости. Заштрихованную полоску приближенно примем за прямоугольник с основанием CD и высотой dx и допустим, что все точки этой полоски находятся на одной глубине x $(0 \leqslant x \leqslant h)$. Такое допущение сделать можно, поскольку dx мало. Элементарная площадь полоски

$$dS = CD dx = 2DE dx = 2y dx = \\ = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Давление жидкости на полоску, находящуюся на глубине x,

$$dP = \rho g x dS = \rho g x \frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Тогда давление на всю пластинку

$$P = \int_0^a \rho g x \frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{2b\rho g}{a}\int_0^a x(a^2-x^2)^{1/2}dx =$$

$$= \frac{-2b\rho g}{2a}\left.\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3/2}\right|_0^a = -\frac{2}{3}\frac{b\rho g}{a}(a^2 - \\ \left.-x^2)^{3/2}\right|_0^a = \frac{2}{3}b\rho g a^2 = \frac{2}{3}b\rho g a^2.$$

4. Котел имеет форму параболоида вращения. Радиус его основания $R=3$ м, глубина $H=5$ м. Котел наполнен жидкостью, плотность которой $\rho=0{,}8$ г/см^3. Вычислить работу, которую нужно произвести, чтобы выкачать жидкость из котла (рис. 5.30).

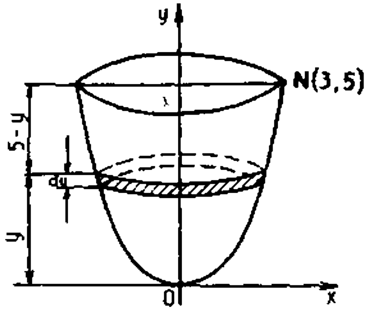


Рис 5.30

Решение. Сечение котла плоскостью Oxy есть парабола, уравнение которой $y=ax^2$. Точка $N(3, 5)$ принадлежит параболе, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению параболы, т. е. $5=3^2a$. Отсюда $a=5/9$. Тогда $y=\frac{5}{9}x^2$ — уравнение параболы.

Разделим параболоид на слои плоскостями, параллельными поверхности жидкости. Пусть толщина слоя на глубине $5-y$ равна dy. Тогда, принимая приближенно слой за цилиндр, получаем формулу для определения его объема:

$$dV=\pi x^2 dy. \tag{1}$$

Из уравнения параболы находим $x^2=9y/5$. Подставляя это значение в формулу (1), получаем

$$dV=\frac{\pi 9y}{5}dy.$$

Массу слоя жидкости обозначим через dQ. Тогда

$$dQ=\rho dV=\frac{9}{5}\pi\rho y dy,$$

где ρ — плотность жидкости. Чтобы выкачать жидкость с глубины $5-y$, потребуется затратить элементарную работу

$$dA=dQ(5-y)g=\frac{9}{5}\pi\rho g(5-y)ydy.$$

Учитывая, что $0\leqslant y\leqslant 5$, получаем

$$A=\int_0^5\frac{9}{5}\pi\rho g(5-y)ydy=\frac{9}{5}\pi\rho g\int_0^5(5y-$$

$$-y^2)dy = \frac{9}{5}\pi\rho g(125/2 - 125/3) =$$
$$= \frac{9}{5}\pi\rho g \cdot 125 \cdot (1/2 - 1/3) = \frac{9}{5}\pi\rho g\frac{125}{6} =$$
$$= \frac{225}{6}\pi\rho g = \frac{75}{2}\pi\rho g.$$

Подставляя в последнюю формулу $\rho = 800$ кг/м^3, $g = 9{,}8$ м/с^2, вычисляем искомую работу:

$$A = \frac{75}{2}\pi \cdot 800 \cdot 9{,}8 = 30\,000 \cdot 9{,}8\pi \approx 294\,300 \text{ Дж}.$$

Задачи для самостоятельного решения

5.99. Найти координаты центра масс дуги цепной линии $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$, содержащейся между точками с абсциссами $x_1 = -a$, $x_2 = a$. $\left(\textit{Ответ:}\ C\left(0,\ a\frac{e^4 + 4e^2 - 1}{4e(e^2 - 1)}\right).\right)$

5.100. Найти координаты центра масс дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, расположенной в первом квадранте. $\left(\textit{Ответ:}\ C\left(\frac{2}{5}a,\ \frac{2}{5}a\right).\right)$

5.101. Найти статический момент синусоиды $y = \sin x$ относительно оси Ox $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$. (*Ответ:* $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$.)

5.102. Найти координаты центра масс дуги окружности радиусом R, стягивающей центральный угол α. (*Ответ:* центр масс лежит на биссектрисе центрального угла, стягивающего дугу, на расстоянии $\frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ от центра.)

5.103. Найти статический момент дуги эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, лежащей в первом квадранте, относительно оси абсцисс. (*Ответ:* $\frac{b^2}{2} + \frac{ab}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon$, где ε — эксцентриситет эллипса.)

5.104. Определить давление воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{256}{15} \cdot 9{,}81 \cdot 10^3 \text{ Н} \approx 167 \cdot 10^3 \text{ Н}.\right)$

5.105. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой $a=6{,}4$ м, нижнее $b=4{,}2$ м, а высота $h=3$ м. (*Ответ:* $22\,200g$ Н $=217\,560$ Н.)

5.106. Какую работу нужно затратить на выкачивание воды из цилиндрического бассейна радиусом основания 0,5 м, если в начальный момент уровень воды в бассейне был равным 2,8 м, что на 0,2 м ниже выпускающего воду отверстия в цилиндре? (*Ответ:* $1120g\pi$ Дж.)

5.107. Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из полушара радиусом R м. (*Ответ:* $250\pi R^4 g$ Дж.)

5.108. Какую работу нужно произвести, чтобы насыпать кучу песка в форме усеченного конуса высотой h, имеющего радиусы оснований R и r $(r<R)$? Плотность песка ρ. (Песок поднимают с поверхности земли, на которой находится большее основание конуса.) $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi h^2 \rho g}{12}(R^2+\right.$ $\left.+2Rr+3r^2).\right)$

5.109. Определить давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз основанием 8 м и высотой 6 м. Определить также давление на нижнюю половину шлюза. (*Ответ:* $144g$ кН; $108g$ кН.)

5.110. За какое время вода вытечет из конической воронки высотой $h=40$ см, радиусом нижнего основания $r=0{,}3$ см и верхнего $R=6$ см? (*Ответ:* $t=\frac{R^2}{0{,}6r^2h^2\sqrt{2g}}\times$ $\times\int\limits_h^{h+h'} x\sqrt{x}\,dx$, где $h\approx 2$ — высота дополнительного конуса, $t\approx 42$ с.)

5.111. Шар радиусом R, плотность которого численно равна единице, погружен в воду так, что касается поверхности. Какую работу нужно затратить, чтобы извлечь шар из воды? (*Указание.* Подъемная сила, действующая на погруженное в жидкость твердое тело, равна весу вытесненной им жидкости.) $\left(\textit{Ответ: } \frac{4}{3}\pi R^4 g.\right)$

5.112. Ветер производит равномерное давление p на дверь, ширина которой b и высота h. Найти момент силы давления ветра, стремящейся повернуть дверь на петлях. (*Ответ:* $M=hb^2p/2$.)

5.113. Согласно опытным данным, удельная теплоемкость воды при температуре t °С $(0\leqslant t\leqslant 100°)$

$$C=0{,}9983-5{,}184\cdot 10^{-5}t+6{,}912\cdot 10^{-7}t^2.$$

какое количество теплоты нужно затратить, чтобы 1 г воды нагреть от температуры 0 °С до температуры 100 °С? (*Ответ:* 418,162 Дж.)

5.6. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Несобственными интегралами называются интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций

Рассмотрим *интегралы с бесконечными пределами* Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x \in [a, +\infty)$. Тогда *несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$* определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (5.31)$$

Если предел в правой части равенства (5 31) существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, если же этот предел не существует или бесконечен, то интеграл называется *расходящимся*

Геометрически несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ в случае $f(x)>0$ представляет собой площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямой $x=a$ и осью Ox Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то площадь фигуры выражается определенным числом, а ось Ox служит асимптотой для графика функции $y=f(x)$. Если же интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то площадь фигуры — бесконечная

Аналогично определяются несобственные интегралы:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (5.32)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx. \qquad (5.33)$$

Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется *сходящимся*, если сходятся оба интеграла в правой части равенства (5 33), и *расходящимся*, если хотя бы один из них расходится

Приведем *признаки сходимости и расходимости интегралов с бесконечными пределами*

1°. Пусть для $x \in [a;\ +\infty)$ $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ Если $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, причем

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *(признак сравнения)*.

2°. Если для $x \in [a, +\infty)$ $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно *(предельный признак сравнения)*.

3°. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ (последний в этом случае называется *абсолютно сходящимся*).

4°. Если при $x \to +\infty$ функция $f(x) > 0$ является бесконечно малой порядка α по сравнению с $1/x$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Замечание. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Рассмотрим *интегралы от неограниченных функций*. Если функция $f(x)$ непрерывна для $x \in [a; b)$ и в точке $x = b$ имеет бесконечный разрыв, то по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{5.34}$$

Если существует конечный предел в правой части формулы (5.34), то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если этот предел не существует или бесконечен, то интеграл называется *расходящимся*

Геометрически несобственный интеграл в случае $f(x) > 0$ представляет собой площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямой $x = a$ и вертикальной асимптотой $x = b$

Если функция $f(x)$ непрерывна для $x \in (a; b]$ и в точке $x = a$ имеет бесконечный разрыв, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{5.35}$$

Если предел в правой части формулы (5.35) существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*.

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $c\in[a;\ b]$ и непрерывна при $x\in[a;\ c)\cup(c;\ b]$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx. \qquad (5.36)$$

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ ($f(c)=+\infty,\ a<c<b$) называется *сходящимся*, если оба предела в правой части равенства (5.36) существуют, и *расходящимся*, если не существует хотя бы один из них.

Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны признакам сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами. Эталоном для сравнения в признаке 4° служит интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\ (\alpha>0)\ \text{ или }\ \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha},$$

который сходится при $\alpha<1$ и расходится при $\alpha\geqslant 1$.

Примеры

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx.$

Решение. Подынтегральная функция непрерывна в промежутке $[0;\ +\infty)$. Следовательно, по определению

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \operatorname{arctg} x\,d(\operatorname{arctg} x)=$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}\Big|_0^a=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}^2 a-$$

$$-\operatorname{arctg}^2 0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}.$$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}.$

Решение. Разложив исходный интеграл на два интеграла, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{2xdx}{x^2+1} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(\ln|x^2+1|\Big|_a^0\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\ln|x^2+1|\Big|_0^b\right) =$$

$$= -\lim_{a\to-\infty} \ln|a^2+1| + \lim_{b\to+\infty} \ln|b^2+1| = -\infty + \infty.$$

Исходный интеграл расходится, так как расходится каждый из интегралов в правой части последнего равенства, а достаточно расходимости только одного из них.

3. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Решение. Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв при $x=1$. Следовательно,

$$\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{e} \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{e} \ln^{-3} x d(\ln x) = \lim_{\varepsilon\to0} \frac{\ln^{-2} x}{-2}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{e} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0} \left(-\frac{1}{2\ln^2 e} + \frac{1}{2\ln^2(1+\varepsilon)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \infty = +\infty,$$

т. е. исходный интеграл расходится.

Исследовать интегралы на сходимость.

4. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{3+2x^2+5x^4}$.

Решение. Применив признак сравнения, для $x \geqslant 1$ имеем $3+2x^2+5x^4 > x^4$, откуда

$$\frac{1}{3+2x^2+5x^4} < \frac{1}{x^4}.$$

Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$. По определению

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \lim_{a \to +\infty} \int\limits_1^a x^{-4} dx =$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \left(-\frac{1}{3x^3} \Big|_1^a \right) = \lim_{a \to +\infty} \left(-\frac{1}{3a^3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3},$$

т. е. интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ сходится, а тогда по признаку сравнения сходится и исходный интеграл.

5. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$.

Решение. Применим признаки 1° и 3°. Имеем:

$$f(x) = \sin x / x^2, \ \sin x / x^2 \leqslant |\sin x| / x^2 \leqslant 1/x^2.$$

Так как

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \to +\infty} \int\limits_1^a x^{-2} dx =$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^a \right) = \lim_{a \to +\infty} \left(-\frac{1}{a} + 1 \right) = 1,$$

то интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, а тогда, согласно признаку сравнения, сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x| \, dx}{x^2}$. Следовательно, на основании признака 3° сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$.

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x} \, dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

Решение. Функция $f(x) = \sqrt{x} / \sqrt{1 - x^4}$ имеет бесконечный разрыв при $x = 1$. Применим следующий признак: если функция $f(x) \geqslant 0$ определена и непрерывна для $x \in [a; b)$ и является бесконечно большой порядка α по сравнению с $\frac{1}{b - x}$ при $x \to b - 0$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x) dx$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$. В нашем случае $a=0$, $b=1$, тогда

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{1(b-x)^k} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \cdot (1-x)^k =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)^k}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} \cdot \lim_{x\to 1} \sqrt{x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)^k}{\sqrt{2}\,\sqrt{1-x}} \cdot 1 = \frac{1}{2} \lim_{x\to 1} (1-x)^{k-1/2}.$$

Следовательно, $k=1/2<1$, и интеграл **сходится**.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 5.114—5.127 вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

5.114. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$. $\left(Ответ: \frac{1}{2}.\right)$

5.115. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$. (*Ответ:* $1-\ln 2$.)

5.116. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. (*Ответ:* π.)

5.117. $\int\limits_1^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$. $\left(Ответ: \frac{8}{3}.\right)$

5.118. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. $\left(Ответ: 14\frac{4}{7}.\right)$

5.119. $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. (*Ответ:* 2.)

5.120. $\int\limits_2^{3} \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$. $\left(Ответ: \frac{2}{3}\sqrt[4]{125}.\right)$

5.121. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3.\right)$

5.122. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^3-6x^2}$. (*Ответ:* расходится.)

5.123. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}.\right)$

5.124. $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(5-x)}}$. (*Ответ:* π.)

5.125. $\int\limits_{0}^{2{,}5} \frac{dx}{x^2-5x+6}$. (*Ответ:* расходится.)

5.126. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+13}$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{\pi}{2}.\right)$

5.127. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{(x-1)\ln(x-1)}$. (*Ответ:* расходится.)

В задачах 5.128—5.132 исследовать интеграл на сходимость.

5.128. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$. (*Ответ:* расходится.)

5.129. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$. (*Ответ:* сходится.)

5.130. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$. (*Ответ:* сходится.)

5.131. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\,dx$. (*Ответ:* сходится.)

5.132. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}$. (*Ответ:* расходится.)

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ

1. *Апатенок Р. Ф.* и др. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, Н. В. Попова, В. Б. Хейнман Под ред. В. Т. Воднева.— Мн.: Выш. шк., 1986.—271 с.
2. *Богданов Ю. С.* Лекции по математическому анализу: В 2 ч.— Мн.: Изд-во Белорус. ун-та, 1974.— Ч. 1.—175 с.
3. *Ефимов Н. В.* Краткий курс аналитической геометрии.— М.: Наука, 1975.—160 с.
4. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1968.—431 с
5. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления В 2 т.— М.: Наука, 1985.—Т. 1.—432 с.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т.— М.: Наука, 1970.—Т. 1.—607 с.; Т. 2.—799 с
7. *Шипачев В. С.* Высшая математика.— М.: Высш. шк., 1985.— 368 с.
8. *Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С.* Краткий курс высшей математики: В 2 т.— М.: Высш. шк., 1978.—Т. 1.—383 с.; Т. 2.— 327 с.

СБОРНИКИ ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ

9. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа.— М.: Наука, 1985.—416 с.
10. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч.— М.: Высш. шк., 1986.—Ч. 1.—446 с.
11. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко и др.; Под ред. Б. П. Демидовича.— М.: Наука, 1978.—380 с.
12. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике.— М.: Наука, 1977.—352 с.
13. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре.— М.: Наука, 1974.—384 с.
14. Сборник задач по курсу высшей математики / П. Е. Дюбюк, Г. И. Кручкович, Н. Н. Глаголева и др.; Под ред. П. Е. Дюбюка, Г. И. Кручковича.— М.: Высш. шк., 1965.—590 с.
15. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии/ Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, Н. В. Попова, В. Б. Хейнман; Под ред. В. Т. Воднева.— Мн.: Выш. шк., 1990.—286 с.
16. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа: В 4 ч. / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко и др.; Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича.— М.: Наука, 1981.— Ч. 1.—368 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ