РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

АКАДЕМИЧЕСКИЙ УЧЕБНИК

Дарон Асемоглу

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СОВРЕМЕННОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Книга 2

Издательский дом ДЕЛО

Daron Acemoglu

INTRODUCTION TO MODERN ECONOMIC GROWTH

Princeton University Press

Дарон Асемоглу

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СОВРЕМЕННОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Книга 2

Перевод с английского
под научной редакцией Кирилла Сосунова

Рекомендуется Российской академией народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации в качестве учебника для студентов, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям, а также для студентов бакалавриата, магистратуры, аспирантов, преподавателей экономических факультетов вузов. (Основание — приказ Министерства образования и науки № 130 от 22 февраля 2012 г.)

Москва ◦ 2018

УДК 339.1
ББК 65.5
А 90 1

Асемоглу, Дарон
А 90 Введение в теорию современного экономического роста : в 2 кн. Книга 2 / Дарон Асемоглу; пер. с англ. под науч. ред. Кирилла Сосунова. — М. : Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2018. — 736 с. — (Академический учебник).

ISBN 978-5-7749-1264-3 (общ.)
ISBN 978-5-7749-1263-6 (кн. 2)

Введение в теорию экономического роста — новаторский учебник одного из ведущих современных макроэкономистов. Дарон Асемоглу не только предоставляет студентам инструменты для анализа процесса экономического роста и связанных с ним макроэкономических задач, но и описывает широкий набор вопросов, понимание которых необходимо для применения этих инструментов в анализе современного мирового экономического роста и межстранового расхождения доходов. Автор описывает экономические и математические основания современной теории экономического роста на необходимом уровне строгости, но при этом в легко понятной форме.

В первой части книги представлены базовые основы теории динамического общего равновесия и динамической оптимизации. Затем Д. Асемоглу описывает основные модели экономического роста и переходит к темам, лежащим на рубеже текущих исследований в теории экономического роста, включая модели накопления человеческого капитала, эндогенных технологических изменений, распространения и внедрения технологий, международной торговли, экономического развития и политической экономии. Книга объединяет эти теории с эмпирическими данными и показывает, как теоретические методы могут позволить лучше понять фундаментальные причины экономического роста и богатства народов.

Для студентов старших курсов, аспирантов, исследователей.

УДК 339.1
ББК 65.5

ISBN 978-5-7749-1264-3 (общ.)
ISBN 978-5-7749-1263-6 (кн. 2)

Содержание

Часть V. Стохастическая теория экономического роста

Часть VI. Распространение технологий, международная торговля и межстрановые взаимосвязи

Часть VIII. Политическая экономия экономического роста

Часть IX. Математические приложения

Часть V

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Этот раздел книги посвящен стохастическим моделям экономического роста. В ней также представлено краткое введение в основные методы стохастической динамической оптимизации. Стохастические модели экономического роста являются полезными по двум причинам. Во-первых, в ряде интересных задач по теории экономического роста инвестиционные решения и динамика роста определяются в условиях неопределенности на агрегированном уровне или нетривиальной неопределенности на уровне отдельных индивидов. Некоторые из этих моделей представлены в главе 17. Во-вторых, стохастическая неоклассическая модель экономического роста имеет большое количество приложений в макроэкономике и других параграфах динамического экономического анализа. Две последующие главы посвящены обсуждению различных аспектов стохастической неоклассической модели экономического роста. Для анализа стохастических моделей нам понадобится расширить аппарат динамической оптимизации из глав 6 и 7 для задач, в которых доходы или ограничения являются случайными (их структура задается вероятностным распределением)[1]. К сожалению, задачи динамической оптимизации в условиях неопределенности значительно более сложны, чем детерминистские задачи оптимизации. Стохастическое обобщение методов оптимизации в непрерывном времени требует использования достаточно продвинутых методов теории меры и стохастических дифференциальных уравнений. Поэтому несмотря на то, что методы стохастической оптимизации в непрерывном времени являются довольно мощными, они редко используются в макроэкономике и теории экономического роста, и в этой части книги мы остановимся на стохастических моделях в дискретном времени. Следующая глава посвящена самому простому обобщению

---

[1] В изложении материала книги мы не делаем различий между понятиями риска и неопределенности. Некоторые экономисты следуют подходу Франка Найта и определяют риск как ситуацию, в которой функции распределения событий известны, а неопределенность как ситуацию, в которой вероятностные распределения не могут быть специфицированы. Несмотря на то что неопределенность по Найту может быть важна в ряде задач, следование стандартной практике использования слов «риск» и «неопределенность» взаимозаменяемо и не затрудняет анализ моделей, представленных в книге.

методов динамического программирования в дискретном времени, представленных в главе 6, для стохастических моделей. Полное строгое изложение теории стохастического динамического программирования также требует использования большего, чем обычно необходимо в большинстве курсов по макроэкономике и теории экономического роста, количества математики. Для того чтобы на этом этапе избежать появления большого числа новых математических конструкций (в особенности множества методов теории меры), в следующей главе мы изложим основы стохастического динамического программирования без использования теории меры.

Глава 16
Стохастическое динамическое программирование

Эта глава посвящена введению в основы стохастического динамического программирования. Чтобы избежать использования теории меры в тексте главы, вначале мы остановимся на анализе экономик, в которых случайные переменные принимают конечное множество значений. Это ограничение позволит нам использовать для описания неопределенности марковские цепи вместо обобщенных марковских случайных процессов. Так как большинство широко используемых случайных процессов (например, основанных на нормальном или равномерном распределениях) не попадают в этот класс, затем мы покажем, как полученные результаты могут быть обобщены в ситуациях, когда стохастические переменные могут быть описаны непрерывными случайными величинами или комбинацией непрерывных и дискретных случайных величин. Главная задача главы заключается в формировании у читателя понимания основных методов стохастического динамического программирования и того, как они используются в динамических макроэкономических моделях. Поэтому вместо анализа задач в общем виде и описания общих результатов мы используем ряд разумных ограничений. В дальнейшем мы остановимся только на стационарных задачах, то есть аналогах упражнений 6.2 и 6.3 из главы 6. Утверждения, аналогичные теоремам 6.11 и 6.12, связанными с задачами нестационарной оптимизации в условиях определенности, могут быть доказаны с помощью тех же рассуждений в стохастическом случае, мы опустим эти результаты с целью экономии места.

16.1. Стохастическое динамическое программирование

Мы будем использовать обозначения, схожие с обозначениями из главы 6. Вначале введем понятие *стохастической* (случайной) переменной $z(t) \in \mathcal{Z} \equiv \{z_1, \ldots, z_n\}$ при $z_1 < z_2 < \ldots < z_N$. Заметим, что множество $\mathcal{Z}$ конечно и поэтому компактно, что значительно упрощает дальнейший анализ. Обозначим моментальный выигрыш в периоде времени t как

$$U(x(t), x(t+1), z(t)), \tag{16.1}$$

где $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^K$ при некотором $K \geq 1$ и $U: X \times X \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$. Уравнение (16.1) является расширением функции выигрыша из главы 6, которая имела вид $U(x(t), x(t+1))$. Выигрыш в ней является явной функцией от стохастической переменной $z(t)$. Как обычно, предположим, что доходы дисконтируются с помощью некоторой нормы дисконтирования $\beta \in (0, 1)$, $x(t)$ является *переменной состояния* (вектором переменных состояния), а $x(t + 1)$ — *переменной управления* (вектором переменных управления) в периоде t. Начальные значения вектора переменных состояния $x(0)$ и стохастической переменной $z(0)$ будем считать заданными.

Еще одно отличие от задачи 6.2 из главы 6 состоит в том, что ограничение на переменную $x(t + 1)$ уже не выглядит как $x(t + 1) \in G(x(t))$. Вместо этого в данной задаче оно включает в себя стохастическую переменную $z(t)$ и становится следующим:

$$x(t+1) \in G(x(t), z(t)),$$

где, как и ранее, $G(x, z)$ является отображением (соответствием), принимающим значения в множестве множеств:

$$G: X \times Z \rightrightarrows X.$$

Предположим, что стохастическая переменная $z(t)$ следует *марковской цепи* первого порядка[2]. Важное следствие из предположения о марковской цепи состоит в том, что текущее значение переменной $z(t)$ зависит только от ее значения в предыдущем периоде $z(t - 1)$. Математически это свойство может быть выражено следующим образом:

$$\Pr[z(t) = z_j \mid z(0), \ldots, z(t-1)] \equiv \Pr[z(t) = z_j \mid z(t-1)].$$

Наиболее простым примером экономической модели в условиях неопределенности, представленной марковской цепью, является модель, в которой стохастическая переменная принимает конечное множество значений и распределена независимо по времени. В этом случае, очевидно, имеет место равенство $\Pr[z(t) = z_j \mid z(0), \ldots, z(t-1)] \equiv \Pr[z(t) = z_j]$ и марковское свойство выполняется тривиальным образом. В более общем случае марковские цепи позволяют нам моделировать экономику, в которой случайные шоки коррелированы во времени. Марковские цепи широко используются в теории вероятностей, теории случайных процессов и в различных областях динамического экономического анализа. Теория марковских цепей достаточно проста, однако для описания основных ме-

[2] Мы будем использовать стандартную терминологию и говорить, что переменная $z(t)$ является марковской цепью, если она принимает конечное (или счетное) множество значений, и что она является общим марковским процессом, если она имеет непрерывное распределение или является комбинацией непрерывного и дискретного распределений.

тодов стохастического динамического программирования необходимо лишь минимальное знакомство с ней.

Марковское свойство не только упрощает математическую структуру экономической модели, но и позволяет нам использовать сравнительно простые обозначения для вероятностного распределения случайной величины $z(t)$. Марковская цепь может быть описана следующим образом:

$$\Pr[z(t) = z_j \mid z(t-1) = z_{j'}] \equiv q_{jj'}$$

для любых $j, j' = 1, \ldots, N$, где $q_{jj'} \geq 0$ для всех j, j' и выполняется равенство:

$$\sum_{j=1}^{N} q_{jj'} = 1 \text{ для всех } j' = 1, \ldots, N.$$

Константы $q_{jj'}$ которые называют *переходными вероятностями*, обозначают вероятности перехода стохастической переменной z из состояния $z_{j'}$ в состояние z_j. Мы будем использовать эти обозначения в некоторых доказательствах в следующем параграфе.

Чтобы увидеть, почему такой способ введения неопределенности в задачу динамической оптимизации является удобным с экономической точки зрения, рассмотрим следующий простой пример, в котором также введем ряд дополнительных обозначений.

Пример 16.1. Рассмотрим задачу оптимального роста, в которой максимизируется целевая функция следующего вида:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t)).$$

Как обычно, переменная $c(t)$ обозначает потребление на душу населения в периоде времени t, а функция $u(\cdot)$ — моментальную функцию полезности. Целевая функция отличается от изученной нами ранее лишь тем, что в ней присутствует оператор математического ожидания $\mathbb{E}_0$, который обозначает условное математическое ожидание при наличии информации, доступной в периоде (в его начале) времени $t = 0$. Использование математического ожидания в задаче необходимо потому, что будущие значения потребления на душу населения являются случайными величинами (так как они зависят от реализации будущего значения стохастической переменной $z(t)$). В частности, предположим, что производственная функция (на душу населения) имеет следующий вид:

$$y(t) = f(k(t), z(t)),$$

где переменная $k(t)$, как и ранее, обозначает отношение запаса капитала к труду, а $z(t) \in \mathcal{Z} \equiv \{z_1, \ldots, z_n\}$ представляет собой стохастическую переменную, которая влияет на объем выпуска, который может быть произведен при заданном наборе факторов производства. Наиболее естественной интерпретацией переменной $z(t)$

в данном контексте является стохастическая СФП. Ресурсное ограничение (записанное в виде равенства) в экономике выглядит как

$$k(t+1) = f(k(t), z(t)) + (1-\delta)k(t) - c(t), \tag{16.2}$$

где $k(t) \geq 0$ при всех t и значение $k(0) > 0$ задано.

Как и ранее, параметр δ обозначает норму амортизации. В такой формулировке задачи подразумевается, что агент выбирает значение потребления $c(t)$ после реализации случайной величины $z(t)$. Поэтому переменная $c(t)$ зависит от реализации случайной величины $z(t)$ и, более того, от всей истории $z(t)$. В частности, определим вектор

$$z^t \equiv (z(1), ..., z(t))$$

как историю случайной величины $z(t)$ вплоть до периода t. Для удобства предположим, что история не включает в себя начальное значение $z(0)$, которое мы рассматриваем как заданное, и тогда вектор z^t состоит ровно из t элементов. Далее, положим $\mathcal{Z}^t \equiv \mathcal{Z} \times ... \times \mathcal{Z}$ (прямое произведение t множеств), и тогда $z^t \in \mathcal{Z}^t$. При заданном начальном запасе $k(0)$ функция потребления может быть записана в наиболее общем виде следующим образом:

$$c(t) = \tilde{c}[z^t],$$

а это просто говорит о том, что значение потребления в периоде времени t является функцией от реализаций всей последовательности случайной величины z^t вплоть до периода t. Очевидно, что потребление в периоде t не может зависеть от будущих реализаций случайной переменной, так как в это время ее значения еще не известны. Поэтому предположение о функциональном виде $c(t) = \tilde{c}[z^t]$ выглядит естественным. Несмотря на это, не все функции вида $c(t) = \tilde{c}[z^t]$ могут быть подходящими потребительскими функциями, так как они могут противоречить ресурсному ограничению (чуть позже мы вернемся к дополнительным ограничениям, гарантирующим то, что функция $c(t) = \tilde{c}[z^t]$ является подходящей). Также отметим, что в данной модели отсутствует необходимость в зависимости потребления от траектории запаса капитала, так как он определяется эндогенно как функция потребления в предыдущем периоде и реализации случайной переменной (однако в рекурсивной формулировке задачи мы представим потребление как функцию от текущего запаса капитала и от текущей реализации случайной переменной). В выражении (16.1) $x(t) = k(t)$, поэтому

$$\begin{aligned} x(t+1) = k(t+1) &= \\ &= f(k(t), z(t)) + (1-\delta)k(t) - \tilde{c}[z^t] \equiv \\ &\equiv \tilde{k}[z^t], \end{aligned}$$

где во второй строке используется ресурсное ограничение в форме равенства, а в третьей строке определяется функция $\tilde{k}[z^t]$. Доступность выбора легче выразить в этих обозначениях, так как функция

$$k(t+1) \equiv \tilde{k}[z^t]$$

по определению зависит только от истории случайных шоков вплоть до периода времени t и не зависит от его реализации в периоде $t+1$ $z(t+1)$. Более того, из ресурсного ограничения вытекает следующее равенство:

$$\tilde{k}[z^t] = f(\tilde{k}[z^{t-1}], z(t)) + (1-\delta)\tilde{k}[z^{t-1}] - \tilde{c}[z^t] \text{ для всех } z^{t-1} \in \mathcal{Z}^{t-1} \text{ и } z(t) \in \mathcal{Z}. \tag{16.3}$$

Тогда задача максимизации может быть записана в следующем виде:

$$\max_{\{\tilde{c}[z^t],\tilde{k}[z^t]\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(\tilde{c}[z^t])$$

при ограничениях (16.3), $\tilde{c}[z^t] \geq 0$ и $\tilde{k}[z^t] \geq 0$ при всех $z^t \in \mathcal{Z}^t$ и для всех $t = 0, 1, \ldots$, при начальных значениях $\tilde{k}[z^{-1}] = k(0)$ и $z(0)$. Задача максимизации также может быть сформулирована с помощью моментальной функции выигрыша $U(x(t), x(t+1), z(t))$, введенной в выражении (16.1). В этом случае она принимает следующий вид:

$$\max_{\{\tilde{k}[z^t]\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left(\tilde{k}[z^{t-1}], \tilde{k}[z^t], z(t)\right), \tag{16.4}$$

где $U\left(\tilde{k}[z^{t-1}], \tilde{k}[z^t], z(t)\right) = u(f(k(t), z(t)) - k(t+1) + (1-\delta)k(t))$. Отметим принятое нами обозначение временного индекса: переменная $\tilde{k}[z^{t-1}]$ обозначает величину капитала в периоде времени t, которое унаследовано после совершения инвестиций в периоде $t-1$, поэтому зависит от истории случайных шоков вплоть до его значения в периоде $t-1$, z^{t-1}, в то время как переменная $\tilde{k}[z^t]$ обозначает выбор капитала в следующем периоде времени (сделанный в периоде t) при заданной траектории случайных шоков вплоть до его значения в периоде t, z^t.

Этот пример также может быть использован для демонстрации того, как задача максимизации может быть сформулирована рекурсивным образом. Так как переменная $z(t)$ следует марковской цепи, текущее значение $z(t)$ несет в себе информацию как о ресурсах, доступных для потребления, и будущем значении капитала, так и о функции распределения переменной $z(t+1)$. Поэтому логичным выглядит предположение о том, что функция выбора, определяющая значение капитала в следующем периоде времени, выглядит как:

$$k(t+1) = \pi(k(t), z(t)). \tag{16.5}$$

Тогда, используя аналогичные рассуждения, естественным образом приходим к рекурсивной формулировке задачи в следующем виде:

$$V(k,z) = \sup_{y\in[0, f(k,z)+(1-\delta)k]} \left\{u(f(k,z)+(1-\delta)k - y) + \beta\mathbb{E}[V(y,z') \mid z]\right\}, \tag{16.6}$$

где оператор $\mathbb{E}[\cdot \mid z]$ обозначает условное математическое ожидание при условии заданного значения переменной z и включает в себя то, что она следует марковской цепи. Заметим, что это математическое ожидание отличается от математического ожидания из задачи (16.4), так как в ней ожидания формируются обо всей будущей последовательности значений переменной z, а в задаче (16.6) — только о значении z в следующем периоде времени, z'. Поэтому мы можем разделить эти два ожидания и записать последнее как $\mathbb{E}^{z'}\left[V(y, z') \mid z\right]$. Однако мы не будем использовать это обозначение, так как оно является достаточно сложным и из контекста нетрудно понять, формируются ли ожидания относительно всей будущей последовательности значений переменной z или лишь о ее значении в следующем периоде времени.

Далее предположим, что задача максимизации имеет решение, то есть что существует доступный план, на котором функция стоимости достигает значения $V(k, z)$ при начальных значениях отношения капитала к труду k и стохастической переменной z. Тогда множество значений капитала в следующем периоде времени, на которых достигается максимальное значение, может быть представлено как соответствие $\Pi(k, z)$ при $k \in \mathbb{R}_+$ и $z \in \mathcal{Z}$. Для любого $\pi(k, z) \in \Pi(k, z)$ выполняется следующее равенство:

$$V(k, z) = u(f(k, z) + (1-\delta)k - \pi(k, z)) + \beta \mathbb{E}[V(\pi(k, z), z') \mid z].$$

Если соответствие $\Pi(k, z)$ принимает единственное значение, то функция $\pi(k, z)$ определена единственным образом, является оптимальным выбором запаса капитала в следующем периоде времени и может быть записана в виде уравнения (16.5). ■

Из примера 16.1 нетрудно увидеть, каким образом задача стохастической оптимизации может быть записана в итеративной форме. Он также предоставляет понимание того, как она может быть сформулирована рекурсивно. Далее мы более систематически подойдем к постановке задачи стохастической оптимизации. Обозначим *план решения* как $\tilde{x}[z^t]$. Такой план определяет значение вектора $x \in \mathbb{R}^K$ в периоде времени $t + 1$ (то есть $x(t+1) = \tilde{x}[z^t]$) для любого $z^t \in \mathcal{Z}^t$. Используя обозначения из главы 6, сформулируем итеративную постановку задачи следующим образом.

Задача 16.1.

$$V^*(x(0), z(0)) = \sup_{\{\tilde{x}[z^t]\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left(\tilde{x}[z^{t-1}], \tilde{x}[z^t], z(t)\right)$$

при ограничениях

$$\tilde{x}[z^t] \in G(\tilde{x}[z^{t-1}], z(t)) \text{ для всех } t \geq 0 \text{ и } \tilde{x}[z^{-1}] = x(0) \text{ задано.}$$

В этой задаче условное математическое ожидание в периоде времени $t = 0$, обозначенное как $\mathbb{E}_0$, формируется для всех возможных бесконечных последовательностей $(z(1), z(2), z(3), \ldots)$ при условии значения $z(0)$. В дальнейшем изложении мы будем использовать обозначения $\mathbb{E}_0$ и $\mathbb{E}[\cdot \mid z(0)]$ взаимозаменяемо. В этой задаче, так же как и далее в этой и следующей главах, мы будем использовать обозначения $\tilde{x}[z^{-1}] = x(0)$ и $z^0 = z(0)$ и записывать задачу максимизации по последовательности $\left\{\tilde{x}[z^t]\right\}_{t=0}^{\infty}$ (где значение $\tilde{x}[z^{-1}] = x(0)$ неявным образом рассматривается как заданное). Аргументами функции V^* являются начальные значения вектора $x(0) \in \mathbb{R}^K$, рассматриваемые как заданные, и случайной переменной $z(0)$, так как выбор $x(1)$ осуществляется после наблюдения реализации $z(0)$ (и математическое ожидание формируется при условии $z(0)$). Наконец, последнее ограничение в задаче (16.1) гарантирует то, что последовательность $\left\{\tilde{x}[z^t]\right\}_{t=0}^{\infty}$ является доступной.

Аналогично уравнению (16.6) из примера 16.1 функциональное уравнение, соответствующее рекурсивной формулировке этой задачи, имеет следующий вид.

Задача 16.2.

$$V(x, t) = \sup_{y \in G(x,z)} \{U(x, y, z) + \beta\mathbb{E}[V(y, z') \mid z]\} \text{ для всех } x \in X \text{ и } z \in \mathcal{Z}. \quad (16.7)$$

Здесь $V: X \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ является функцией, принимающей вещественные значения, а включение $y \in G(x, z)$ представляет собой ограничение на значение переменной состояния в следующем периоде времени как функцию от реализации стохастической переменной z. Задача 16.2 является прямым обобщением уравнения Беллмана из задачи 6.3 из главы 6 для задачи стохастического динамического программирования. Задача 16.2 также может быть записана следующим образом:

$$V(x, t) = \sup_{y \in G(x,z)} \left\{U(x, y, z) + \beta \int V(y, z') Q(z, dz')\right\} \text{ для всех } x \in X \text{ и } z \in \mathcal{Z},$$

где $Q(z, \cdot)$ является функцией перехода состояний, определяющей функцию распределения случайной величины z' (значения стохастической переменной в следующем периоде времени) при заданном текущем значении z, а интеграл $\int (f, z') Q(z, dz')$ обозначает интеграл Лебега (или, более точно, интеграл Лебега—Стилтьеса) от функции f по марковскому процессу z при заданном текущем значении z. Это обозначение представляет пользу, так как в нем подчеркивается, что математическое ожидание — это не что иное, как интеграл Лебега (и поэтому в частном случае является конечной суммой). Напоминание об эквивалентности между математическим ожиданием и интегралом Лебега важно как для корректного понимания теории, так и для выявления некоторых трудностей использования стохастических методов[3]. Однако явное использование интеграла Лебега вместо математического ожидания обычно не добавляет строгости и понимания, поэтому мы не будем прибегать к нему там, где это не является абсолютно необходимым.

Как и в главе 6, введем множество доступных планов при начальном значении переменной состояния $x(t)$ и стохастической переменной $z(t)$ следующим образом:

$$\Phi(x(t), z(t)) = \{\{\tilde{x}[z^s]\}_{s=t}^{\infty},\ \tilde{x}[z^s] \in G(\tilde{x}[z^{s-1}], z(s)) \text{ для } s = t, t+1, \ldots\}.$$

Обозначим общий элемент множества $\Phi(x(0), z(0))$ как $\mathbf{x} \equiv \left\{\tilde{x}[z^t]\right\}_{t=0}^{\infty}$. В отличие от главы 6, элементами множества $\Phi(x(0), z(0))$ являются

[3] В частности, возможные проблемы могут возникнуть при необходимости перестановки знаков предела и математического ожидания.

не бесконечные последовательности векторов из $\mathbb{R}^K$, а бесконечные последовательности доступных планов $\tilde{x}[z^t]$, которые являются соответствиями между историями $z^t \in Z^t$ и значениями $x \in \mathbb{R}^K$ для всех $t = 0, 1, \ldots$. Наш интерес представляет использование формулировки (16.2) для решения задачи 16.1. Поэтому в дальнейшем анализе мы определим: (1) в каких случаях решение задачи 16.2 $V(x, z)$ совпадает с решением задачи 16.1 $V^*(x, z)$ и (2) когда множество оптимальных планов $\Pi(x, z) \subset \Phi(x, z)$ также генерирует оптимальный доступный план для задачи 16.1 (в предположении о том, что в обеих задачах существует доступный план, на котором достигается точная верхняя грань функции стоимости). Напомним, что множество оптимальных планов $\Pi(x, z)$ определено таким образом, что для любого $\pi(x, z) \in \Pi(x, z)$ выполняется следующее равенство:

$$V(x, z) = U(x, \pi(x, z), z) + \beta\mathbb{E}\left[V(\pi(x, z), z') \mid z\right]. \tag{16.8}$$

Далее введем предположения, аналогичные предположениям 6.1–6.5, и сформулируем соответствующие обобщения теорем 6.1–6.6 из главы 6.

Предположение 16.1. *Множество значений соответствия $G(x, z)$ состоит из непустых множеств для всех $x \in X$ и $z \in Z$. Более того, для всех $x(0) \in X$, $z(0) \in Z$ и $\mathbf{x} \in \Phi(x(0), z(0))$ предел ожидаемой дисконтированной полезности $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\sum_{t=0}^{n} \beta^t U(\tilde{x}[z^{t-1}], \tilde{x}[z^t], z(t) | z(0)]$ существует и конечен.*

Предположение 16.2. *Множество X является компактным подмножеством пространства $\mathbb{R}^K$ и соответствие G является непрерывным, а его множество значений состоит из непустых и компактных множеств. Более того, введем обозначение $\mathbf{X}_G = \{(x, y, z) \in X \times X \times Z: y \in G(x, z)\}$ и предположим, что функция U: $\mathbf{X}_G \to \mathbb{R}$ является непрерывной.*

Заметим, что в предположении 16.2 предполагается лишь компактность множества X, так как множество Z является компактным в силу того, что оно состоит из конечного числа элементов. Более того, непрерывность функции U по аргументам (x, y, z) эквивалентна ее непрерывности по аргументам (x, y), так как множество Z конечно и мы вводим на нем дискретную топологию, и поэтому непрерывность по z следует тривиально (см. факт А.12 из приложения А). Как и в главе 6, эти предположения позволяют нам сформулировать ряд полезных результатов об эквивалентности между задачами 16.1 и 16.2 о решении задач динамической оптимизации, поставленных в них. Мы приведем эти теоремы без доказательства. Часть доказательств будет приведена в параграфе 16.2, а оставшиеся из них предложены читателю в качестве упражнений.

Первая теорема является обобщением теоремы 6.1 из главы 6.

Теорема 16.1. Об эквивалентности функций стоимости. *Допустим, что выполняется предположение* 16.1. *Тогда для любых* $x \in X$ и $z \in \mathcal{Z}$ *значение* $V^*(x, z)$, *которое является решением задачи* 16.2, *также является решением задачи* 16.1, *то есть для всех* $x \in X$ *и* $z \in \mathcal{Z}$ $V^*(x, z) = V(x, z)$.

В следующей теореме формулируется принцип оптимальности для стохастических задач оптимизации. Как и в главе 6, принцип оптимальности позволяет разделить выигрыш на оптимальном плане на две части: текущий выигрыш и ожидаемое значение суммарного будущего выигрыша.

Теорема 16.2. Принцип оптимальности. *Допустим, что выполняется предположение* 16.1. *Для* $x(0) \in X$ и $z(0) \in \mathcal{Z}$ *обозначим доступный план, на котором функция стоимости достигает значения* $V^*(x, z)$ *как* $\mathbf{x}^* \equiv \left\{\tilde{x}^*[z^t]\right\}_{t=0}^{\infty} \in \Phi(x(0), z(0))$. *Тогда при всех* $t = 0, 1, \ldots$ *выполняется следующее равенство:*

$$V^*\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}], z(t)\right) = U\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}], \tilde{x}^*[z^t], z(t)\right) + \\ + \beta\mathbb{E}\left[V^*\left(\tilde{x}^*[z^t], z(t+1)\right) | z(t)\right]. \tag{16.9}$$

Более того, если последовательность $\mathbf{x}^* \in \Phi(x(0), z(0))$ *удовлетворяет уравнению* (16.9), *то она является оптимальным планом для задачи* 16.1.

В следующей теореме утверждается единственность функции стоимости и существование решений задач 16.1 и 16.2.

Теорема 16.3. О существовании решений. *Допустим, что выполняются предположения* 16.1 *и* 16.2. *Тогда существует единственная функция* $V: X \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющая уравнению* (16.7). *Эта функция* V *является непрерывной и ограниченной по* x *для любого* $z \in \mathcal{Z}$. *Более того, для любого* $x(0) \in X$ и *для любого* $z(0) \in \mathcal{Z}$ *существует оптимальный план* $\mathbf{x}^* \in \Phi(x(0), z(0))$.

В оставшихся теоремах, как и в их аналогах в главе 6, используются дополнительные предположения, позволяющие доказать вогнутость, монотонность и непрерывность функции стоимости.

Предположение 16.3. *Функция* U *является вогнутой. Другими словами, для любого* $\alpha \in (0, 1)$ *и для всех* (x, y, z) *и* (x', y', z') *из множества* $\mathbf{X}_G$ *выполняется следующее неравенство:*

$$U(\alpha x + (1-\alpha)x', \alpha y + (1-\alpha)y', z) \geq \\ \geq \alpha U(x, y, z) + (1-\alpha)U(x', y', z').$$

Более того, если $x \neq x'$, то выполняется строгое неравенство:

$$U(\alpha x+(1-\alpha)x', \alpha y+(1-\alpha)y', z) >$$
$$> \alpha U(x, y, z)+(1-\alpha)U(x', y', z').$$

В дополнение, функция $G(x, z)$ является вогнутой по x. Другими словами, для любого $z \in \mathcal{Z}$, для любого $\alpha \in [0, 1]$ и для любых $x \in X$, $x' \in X$, $y \in X$, $y' \in X$ имеет место следующее включение:

$$\alpha y + (1 - \alpha)y' \in G(\alpha x + (1 - \alpha)x', z).$$

Предположение 16.4. *Для всех $y \in X$ и $z \in \mathcal{Z}$ функция $U(\cdot, y, z)$ является строго возрастающей по своим первым K аргументам, а соответствие G является монотонным по x в том смысле, что из неравенства $x \leq x'$ следует включение $G(x, z) \subset G(x', z)$ при всех $z \in Z$.*

Предположение 16.5. *Функция $U(x, y, z)$ является непрерывно дифференцируемой по аргументу x во внутренности своей области определения $\mathbf{X}_G$.*

Теорема 16.4. О вогнутости функции стоимости. *Допустим, что выполняются предположения* 16.1–16.3. *Тогда единственная функция V, удовлетворяющая уравнению* (16.7), *является строго вогнутой по аргументу x для любого $z \in \mathcal{Z}$. Более того, тогда оптимальный план может быть представлен в виде $\tilde{x}^*[z^t] = \pi(x^*(t), z(t))$, где функция выбора π: $X \times \mathcal{Z} \to X$ является непрерывной.*

Теорема 16.5. Первая теорема о монотонности функции стоимости. *Допустим, что выполняются предположения* 16.1, 16.2 *и* 16.4. *Обозначим единственное решение задачи* (16.7) *как V: $X \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$. Тогда для любого $z \in \mathcal{Z}$ функция стоимости V является строго возрастающей по аргументу x.*

Теорема 16.6. О дифференцируемости функции стоимости. *Допустим, что выполняются предположения* 16.1, 16.2, 16.3 *и* 16.5. *Обозначим функцию выбора, определенную выше, как π и предположим, что $x \in \mathrm{Int}X$ и $\pi(x', z) \in \mathrm{Int}G(x', z)$ в точке $z \in \mathcal{Z}$. Тогда функция $V(x, z)$ является непрерывно дифференцируемой в точке (x', z), а ее градиент по x задается следующей формулой:*

$$D_x V(x', z) = DxU(x', \pi(x', z), z). \qquad (16.10)$$

Эти теоремы являются прямыми аналогами теорем из главы 6. Так как в данном случае функция стоимости зависит еще и от стохастической переменной z, мы можем сформулировать еще одну теорему о монотонности. Для этого необходимо ввести следующее предположение.

Предположение 16.6.

1. *Соответствие G является монотонным по аргументу z в том смысле, что для всех $x \in X$ и $z \in \mathcal{Z}$, $z' \in \mathcal{Z}$, таких, что $z \leq z'$, из неравенства $z \leq z'$ следует включение $G(x, z) \subset G(x, z')$.*
2. *Функция $U(x, y, z)$ является строго монотонной по аргументу z для всех $(x, y, z) \in \mathbf{X}_G$.*
3. *Марковская цепь z является монотонной в том смысле, что для любой неубывающей функции f: $\mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ математическое ожидание $\mathbb{E}[f(z') \mid z]$ также является неубывающей функцией по аргументу z (где z' является значением переменной z в следующем периоде).*

Чтобы проинтерпретировать последнюю часть этого предположения, допустим, что $z_j \leq z_{j'}$ при $j \leq j'$. Тогда это условие выполняется, если и только если для любого $\bar{j} = 1, \ldots, N$ и для любого $j'' > j'$ выполняется неравенство $\sum_{j=\bar{j}}^{N} q_{jj''} \geq \sum_{j=\bar{j}}^{N} q_{jj'}$ (см. упражнение 16.1).

Теорема 16.7. Вторая теорема о монотонности функции стоимости. *Допустим, что выполняются предположения* 16.1, 16.2 *и* 16.6 *и предположим, что функция V: $X \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ является единственным решением задачи* (16.7). *Тогда при любом $x \in X$ она строго возрастает по аргументу z.*

16.2. Доказательства теорем стохастического динамического программирования*

Этот параграф посвящен доказательству теорем 16.1–16.3. Доказательства теорем 16.5–16.7 схожи с доказательствами соответствующих теорем из главы 6. Мы оставляем их читателю в качестве упражнений.

Прежде чем перейти к доказательству теорем, представленных в предыдущем параграфе, введем несколько дополнительных определений. Для любой доступной последовательности $\mathbf{x} \equiv \left\{\tilde{x}[z^t]\right\}_{t=0}^{\infty}$ и для любых начальных значений $x(0) \in X$ и $z(0) \in \mathcal{Z}$ определим функцию

$$\bar{\mathrm{U}}(\,\mathbf{x} \mid x(0),\, z(0)) \equiv \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(\tilde{x}[z^{t-1}],\, \tilde{x}[z^t],\, z(t) \mid z(0)\right]$$

и заметим, что для всех $x(0) \in X$ и $z(0) \in \mathcal{Z}$ выполняется следующее равенство:

$$V^*(x(0),\, z(0)) = \sup_{\mathbf{x} \in \Phi(x(0), z(0))} \bar{\mathrm{U}}(\mathbf{x} \mid x(0),\, z(0)).$$

Тогда из предположения 16.1, которое гарантирует ограниченность всех значений, следует, что функция V^* должна удовлетворять неравенству

$$V^*(x(0),\ z(0)) \geq \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x} \mid x(0),\ z(0)) \text{ для всех } \mathbf{x} \in \Phi(x(0), z(0)). \quad (16.11)$$

При этом для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mathbf{x}' \in \Phi(x(0),\ z(0))$, такой, что

$$V^*(x(0),\ z(0)) \leq \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}' \mid x(0),\ z(0)) + \varepsilon. \quad (16.12)$$

Условия для того, чтобы функция V была решением задачи (16.2), выглядят аналогично. Для любых начальных значений $x(0) \in X$ и $z(0) \in \mathcal{Z}$

$$V(x(0), z(0)) \geq U(x(0), y, z) + \beta\mathbb{E}[V(y, z(1) \mid z(0))]$$
$$\text{для всех } y \in G(x(0), z(0)). \quad (16.13)$$

и

$$\text{для всех } \varepsilon > 0 \text{ существует } y' \in G(x(0), z(0))$$
$$\text{такой, что } V(x(0), z(0)) \leq U(x(0), y', z(0)) + \beta\mathbb{E}[V(y', z(1) \mid z(0)] + \varepsilon. \quad (16.14)$$

Следующая лемма является прямым обобщением леммы 6.1 из главы 6.

Лемма 16.1. *Допустим, что выполняется предположение* 16.1. *Тогда для всех начальных значений* $x(0) \in X$ и $z(0) \in \mathcal{Z}$ и для всех последовательностей $\mathbf{x} \equiv \left\{\tilde{x}[z^t]\right\}_{t=0}^{\infty} \in \Phi(x(0),\ z(0))$ имеет место следующее равенство:

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x} \mid x(0),\ z(0)) = U(x(0),\ \tilde{x}[z^0],\ z(0)) +$$
$$+ \beta\mathbb{E}\left[\bar{\mathbf{U}}\left(\left\{\tilde{x}[z^t]\right\}_{t=1}^{\infty} \mid \tilde{x}[z^0],\ z(1)\right) \mid z(0)\right].$$

Доказательство. См. упражнение 16.2. ■

Доказательство теоремы 16.1. Предположим, что функция $V^*(x(0), z(0))$ является решением задачи 16.1 при начальных значениях $x(0) \in X$ и $z(0) \in \mathcal{Z}$ (и поэтому выполняются условия (16.11) и (16.12)). Тогда из неравенства (16.12) следует, что при заданном значении $x(1) \in X$ для любого $\varepsilon > 0$ и для всех $z(1) = z_j$ ($j = 1, 2, \ldots, N$) существует $\mathbf{x}_\varepsilon^j \in \Phi(x(1),\ z_j)$, такой, что выполняется неравенство:

$$V^*(x(1),\ z_j) \leq \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_\varepsilon^j \mid x(1),\ z_j) + \varepsilon.$$

Далее, выбирая j' таким образом, что $z(0) = z_{j'}$, мы получаем следующее неравенство:

$$\mathbb{E}[V^*(x(1),\ z(1)) \mid z(0)] = \sum_{j=1}^{N} q_{jj'} V^*(x(1),\ z_j) \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^{N} q_{jj'} \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_\varepsilon^j \mid x(1),\ z_j) + \varepsilon =$$
$$= \mathbb{E}\left[\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_\varepsilon^j \mid x(1),\ z_j) \mid z(0)\right] + \varepsilon,$$

где во второй строке используется равенство $\sum_{j=1}^{N} q_{jj'} = 1$, а в третьей строке — определение условного математического ожидания $\mathbb{E}[\cdot \mid z(0)]$. Далее, введем обозначение $\mathbf{x}_\varepsilon \equiv \left(\mathbf{x}_\varepsilon^1, \ldots, \mathbf{x}_\varepsilon^N\right)$. Тогда из условия (16.11), леммы 16.1 и предыдущего неравенства вытекают следующие неравенства:

$$V^*(x(0), z(0)) \geq U\left(x(0), \tilde{x}'[z^0], z(0)\right) + \beta\mathbb{E}\left[\bar{\mathrm{U}}(\mathbf{x}_\varepsilon \mid x(1), z_j) \mid z(0)\right] \geq$$

$$\geq U(x(0), \tilde{x}'[z^0], z(0)) + \beta\mathbb{E}\left[V^*(x(1), z(1)) \mid z(0)\right] - \beta\varepsilon.$$

Из того, что последнее неравенство верно для любого $\varepsilon > 0$, следует, что функция V^* удовлетворяет условию (16.13).

Далее, рассмотрим произвольное вещественное $\varepsilon > 0$. Тогда из неравенства (16.12) следует, что существует альтернативный план $\mathbf{x}_\varepsilon = (\tilde{x}_\varepsilon[z^0], \tilde{x}_\varepsilon[z^1], \ldots) \in \Phi(x(0), z(0))$, такой, что выполняется неравенство

$$\bar{\mathrm{U}}(\mathbf{x}_\varepsilon \mid x(0), z(0)) \geq V^*(x(0), z(0)) - \varepsilon.$$

Тогда из условия (16.11) следует, что для любого $z(1) \in \mathcal{Z}$ справедливо следующее неравенство:

$$V^*(\tilde{x}_\varepsilon[z^0], z(1)) \geq \bar{\mathrm{U}}\left(\left\{\tilde{x}_\varepsilon[z^t]\right\}_{t=1}^{\infty} \mid \tilde{x}[z^0], z(1)\right).$$

Тогда по лемме 16.1 для любого $\varepsilon > 0$ имеем неравенства:

$$V^*(x(0), z(0)) - \varepsilon \leq U(x(0), \tilde{x}_\varepsilon[z^0], z(0)) +$$

$$+ \beta\mathbb{E}\left[\bar{\mathrm{U}}\left(\left\{\tilde{x}_\varepsilon[z^t]\right\}_{t=1}^{\infty} \mid \tilde{x}[z^0], z(1)\right) \mid z(0)\right] \leq$$

$$\leq U(x(0), \tilde{x}_\varepsilon[z^0], z(0)) + \beta\mathbb{E}\left[V^*(\tilde{x}[z^0], z(1)) \mid z(0)\right]$$

и поэтому функция V^* также удовлетворяет условию (16.14). Из этих рассуждений следует, что любое решение задачи 16.1 удовлетворяет условиям (16.13) и (16.14) и, следовательно, также является решением задачи 16.2.

Для доказательства обратного утверждения заметим, что из условия (16.13) следует, что для любого $\tilde{x}[z^0] \in G(x(0), z(0))$ выполняется следующее неравенство:

$$V(x(0), z(0)) \geq U(x(0), \tilde{x}[z^0], z(0)) + \beta\mathbb{E}\left[V(\tilde{x}[z^0], z(1)) \mid z(0)\right].$$

Тогда, делая для любого $n \in \mathbb{N}$ последовательные подстановки для $V(\tilde{x}[z^0], z(1))$, $V(\tilde{x}[z^1], z(2))$, ..., $V(\tilde{x}[z^{n-1}], z(n))$ и переходя к ожиданиям, имеем неравенство:

$$V(x(0), z(0)) \geq \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{n} \beta^t U\left(\tilde{x}[z^{t-1}], \tilde{x}[z^t], z(t)\right) \mid z(0)\right] + \\ + \beta^{n+1}\mathbb{E}\left[V(\tilde{x}[z^n], z(n+1)) \mid z(0)\right].$$

По определению функции $\tilde{\mathbf{U}}$ имеем предел:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{n} \beta^t U(\tilde{x}[z^{t-1}], \tilde{x}[z^t], z(t)) \mid z(0)\right] = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x} \mid x(0), z(0)),$$

а из предположения 16.1 следует предел:

$$\lim_{n\to\infty} \beta^{n+1}\mathbb{E}\left[V\left(\tilde{x}[z^n], z(n+1)\right) \mid z(0)\right] = \\ = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\lim_{m\to\infty} \sum_{t=n+1}^{m} \beta^t U(\tilde{x}[z^{t-1}], \tilde{x}[z^t], z(t)) \mid z(0)\right] = 0,$$

откуда получаем условие (16.11).

Далее, рассмотрим произвольное вещественное $\varepsilon > 0$. Из условия (16.14) следует, что для любого $\varepsilon' = \varepsilon(1 - \beta)$ существует $\tilde{x}_\varepsilon[z^0] \in G(x(0), z(0))$, такой, что выполняется следующее неравенство:

$$V(x(0), z(0)) \leq U\left(x(0), \tilde{x}_\varepsilon[z^0]\right) + \beta\mathbb{E}\left[V(\tilde{x}_\varepsilon[z^0], z(1)) \mid z(0)\right] + \varepsilon'.$$

Положим $\tilde{x}_\varepsilon[z^t] \in G(\tilde{x}_\varepsilon[z^{t-1}], z(t))$ и определим

$$\mathbf{x}_\varepsilon \equiv \left(\tilde{x}_\varepsilon[z^0], \tilde{x}_\varepsilon[z^1], \tilde{x}_\varepsilon[z^2], \ldots\right).$$

Снова делая для любого $n \in \mathbb{N}$ последовательные подстановки для $V(\tilde{x}[z^0], z(1)), V(\tilde{x}[z^1], z(2)), \ldots, V(\tilde{x}[z^{n-1}], z(n))$ и переходя к ожиданиям, получаем неравенства:

$$V(x(0), z(0)) \leq \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{n} \beta^t U(\tilde{x}_\varepsilon[z^{t-1}], \tilde{x}_\varepsilon[z^t], z(t)) \mid z(0)\right] + \\ + \beta^{n+1}\mathbb{E}\left[V\left(\tilde{x}_\varepsilon[z^n], z(n+1)\right) \mid z(0)\right] + \varepsilon' + \varepsilon'\beta + \ldots + \varepsilon'\beta^n \leq \\ \leq \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_\varepsilon \mid x(0), z(0)) + \varepsilon,$$

где последнее неравенство следует из тождества $\varepsilon = \varepsilon' \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t$ и из предела

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{n} \beta^t U(\tilde{x}_\varepsilon[z^{t-1}], \tilde{x}_\varepsilon[z^t], z(t)) \mid z(0)\right] = \bar{\mathrm{U}}(\mathbf{x}_\varepsilon \mid x(0), z(0)).$$

Отсюда следует, что функция V удовлетворяет условию (16.12), что завершает доказательство теоремы. ■

Доказательство теоремы 16.2. Предположим, что план

$$\mathbf{x}^* \equiv (\tilde{x}^*[z^0], \tilde{x}^*[z^1], \tilde{x}^*[z^2], \ldots) \in \Phi(x(0), z(0))$$

является доступным планом, на котором целевая функция задачи 16.1 достигает точной верхней грани. Обозначим часть этого плана с периода времени $t \geq 1$ как $\mathbf{x}_t^* \equiv (\tilde{x}^*[z^t], \tilde{x}^*[z^{t+1}], \ldots)$.

Вначале покажем, что для любого $t \geq 0$ на плане $\mathbf{x}_t^*$ достигается точная верхняя грань, начиная с $\tilde{x}^*[z^{t-1}]$ для любого $z(t) \in \mathcal{Z}$, то есть выполняется следующее равенство:

$$\bar{\mathrm{U}}\left(\mathbf{x}_t^* \mid \tilde{x}^*[z^{t-1}], z(t)\right) = V^*\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}], z(t)\right). \tag{16.15}$$

Проведем доказательство с помощью метода математической индукции. Выполнение гипотезы при $t = 0$ очевидно, так как по определению значение $V^*(x(0), z(0))$ достигается на плане $\mathbf{x}_0^* = \mathbf{x}^*$.

Далее предположим, что утверждение верно для некоторого t, то есть что, начиная с $\tilde{x}^*[z^{t-1}]$ и некоторого $z(t) \in \mathcal{Z}$, точная верхняя грань достигается на плане $\mathbf{x}_t^*$. Тогда уравнение (16.15) выполняется в периоде времени t для $z(t) \in \mathcal{Z}$. Далее, используя это соотношение, покажем, что уравнение (16.15) выполняется в периоде $t + 1$ и точная верхняя грань достигается на плане $\mathbf{x}_{t+1}^*$, начиная с $\tilde{x}^*[z^t]$ для любого $z(t + 1) \in \mathcal{Z}$.

Во-первых, заметим, что из уравнения (16.15) вытекает следующее равенство:

$$V^*\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}], z(t)\right) = \bar{\mathrm{U}}\left(\mathbf{x}_t^* \mid \tilde{x}^*[z^{t-1}], z(t)\right) =$$
$$= U\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}], \tilde{x}^*[z^t], z(t)\right) + \beta \mathbb{E}\left[\bar{\mathrm{U}}\left(\mathbf{x}_{t+1}^* \mid \tilde{x}^*[z^t], z(t+1)\right) \mid z(t)\right]. \tag{16.16}$$

Рассмотрим любой доступный план $\mathbf{x}_{t+1} = \left(\tilde{x}^*[z^{t+1}], \tilde{x}^*[z^{t+2}], \ldots\right) \in \Phi(\tilde{x}^*[z^t], z(t+1))$, начинающийся с вектора переменных состояния $\tilde{x}^*[z^t]$ и стохастической переменной $z(t + 1)$. По определению $\mathbf{x}_t = (\tilde{x}[z^t], \mathbf{x}_{t+1}) \in \Phi(\tilde{x}^*[z^t], z(t+1))$. Так как по предположению индукции для любого $\mathbf{x}_{t+1}$ значение $V^*(\tilde{x}^*[z^{t-1}], z(t))$ является точной верхней гранью, начиная с $\tilde{x}^*[z^{t-1}]$ и $z(t)$, получаем неравенство:

$$V^*\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}], z(t)\right) \geq \bar{\mathbf{U}}\left(\mathbf{x}_t \mid \tilde{x}^*[z^{t-1}], z(t)\right) =$$
$$= U\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}], \tilde{x}^*[z^t], z(t)\right) + \beta \mathbb{E}\left[\bar{\mathbf{U}}\left(\mathbf{x}_{t+1} \mid \tilde{x}^*[z^t], z(t+1)\right) \mid z(t)\right].$$

Объединяя это неравенство с уравнением (16.16), приходим к следующему неравенству для всех $\mathbf{x}_{t+1} \in \Phi(\tilde{x}^*[z^t], z(t+1))$:

$$\mathbb{E}\left[\bar{\mathbf{U}}\left(\mathbf{x}^*_{t+1} \mid \tilde{x}^*[z^t], z(t+1)\right) \mid z(t)\right] \geq$$
$$\geq \mathbb{E}\left[\bar{\mathbf{U}}\left(\mathbf{x}_{t+1} \mid \tilde{x}^*[z^t], z(t+1)\right) \mid z(t)\right] \tag{16.17}$$

Доказательство последнего шага проведем от противного. Предположим, что на плане $\mathbf{x}^*_{t+1}$ не достигается точная верхняя грань, начиная с $\tilde{x}[z^t]$, при любом $z(t+1) \in \mathcal{Z}$. Тогда при некотором $\hat{\mathbf{x}}_{t+1} \in \Phi\left(\tilde{x}^*[z^t], z(t+1)\right)$ (с положительной вероятностью реализации) существует план $\hat{\mathbf{x}}_{t+1}$, такой, что выполняется неравенство:

$$\bar{\mathbf{U}}\left(\mathbf{x}^*_{t+1} \mid \tilde{x}^*[z^t], \hat{z}\right) < \bar{\mathbf{U}}\left(\hat{\mathbf{x}}_{t+1} \mid \tilde{x}^*[z^t], \hat{z}\right).$$

Построим следующую последовательность: $\hat{\mathbf{x}}^*_{t+1} = \mathbf{x}^*_{t+1}$, если $z(t) \neq \hat{z}$ и $\hat{\mathbf{x}}^*_{t+1} = \hat{\mathbf{x}}_{t+1}$, если $z(t) = \hat{z}$. Так как $\mathbf{x}^*_{t+1} \in \Phi(\tilde{x}^*[z^t], \hat{z})$ и $\hat{\mathbf{x}}_{t+1} \in \Phi(\tilde{x}^*[z^t], \hat{z})$, также имеем $\hat{\mathbf{x}}^*_{t+1} \in \Phi(\tilde{x}^*[z^t], \hat{z})$. Затем без ограничения общности положим $z(t) = z_{j'}$ и $\hat{z} = z(1)$ (в предположении о том, что $q_{1j'} > 0$). Тогда получаем неравенство:

$$\mathbb{E}\left[\bar{\mathbf{U}}\left(\hat{\mathbf{x}}^*_{t+1} \mid \tilde{x}^*[z^t], z(t+1)\right) \mid z(t)\right] = \sum_{j=1}^{N} q_{jj'} \bar{\mathbf{U}}\left(\hat{\mathbf{x}}^*_{t+1} \mid \tilde{x}^*[z^t], z_j\right)$$
$$= q_{1j'} \bar{\mathbf{U}}\left(\hat{\mathbf{x}}_{t+1} \mid \tilde{x}^*[z^t], z_1\right) + \sum_{j=2}^{N} q_{jj'} \bar{\mathbf{U}}\left(\mathbf{x}^*_{t+1} \mid \tilde{x}^*[z^t], z_j\right)$$
$$> q_{1j'} \bar{\mathbf{U}}\left(\mathbf{x}^*_{t+1} \mid \tilde{x}^*[z^t], z_1\right) + \sum_{j=2}^{N} q_{jj'} \bar{\mathbf{U}}\left(\mathbf{x}^*_{t+1} \mid \tilde{x}^*[z^t], z_j\right)$$
$$= \mathbb{E}\left[\bar{\mathbf{U}}\left(\mathbf{x}^*_{t+1} \mid \tilde{x}^*[z^t], z(t+1)\right) \mid z(t)\right],$$

которое противоречит неравенству (16.17). Это заканчивает доказательство шага индукции. Следовательно, для любого $z(t+1) \in \mathcal{Z}$

точная верхняя грань достигается на плане $\mathbf{x}^*_{t+1}$, начиная с $\tilde{x}^*[z^t]$. Тогда из уравнения (16.15) следуют равенства:

$$V^*\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}], z(t)\right) = \bar{\mathrm{U}}\left(\mathbf{x}^*_t \mid \tilde{x}^*[z^{t-1}], z(t)\right) =$$
$$= U\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}], \tilde{x}^*[z^t], z(t)\right) + \beta\mathbb{E}\left[\bar{\mathrm{U}}\left(\mathbf{x}^*_{t+1} \mid \tilde{x}^*[z^t], z(t+1)\right) \mid z(t)\right] =$$
$$= U\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}], \tilde{x}^*[z^t], z(t)\right) + \beta\mathbb{E}\left[V^*\left(\tilde{x}^*[z^t], z(t+1)\right) \mid z(t)\right],$$

из которых вытекает уравнение (16.9), таким образом завершая доказательство первой части теоремы.

Для доказательства второй части предположим, что уравнение (16.9) выполняется для плана $\mathbf{x}^* \in \Phi(x(0), z(0))$. Тогда, делая последовательные подстановки для $\mathbf{x}^*$, получаем следующее равенство:

$$V^*(x(0), z(0)) = \sum_{t=0}^{n} \beta^t U\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}], \tilde{x}^*[z^t], z(t)\right) +$$
$$+ \beta^{n+1}\mathbb{E}\left[V^*\left(\tilde{x}^*[z^n], z(n+1)\right) \mid z(0)\right].$$

Так как функция V^* является ограниченной, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \beta^{n+1}\mathbb{E}\left[V^*\left(\tilde{x}^*[z^n], z(n+1)\right) \mid z(0)\right] = 0.$$

Поэтому

$$\tilde{\mathrm{U}}(\mathbf{x}^*, z(0)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t U\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}], \tilde{x}^*[z^t], z(t)\right) = V^*(x(0), z(0)).$$

Таким образом, оптимальное значение в задаче 16.1 достигается на плане $\mathbf{x}^*$. Это завершает доказательство теоремы 16.2. ■

Далее мы приведем доказательство теоремы 16.3, основанное на функции стоимости V для задачи 16.2. Альтернативное доказательство, построенное напрямую на задаче 16.1, приведено в упражнении 16.3.

Доказательство теоремы 16.3. Рассмотрим задачу 16.2. Из предположений 16.1 и 16.2 следует, что существует вещественное $M < \infty$, такое, что $|U(x, y, z)| < M$ для всех $(x, y, z) \in \mathbf{X}_G$. Тогда для всех $x \in X$ и $z \in \mathcal{Z}$ имеем неравенство $|V^*(x, z)| \le M/(1 - \beta)$. Далее, рассмотрим функцию $V^*(x, z) \in \mathbf{C}(X \times \mathcal{Z})$, где $\mathbf{C}(X \times \mathcal{Z})$ обозначает пространство непрерывных функций на произведении $X \times \mathcal{Z}$, где пространство X наделено топологией нормы верхней грани $\| f \| = \sup_{x\in X} |f(x)|$, а пространство $\mathcal{Z}$ наделено дискретной топологией (см. факт A.12 из приложения A). Все функции в пространстве $\mathbf{C}(X \times \mathcal{Z})$ являются ограниченными, так как они непрерывны, а пространства X и $\mathcal{Z}$ являются компактными.

Далее определим оператор T следующим образом:

$$TV(x, z) = \max_{y \in G(x,z)} \{U(x, y, z) + \beta \mathbb{E}[V(y, z') | z]\}. \qquad (16.18)$$

Предположим, что функция $V(x, z)$ является непрерывной и ограниченной. Тогда функция $\mathbb{E}[V(y, z') | z]$ также будет непрерывной и ограниченной, так как она задается как

$$\mathbb{E}[V(y, z') | z] \equiv \sum_{j=1}^{N} q_{jj'} V(y, z_j),$$

а индекс j' определен таким образом, что $z = z_{j'}$. Более того, функция $U(x, y, z)$ также является непрерывной и ограниченной на своей области определения $\mathbf{X}_G$. Тогда задача нахождения максимума в правой части уравнения (16.18) является задачей максимизации непрерывной функции на компактном множестве и, по теореме Вейерштрасса, она имеет ограниченное решение. Следовательно, оператор T корректно определен и является отображением множества непрерывных ограниченных функций на компактном пространстве $X \times \mathcal{Z}$, $\mathbf{C}(X \times \mathcal{Z})$ в себя. Нетрудно убедиться, что оператор T удовлетворяет достаточным условиям Блаквелла для сжимающего отображения (теорема 6.9). Следовательно, из теоремы 6.7 следует существование единственной неподвижной точки отображения (16.18) $V \in \mathbf{C}(X \times \mathcal{Z})$. Она является единственным решением задачи 16.2.

Далее рассмотрим задачу нахождения максимума в задаче 16.2. Так как функции U и V являются непрерывными и множество значений отображения G состоит их компактных множеств, применяя еще раз теорему Вейерштрасса, убеждаемся в существовании $y \in G(x, z)$, на котором целевая функция достигает максимума. Таким образом определяется множество аргмаксимумов $\Pi(x, z) \subset \Phi(x, z)$ для задачи 16.2. Положим $\mathbf{x}^* \equiv (\tilde{x}^*[z^0], \tilde{x}^*[z^1], \tilde{x}^*[z^2], \ldots) \in \Phi(x(0), z(0))$ при $\tilde{x}^*[z^t] \in \Pi(\tilde{x}^*[z^{t-1}], z(t))$ для всех $t \geq 0$ и для всех $z(t) \in \mathcal{Z}$. Тогда из теорем 16.1 и 16.2 следует, что план $\mathbf{x}^*$ также является оптимальным планом в задаче 16.1. ■

Доказательства теорем 16.4–16.6 схожи с доказательствами теорем 6.4–6.6 из главы 6 и оставлены читателю в качестве упражнений (см. упражнения 16.4–16.6). Доказательство теоремы 16.7 схоже с доказательством теоремы 16.5 и представлено в упражнении 16.7.

16.3. Стохастические уравнения Эйлера

Уравнения Эйлера и условия трансверсальности играли ключевую роль в главе 6. В контексте присутствия неопределенности в модели стандартное уравнение Эйлера заменяется стохастическим уравнением Эйлера. Несмотря на то что с концептуальной точки зрения оно не является усложнением стандартного уравнения Эйлера, его математические преобразования не всегда оказываются простыми. В некоторых случаях, например в модели перманентного дохода, рассмотренной далее в параграфе 16.5, стохастическое уравнение Эйлера может быть использовано напрямую. В других случаях для того, чтобы описать определенные качественные свойства оптимальной траектории в модели, мы вынуждены объединять стохастическое уравнение Эйлера и подходящее условие трансверсальности.

Дальнейшее изложение базируется на результатах параграфа 16.1 и следует подходу главы 6. Мы будем использовать символ «звездочка» (*) для обозначения оптимального значения и символ D для обозначения градиента функции. Из предположения 16.5 и теоремы 16.6 следует, что необходимые условия внутреннего оптимума имеют следующий вид:

$$D_y U(x, y^*, z) + \beta \mathbb{E}[D_x V(y^*, z') \mid z] = 0, \tag{16.19}$$

где переменная $x \in \mathbb{R}^K$ — текущее значение вектора переменных состояния, переменная z — стохастическая переменная, а функция $D_x V(y^*, z')$ градиент функции стоимости, рассчитанный в векторе переменных состояния следующего периода времени y^*.

Далее, используя стохастический аналог теоремы об огибающей из динамического программирования и дифференцируя уравнение (16.8) по вектору переменных состояния x, получаем следующее равенство:

$$D_x V(x^*, z) = D_x U(x, y^*, z). \tag{16.20}$$

Так как уравнение (16.20) выполняется при любой реализации стохастической переменной $z \in \mathcal{Z}$, в нем отсутствует оператор математического ожидания. Заметим, что обозначение y^* в нем является сокращением для $\pi(x, z)$. Используя эти обозначения и объединяя уравнения (16.19) и (16.20), приходим к следующему каноническому виду стохастического уравнения Эйлера:

$$D_y U(x, \pi(x, z), z) + \beta \mathbb{E}[D_x U(\pi(x, z), \pi(\pi(x, z), z'), z' \mid z)] = 0,$$

где, как и в главе 6, $D_x U$ обозначает вектор градиента функции U по ее первым K аргументам. В более подходящей для итеративной формулировки задачи максимизации форме стохастическое уравнение Эйлера принимает вид:

$$D_y U\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}], \tilde{x}^*[z^t], z(t)\right) + \\ + \beta \mathbb{E}\left[D_x U\left(\tilde{x}^*[z^t], \tilde{x}^*[z^{t+1}], z(t+1)\right) \mid z(t)\right] = 0 \tag{16.21}$$

при $z^{t-1} \in \mathcal{Z}^{t-1}$.

Как в этой задаче будет выглядеть условие трансверсальности? Как и ранее, условие трансверсальности требует, чтобы дисконтированный предельный доход от переменных состояния стремился к нулю по мере расширения горизонта планирования в бесконечность. В стохастическом случае мы, очевидно, должны вести речь об ожидаемом доходе. В данном контексте ожидания формируются при условии использования информации, доступной в период времени $t = 0$, то есть при условии $z(0) \in \mathcal{Z}$. Следовательно, условие трансверсальности, связанное со стохастическим уравнением Эйлера, имеет следующий вид:

$$\lim_{t\to\infty}\beta^t\mathbb{E}\left[D_xU\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}],\ \tilde{x}^*[z^t],\ z(t)\right)\cdot\tilde{x}^*[z^{t-1}]\,|\,z(0)\right]=0. \qquad (16.22)$$

Следующая теорема является обобщением теоремы 6.10 из главы 6 для случая неопределенности. В частности, в ней утверждается, что условие трансверсальности вместе с преобразованным уравнением Эйлера (16.21) являются необходимыми и достаточными условиями оптимума в задаче 16.1, а следовательно, и в задаче 16.2.

Теорема 16.8. Об уравнении Эйлера и условии трансверсальности. *Допустим, что выполняются предположения* 16.1–16.5, *и положим* $X \subset \mathbb{R}_+^K$. *Тогда доступная последовательность* $\left\{\tilde{x}^*[z^t]\right\}_{t=0}^{\infty}$, *где* $\tilde{x}^*[z^t] \in \operatorname{Int} G(\tilde{x}^*[z^{t-1}],\ z(t))$ *при любом* $z(t) \in \mathcal{Z}$ *для всех* $t = 0, 1, \ldots$, *является решением задачи* 16.1 при $x(0)$ и $z(0) \in Z$, *если и только если она удовлетворяет уравнениям* (16.21) *и* (16.22).

Доказательство. Доказательство схоже с доказательством теоремы 6.10 из главы 6.

(Достаточность.) Рассмотрим произвольные $x(0) \in X$ и $z(0) \in \mathcal{Z}$ и обозначим доступный план, удовлетворяющий уравнениям (16.21) и (16.22), как $\mathbf{x}^* \equiv \left\{\tilde{x}^*[z^t]\right\}_{t=0}^{\infty} \in \Phi\left(x(0),\ z(0)\right)$. Для любого плана $\mathbf{x} \equiv \left\{\tilde{x}[z^t]\right\}_{t=0}^{\infty} \in \Phi\left(x(0),\ z(0)\right)$ и для любого $z^\infty \in \mathcal{Z}^\infty$ определим вещественное $\Delta_{\mathbf{x}}(z^\infty)$ как разность между *реализациями* значений целевой функции для двух доступных последовательностей $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{x}$:

$$\Delta_{\mathbf{x}}(z^\infty)=\lim_{T\to\infty}\inf\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left[U\left(\tilde{x}^*[z^{t-1}],\ \tilde{x}^*[z^t],\ z(t)\right)-\right.$$
$$\left.-U\left(\tilde{x}[z^{t-1}],\ \tilde{x}[z^t],\ z(t)\right)\right].$$

Из предположений 16.2 и 16.5 следует, что функция U является непрерывной, вогнутой и дифференцируемой, и поэтому для любого $z^\infty \in \mathcal{Z}^\infty$ и для любого плана $\mathbf{x} \in \Phi(x(0),\ z(0))$ получаем следующее неравенство:

$$\Delta_{\mathbf{x}}(z^\infty) \geq \liminf_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t \Big[D_x U\big(\tilde{x}^*[z^{t-1}],\, \tilde{x}^*[z^t],\, z(t)\big)\cdot\big(\tilde{x}^*[z^{t-1}] - \tilde{x}[z^{t-1}]\big) +$$
$$+ D_y U\big(\tilde{x}^*[z^{t-1}],\, \tilde{x}^*[z^t],\, z(t)\big)\cdot\big(\tilde{x}^*[z^t] - \tilde{x}[z^t]\big)\Big].$$

Так как это неравенство верно для любой реализации $z^\infty \in \mathcal{Z}^\infty$, оно верно и для математического ожидания:

$$\mathbb{E}\Big[\Delta_{\mathbf{x}}(z^\infty) \mid z(0)\Big] \geq$$
$$\geq \liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T} \beta^t D_x U\big(\tilde{x}^*[z^{t-1}],\, \tilde{x}^*[z^t],\, z(t)\big)\cdot\big(\tilde{x}^*[z^{t-1}] - \tilde{x}[z^{t-1}]\big) \mid z(0)\right] +$$
$$+ \liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T} \beta^t D_y U\big(\tilde{x}^*[z^{t-1}],\, \tilde{x}^*[z^t],\, z(t)\big)\cdot\big(\tilde{x}^*[z^t] - \tilde{x}[z^t]\big) \mid z(0)\right]$$

при $z(0) \in \mathcal{Z}$. Преобразуя правую часть этого неравенства, получаем:

$$\mathbb{E}\Big[\Delta_{\mathbf{x}}(z^\infty) \mid z(0)\Big] \geq$$
$$\geq \liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T} \beta^t D_y U\big(\tilde{x}^*[z^{t-1}],\, \tilde{x}^*[z^t],\, z(t)\big)\cdot\big(\tilde{x}^*[z^t] - \tilde{x}[z^t]\big) \mid z(0)\right] +$$
$$+ \liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T} \beta^{T+1} D_x U\big(\tilde{x}^*[z^t],\, \tilde{x}^*[z^{t+1}],\, z(t+1)\big)\cdot\big(\tilde{x}^*[z^t] - \tilde{x}[z^t]\big) \mid z(0)\right] -$$
$$- \limsup_{T\to\infty} \mathbb{E}\Big[\beta^{T+1} D_x U\big(\tilde{x}^*[z^T],\, \tilde{x}^*[z^{T+1}],\, z(T+1)\big)\cdot \tilde{x}^*[z^T] \mid z(0)\Big] +$$
$$+ \liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}\Big[\beta^{T+1} D_x U\big(\tilde{x}[z^T],\, \tilde{x}[z^{T+1}],\, z(T+1)\big)\cdot \tilde{x}[z^T] \mid z(0)\Big].$$

Так как план $\mathbf{x}^* \equiv \left\{\tilde{x}^*[z^t]\right\}_{t=0}^{\infty}$ удовлетворяет уравнению (16.21), первые два слагаемых в этой сумме равны нулю. Более того, $\mathbf{x}^* \equiv \left\{\tilde{x}^*[z^t]\right\}_{t=0}^{\infty}$ удовлетворяет уравнению (16.22), поэтому третье слагаемое также будет равно нулю. Наконец, из того, что функция U является возрастающей по аргументу x, следует, что $D_x U \geq 0$. Так как $x \geq 0$, четвертое слагаемое будет неотрицательным, откуда следует неравенство $\mathbb{E}\Big[\Delta_{\mathbf{x}}(z^\infty) \mid z(0)\Big] \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \Phi(x(0), z(0))$. Следовательно, значение целевой функции на плане $\mathbf{x}^*$ больше либо равно ее значению на любом доступном плане $\mathbf{x} \in \Phi(x(0), z(0))$, и, следовательно, план $\mathbf{x}^*$ является оптимумом задачи.

(Необходимость.) Доказательство этой части теоремы во многом является повторением доказательства соответствующей части в теореме 6.10. В частности, снова определим $\Delta'_{\mathbf{x}}$ как в доказательстве теоремы 6.10. Рассмотрим доступный план $\mathbf{x} \in \Phi(x(0), z(0))$, такой, что $\tilde{x}[z^t] = \tilde{x}^*[z^t] + \varepsilon a[z^t]$ для некоторой вариации $a[z^t] \in \mathbb{R}^K$ и для всех $z^t \in Z^t$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ (план **x** является доступным, так как план $\mathbf{x}^* \equiv \left\{\tilde{x}^*[z^t]\right\}_{t=0}^{\infty}$ лежит во внутренности множества $\Phi(x(0), z(0)))$. Отсюда следует необходимость выполнения стохастического уравнения Эйлера (16.21). Выбирая план $\tilde{x}[z^t] = (1-\varepsilon)\tilde{x}^*[z^t]$ и используя уравнение (16.21), получаем следующее равенство:

$$\mathbb{E}\left[\Delta'_{\mathbf{x}}(z^\infty) \mid z(0)\right] =$$

$$= -\varepsilon \liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\beta^{T+1} D_x U\left(\tilde{x}^*[z^T], \tilde{x}^*[z^{T+1}], z(T+1)\right) \cdot \tilde{x}^*[z^T] \mid z(0)\right] +$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t o(\varepsilon, t).$$

Если уравнение (16.22) не выполняется, то первое слагаемое может быть выбрано отрицательным, и в этом случае оно останется отрицательным при $\varepsilon \to 0$. Это противоречит предположению о том, что план $\mathbf{x}^* \equiv \left\{\tilde{x}^*[z^t]\right\}_{t=0}^{\infty}$ является оптимальным, что завершает доказательство этой части теоремы. ■

16.4. Обобщение для марковского процесса*

Что происходит, когда стохастическая переменная z принимает бесконечное количество значений? Например, переменная z может представлять собой общий марковский случайный процесс, принимающий значения на компактном метрическом пространстве. Наиболее простым примером такого процесса будет одномерная случайная величина $z(t)$, следующая закону $z(t) = \rho z(t-1) + \sigma\varepsilon(t)$, где случайная величина $\varepsilon(t)$ является стандартным нормальным распределением. Большинство из результатов, которые нам понадобятся в дальнейшем, в некотором смысле могут быть обобщены на этот случай. Однако, с другой стороны, при постановке задач в общем виде необходимо проявлять большую предосторожность как для итеративной формулировки в задаче 16.1, так и для рекурсивной формулировки в задаче 16.2. Основная трудность в этом случае состоит в необходимости убедиться в существовании подходящим образом определенного доступного плана, который должен быть измеримым по сигма-алгебре информационных множеств, доступных в определенный период времени. Для того чтобы избежать значительного углубления в теорию меры, мы предположим, что пространства X и Z являются компактными, и наложим достаточные условия гладкости функции выигрышей и ограничений задачи (из которых будет следовать существование измеримого оптимального плана). В этих предположениях мы сформулируем основные теоремы стохастического динамического программирования для общего марковского случайного процесса. В дальнейшем изложении вместо интеграла мы будем использовать оператор математического ожидания.

Во-первых, определим пространство $\mathcal{Z}$ как компактное подпространство вещественной прямой $\mathbb{R}$. Множество, состоящее из конечного числа элементов, и замкнутый отрезок являются частными случаями такого определения. Предположим, что неопределенность в задаче определяется случайной величиной $z(t) \in \mathcal{Z}$, которая следует марковскому случайному процессу, то есть

$$\Pr[z(t) \mid z(0), z(1), ..., z(t-1)] \equiv \Pr[z(t) \mid z(t-1)].$$

Как показано выше, такой марковский процесс также может быть задан *функцией перехода состояний* $Q(z, \cdot)$. Как и ранее, историю реализаций стохастической переменной $z(t)$ обозначим символом $z^t = (z(1), ..., z(t))$. Целевая функция и множество ограничений задачи описаны в параграфе 16.1. Сохраним обозначение $\tilde{x}[z^t]$ для доступного плана, который теперь должен быть измеримым по сигма-алгебре информационных множеств, генерируемых каждой историей $z^t \in \mathcal{Z}^t$. Обозначим множество доступных планов после реализации истории z^t как $\Phi\left(\tilde{x}[z^{t-1}], z(t)\right)$. Тогда множеством доступных планов, начинающихся с $z(0)$, будет $\Phi(x(0), z(0))$. Также в случае, когда существует функция V, являющаяся решением задачи 16.2, обозначим множество всех функций выбора $\pi(x, z)$, удовлетворяющих условию

$$V(x, z) = U(x, \pi(x, z), z) + \beta \mathbb{E}[V(\pi(x, y), z') \mid z],$$

как $\Pi(x, z) \subset \Phi(x, z)$.

В заключение нам понадобятся те же предположения, что и в параграфе 16.1. Дополнительно мы потребуем, чтобы релевантные функции были измеримы по подходящим сигма-алгебрам информационных множеств и что соответствие $\Phi(x(t), z(t))$ допускает измеримую функцию выбора для всех $x(t) \in X$ и $z^t \in \mathcal{Z}^t$. Отметим, что непрерывность функций U и G является достаточным условием для такой измеримости. Единственным дополнительным предположением, которое нам понадобится сделать, является следующее (иногда называемое свойством Феллера) предположение.

Предположение 16.7. *Марковский случайный процесс $Q(z, \cdot)$ является таким, что для любой ограниченной и непрерывной функции $f : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ функция $\mathbb{E}[f(z') \mid z] \equiv \int f(z') Q(z, dz')$ также является ограниченной и непрерывной функцией аргумента z на пространстве $\mathcal{Z}$.*

Это предположение выполняется автоматически в случае, если $Q(z, \cdot)$ является марковской цепью (просто наделим множество $\mathcal{Z}$ дискретной топологией).

Теорема 16.9. О существовании решения. *Допустим, что выполняются предположения* 16.1, 16.2 *и* 16.7. *Тогда любое решение задачи* 16.2 $V(x, z)$ *совпадает с решением задачи* 16.1 $V^*(x, z)$. *Более того, если множество* $\Pi(x, z)$ *не пусто при всех* $(x, z) \in X \times \mathcal{Z}$, *то на любом плане* $\tilde{x}[z^t]$, *генерируемом функцией выбора* $\pi(x, z) \in \Pi(x, z)$, *целевая функция достигает максимума* $V^*(x, z)$.

Эта теорема неявным образом задает в задачах 16.1 и 16.2 достаточную структуру. В частности, из предположения 16.1 следует, что множество $\Phi(x, z)$ не пусто и что для любого $\mathbf{x} \in \Phi(x(0), z(0))$ математическое ожидание $\mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U\left(\tilde{x}[z^{t-1}], \tilde{x}[z^t], z(t)\right) \mid z(0)\right]$ определено и принимает конечное значение. Более того, используя рассуждения, аналогичные рассуждениям при доказательстве теоремы 16.3, нетрудно убедиться в том, что из предположения 16.2 следует, что $\Pi(x, z)$ является полунепрерывным сверху соответствием и поэтому оно допускает существование измеримой функции выбора для всех $z \in \mathcal{Z}$ и $x \in X$ (и следовательно, $\Phi(x(0), z(0))$ также допускает существование измеримой функции выбора для всех $z(0) \in \mathcal{Z}$ и $x(0) \in X$).

Теорема 16.10. О непрерывности функции стоимости. *Допустим, что выполняются предположения* 16.1, 16.2 *и* 16.7. *Тогда существует единственная функция* $V : X \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$, *которая удовлетворяет условию* (16.7). *Более того, функция* V *является непрерывной и ограниченной. Наконец, для любого* $x(0) \in X$ *и любого* $z(0) \in \mathcal{Z}$ *существует оптимальный план задачи* $\mathbf{x}^* \in \Phi(x(0), z(0))$.

Теорема 16.11. О вогнутости функции стоимости. *Допустим, что выполняются предположения* 16.1, 16.2 *и* 16.7. *Тогда единственная функция* $V: X \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$, *которая удовлетворяет условию* (16.7), *является строго вогнутой по аргументу* x *при любом* $z \in \mathcal{Z}$. *Более того, оптимальный план* $\mathbf{x}^*$ *может быть представлен в виде* $\tilde{x}^*[z^t] = \pi(x(t), z(t))$, *где функция выбора* $\pi : X \times \mathcal{Z} \to X$ *является непрерывной по аргументу* x *при любом* $z \in \mathcal{Z}$.

Теорема 16.12. О монотонности функции стоимости. *Допустим, что выполняются предположения* 16.1, 16.2, 16.4 *и* 16.7. *Тогда единственная функция* $V: X \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$, *которая удовлетворяет условию* (16.7), *является строго возрастающей по аргументу* x *при любом* $z \in \mathcal{Z}$.

Теорема 16.13. О дифференцируемости функции стоимости. *Допустим, что выполняются предположения* 16.1, 16.2, 16.3, 16.5 *и* 16.7. *Обозначим* π *функцию выбора, определенную выше, и предположим, что при любом* $z \in Z\ x' \in \text{Int}X$ *и* $\pi(x', z) \in \text{Int}G(x', z)$. *Тогда функция* $V(x, z)$ *является непрерывно дифференцируемой в точке* x' *и ее градиент по аргументу* x *задается уравнением:*

$$D_x V(x', z) = D_x U(x', \pi(x', z), z).$$

Доказательства этих теорем не сложны, хотя значительны по объему и требуют определенной математической аккуратности. Они представлены в книге *[Stokey, Lucas, Prescott 1989, chapter 9]. В этом учебнике* читатель также может найти детальное изложение необходимых сведений из теории меры и общей теории марковских случайных процессов.

В заключение отметим, что теорема 16.8 продолжает оставаться верной в случае общего марковского процесса, так как в ее доказательстве не используется конечность множества значений стохастической переменной z.

16.5. Приложения стохастического динамического программирования

В этом параграфе мы остановимся на ряде приложений методов стохастического динамического программирования. Некоторые из наиболее важных приложений, связанные со стохастической теорией экономического роста и экономическим ростом в экономике с неполными рынками, будут описаны в следующей главе. В каждом приложении мы укажем, каким образом его анализ может быть упрощен с помощью рекурсивной формулировки задачи и использования методов стохастического динамического программирования.

16.5.1. Гипотеза перманентного дохода

Одно из наиболее важных приложений методов стохастической динамической оптимизации связано с задачей сглаживания потребления домохозяйством, имеющим случайный поток будущих доходов. Эта задача была описана в работе Ирвина Фишера [Fisher *1930*], ее первый систематический анализ был проведен в классической книге Милтона Фридмана по теории потребления [Friedman 1957]. Она стала одной из наиболее знаменитых макроэкономических моделей после выхода важной статьи Роберта Холла [Hall 1978] о динамическом потребительском выборе.

Рассмотрим задачу максимизации дисконтированной функции полезности домохозяйством с бесконечным горизонтом планирования:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t)),$$

где, как обычно, переменная $c(t) \geq 0$ обозначает потребление домохозяйства. Вначале предположим, что моментальная функция полезности $u(\cdot)$ является строго возрастающей, непрерывно дифференцируемой и вогнутой и обозначим ее производную как $u'(\cdot)$.

Домохозяйство имеет возможность свободно привлекать займы и размещать средства по постоянной процентной ставке $r > 0$. Следовательно, его межвременное бюджетное ограничение имеет следующий вид:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} c(t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} w(t) + a(0), \tag{16.23}$$

где константа $a(0)$ обозначает начальный запас активов домохозяйства, а переменная $w(t)$ — его трудовые доходы. Допустим, что $w(t)$ является случайной величиной, которая принимает значения на множестве $\mathcal{W} \equiv \equiv \{w_1, ..., w_N\}$. Это предположение соответствует возможным колебаниям трудового дохода в связи с агрегированными или индивидуальными шоками, наблюдаемыми домохозяйством. Для упрощения анализа предположим, что случайные величины $w(t)$ распределены независимо по времени и что вероятности событий $w(t) = w_j$ равны q_j (очевидно, мы потребуем выполнения равенства $\sum_{j=1}^{N} q_j = 1$). Следовательно, мы должны рассматривать бюджетное ограничение (16.23) как функциональное уравнение для случайных величин. Поэтому мы потребуем, чтобы это ограничение выполнялось *почти наверняка* (с вероятностью 1), то есть чтобы вероятность того, что траектория потребления не удовлетворяет неравенству (16.23), равнялась нулю.

Замечание о том, что межвременное бюджетное ограничение является стохастическим, несет за собой ряд важных экономических последствий. В частности, несмотря на то что в модели отсутствуют явные ограничения на привлечение заимствований домохозяйством, требование о том, что межвременное бюджетное ограничение должно выполняться с вероятностью 1, накладывает *эндогенные ограничения на привлечение заимствований*. Например, предположим, что $w_1 = 0$ и $q_1 > 0$ (это состояние соответствует случаю безработицы и отсутствия трудового дохода). Тогда вероятность события, в котором домохозяйство будет иметь нулевой доход в течение сколь угодно длинного промежутка времени $T < \infty$, будет положительной. В этом случае если домохозяйство в некоторый момент времени выбирает отрицательное значение своего запаса финансовых активов $a(t) < 0$, то вероятность события, в котором межвременное бюджетное ограничение не будет выполняться, также будет положительной даже при нулевом выборе домохозяйством потребления во все последующие периоды времени. Следовательно, в модели присутствует эндогенное ограничение на привлечение заимствований в следующем виде:

$$a(t) \geq -\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} w_1 \equiv -b_1,$$

где константа w_1 обозначает минимальное значение трудового дохода w на множестве $\mathcal{W}$.

Первым делом решим эту задачу, сформулировав ее в итеративной форме, то есть как задачу выбора доступной последовательности $\{\tilde{c}[w^t]\}_{t=0}^{\infty}$. Наиболее просто это сделать с помощью построения функции Лагранжа. Однако несмотря на то, что в задаче имеется лишь одно межвременное бюджетное ограничение (16.23), предположение о том, что в функции Лагранжа присутствует только один множитель λ, является неверным. Это связано с тем, что выбор потребления делается домохозяйством при условии реализации событий вплоть до некоторого периода времени. В частности, потребление в периоде t определяется последовательностью случайных шоков вплоть до этого периода времени $w^t = (w(0), w(1), ..., w(t))$, и мы используем обозначение $\tilde{c}[w^t]$ именно для того, чтобы подчеркнуть, что потребление в периоде t является функцией от истории реализаций трудового дохода w^t. Так как в этот период времени другая информация о величине доходов и расходов домохозяйства отсутствует, естественно предположить, что множитель Лагранжа, который определяет предельную полезность от дохода, также является функцией от реализации случайных шоков вплоть до периода времени t, w^t. Поэтому мы обозначим его как $\tilde{\lambda}[w^t]$.

Условие первого порядка для данной задачи выглядит как:

$$\beta^t u'\left(\tilde{c}[w^t]\right) = \frac{1}{(1+r)^t} \tilde{\lambda}[w^t]. \tag{16.24}$$

В нем утверждается, что дисконтированная предельная полезность от потребления после реализации истории w^t равна дисконтированной предельной полезности от дохода после реализации истории w^t $\tilde{\lambda}[w^t]$. Вывод этого условия в такой формулировке задачи не очевиден. Альтернативная постановка задачи, в которой вводится ценообразование всех возможных требований на потребление при различных реализациях истории случайных шоков, является более простой с математической точки зрения и приводит к тем же результатам, что и рекурсивная формулировка задачи, описанная далее. Мы рассмотрим формулировку задачи с ценообразованием всех возможных требований при различных реализациях истории случайных шоков в следующей главе в контексте неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности.

Вместо этого далее мы сформулируем задачу рекурсивно, что позволит нам сделать более строгие выводы. Потоковое бюджетное ограничение домохозяйства выглядит как

$$a' = (1 + r)a + w - c,$$

где переменная a' обозначает запас финансовых активов в следующем периоде. С другой стороны, из него следует равенство $c = (1 + r)a + w - a'$. Тогда функция стоимости домохозяйства при условии текущего запаса финансовых активов a и текущей реализации шока трудового дохода w имеет следующий вид:

$$V(a, w) = \max_{a' \in [-b_1, (1+r)a+w]} u\{((1+r)a + w - a') + \beta \mathbb{E} V(a', w')\},$$

где мы используем тот факт, что случайные величины w распределены независимо во времени и поэтому условное математическое ожидание будущего значения функции стоимости не зависит от текущей реализации случайного шока w. Аналогично примеру 6.5 из главы 6, в котором анализируется детерминистская версия этой задачи, для того чтобы применить теоремы 16.1–16.6 из параграфа 16.1, нам необходимо ограничить множество доступных значений запаса финансовых активов. В частности, положим $\bar{a} \equiv a(0) + w_N / r$, где константа w_N соответствует наибольшему значению трудового дохода домохозяйства. Тогда мы можем наложить ограничение $a(t) \in [0, \bar{a}]$, а затем найти условия, при которых это ограничение не влияет на решение задачи (в частности, условия, при которых переменная $a(t)$ всегда является внутренней точкой множества, см. упражнение 16.11).

Условие первого порядка для этой задачи максимизации выглядит как

$$u'(c(t)) = \beta \mathbb{E}_t \frac{\partial V(a(t+1), w(t+1))}{\partial a}, \tag{16.25}$$

где оператор $\mathbb{E}_t$ обозначает условное математическое ожидание при условии информации, доступной в периоде времени t. Заметим, что, так как функция $\partial V(a', w')/\partial a$ также является предельной полезностью от дохода, это уравнение схоже с уравнением (16.24). Далее, из условия (16.10) из теоремы об огибающей 16.6 следует, что

$$\frac{\partial V(a(t), w(t))}{\partial a} = (1 + r) u'(c(t)).$$

Объединяя это равенство с уравнением (16.25), получаем следующее знаменитое стохастическое уравнение Эйлера для гипотезы перманентного дохода:

$$u'(c(\mathrm{t})) = \beta(1 + r)\mathbb{E}_t u'(c(t + 1)). \tag{16.26}$$

Важным свойством этого уравнения является то, что в его правой части присутствует ожидаемое значение предельной полезности от потребления в периоде времени $t+1$.

Уравнение Эйлера становится еще более простым и, возможно, более экономически значимым в случае, когда моментальная функция полезности является квадратичной, например выглядит как

$$u(c) = \phi c - \frac{1}{2}c^2,$$

где константа ϕ достаточно велика для того, чтобы функция $u(\cdot)$ была возрастающей по c на нужном интервале. Используя квадратичную функцию (16.26), получаем знаменитое стохастическое уравнение Р. Холла:

$$c(t) = (1-\kappa)\phi + \kappa \mathbb{E}_t c(t+1), \qquad (16.27)$$

где $\kappa \equiv \beta(1+r)$.

Очень важный вывод из этого уравнения состоит в том, что такие переменные, как доход в текущем и предыдущих периодах, не имеют предсказательной силы относительно темпа роста потребления. Значительное количество эмпирических работ посвящено тестированию этого утверждения на агрегированных и индивидуальных данных. Большинство из них фокусируется на тестировании *избыточной чувствительности* потребления, которая интерпретируется как зависимость будущего роста потребления от текущего дохода, тем самым отвергая уравнение (16.27). В большинстве случаев такая ситуация объясняется присутствием в экономике кредитных ограничений (в дополнение к эндогенному ограничению на заимствования, описанному выше). Несмотря на это, избыточная чувствительность потребления может возникнуть и в отсутствие кредитных ограничений в случае, если функция полезности домохозяйства не является квадратичной (см.: [Zeldes 1989; Caballero 1990]).

В случае если выполняется равенство $\beta = (1+r)^{-1}$, то есть когда норма дисконтирования является обратной величиной к валовой процентной ставке, уравнение (16.27) принимает еще более простой вид. Тогда $\kappa = 1$ и $c(t) = \mathbb{E}_t c(t+1)$ или $\mathbb{E}_t \Delta c(t+1) = 0$, то есть ожидаемое значение будущего потребления совпадает со значением текущего потребления. Это свойство иногда называют «свойством мартингала». Напомним, что случайная величина $z(t)$ называется *мартингалом* по отношению к некоторому информационному множеству Ω_t, если выполняется равенство $\mathbb{E}[z(t+1) \mid \Omega_t] = z(t)$. В случае если выполняется неравенство $\mathbb{E}[z(t+1) \mid \Omega_t] \geq z(t)$, она называется *субмартингалом*, а если неравенство $\mathbb{E}[z(t+1) \mid \Omega_t] \leq z(t)$ — *супермартингалом*. Таким образом потребление будет мартингалом, субмартингалом или супермартингалом в зависимости от значения процентной ставки по сравнению с нормой дисконтирования. Дальнейшие следствия из уравнения (16.28) описаны в упражнениях 16.8 и 16.11.

16.5.2. Модель поиска идей

В этом подпараграфе мы приведем пример еще одной экономической задачи, в которой методы стохастического динамического программирования оказываются полезны. Этот пример также предоставляет альтернативный дополняющий способ моделирования эндогенности технологий по сравнению с методами из части IV.

Рассмотрим задачу единственного нейтрального к риску предпринимателя со следующей целевой функцией:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c(t).$$

Потребление этого предпринимателя задается доходом, который он получает в текущем периоде (то есть кредитование и заимствования запрещены). Если предприниматель использует идею с качеством $a(t)$, то он имеет возможность получить в периоде времени t доход, равный[4]

$$y(t) = a(t).$$

В периоде $t = 0$ начальный запас идей задан как $a(0) = 0$. В дальнейшем в каждом периоде времени он имеет возможность либо получать доход, используя уже доступные ему технологии, либо использовать этот период для поиска новых идей. Предположим, что в каждом периоде времени, когда он занят таким поиском, реализация идеи происходит из независимых и стационарных во времени распределений с функцией распределения $H(a)$ с ограниченным носителем $[0, \bar{a}]$.

Следовательно, задачей предпринимателя является выбор между поиском новой технологии или производством с помощью уже доступных ему идей, открытых ранее. Так как кредитование и привлечение займов невозможны, потребление предпринимателя совпадает с его текущим доходом $c(t) = y(t)$.

В этой задаче идеи, уже описанные нами в книге ранее, представлены в несколько другом свете. Как и в моделях эндогенного технологического прогресса, описанных нами ранее, здесь предприниматель стоит перед нетривиальным выбором, который определяет множество доступных ему технологий: проводя больше времени в поиске, который является затратной деятельностью в терминах упущенного производства, он получает потенциальную возможность улучшить множество доступных ему технологий. Более того, его экономические решения связаны с выбором в стандартных моделях технологического прогресса и внедрения технологий между производством с помощью имеющихся технологий и «инвестициями» в еще один период поиска в надежде изобретения лучших технологий. В моделях эндогенного технологического прогресса такой выбор яв-

[4] Пусть вас не смущает использование символа a здесь для качества идей, а не для запаса активов.

ляется дополняющим фактором к стимулам к совершению инвестиций в новые технологии.

В данной задаче наша основная цель состоит в демонстрации того, каким образом методы стохастического динамического программирования могут быть использованы для ее анализа. Во-первых, выпишем задачу максимизации для предпринимателя в итеративной формулировке. Начнем с определения множества правил выбора для агента. В частности, обозначим последовательность идей, которые открывает предприниматель в течение последних t периодов, как $\mathbf{a}^t \in \mathbf{A}^t \equiv [0, \bar{a}]^t$, где $a(s) = 0$, если в периоде времени s он был занят производственной деятельностью, и запишем $\mathbf{a}^t = (a(0), ..., a(t))$. Тогда определим правило выбора для этого предпринимателя следующим образом:

$$q(t)\colon \mathbf{A}^t \to \{a(t)\} \cup \{\text{поиск}\}.$$

Оно описывает действие предпринимателя в периоде времени t, которое состоит в производстве с помощью уже открытой технологии $a(t)$ или в выборе $q(t) = \{\text{поиск}\}$ и проведении времени в поиске новых технологий. Обозначим множество всех функций из множества $\mathbf{A}^t$ в множество $\{a(t)\} \cup \cup \{\text{поиск}\}$ как $\mathcal{P}_t$, а множество всех бесконечных последовательностей таких функций как $\mathcal{P}^\infty$. Наиболее общей формулировкой задачи предпринимателя является следующая:

$$\max_{\{q(t)\}_{t=0}^{\infty} \in \mathcal{P}^\infty} \mathbb{E}\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c(t)$$

при ограничении $c(t) = 0$, если $q(t) =$ «поиск» и $c(t) = a$, если $q(t) = a$ при $a(s) = a$ для некоторого $s \le t$. Оператор $\mathbb{E}$ обозначает математическое ожидание. Очевидно, что записанная таким образом задача выглядит сложной и труднорешаемой. Мы записали ее таким образом для того, чтобы показать, что в некотором классе моделей формулировка задачи в терминах теории динамического программирования является математически простой, даже когда ее постановка в итеративной форме выглядит довольно сложной.

Для демонстрации этого далее с помощью методов стохастического динамического программирования выпишем задачу оптимизации в рекурсивной форме. Чтобы упростить рекурсивную формулировку задачи, сделаем два наблюдения (оба из которых доказываются в упражнении 16.12). Во-первых, так как задача является стационарной, мы можем отбросить все технологии, которые доступны предпринимателю, кроме текущей, и поэтому записать функцию стоимости предпринимателя как функцию $V(a)$ от текущей технологии a. Во-вторых, предположим, что, после того как предприниматель начинает производство с помощью некоторой технологии a, он продолжает это делать бесконечно, не возвращаясь к поиску в каком-либо будущем периоде времени. Это наблюдение выглядит интуитивно понятным в силу стационарности задачи: если предприниматель готов вместо дальнейшего поиска начать производство с помощью технологии a в периоде времени t, то он поступит аналогично и в периоде $t + 1$. Из последнего наблюдения следует, что если предприниматель выбирает производство с помощью технологии a в периоде времени t, то он будет потреблять $c(s) = a$ во всех периодах $s \geq t$. Таким образом, мы имеем следующее значение функции стоимости при выборе технологии a:

$$V^{\text{accept}}(a) = \frac{a}{1-\beta}.$$

Следовательно, получаем равенство:

$$V(a') = \max\{V^{\text{accept}}(a'),\ \beta\mathbb{E}V\} = \max\left\{\frac{a'}{1-\beta},\ \beta\mathbb{E}V\right\}, \tag{16.28}$$

где

$$\mathbb{E}V = \int_0^{\bar{a}} V(a)dH(a) \tag{16.29}$$

равно ожидаемому значению функции стоимости при отказе от производства с помощью имеющейся технологии. Выражение в уравнении (16.28) следует из наблюдения о том, что предприниматель делает такой выбор между началом производства и продолжением поиска новой технологии, который приносит ему большее значение функции полезности. Ожидаемое значение функции стоимости при продолжении поиска в уравнении (16.29) следует из определения. Значение функции стоимости предпринимателя в следующем периоде составляет $V(a)$ из уравнения (16.28), где a является реализацией случайной величины с функцией распределения $H(a)$. Поэтому интеграл в уравнении (16.29) задает значение $\mathbb{E}V$. Так как распределение $H(a)$ может не обладать непрерывной функцией плотности, интеграл в уравнении (16.29) записан в виде интеграла Лебега.

НЕБОЛЬШОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ. Несмотря на то что особая структура задачи поиска позволяет найти решение в явном виде, полезно отметить, что оптимальная стратегия может быть найдена с помощью методов, развитых в параграфе 6.4 из главы 6. Чтобы убедиться в этом, объединим два предыдущих уравнения и получим следующее равенство:

$$V(a') = \max\left\{\frac{a'}{1-\beta},\ \beta\int_0^{\bar{a}} V(a)dH(a)\right\} = \\ = TV(a'), \tag{16.30}$$

где второе равенство является определением отображения T. Так как отображение T является монотонным и удовлетворяет условию дисконтирования, из теоремы Блаквелла о достаточных условиях (теорема 6.9) следует, что оно является сжимающим отображением.

Далее рассмотрим элемент пространства вещественнозначных непрерывных (а значит, и ограниченных) функций на множестве $[0, \bar{a}]$, которое является полным метрическим пространством по норме верхней грани, $V \in C([0, \bar{a}])$. Тогда из теоремы о сжимающем отображении (теоремы 6.7) следует существование единственной функции стоимости $V(a)$. Поэтому существование решения задачи (а следовательно, и оптимальной стратегии, описанной далее) последовательного поиска непосредственно следует из ее постановки как задачи динамического программирования.

Более того, теорема 6.8 может быть применена на пространстве S' неубывающих непрерывных функций на отрезке $[0, \bar{a}]$, являющемся замкнутым подпространством пространства $C([0, \bar{a}])$. Следовательно, функция стоимости V(а) является неубывающей. На самом деле с помощью теоремы 6.8 можно доказать, что функция стоимости $V(a)$ является кусочно-линейной, точнее, постоянной на некотором начальном интервале и затем возрастающей линейной функцией. Для этого рассмотрим пространство всех таких функций S''. Оно также является подпространством (но уже не обязательно замкнутым) пространства $C([0, \bar{a}])$. Однако в силу того, что для любой неубывающей функции $V(a)$ функция $TV(a)$ является такой кусочно-линейной функцией, вторая часть теоремы 6.8 продолжает выполняться. Таким образом, из нее следует, что единственная неподвижная точка отображения $TV(a)$ также является кусочно-линейной функцией. ■

В предыдущем отступлении для того, чтобы показать, что функция стоимости $V(a)$ является кусочно-линейной, мы использовали теорему 6.8. Однако в данной задаче это свойство может быть выведено непосредственно из уравнения (16.30), так как функция $V(a)$ является максимумом двух функций, одна из которых является постоянной, а вторая — возрастающей линейной функцией. Следовательно, функция $V(a)$ будет кусочно-линейной с постоянной частью в начале.

Нашей следующей целью является описание оптимальной стратегии с помощью рекурсивной формулировки задачи 16.2. Из того, что функция $V(a)$ вначале является постоянной, а затем линейной (и строго возрастающей), следует, что оптимальная стратегия принимает вид *правила отсечения,* то есть существует некоторое пороговое значение уровня технологии R, такое, что предприниматель принимает все технологии лучшие, чем R, и при этом отвергает все технологии $a < R$ и продолжает поиск. Такое правило отсечения вытекает из того, что функция $V(a)$ является строго возрастающей начиная с некоторого значения, поэтому если некоторая технология a' принимается предпринимателем, то все технологии $a > a'$ также будут им приниматься.

Более того, правило отсечения должно удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{R}{1-\beta} = \int_0^{\bar{a}} \beta V(a) dH(a), \tag{16.31}$$

которое означает, что предприниматель безразличен между принятием технологии R и продолжением поиска в течение еще одного периода времени. Далее, так как предприниматель отвергает все технологии $a < R$, мы получаем следующие равенства:

$$V(a) = \beta \int_0^{\bar{a}} V(a) dH(a) = \frac{R}{1-\beta}$$

при $a < R$ и

$$V(a) = \frac{a}{1-\beta}$$

при $a \geq R$.

Используя это наблюдение, имеем уравнение:

$$\int_0^{\bar{a}} V(a) dH(a) = \frac{RH(R)}{1-\beta} + \int_{a \geq R} \frac{a}{1-\beta} dH(a).$$

Объединяя это уравнение с уравнением (16.31), приходим к следующему равенству:

$$\frac{R}{1-\beta} = \beta \left[\frac{RH(R)}{1-\beta} + \int_{a \geq R} \frac{a}{1-\beta} dH(a) \right]. \tag{16.32}$$

Преобразуя это уравнение, получаем равенство:

$$R = \frac{\beta}{1-\beta H(R)} \int_R^{\bar{a}} a dH(a),$$

которое является удобной формой для описания порогового значения R. Уравнение (16.32) может быть записано в альтернативном и интуитивно более понятном виде. Перепишем его следующим образом:

$$\frac{R}{1-\beta} = \beta \left[\int_{a<R} \frac{R}{1-\beta} dH(a) + \int_{a \geq R} \frac{a}{1-\beta} dH(a) \right].$$

Далее, вычитая с обеих сторон этого равенства уравнение

$$\frac{\beta R}{1-\beta} = \frac{\beta R}{1-\beta} \int_{a<R} dH(a) + \frac{\beta R}{1-\beta} \int_{a \geq R} dH(a),$$

получаем следующее уравнение:

$$R = \frac{\beta}{1-\beta}\int_R^{\bar{a}}(a-R)H(a). \tag{16.33}$$

Левая часть этого уравнения может быть проинтерпретирована как издержки отказа от производства с помощью технологии R, а его правая часть — как ожидаемая выгода от еще одного периода поиска. Так как при пороговом значении технологии предприниматель должен быть безразличен между началом производственной деятельности и продолжением поиска, два этих выражения должны быть равны при таком уровне технологии.

Определим правую часть уравнения (16.33) как ожидаемую выгоду от еще одного периода поиска:

$$\gamma(R) = \frac{\beta}{1-\beta}\int_R^{\bar{a}}(a-R)dH(a).$$

Предположим, что распределение H обладает непрерывной функцией плотности, и обозначим ее h. Тогда функция $\gamma(\cdot)$является дифференцируемой и ее производная задается следующим образом:

$$\gamma'^{(R)} = -\frac{\beta}{1-\beta}(R-R)h(R) - \frac{\beta}{1-\beta}\int_R^{\bar{a}}dH(a) = -\frac{\beta}{1-\beta}[1-H(R)] < 0.$$

Следовательно, уравнение (16.33) имеет единственное решение. Нетрудно убедиться, что увеличение параметра β делает предпринимателя более терпеливым и поэтому ведет к росту порогового значения уровня технологии R.

16.5.3. Другие приложения

Существует значительное количество других приложений методов стохастического динамического программирования. В дополнение к стохастическим моделям экономического роста, анализу которых посвящена следующая глава, упоминания заслуживают следующие три модели.

1. *Ценообразование финансовых активов.* Следуя работе [Lucas 1978], рассмотрим экономику, в которой множество идентичных агентов осуществляют торговлю требованиями на случайный поток доходов от владения некоторыми активами («плодовыми деревьями»). Каждый агент решает задачу сглаживания потребления, схожую с задачей из подпараграфа 16.5.1. Основное отличие модели Лукаса в том, что в ней агент осуществляет сбережения в виде накопления активов

со случайным доходом, а не с фиксированной процентной ставкой или обладает возможностью вкладывать средства в оба типа активов. Условие равновесия на рынке требует, чтобы общее предложение активов совпадало со спросом на них. Поэтому равновесная цена должна быть такой, чтобы каждый агент желал владеть соответствующим количеством требований на поток доходов от владения таким активом. Их цена может быть найдена из предельной полезности от потребления, которая выводится из рекурсивной формулировки задачи агента. Эта модель изложена в упражнении 16.14.

2. *Инвестиции в условиях неопределенности.* Введение неопределенности относительно будущего спроса и/или производительности в модель инвестиций с издержками приспособления, представленной в параграфе 7.8 из главы 7, позволяет значительно увеличить количество ее приложений в макроэкономике и теории промышленной организации. Эта модель изложена в упражнении 16.15.
3. *Задача оптимальной остановки.* Модель поиска из подпараграфа 16.5.2 является примером задачи оптимальной остановки. Более общая задача оптимальной остановки также может быть поставлена и проанализирована как задача стохастического динамического программирования. Другой пример такой задачи оптимальной остановки рассмотрен в упражнении 16.16.

16.6. Основные выводы

Материал этой главы является во многом техническим и полезен с точки зрения его применения в приложениях, а не сам по себе. Наиболее широко он используется в макроэкономике и теории экономического роста. Методы, изложенные здесь, используются для анализа стохастической неоклассической модели экономического роста, представленной в следующей главе.

В дополнение к выводу основных методов стохастического динамического программирования в этой главе также представлены две важные экономические модели. Первая, стохастическая модель перманентного дохода, которая является одной из наиболее известных макроэкономических моделей, породила значительный объем как теоретической, так и эмпирической литературы. Ранняя эмпирическая литература в основном была посвящена тестированию избыточной чувствительности потребления, описанной в подпараграфе 16.5.1, с помощью агрегированных данных. В более поздней литературе фокус исследования сместился к анализу микро- и панельных данных, что позволяет получить более серьезные результаты о поведении потребления на уровне отдельных домохозяйств.

Модель поиска идей, основанная на модели поиска на рынке труда из работы [McCall 1970], является еще одной важной моделью, изложенной в этой главе. Модель Мак-Колла послужила основой большого количества современных равновесных моделей безработицы. Несмотря на то что изложение модели в тексте книги построено в терминах поиска идей, у читателя не должно возникнуть трудностей в ее адаптации к рынку труда и использовании как введение в равновесную теорию безработицы (см. упражнение 16.13). В дополнение некоторые другие приложения, упомянутые выше (включая модель ценообразования финансовых активов, основанную на работе [Lucas 1978], и модель инвестиций в условиях неопределенности) также широко используются в других областях макроэкономики.

16.7. Литература

Большая часть литературы из главы 6 заслуживает упоминания и в контексте стохастического динамического программирования. Для более продвинутого анализа методов посоветуем читателю обратиться к работам: [Howard 1960; Blackwell 1965; Puterman 1994]. Наиболее полный анализ задачи стохастического динамического программирования с дисконтированием представлен в книге [Stokey, Lucas, Prescott 1979]. В этой главе изложен тот же материал, что и в книге [Stokey, Lucas, Prescott 1979], однако с чуть меньшим количеством технических деталей. В частности, здесь все важные теоремы стохастического динамического программирования доказаны без использования результатов из теории меры. Подробное изложение теории стохастического динамического программирования требует значительных инвестиций в изучение теории меры. Заинтересованному читателю следует обратиться к книге [Stokey, Lucas, Prescott 1979, chapters 8–13], в которой используется подход, основанный на теории меры, и представлен материал, необходимый для анализа общих марковских случайных процессов.

Некоторые основные определения и результаты из теории меры, которые используются в анализе общих марковских случайных процессов, представлены в учебнике [Rudin 1976]. В книге [Williams 1991] также предложено живое и довольно легко читаемое изложение основ теории меры. Строгое определение интеграла Лебега, которое мы несколько раз использовали неформально, читатель также может найти в вышеупомянутых учебниках. Чуть более продвинутое изложение теории меры представлено в книге [Royden 1994]. Введение в теорию мартингалов, упомянутых в параграфе 16.5, содержится в учебнике [Williams 1991].

Прекрасное компактное изложение теории общих марковских случайных процессов и их приложений к стохастическому динамическому программированию представлено в книге [Futia 1982]. Более продвинутое детальное изложение теории марковских случайных процессов читатель может найти в книгах: [Gikhman, Skorohod 1974; Ethier, Kutz 1986].

Более подробный анализ необходимости и достаточности стохастического условия трансверсальности (теоремы 16.8) представлен в книгах: [Zilcha 1978; Kamihigashi 2003].

Наилучшим обзором работ по теории потребления является статья [Deaton 1992]. Обзор последних работ на эту тему представлен в статье [Browning, Crossley 2001]. Упражнение 16.11 основано на работе [Chamberlain, Wilson 2000]. В ней также содержится анализ некоторых тонких математических деталей, возникающих при исследовании предельного стохастического распределения потребления в случае, когда норма дисконтирования равна обратной величине к валовой процентной ставке. Пример модели поиска идей из подпараграфа 16.5.2 является адаптацией модели поиска на рынке труда из работы [McCall 1972]. Первая из известных нам теоретических моделей поиска на рынке технологий предложена в статье [Kortum 1997]. Модель из этой статьи является более богатой и экономически интересной, чем модель из подпараграфа 16.5.2. Работа [Ljungqvist, Sargent 2005] содержит прекрасное расширение базовой модели Мак-Колла. Прекрасный обзор последних работ по приложениям моделей поиска на рынке труда представлен в работах: [Pissaridis 2000; Rogerson, Shimer, Right 2004].

16.8. Упражнения

16.1. Покажите, что часть 3 предположения 16.6 выполняется тогда и только тогда, когда для всех $j'' > j'$ и для любого $\bar{j} = 1, \ldots, N$ справедливо неравенство $\sum_{j=\bar{j}}^{N} q_{jj''} \geq \sum_{j=\bar{j}}^{N} q_{jj'}$. Что это условие позволяет сказать о связи между условными распределениями случайной величины z при условии $z_{j''}$ и при условии $z_{j'}$?

***16.2.** Докажите лемму 16.1.

***16.3.** В этом упражнении содержится альтернативное доказательство теоремы 16.3.

(a) Выберите подходящую топологию на пространстве $\mathcal{Z}$, так что функция U является непрерывной на множестве $X \times X \times \mathcal{Z}$.

(b) Используйте теорему A.12 из приложения A для того, чтобы показать, что целевая функция домохозяйства в задаче 16.1 является непрерывной в топологии прямого произведения. Далее используйте теорему A.13 и лемму A.2 для того, чтобы показать, что множество ограничений является компактным. Затем используйте теоремы A.9 и A.16 для того, чтобы показать, что функция $V^*(x(0), z(0))$ определена надлежащим образом, непрерывна и ограничена на множестве $X \times \mathcal{Z}$.

(c) Применяя теорему 16.1, докажите аналогичное утверждение для функции $V(x(0), z(0))$.

***16.4.** Докажите теорему 16.4.

***16.5.** Докажите теорему 16.5.

***16.6.** Докажите теорему 16.6.

***16.7.** Докажите теорему 16.7.

16.8. Рассмотрите стохастическую модель перманентного дохода, описанную в параграфе 16.5, с общей моментальной функцией полезности $u(c)$. Объясните условия, при которых гипотеза избыточной чувствительности потребления, описанная в этом параграфе, не отвергается даже при выполнении стохастического уравнения Эйлера (16.26). [Подсказка: для конкретики вы можете ограничиться анализом предпочтений с функцией полезности вида CRRA.]

16.9. (a) Рассмотрите стохастическую модель перманентного дохода, описанную в параграфе 16.5, и предположите, что процентная ставка r не является постоянной величиной, а равна $r(t) > 0$ в периоде времени t. Выведите в этом случае эквивалент стохастического уравнения Эйлера (16.26). Покажите, что в этом случае также возможна избыточная чувствительность потребления.

(b) Далее предположите, что процентная ставка $r(t)$ является случайной величиной, принимающей одно из конечного множества значений $r_1, ..., r_N$. Для упрощения анализа также предположите, что реализации процентной ставки независимы во времени. Выведите в этом случае эквивалент стохастического уравнения Эйлера (16.26). Покажите, что в этом случае также отсутствует избыточная чувствительность потребления.

16.10. Рассмотрите стохастическую модель перманентного дохода, описанную в параграфе 16.5. Предположите, что трудовые доходы $w(t)$ не являются распределенными независимо во времени случайными величинами, а следуют марковской цепи. Покажите, что в этом случае продолжает выполняться стохастическое уравнение Эйлера (16.26). Далее предположите, что моментальная функция полезности $u(c)$ является квадратичной, а эконометрист, исследующий данные, неверно полагает, что трудовые доходы $w(t)$ распределены независимо во времени, то есть домохозяйства обладают большим количеством информации, чем эконометрист. Покажите, что в регрессии темпа роста потребления на предыдущие реализации величины трудового дохода коэффициент перед последним продолжит оставаться равным нулю (то есть гипотеза избыточной чувствительности потребления отвергается). [Подсказка: используйте закон итеративных ожиданий, в котором утверждается, что если информационная сигма-алгебра Ω' лежит в информационной сигма-алгебре Ω, а z является некоторой случайной величиной, то справедливо равенство $\mathbb{E}[\mathbb{E}[z \mid \Omega \mid \Omega'] = \mathbb{E}[z \mid \Omega']$.]

***16.11.** Рассмотрите стохастическую модель перманентного дохода, описанную в параграфе 16.5. Предположите, что $c(t) \geq 0$, моментальная функция полезности $u(\cdot)$ является дважды непрерывно дифференцируемой, везде строго вогнутой и строго возрастающей, а ее вторая производная $u''(\cdot)$ является возрастающей. Также предположите, что функция распределения трудового дохода $w(t)$ не вырождена и принимает наименьшее значение, равное нулю.

(a) Покажите, что потребление никогда не сходится к постоянному значению.

(b) Докажите, что если моментальная функция полезности $u(\cdot)$ имеет вид функции CRRA и $\beta < (1 + r)^{-1}$, то существует некоторое вещественное $\bar{a} < \infty$, такое, что $a(t) \in (0, \bar{a})$ при всех t.

(c) Покажите, что если $\beta \leq (1 + r)^{-1}$, то значение $\bar{a} < \infty$, такое, что $a(t) \in (0, \bar{a})$ при всех t может не существовать. [Подсказка: вначале предположите, что моментальная функция полезности $u(\cdot)$ имеет вид функции CRRA, и проанализируйте случай $\beta = (1 + r)^{-1}$. Рассмотрите случайную последовательность при реализации $w(t) = w_N$, которая является последовательностью с положительной вероятностью реализации в течение произвольного большого количества периодов. Затем обобщите ваши рассуждения на случай $\beta \leq (1 + r)^{-1}$.]

(d) Предположите, что функция $u''(\cdot)$ является неубывающей. Докажите, что если $\beta \leq (1 + r)^{-1}$, то предельная полезность от потребления является невырожденным супермартингалом и, следовательно, потребление расходится к бесконечности. [Подсказка: заметьте, что в этом случае из стохастического уравнения Эйлера (16.26) следует неравенство $u'(c(t)) \geq \mathbb{E}u'(c(t + 1))$ и используйте это уравнение для доказательства того, что потребление должно возрастать «в среднем».]

(e) Как изменится ваш анализ в случае, если функция $u''(\cdot)$ является убывающей.

16.12. Рассмотрите модель поиска идей, описанную в подпараграфе 16.5.2. Предположите, что предприниматель в любом периоде времени может использовать для производства любую технологию из тех, которые он открыл в прошлом. Также предположите, что в любом периоде времени он может прекратить производственную деятельность и вернуться к поиску новых технологий.

(a) Сформулируйте задачу максимизации для предпринимателя в рекурсивной форме.

(b) Докажите, что если предприниматель не стал использовать для производства технологию a' в периоде времени t, то он не станет использовать ее и в периоде времени $t + s$ при любом $s > 0$ (то есть он никогда не воспользуется ею при любой возможной реализации событий между периодами t и $t + s$).

(c) Докажите, что если предприниматель принял технологию a' в периоде времени t и перешел к производственной деятельности, то он продолжит ее с этой же технологией во все будущие периоды $s > t$ и никогда не вернется к поиску новых технологий.

(d) Используя части (b) и (c), покажите, что задача максимизации для предпринимателя может быть сформулирована как в тексте главы без ограничения общности.

(e) Далее предположите, что если предприниматель не занят производственной деятельностью, то он получает доход b. Выпишите задачу максимизации в рекурсивном виде в этом случае и покажите, что пороговое значение R является возрастающей функцией от дохода b.

16.13. Переформулируйте задачу из подпараграфа 16.5.2 как задачу безработного индивида, реализация заработной платы которого задана экзогенным стационарным распределением с функцией распределения $H(w)$. Цель работника состоит в максимизации чистой приведенной дисконтированной стоимости потока его доходов. Предположите, что если работник принимает некоторую заработную плату, то он имеет возможность получать ее в течение бесконечно долгого периода времени.

(a) Сформулируйте динамическую задачу максимизации для работника в рекурсивной форме в предположении о том, что после того, как работник находит работу, он никогда не увольняется.

(b) Докажите, что работник никогда не будет увольняться после того, как он принял некоторую заработную плату.

(c) Докажите, что, принимая решение, работник пользуется некоторой пороговой заработной платой R.

(d) Вычислите ожидаемое значение времени безработицы для работника.

(e) Покажите, что если реализации заработной платы из распределения $H(w)$ предлагаются фирмами и все работники идентичны, то все предложения заработной платы фирмами, кроме предложения $w = R$ не являются максимизирующими прибыль фирм. Что это наблюдение говорит о модели поиска Мак-Колла?

16.14. Рассмотрите экономику, населенную идентичными домохозяйствами, каждое из которых обладает функцией полезности, заданной как $\mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c(t))\right]$, где моментальная функция полезности $u(\cdot)$ является строго возрастающей, строго вогнутой и дважды дифференцируемой. Нормализуйте меру множества агентов в экономике единицей. Каждое домохозяйство владеет требованием на единственное дерево, приносящее $z(t)$ единиц потребительского товара в периоде времени t. Предположите, что функция $z(t)$ является случайной величиной, которая принимает значения на множестве $\mathcal{Z} \equiv \{z_1, ..., z_N\}$ и распределена как марковская цепь (урожаи, собираемые с каждого дерева, равны и поэтому у агентов нет стимулов к диверсификации). Каждое домохозяйство имеет возможность продать некоторую долю собственного дерева или купить долю нового дерева, однако короткие продажи деревьев запрещены (то есть домохозяйство не может владеть отрицательным запасом некоторого дерева). Предположите, что цена дерева при текущей реализации случайной величины $z(t)$, равной z, задается функцией $p: \mathcal{Z} \to \mathbb{R}_+$. Также предположите, что в экономике отсутствуют другие активы, позволяющие переносить ресурсы между различными периодами времени.

(a) Покажите, что при заданной функции цены $p(z)$ бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства имеет следующий вид:

$$c(t) + p(z(t))x(t+1) \le [z(t) + p(z(t))]x(\mathrm{t}),$$

где переменная $x(t)$ обозначает запас деревьев домохозяйства в периоде времени t.

(b) Покажите, что при заданной функции цены $p(z)$ задача максимизации для репрезентативного домохозяйства при потоковом бюджетном ограничении и ограничениях $c(t) \ge 0$ и $x(t) \ge 0$ может быть записана в рекурсивной форме следующим образом:

$$V(x, z) = \sup_{y \in [0, p(z)^{-1}(z+p(z))x]} \left\{u((z+p(z))x - p(z)y) + \beta\mathbb{E}[V(y, z') \mid z]\right\}.$$

(c) Используйте результаты из параграфа 16.1 для того, чтобы показать, что функция $V(x, z)$ является возрастающей, строго вогнутой и дифференцируемой по аргументу x (во всех внутренних точках своей области определения).

(d) Выведите стохастическое уравнение Эйлера для этой задачи максимизации.

(e) Далее предположите равновесие на рынке деревьев, что означает, что $x(t) = 1$ при всех t. Объясните, почему это равенство является необходимым и достаточным условием равновесия.

(f) В предположении о равновесии на рынке деревьев найдите функцию $p(z)$ — равновесную цену дерева как функцию от текущей реализации случайной величины z.

(g) Далее предположите, что домохозяйства имеют возможность торговать безрисковыми облигациями (чистое предложение которых в равновесии равно нулю). Найдите цену такой безрисковой облигации.

16.15. Рассмотрите стохастическую версию модели инвестиций из параграфа 7.8 в дискретном времени, в которой фирма максимизирует чистую приведенную дисконтированную стоимость прибыли с нормой дисконтирования, равной $(1 + r)^{-1}$, а моментальная прибыль задана следующим выражением:

$$f(K(t), z(t)) - I(t) - \phi(I(t)),$$

где $f(K(t), z(t))$ задает выручку фирмы как функцию от запаса капитала $K(t)$ и случайной величины $z(t)$, которая описывает стохастический элемент производительности или спроса на продукцию фирмы. Как и в параграфе 7.8, переменная $I(t)$ обозначает инвестиции, а функция $\phi(I(t))$ — издержки из приспособления.

(a) Предположите, что случайный процесс $z(t)$ является марковской цепью. Запишите задачу максимизации для фирмы в итеративной формулировке.

(b) Запишите задачу максимизации для фирмы в рекурсивной формулировке.

(c) Найдите условия, при которых эти две задачи имеют одинаковые решения.

(d) Выведите стохастическое уравнение Эйлера для инвестиционных решений фирмы и сравните ваш результат с результатами из параграфа 7.8.

***16.16.** Рассмотрите общую задачу остановки, в которой цель индивида состоит в максимизации суммы $\mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(y(t))\right]$. Последовательность случайных величин $z(t)$ является марковской цепью, и индивид может «остановить» процесс в любом периоде времени t. Положите $y(t) = 0$, если индивид не остановил процесс, и $y(t) = z(s)$, если индивид остановил процесс в некотором периоде $s \le t$.

(a) Сформулируйте задачу индивида как задачу стохастического динамического программирования. Найдите достаточные условия существования некоторого вещественного R^*, такого, что индивид будет останавливать процесс в периоде времени t, если $z(t) \geq R^*$.

(b) Далее предположите, что функция распределения случайной величины $z(t)$ в периоде времени t задана как $H(z \mid \zeta(t))$, где случайная величина $\zeta(t)$ следует марковской цепи с конечным множеством значений $\mathcal{Z}$. Сформулируйте задачу индивида как задачу стохастического динамического программирования. Докажите, что существует функция $R^*: \mathcal{Z} \to \mathbb{R}_+$, такая, что индивид будет останавливать процесс, если $z(t) \geq R^*(\zeta(t))$ при текущей реализации $\zeta(t)$. Объясните, почему в данном случае пороговое значение для остановки не является постоянным. Какой вывод следует из этого результата для задачи поиска работы безработным агентом, описанной в упражнении 16.13, если функции распределения заработной платы различаются между собой в периодах экспансий и рецессий?

Глава 17
Стохастические модели экономического роста

В этой главе мы представим четыре стохастические модели экономического роста, описывающие различные аспекты взаимосвязи между экономическим ростом и неопределенностью. Первая модель — это базовая неоклассическая модель экономического роста (с полными рынками), дополненная стохастическими шоками производительности, впервые изложенная в работе [Brock, Mirman 1972]. Эта модель не только является важным обобщением базовой неоклассической модели экономического роста из главы 8, но также представляет собой основу известной модели *реальных деловых циклов*, широко используемой в анализе различных кратко- и среднесрочных макроэкономических задач. Следующие три параграфа данной главы посвящены анализу этой модели и некоторых ее приложений. Базовая неоклассическая модель экономического роста является моделью с полными рынками в том смысле, что домохозяйства и фирмы в ней имеют возможность осуществлять сделки с использованием любых товаров Эрроу—Дебре. В условиях неопределенности это означает, что полный набор *условных требований* (требований на товар при условии реализации определенного состояния природы) торгуется на рынке с совершенной конкуренцией. Например, домохозяйство обладает возможностью приобрести актив, по которому оно получает единицу конечного товара при условии реализации заранее специфицированной истории. Из существования в экономике полных рынков или полного набора условных требований следует, что домохозяйство имеет возможность полностью застраховать себя от индивидуального риска. Интересующим нас источником неопределенности в таких моделях являются агрегированные шоки. По этой причине в стандартной неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности индивидуальные шоки отсутствуют (если бы они присутствовали в ней, то домохозяйства полностью бы их диверсифицировали).

В предыдущем абзаце подчеркивается важность наличия условных требований в базовой неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности. Более того, требование о торговле полным набором условных требований является не только достаточным, но и по сути необходимым для существования репрезентативного домохозяйства в экономике в условиях неопределенности. Этот результат иллюстрируется в параграфе 17.4, где описана модель, в которой домохозяйства не имеют возможности торговать условными требованиями и используют лишь безрисковые облигации. Эта модель, основанная на важных работах Т. Бьюли в 1970-х и 1980-х гг., явным образом запрещает разделение риска между домохозяйствами и, таким образом, является моделью с «неполными рынками», в частности моделью с наиболее релевантной в макроэкономическом контексте неполнотой рынков: запретом на разделение и диверсификацию индивидуальных рисков. Домохозяйства в ней наблюдают стохастический поток трудовых доходов и могут достичь сглаживания потребления только с помощью «самострахования», то есть привлекая заимствования и осуществляя кредитование по рыночной процентной ставке. Как и модель перекрывающихся поколений из главы 9, модель Бьюли не допускает существования репрезентативного домохозяйства. Важность модели Бьюли состоит не только в том, что она показывает роль условных требований в моделях с неопределенностью, но и в том, что она предоставляет математический простой аппарат для анализа ряда макроэкономических задач, связанных с риском, колебаниями дохода и макроэкономической политикой. Поэтому в течение последних нескольких десятилетий она стала еще одной основной моделью, используемой в макроэкономическом анализе.

Последние два параграфа этой главы, параграфы 17.5 и 17.6, посвящены стохастическим моделям ПП. В первом представлено простое расширение канонической модели ПП, включающее в себя стохастические элементы.

В параграфе 17.6 показано как стохастические модели экономического роста могут быть использованы для объяснения процесса «взлета» от медленного роста к устойчивому экономическому росту, который описан в главе 1. Важное свойство долгосрочной динамики множества экономик состоит в том, что ранний этап экономического развития характеризовался медленным темпом роста экономики и частыми экономическими кризисами. Процесс взлета привел не только к увеличению темпа экономического роста, но и к более устойчивой (менее волатильной) динамике роста. Анализ этого вопроса требует использования стохастической модели экономического роста. В параграфе 17.6 изложена модель, которая предоставляет единый аппарат для анализа волатильности экономического развития и процесса взлета. Основным элементом этой модели является выбор между инвестициями в рисковые проекты и безрисковыми инвестициями с меньшей доходностью. На раннем этапе развития общество не обладает запасом ресурсов, достаточным для инвестиций в большое количество проектов, что могло бы позволить добиться диверсификации, и поэтому вынуждено нести значительные риски. Для снижения этих рисков оно осуществляет инвестиции в низкодоходные безрисковые проекты, такие как технологии хранения товаров и низкодоходные сельскохозяйственные проекты. В результате этого равновесная траектория описывается длительным процессом медленного или нулевого экономического роста и значительным уровнем волатильности экономического развития. Экономика может избежать этого этапа развития и сразу перейти к устойчивому экономическому росту, только если рисковые инвестиции в ней оказываются успешными в течение нескольких последовательных периодов времени. Если это происходит, то экономика достигает большей степени диверсификации и лучшего управления рисками посредством более развитого финансового рынка. Большая степень диверсификации позволяет снизить уровень риска и направить большее количество ресурсов в инвестиции с большей доходностью, и тем самым достигнуть роста производительности и увеличения темпа роста экономики. Таким образом, эта простая стохастическая модель экономического роста предоставляет стилизованное описание процесса «взлета» от низкого и волатильного экономического роста к устойчивому росту экономики. Модель, которую мы используем для иллюстрации этих идей, является стохастической моделью экономического роста с эндогенно неполными рынками. Следовательно, мы будем использовать эту модель для того, чтобы показать, как некоторые простые свойства марковского случайного процесса могут быть использованы для описания стохастической равновесной траектории динамики экономики и для того, чтобы подчеркнуть возможную неоптимальность, которая может возникнуть в модели с эндогенно неполными рынками. Наконец, эта модель является первым взглядом на взаимосвязь между развитием финансовых рынков и экономическим ростом. Подробному анализу этого вопроса посвящена глава 21.

17.1. Модель Брока—Мирмана

Первый анализ экономического роста в условиях случайных шоков был проведен У. Броком и Л. Мирманом в их работе 1972 года. У. Брок и Л. Мирман анализируют задачу оптимального роста и решают задачу максимизации для общественного планировщика в динамической неоклассической экономике в условиях неопределенности. Так как при совершенной конкуренции и полноте рынков первая и вторая теоремы экономики благосостояния продолжают выполняться, равновесная траектория роста экономики совпадает с траекторией ее оптимального роста. Несмотря на это, анализ равновесной траектории является более сложным и требует введения ряда новых понятий. Мы начнем с описания подхода Брока—Мирмана, а в следующем параграфе перейдем к описанию траектории экономического роста в конкурентном равновесии в условиях неопределенности.

Структура экономики схожа с ее структурой в базовой неоклассической модели экономического роста, описанной в главах 6 и 8. Время дискретно, и агрегированная производственная функция имеет следующий вид:

$$Y(t) = F(K(t), L(t), z(t)), \tag{17.1}$$

где переменная $z(t)$ обозначает стохастический элемент производительности, влияющий на производительность заданной комбинации капитала и труда в производстве единственного в экономике конечного товара. Предположим, что случайная величина $z(t)$ является марковской цепью, принимающей значение на конечном множестве $\mathcal{Z} \equiv \{z_1, ..., z_N\}$. Во многих приложениях неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности предполагается, что стохастическая переменная является трудоинтенсивным технологическим шоком, то есть агрегированная производственная функция имеет вид $Y(t) = F(K(t), L(t)z(t))$, однако в анализе, представленном в этой главе, такое дополнительное ограничение не является необходимым. Предположим также, что производственная функция F удовлетворяет предположениям 1 и 2 из главы 2, и определим выпуск на душу населения и производственную функцию на душу населения следующим образом:

$$y(t) \equiv \frac{Y(t)}{L(t)} \equiv f(k(t), z(t)),$$

где, как и ранее, переменная $k(t) \equiv K(t)/L(t)$ обозначает отношение капитала к труду. Доля δ существующего запаса капитала выбывает в течение каждого периода. Наконец, предположим, что значения $z_1, ..., z_N$ расположены в возрастающем порядке и что из неравенства $j > j'$ следует неравенство $f(k, z_j) > f(k, z_{j'})$ для всех положительных $k \in \mathbb{R}_+$. Это предположение означает, что более высокие значения случайной величины z соответствуют большей производительности при любом значении отношения капитала к труду. В дополнение предположим, что случайная величина $z(t)$ является монотонной марковской цепью (см. определение в предположении 16.6), то есть высокое значение z в текущем периоде делает событие, при котором оно останется высоким в будущем, более вероятным.

Со стороны предпочтений агентов экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства с моментальной функцией полезности $u(c)$, удовлетворяющей предположению 3 из главы 8. Репрезентативное домохозяйство в каждом периоде времени абсолютно неэластично поставляет на рынок труда единицу занятости, поэтому переменные $K(t)$ и $k(t)$ могут использоваться взаимозаменяемо. Совокупное потребление $C(t)$ и потребление на душу населения, которое мы будем обозначать как $c(t)$, также могут быть использованы взаимозаменяемо. Наконец, предположим, что решения о потреблении и сбережениях в периоде времени t делаются домохозяйством после наблюдения реализации стохастического шока в этом периоде $z(t)$.

Задача максимизации ожидаемой полезности репрезентативного домохозяйства для общественного планировщика в итеративной формулировке может быть записана следующим образом:

$$\max \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t)) \tag{17.2}$$

при ограничениях

$$k(t+1) = f(k(t), z(t)) + (1-\delta)k(t) - c(t) \text{ и } k(t) \geq 0 \tag{17.3}$$

и заданном начальном значении $k(0) > 0$. Ресурсное ограничение (17.3) должно выполняться при любой текущей реализации состояния природы и любой истории случайной величины z_t (мы пока не ввели условия на историю этих шоков, позволяющие упростить исходную формулировку задачи).

Чтобы описать траекторию оптимального роста экономики в рамках итеративной формулировки задачи, нам потребуется определить доступные планы, в частности отображения $\tilde{k}[z^t]$ и $\tilde{c}[z^t]$, введенные в предыдущей главе, где, как и ранее, последовательность $z^t \equiv (z(0), ..., z(t))$ описывает историю реализаций агрегированного шока вплоть до периода времени t. Вместо того чтобы еще раз делать все эти шаги, сразу перейдем к рекурсивной формулировке данной задачи, которая может быть записана следующим образом:

$$V(k, z) = \max_{k' \in [0, f(k,z)+(1-\delta)k]} \{u(f(k, z) + (1-\delta)k - k') + \beta \mathbb{E}[V(k', z') \mid z]\}, \tag{17.4}$$

где мы использовали обозначение «max» вместо «sup», так как эта задача максимизации всегда имеет решение. В частности, мы можем применить к этой задаче основные теоремы из предыдущей главы и получить следующее утверждение.

Утверждение 17.1. *В стохастической задаче оптимального роста, описанной выше, значение функции $V(k, z)$ определено единственным образом. Функция $V(k, z)$ является строго возрастающей по обоим своим аргументам, строго вогнутой по аргументу k и дифференцируемой при $k > 0$. Более того, существует определенная единственным образом функция выбора $\pi(k, z)$, такая, что значение капитала в периоде времени $t + 1$ задается как $k(t + 1) = \pi(k(t), z(t))$.*

Доказательство. Доказательство требует лишь проверки выполнения предположений 16.1–16.6, и в этом случае имеют место теоремы 16.1–16.7. Для этого сначала определите значение $\bar{k}$ таким образом, что $\bar{k} = f(\bar{k}, z_N) + (1-\delta)\bar{k}$, а затем покажите, что начиная с любого значения $k(0)$ значение отношения капитала к труду всегда располагается внутри компактного множества $\left[0, \max\left\{k(0), \bar{k}\right\}\right]$. ■

В дополнение приведем следующее утверждение.

Утверждение 17.2. *В стохастической задаче оптимального роста, описанной выше, функция выбора запаса капитала в следующем периоде времени $\pi(k, z)$ является строго возрастающей по своим обоим аргументам.*

Доказательство. Из предположения 3 следует, что функция $u(\cdot)$ дифференцируема, а из утверждения 17.1 — что функция $V(\cdot, \cdot)$ дифференцируема по аргументу k. Тогда для всех $k > 0$ получаем равенство

$$u'(f(k, z) + (1 - \delta)k - k') - \beta\mathbb{E}[V'(k', z') \mid z] = 0,$$

где символ V' обозначает частную производную функции $V(k, z)$ по ее первому аргументу. Так как из утверждения 17.1 следует, что функция $V(\cdot, \cdot)$ является строго вогнутой по k, это равенство может выполняться только в том случае, если значение k или z возрастает при росте значения k'. Например, рост значения k ведет к сокращению первого члена (так как функция u является строго вогнутой), поэтому для выполнения равенства необходимо увеличение значения k', ведущее к росту первого члена и сокращению второго члена (из вогнутости функции V). Доказательство необходимости увеличения значения z выглядит аналогично. ■

Вывод стохастического уравнения Эйлера для неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности также не представляет затруднений. Для этого вначале определим функцию выбора для потребления следующим образом:

$$\pi^c(k, z) \equiv f(k, z) + (1 - \delta)k - \pi(k, z),$$

где функция $\pi(k, z)$ является оптимальной функцией выбора для запаса капитала в следующем периоде времени, определенная в утверждении 17.1. Используя эти обозначения, запишем стохастическое уравнение Эйлера в следующем виде:

$$u'(\pi^c(k, z)) = \beta\mathbb{E}[(f'(\pi(k, z), z') + (1 - \delta))u'(\pi^c(\pi(k, z), z')) \mid z], \quad (17.5)$$

где символ f' обозначает производную производственной функции на душу населения по отношению капитала к труду. Стохастическое уравнение Эйлера в таком виде выглядит довольно сложно. Несколько иной способ записи делает это уравнение проще и более понятным интуитивно:

$$u'(c(t)) = \beta\mathbb{E}_t[p(t+1)u'(c(t+1))], \qquad (17.6)$$

где оператор $\mathbb{E}_t$ обозначает условное математическое ожидание при информации, доступной в периоде времени t, а переменная $p(t+1)$ является стохастическим предельным продуктом капитала (включая не выбывший капитал) в периоде времени $t+1$. Такой способ записи стохастического уравнения Эйлера также полезен для сравнения централизованного распределения ресурсов с конкурентным равновесием, так как переменная $p(t+1)$ соответствует стохастическому (в периоде $t+1$) дивиденду, выплачиваемому на единицу инвестиций в капитал в периоде t. Наконец, условие трансверсальности для оптимального плана выглядит как:

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\beta^t(f'(k(t),\ z(t))+(1-\delta)u'(c(t))k(t)\,|\,z(0)\right]=0 \qquad (17.7)$$

при заданном значении $z(0) \in Z$, где для упрощения записи мы снова использовали обозначения $c(t) = \pi^c(k(t), z(t))$ и $k(t) = \pi(k(t-1), z(t-1))$. Нетрудно убедиться, что в данной модели выполняется теорема 16.8 и поэтому условия (17.6) и (17.7) являются достаточными для описания решения задачи оптимального роста, поставленной выше.

Несмотря на то что утверждение 17.1 позволяет охарактеризовать вид функции стоимости и функции выбора, оно имеет два недостатка. Во-первых, оно не предоставляет аналога «теоремы о магистрали» (см. параграф 6.8) для нестохастической неоклассической модели экономического роста. В частности, оно не позволяет описать долгосрочную динамику экономики в неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности. Во-вторых, хотя утверждение 17.1 описывает ряд количественных результатов, в нем не проводится анализ сравнительной статики.

Полный анализ долгосрочной динамики экономики в стохастической модели экономического роста требует детального знакомства с теорией марковских случайных процессов. Однако несколько следующих простых наблюдений помогут описать основные свойства траектории отношения капитала к труду в этой модели. Запас капитала в периоде времени $t+1$ задается функцией выбора π, то есть

$$k(t+1) = \pi(k(t), z(t)), \qquad (17.8)$$

является общим марковским случайным процессом, так как до реализации шока $z(t)$ функция $k(t+1)$ является случайной величиной с функцией распределения, задаваемой запасом капитала в предыдущем периоде $k(t)$ и значением случайного шока $z(t)$. Если функция распределения шока не вырождена, то величина $k(t)$ в общем случае не будет сходиться к единственному значению (см. упражнение 17.4). С другой стороны, возможна ситуация, при которой она будет сходиться к *стационарному предельному распределению*. В действительности, нетрудно убедиться, что в этой модели присутствует такая сходимость. Уравнение (17.8) задает достаточно регулярный случайный процесс, который при любом начальном значении $k(0)$ сходится к единственному стационарному предельному распределению, что значит, что функция распределения отношения капитала к труду k на достаточно далеком временном горизонте не зависит от начального значения $k(0)$. Более того, среднее значение $k(t)$ в этом стационарном предельном распределении совпадает с пределом среднего значения по времени $\{k(t)\}_{t=0}^{T}$ при $T \to \infty$ (то есть случайный процесс для запаса капитала является эргодическим процессом). Следовательно, стационарное равновесие в этой модели описывается не определенными значениями отношения капитала к труду и выпуска на душу населения, а стационарным предельным распределением капитала. Если стохастическая переменная $z(t)$ принимает значения на достаточно малочисленном множестве, то стационарное предельное распределение будет колебаться вокруг некоторого определенного значения, которое мы можем назвать «квазистационарным состоянием» для отношения капитала к труду, так как несмотря на то, что отношение капитала к труду не сходится к этому значению, оно будет со временем возвращаться в окрестность этого числа. Однако в общем случае носитель предельного распределения будет довольно большим множеством.

Чтобы более детально описать динамику экономики в неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности, рассмотрим простой пример, в котором возможно найти решение для функции выбора π в явном виде.

Пример 17.1. Предположим, что моментальная функция полезности имеет вид $u(c) = \log c$, производственная функция задана как $F(K, L, z) = zK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ и $\delta = 1$. Как и ранее, предположим, что стохастический шок z является марковской цепью, принимающей значения на множестве $\mathcal{Z} \equiv \{z_1, ..., z_N\}$ и обозначим переходные вероятности как $q_{jj'}$. Положим $k \equiv K/L$. Из стохастического уравнения Эйлера (17.5) вытекает равенство

$$\frac{1}{zk^{\alpha} - \pi(k, z)} = \beta\mathbb{E}\left[\frac{\alpha z'\pi(k, z)^{\alpha-1}}{z'\pi(k, z)^{\alpha} - \pi(\pi(k, z), z')}\middle| z\right], \tag{17.9}$$

которое является относительно простым функциональным уравнением, описывающим функцию $\pi(\cdot, \cdot)$. Однако при этом анализ такого простого уравнения довольно затруднителен без предварительного выбора функционального вида решения. К счастью, в данном случае метод «выбора и проверки» функционального вида решения позволяет найти его в явном виде. Предположим, что функция выбора выглядит как:

$$\pi(k, z) = B_0 + B_1 z k^{\alpha}.$$

Подставляя это равенство в уравнение (17.9), получаем уравнение:

$$\frac{1}{(1-B_1)zk^\alpha - B_0} = \beta\mathbb{E}\left[\frac{\alpha z'(B_0 + B_1 zk^\alpha)^{\alpha-1}}{z'(B_0 + B_1 zk^\alpha)^\alpha - B_0 - B_1 z'(B_0 + B_1 zk^\alpha)^\alpha}\middle| z\right]. \quad (17.10)$$

Нетрудно проверить, что это уравнение не может выполняться при любом ненулевом значении $B_0 \neq 0$ (см. упражнение 17.5). Тогда, накладывая ограничение $B_0 = 0$ и записывая математическое ожидание при $z = z_{j'}$ в явном виде, преобразуем уравнение (17.10) как

$$\frac{1}{(1-B_1)z_{j'}k^\alpha} = \beta\sum_{j=1}^{N} q_{jj'}\frac{\alpha z_j\left(B_1 z_{j'}k^\alpha\right)^{\alpha-1}}{z_j\left(B_1 z_{j'}k^\alpha\right)^\alpha - B_1 z_j\left(B_1 z_{j'}k^\alpha\right)^\alpha}.$$

Упрощая каждое слагаемое в сумме, получаем уравнение:

$$\frac{1}{(1-B_1)z_{j'}k^\alpha} = \beta\sum_{j=1}^{N} q_{jj'}\frac{\alpha}{B_1(1-B_1)z_{j'}k^\alpha}.$$

Далее, вынося $z_{j'}$ и k из-под знака суммы и замечая, что по определению $\sum_{j=1}^{N} q_{jj'} = 1$, сокращая оставшиеся члены, получаем равенство $B_1 = \alpha\beta$, и поэтому независимо *от вида марковской цепи для шока z оптимальное правило выбора выглядит как*

$$\pi(k, z) = \alpha\beta z k^\alpha.$$

Читатель может убедиться в том, что этот результат совпадает с решением в примере 6.4 из главы 6, где переменная z представляет собой неслучайный параметр производительности. Другими словами, в этом случае внесение стохастической структуры в модель не изменяет оптимальной функции выбора. В упражнении 17.6 показано, что этот результат наблюдается и в случае, если шок z является общим марковским случайным процессом, а не марковской цепью. ■

Этот пример позволяет более детально описать стохастическую динамику отношения капитала к труду и выпуска на душу населения в модели. Нетрудно показать, что стохастическая динамика отношения капитала к труду в такой экономике совпадает с его динамикой в модели ПП, представленной в параграфе 17.5, и рис. 17.1 в нем применим и к примеру 17.1. Упражнение 17.7 посвящено более подробному анализу модели. К сожалению, пример 17.1 является одним из редких случаев, в котором неоклассическая модель экономического роста имеет решение в явном виде. В частности, если норма амортизации капитала δ не равна единице, то неоклассическая модель экономического роста в условиях неопределенности не допускает решения в явном виде (см. упражнение 17.8).

17.2. Конкурентное равновесие в модели экономического роста в условиях неопределенности

Далее опишем конкурентное равновесие в неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности. Рассмотрим структуру экономики в модели из предыдущего параграфа, в которой случайная величина z представляет собой шок агрегированной производительности факторов производства. Продолжим предполагать, что переменная z является марковской цепью. Стандартным образом определим понятие товаров Эрроу—Дебре, так что товары, поставляемые при различных реализациях истории z^t, соответствуют различным товарам Эрроу—Дебре. Тогда множество всех товаров в экономике является бесконечным счетным множеством. В ней выполняется вторая теорема экономики благосостояния (теорема 5.7 из главы 5), из которой следует, что траектория оптимального роста, описанная в предыдущем параграфе, может быть децентрализована как конкурентное равновесие (см. упражнение 17.9). Этот результат объясняет то, что решение стохастических моделей экономического роста чаще всего ищется, как решение задачи оптимального роста.

Далее мы кратко опишем явный вид конкурентного равновесия в этой экономике, для того чтобы формально продемонстрировать эквивалентность задачи оптимального роста и конкурентного равновесия в модели с полными рынками, а также для того, чтобы ввести ряд важных понятий, связанных с ценообразованием условных требований в конкурентном равновесии с полными рынками. Предположение о полноте рынков в контексте данной модели подразумевает, что в принципе любой товар, включая любое условное требование, торгуется на рынке с совершенной конкуренцией. Несмотря на это, как показано в параграфе 5.8, в практическом анализе модели отсутствует необходимость специфицировать структуру торговли всеми такими товарами, и некоторое подмножество этих товаров оказывается достаточным для предоставления домохозяйствам и фирм возможности заключать все необходимые им сделки. В результате анализа в этом параграфе мы определим, какое именно подмножество товаров или условных требований обычно является достаточным для существования равновесия с полными рынками. В частности, во-первых, мы опишем конкурентное равновесие в условиях неопределенности в модели, где торгуется полное множество товаров и все сделки заключаются в периоде времени $t = 0$. Затем мы продемонстрируем, каким образом эквивалентное описание конкурентного равновесия может быть получено при последовательной торговле меньшим множеством условных требований, *ценных бумаг Эрроу* (см. параграф 5.8). В обоих случаях ключевым элементом описания равновесия в модели является корректная формулировка подходящих условий равенства спроса и предложения на рынке и следующих из них условий отсутствия арбитража.

17.2.1. Конкурентное равновесие в модели с полным множеством товаров

Предположим, что предпочтения и технологии в экономике совпадают с рассмотренными в предыдущем параграфе. Напомним, что такая экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства и что производственная структура экономики может быть описана с помощью репрезентативной фирмы (теорема 5.4). Вначале опишем задачу репрезентативного домохозяйства. Домохозяйство максимизирует целевую функцию (17.2) при межвременном бюджетном ограничении, заданном в периоде времени $t = 0$.

Чтобы сформулировать межвременное бюджетное ограничение домохозяйства, введем множество $\mathcal{Z}^t$, состоящее из всех возможных историй стохастической переменной z^t вплоть до периода времени t и обозначим множество всех ее бесконечных историй как $\mathcal{Z}^\infty$. Немного злоупотребляя обозначениями, для возможной истории длины t мы будем использовать обозначение $z^t \in \mathcal{Z}^\infty$. Для любой истории z^t обозначим цену единственного конечного товара в периоде времени t, поставляемого при реализации этой истории, в единицах конечного товара в периоде $t = 0$ как $p_0[z^t]$. Потребление домохозяйства в периоде времени t при реализации истории z^t обозначим как $c[z^t]$. Далее заработную плату и, соответственно, трудовой доход домохозяйства в периоде времени t при реализации истории z^t в единицах конечного товара в периоде $t = 0$ обозначим как $w_0[z^t]$. Наконец, цену единицы капитала при реализации истории z^t обозначим как $R_0[z^t]$. Заметим, что переменная $R_0[z^t]$ здесь обозначает цену единицы капитала, а не ее арендную стоимость (в то время как в детерминистской модели экономического роста мы использовали обозначение R для арендной стоимости капитала). Такой выбор диктуется исключительно упрощением выкладок и не несет каких-либо содержательных последствий. Используя эти обозначения, запишем межвременное бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства в следующем виде:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in \mathcal{Z}^\infty} p_0[z^t] c[z^t] \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in \mathcal{Z}^\infty} w_0[z^t] + R_0[z(0)] k(0). \tag{17.11}$$

Необходимо отметить несколько важных свойств этого межвременного бюджетного ограничения[1]. Во-первых, основное свойство состоит в том, что в нем отсутствует оператор математического ожидания. Это

[1] Функция $c[z^t]$ здесь может быть проинтерпретирована как отображение из множества всех возможных историй стохастической переменной z в множество значений потребления, которое мы обозначили как $\tilde{c}[z^t]$ в предыдущей главе. В этой главе мы используем более простое обозначение $c[z^t]$ как для упрощения записи, так и для того, чтобы подчеркнуть несколько другую интерпретацию этого понятия в контексте «условных требований» на потребление в периоде времени $t = 0$ при реализации истории z^t.

связано с тем, что в экономике присутствуют полные рынки и домохозяйство заключает все свои межвременные сделки в начальный момент существования экономики $t = 0$ при заданном векторе цен требований Эрроу—Дебре. Следовательно, межвременное бюджетное ограничение имеет тот же вид, что и статическое бюджетное ограничение в стандартной теории общего равновесия. Более точно, домохозяйство приобретает требования на различные «условные» наборы потребления. Эти наборы являются условными в том смысле, что связаны с историей агрегированной переменной состояния (стохастического шока) и возможность их реализации и поставки зависит от реализации последовательности стохастических шоков. Например, символ $c[z^t]$ обозначает количество конечного товара, использованного для потребления в периоде времени t при реализации истории z^t. При реализации другой истории случайного шока это требование не будет удовлетворено. Такой способ записи межвременного бюджетного ограничения еще раз подчеркивает важность анализа модели в терминах товаров Эрроу—Дебре.

Во-вторых, в такой записи бюджетного ограничения левая его часть представляет собой совокупные расходы домохозяйства при заданных ценах всех возможных требований (то есть при заданном множестве всех цен $p_0[z^t]$). Правая часть ограничения имеет схожую интерпретацию и описывает уже трудовые доходы домохозяйства, а не его расходы. Последнее слагаемое в правой части бюджетного ограничения, $R_0[z(0)]k(0)$, является стоимостью начального запаса капитала домохозяйства (при заданном начальном значении случайного шока $z(0)$).

Наконец, правая часть уравнения (17.11) также может включать в себя прибыль, получаемую домохозяйствами (см. определение 5.1 из главы 5). Однако из того, что агрегированная производственная функция обладает свойством постоянной отдачи от масштаба и совершенной конкуренции на всех рынках, следует, что в равновесии прибыль равна нулю. Это позволяет опустить дополнительное слагаемое для прибыли в межвременном бюджетном ограничении репрезентативного домохозяйства без ограничения общности.

Целевая функция домохозяйства в периоде времени $t = 0$ также может быть записана в более явном виде как

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \sum_{z^t \in Z^{\infty}} q[z^t \mid z^0]u(c(z^t)), \tag{17.12}$$

где переменная $q[z^t \mid z^0]$ обозначает вероятность в момент времени $t = 0$ события, при котором история z^t реализуется в периоде времени t. Мы записали ее как условную вероятность для того, чтобы проследить связь между моделями, в которых все сделки заключаются в периоде времени

$t = 0$, и моделями с последовательной торговлей. Заметим, что в заданной таким образом целевой функции отсутствует оператор математического ожидания. Вместо него мы используем явное суммирование по всем возможным событиям с весами, равными вероятностям их реализации[2].

Чтобы описать конкурентное равновесие в модели, где все сделки заключаются в периоде времени $t = 0$, рассмотрим вместо рекурсивной задачи, решение которой мы отложим до следующего подпараграфа, задачу максимизации целевой функции (17.12) при ограничении (17.11). В предположении о существовании внутреннего решения необходимое условие оптимума первого порядка имеет следующий вид:

$$\beta^t q[z^t \mid z^0] u'(c(z^t)) = \lambda p_0[z^t] \tag{17.13}$$

для всех t и для всех z^t, где параметр λ является множителем Лагранжа при бюджетном ограничении (17.11) и равен предельной полезности от дохода в периоде времени $t = 0$ (см. упражнение 17.11, где показано, почему в данной задаче достаточен единственный множитель при межвременном бюджетном ограничении). Объединяя это условие первого порядка при двух различных историях z^t и $\hat{z}^t$ (в периоде времени t), имеем следующее уравнение:

$$\frac{u'(c(\hat{z}^t))}{u'(c(z^t))} = \frac{p_0[\hat{z}^t]/q[\hat{z}^t \mid z^0]}{p_0[z^t]/q[z^t \mid z^0]},$$

в правой части которого присутствует относительная цена требований на потребление при реализации историй z^t и $\hat{z}^t$. Объединяя это условие первого порядка при историях z^t и z^{t+1}, такой, что $z^{t+1} = (z^t, z(t+1))$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\beta u'(c[z^{t+1}])}{u'(c[z^t])} = \frac{p_0[z^{t+1}]/q[z^{t+1} \mid z^0]}{p_0[z^t]/q[z^t \mid z^0]}, \tag{17.14}$$

правая часть которого представляет собой условную процентную ставку между периодами времени t и $t + 1$ при реализации истории z^t (и, соответственно, истории z^{t+1}). Несмотря на то что это выражение выглядит интуитивным, оно не может использоваться для описания траекторий потребления и инвестиций до тех пор пока мы не обладаем информацией

[2] На самом деле мы можем рассматривать предпочтения репрезентативного домохозяйства как определенные на всем множестве товаров, то есть в виде функционала $U(c[z^t]_{z^t \in Z^\infty})$. Такое представление подчеркивает то, что домохозяйство осуществляет максимизацию полезности, определенной на множестве различных товаров, которыми в данном случае являются потребительские товары в различные периоды времени и при различных реализациях истории стохастического шока. В уравнении (17.12) используется свойство аддитивной сепарабельности предпочтений домохозяйства по этим товарам.

о ценах $p_0[z^t]$. Мы сможем вывести выражения для этих цен при решении задачи максимизации для репрезентативной фирмы.

Рассмотрим функцию стоимости репрезентативной фирмы в периоде времени $t = 0$, которая имеет следующий вид:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \sum_{z^t \in Z^\infty} \{p_0[z^t]F\Big(K^e[z^t], L[z^t], z(t)\Big)+$$
$$+(1-\delta)K^e[z^t]) - R_0[z^t]K^e[z^t] - w_0[z^t]L[z^t]\},$$

где, напомним, переменная $R_0[z^t]$ обозначает цену капитала, переменная $w_0[z^t]$ — заработную плату при условии реализации истории z^t, а переменные $K^e[z^t]$ и $L[z^t]$ — запас капитала и занятость на фирме при условии реализации истории z^t соответственно. Мы используем верхний индекс e в функции $K^e[z^t]$ для обозначения капитала, используемого фирмой при условии реализации истории z^t (в отличие от капитала, который сберегает домохозяйство при условии реализации истории z^t). Из максимизации прибыли фирмой вытекают следующие условия:

$$p_0[z^t]\left(\frac{\partial F(K^e[z^t], L[z^t], z(t))}{\partial K^e}+(1-\delta)\right)=R_0[z^t],$$
$$p_0[z^t]\frac{\partial F(K^e[z^t], L[z^t], z(t))}{\partial L}=w_0[z^t].$$

Используя постоянную отдачу от масштаба и переходя к подушевым переменным, запишем эти условия первого порядка следующим образом:

$$p_0[z^t](f'(k^e[z^t], z(t)) + (1-\delta)) = R_0[z^t], \tag{17.15}$$
$$p_0[z^t](f(k^e[z^t], z(t)) - k^e[z^t]f'(k^e[z^t], z(t)) = w_0[z^t],$$

где функция f' является частной производной производственной функции на душу населения по отношению капитала к труду $k^e \equiv K^e/L$. Первое уравнение связывает цену конечного товара с ценой капитала и его предельной производительностью, в то время как второе уравнение определяет заработную плату в терминах цены конечного товара и предельной производительности (в реальных терминах) труда. Уравнение (17.15) также может быть проинтерпретировано как уравнение для цены единицы капитала $R_0[z^t]$ при условии реализации истории z^t, которая равна стоимости потока дивидендов, выплачиваемых на эту единицу капитала, включая не выбывший капитал (то есть цене конечного товара $p_0[z^t]$, умноженной на сумму предельного продукта капитала $f'(k^e[z^t], z(t))$ и доли $(1 - \delta)$ не выбывшего капитала, который возвращается его владельцу в форме конечного товара в периоде времени t). Альтернативный способ описания конкурентного равновесия и записи уравнения (17.15) состоит в предположении о том, что капитал арендуется фирмами, а не приобретается ими в собственность, и анализе последовательности арендных стоимостей капитала. В упражнении 17.12 показано, что такая альтернативная формулировка приводит к тем же результатам. Этот вывод неудивителен, так как при полных рынках покупка единицы капитала в текущем периоде времени и продажа условного требования на $(1 - \delta)$ единиц капитала в следующем периоде времени эквивалентна аренде капитала на один период. Поэтому выбор формулировки, при которой капитал приобретается фирмами в собственность или арендуется ими, является лишь вопросом удобства исследователя.

Ключевым элементом описания конкурентного равновесия является спецификация условий равенства спроса и предложения на рынках. Для рынка труда такое условие выглядит просто:

$$L[z^t] = 1 \text{ при всех } z^t. \tag{17.16}$$

Для описания условия равенства спроса и предложения на рынке капитала напомним, что объем товаров на душу населения при условии реализации истории z^t, который делится между потреблением $c[z^t]$ и сбережениями $k[z^t]$, равен $f(k^e[z^t], z(t)) + (1 - \delta)k^e[z^t]$. Капитал, который используется в производстве в периоде времени $t + 1$ (при условии реализации истории z^{t+1}), должен равняться $k[z^t]$, так как именно такой запас капитала доступен в начале периода $t + 1$. Следовательно, так как запас капитала в периоде t не зависит от реализации случайного шока в следующем периоде $z(t + 1)$, условие равенства спроса и предложения на рынке капитала имеет следующий вид:

$$k^e[z^t+1] = k[z^t] \tag{17.17}$$

для любой истории $z^{t+1} = (z^t, z(t + 1))$.

Условие равенства спроса и предложения на рынке капитала также может быть представлено следующим образом:

$$c[z^t] + k[z^t] \leq f(k[z^{t-1}], z(t)) + (1 - \delta)k[z^{t-1}] \tag{17.18}$$

для любой истории $z^{t+1} = (z^t, z(t + 1))$.

Важное для описания конкурентного равновесия условие *отсутствия арбитража*, которое связывает цену капитала при условии реализации истории z^{t+1} ($R_0[z^{t+1}]$) с ценой конечного товара в периоде t ($p_0[z]$), напрямую следует из условия равенства спроса и предложения на рынке капитала. В частности, рассмотрим следующий *безрисковый арбитраж:* домохозяйство приобретает единицу конечного товара после реализации истории z^t и сберегает ее для использования в качестве капитала в периоде времени $t + 1$[3]. Одновременно с этим оно продает требования на единицу

[3] Здесь предполагается, что домохозяйства сами могут сберегать текущий выпуск и использовать его как капитал в следующем периоде времени. Так как товары в периодах t и $t + 1$ являются различными товарами Эрроу–Дебре, мы также можем ввести в модель фирмы, которые преобразуют товары периода t в товары периода $t + 1$, и в этом случае условие

капитала при реализации любой возможной истории $z^{t+1} = (z^t, z(t+1))$. Две эти транзакции не несут риска, так как единица конечного товара, приобретенная после реализации истории z^t, покрывает все обязательства по поставке единицы капитала при реализации любой возможной истории $z^{t+1} = (z^t, z(t+1))$. Следовательно, такие транзакции не должны приносить прибыль или убыток, откуда следует условие отсутствия арбитража в виде:

$$p_0[z^t] = \sum_{z(t+1)\in\mathcal{Z}} R_0[(z^t, z(t+1))]. \tag{17.19}$$

Определим *конкурентное равновесие* стандартным образом как набор доступных траекторий потребления, сбережений и запаса капитала $\{c[z^t],\ k[z^t],\ k^e[z^{t+1}]\}_{z^t\in\mathcal{Z}^t}$ и последовательностей цен $\{p_0[z^t],\ R_0[z^t],\ w_0[z^t]\}_{z^t\in\mathcal{Z}^t}$, таких, что полезность домохозяйства достигает максимума (то есть выполняется уравнение (17.13)), прибыль фирм достигает максимума (то есть выполняются уравнения (17.15) и (17.19)) и на рынках труда и капитала спрос совпадает с предложением (то есть выполняются условия (17.16), (17.17) и (17.18)).

Чтобы описать равновесную траекторию, подставим уравнения (17.15) и (17.19) в условие первого порядка для потребления (17.13) и, делая преобразования, получим следующее равенство:

$$u'\left(c[z^t]\right) = \sum_{z(t+1)\in\mathcal{Z}} \frac{\lambda p_0[z^{t+1}]}{\beta^t q[z^t \mid z^0]}\left(f'\left(k[z^t],\ z(t+1)\right)+(1-\delta)\right). \tag{17.20}$$

Используя уравнение (17.13) для периода времени $t+1$, имеем равенства:

$$\beta u'\left(c[z^{t+1}]\right) = \frac{\lambda p_0[z^{t+1}]}{\beta^t q[z^{t+1} \mid z^0]} = \frac{\lambda p_0[z^{t+1}]}{\beta^t q[z^{t+1} \mid z^t]q[z^t \mid z^0]}, \tag{17.21}$$

где во второй строке используется простой закон итеративных ожиданий в виде $q[z^{t+1} \mid z^t] = q[z^{t+1} \mid z^t]q[z^t \mid z^0]$. Подставляя уравнение (17.21) в уравнение (17.20), получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} u'(c[z^t]) &= \beta \sum_{z(t+1)\in\mathcal{Z}} q[z^{t+1} \mid z^t](f'(k[z^t],\ z(t+1)+(1-\delta))u'(c[z^{t+1}]) = \\ &= \beta\mathbb{E}\left[f'(k[z^t],\ z(t+1)+(1-\delta))u'(c[z^{t+1}]) \mid z^t\right], \end{aligned} \tag{17.22}$$

которое технически эквивалентно уравнению (17.6). Так как по теореме 16.8 стохастическое уравнение Эйлера (17.6) и условие трансверсальности (17.7)

отсутствия арбитража соответствует условию максимизации прибыли этими фирмами. Введение таких фирм никак не изменяет дальнейший анализ.

являются достаточными условиями оптимальности в задаче оптимального роста, эквивалентность задач оптимального и равновесного роста в условиях неопределенности вытекает из наблюдения о том, что уравнение (17.7) следует из межвременного бюджетного ограничения (17.11) и условия трансверсальности для репрезентативного домохозяйства.

Чтобы доказать это утверждение, вначале, с помощью рассуждений, схожих с рассуждениями из параграфа 8.6 из главы 8, заметим, что межвременное бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства (17.11) эквивалентно следующему неравенству:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sum_{z^{t-1}\in Z^{t-1}} p_0[z^{t-1}]k[z^{t-1}]\right]\geq 0. \qquad (17.23)$$

Здесь переменная $k[z^{t-1}]$ обозначает запас активов (капитала) домохозяйства при реализации истории z^{t-1}, а переменная $p_0[z^{t-1}]$ — цену конечного товара при условии реализации этой истории. Если бы предел в неравенстве (17.23) был отрицательным, то домохозяйство бы накапливало долг и нарушался бы стохастический эквивалент условия отсутствия игр Понци (а поэтому и условие (17.11)). Более того, из условия трансверсальности для домохозяйства (или локальной ненасыщаемости) следует, что неравенство (17.23) выполняется как равенство. Затем объединяя его с уравнением (17.21) для периода времени $t-1$ и замечая, что $\lambda > 0$, получаем уравнение:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\beta^{t-1}\sum_{z^{t-1}\in Z^{t-1}} q[z^{t-1}\mid z^0]u'(c[z^{t-1}])k[z^{t-1}]\right]=0.$$

Далее используем уравнение (17.22) и закон итеративных ожиданий $q[z^t\mid z^0]=q[z^t\mid z^{t-1}]q[z^{t-1}\mid z^0]$ и запишем это равенство в следующем виде:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\beta^{t-1}\sum_{z^t\in Z^t} q[z^t\mid z^0](f'(k[z^{t-1}],z(t))+(1-\delta))u'(c[z^t])k[z^{t-1}]\right]=0,$$

который совпадает с уравнением (17.7). Таким образом, имеем следующее утверждение.

Утверждение 17.3. *В описанной выше экономике траектории решения задач оптимального роста и конкурентного роста совпадают.*

Доказательство. См. упражнение 17.13. ■

17.2.2. Конкурентное равновесие в модели с последовательной торговлей

Ряд дополнительных свойств модели можно получить, перейдя от задачи, в которой все сделки заключаются в начальный период времени $t=0$, к рассмотрению задачи поиска равновесия в эквивалентном виде с последовательной торговлей с использованием подходящего множества требований Эрроу. Для этого перепишем бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства в несколько другом виде. Во-первых, нормализуем цену конечного товара в каждом периоде времени единицей (см. обсуждение в параграфе 5.8 в главе 5). Обозначим простые требования Эрроу, выплаты по которым производятся только при условии реализации определенного состояния природы как $a[z^t]$. Точнее, $a[z^t]$ обозначает активы домохозяйства в единицах конечного товара в периоде времени t при условии реализации истории z^t. Мы будем интерпретировать набор $\left\{a[z^t]\right\}_{z^t \in \mathcal{Z}^t}$ как множество условных требований на $a[z^t]$ единиц конечного товара в периоде времени t при условии реализации истории z^t, приобретенных домохозяйством. Также обозначим цену одного такого требования в периоде времени $t - 1$ при условии реализации истории z^{t-1} как $\bar{p}[z(t) \mid z^{t-1}]$, где естественным образом $z^t = (z^{t-1}, z(t))$. Количество таких требований, приобретенное домохозяйством, напрямую обозначим количеством единиц конечного товара, поставляемым по ним $a[z^{t-1}, z(t)]$. Следовательно, потоковое бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства приобретает следующий вид:

$$c[z^t] + \sum_{z(t+1) \in \mathcal{Z}} \bar{p}[z(t+1) \mid z^t] a\left[(z^t, z(t+1))\right] \le w[z^t] + a[z^t],$$

где переменная $w[z^t]$ обозначает равновесную заработную плату в единицах конечного товара при условии реализации истории z^t, то есть правая часть неравенства представляет собой общее количество ресурсов, доступное домохозяйству после реализации истории z^t, которое расходуется на потребление $c[z^t]$ и приобретение условных требований на конечный товар в следующем периоде времени $a[z^t, z(t+1)]$. Общие расходы на эти требования составляют $\sum_{z(t+1) \in \mathcal{Z}} \bar{p}\left[z(t+1) \mid z^t\right] a\left[(z^t, z(t+1))\right]$.

С помощью такой формулировки мы можем еще раз записать итеративную формулировку задачи оптимизации для домохозяйства. В целях экономии места сразу перейдем к рекурсивной формулировке задачи, оставив итеративную формулировку задачи с последовательной торговлей в качестве упражнения (см. упражнение 17.14).

Для подготовки к рекурсивной формулировке задачи обозначим текущий запас активов домохозяйства как a (в терминах обозначений, приведенных выше, он означает реализацию текущего запаса активов при некоторой истории z^t). Тогда потоковое бюджетное ограничение домохозяйства принимает следующий вид:

$$c + \sum_{z' \in \mathcal{Z}} \bar{p}[z' \mid z] a'[z' \mid z] \le w + a,$$

где переменные $\bar{p}[z' \mid z]$ обозначают цены условных требований (при условии реализации в следующем периоде состояния природы z' и текущей реализации стохастической переменной z), а переменные $a'[z' \mid z]$ — соответствующие им запасы активов. Обозначим значение функции стоимости домохозяйства, обладающего запасом активов a единиц конечного товара при реализации стохастической переменной z как $V(a, z)$. Переменными выбора для домохозяйства являются запас активов в следующем периоде времени, который мы обозначили как $a'[z' \mid z]$, и потребление в текущем периоде времени, которое обозначим как $c[a, z]$. Также обозначим вероятность того, что стохастическая переменная примет в следующем периоде значение z' при условии текущей ее реализации z как $q[z' \mid z]$. Тогда, рассматривая последовательность равновесных цен $\bar{p}$ как заданную, запишем функцию стоимости репрезентативного домохозяйства следующим образом:

$$V(a, z) = \max_{\{a'[z'|z]\}_{z' \in \mathcal{Z}}} \left\{ u\left(a + w - \sum_{z' \in \mathcal{Z}} \bar{p}[z' \mid z] a'[z' \mid z]\right) + \right.$$
$$\left. + \beta \sum_{z' \in \mathcal{Z}} q[z' \mid z] V(a'[z' \mid z], z') \right\}. \tag{17.24}$$

Как и ранее, мы можем применить к этой функции теоремы 16.1–16.7 (см. упражнение 17.15). Тогда условие первого порядка для текущего значения потребления приобретает следующий вид:

$$\bar{p}[z' \mid z] u'(c[a, z]) = \beta q[z' \mid z] \frac{\partial V(a'[z' \mid z], z')}{\partial a} \tag{17.25}$$

для любой истории $z' \in \mathcal{Z}$, где переменная $c[a, z]$ обозначает оптимальное значение потребления при условии реализации запаса активов a и стохастической переменной z.

Ключевым элементом описания равновесия снова является условие равенства спроса и предложения на рынке капитала. Обозначим сбережения репрезентативного домохозяйства при текущем значении стохастической переменной z, которые определяются до ее реализации z' в следующем периоде времени, как $k[z]$. Тогда равновесие на рынке капитала требует выполнения равенства:

$$a'[z'|z] = R[z' \mid z] k[z] \tag{17.26}$$

при всех реализациях шока $z' \in \mathcal{Z}$. Другими словами, в агрегированной экономике, во всех состояниях природы в следующем периоде времени сбережения будут совпадать, поэтому общее количество требований на конечный товар в состоянии природы z' равно произведению этого запаса сбережений и цены капитала $R[z' \mid z]$.

Как и ранее, из условия равенства спроса и предложения на рынке капитала (17.26) следует условие отсутствия арбитража, которое в данном случае принимает следующий вид:

$$\sum_{z' \in \mathcal{Z}} \overline{p}[z' \mid z] R[z' \mid z] = 1, \tag{17.27}$$

где переменная $R[z' \mid z]$ обозначает цену капитала при условии реализации состояния природы в текущем периоде z' и в предыдущем периоде z. Интуитивным образом, стоимость единицы конечного товара в текущем периоде, равная единице, должна равняться доходу, который домохозяйство получает, сберегая этот товар для использования в качестве капитала в следующем периоде времени. При реализации стохастического шока в следующем периоде z' валовая доходность в единицах конечного товара в этом периоде равна $R[z' \mid z]$, а относительная цена конечного товара завтра в единицах конечного товара сегодня равна $\overline{p}[z' \mid z]$. Следовательно, отсутствие арбитража требует, чтобы сумма по всем возможным реализациям состояния природы в следующем периоде времени z' равнялась единице (см. упражнение 17.16). Используя теорему об огибающей и уравнение (17.25), запишем следующее равенство:

$$\frac{\partial V(a, z)}{\partial a} = u'\left(c[a, z]\right),$$

а затем умножим обе части уравнения (17.25) на $R[z' \mid z]$ и просуммируем по всем возможным реализациям стохастической переменной $z' \in \mathcal{Z}$. Тогда условие первого порядка для домохозяйства принимает следующий вид:

$$u'\left(c[a, z]\right) = \beta \sum_{z' \in \mathcal{Z}} q[z' \mid z] R[z' \mid z] u'(c[a', z']) =$$
$$= \beta \mathbb{E}\left[R[z' \mid z] u'\left(c[a', z']\right) \mid z\right],$$

который совпадает с уравнением (17.6). Рассуждения, схожие с рассуждениями из подпараграфа 17.2.1, которые мы использовали для вывода условия трансверсальности в задаче оптимального роста (17.7), применимы и в анализе конкурентного равновесия. Следовательно, подход, основанный на последовательной торговле, также ведет к распределению ресурсов в конкурентном равновесии, совпадающему с решением задачи оптимального роста.

Анализ в подпараграфах 17.2.1 и 17.2.2 иллюстрирует эквивалентность задачи оптимального роста (в условиях неопределенности) и распределения ресурсов в конкурентном равновесии (с полными рынками). Принимая во внимание эту эквивалентность, которая также следует напрямую из второй теоремы экономики благосостояния (теоремы 5.7) и наблюдение о том, что первая задача является значительно более простой, большая часть литературы основывается на задаче оптимального роста, а не на явном описании конкурентного равновесия в условиях неопределенности. Стохастические равновесные траектории реальных величин являются решением подобной задачи оптимального роста, а траектории цен задаются множителями Лагранжа из этой задачи. Например, цены капитала $R[z' \mid z]$, которые также задают важнейшие межвременные цены в модели, задаются уравнениями (17.5) и (17.6) как предельный продукт капитала на траектории оптимального роста.

17.3. Приложение: модель реальных деловых циклов

Одним из важнейших приложений неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности в течение последних двадцати пяти лет стал анализ кратко- и среднесрочных колебаний в экономике. Этот подход, впервые описанный в важной статье Ф. Кидланда и Э. Прескотта [Kydland, Prescott 1982] называют теорией *реальных деловых циклов*. Основой аппарата для анализа макроэкономических колебаний в ней является неоклассическая модель экономического роста с агрегированными шоками производительности. Теория реальных деловых циклов (РДЦ) была одной из наиболее активных и спорных исследовательских областей в 1990-е гг. С одной стороны, ее концептуальная простота и относительный успех в повторении некоторых стохастических моментов занятости, потребления и инвестиций при определенной (заданной соответствующим образом) последовательности агрегированных шоков производительности привлекли большое число экономистов. С другой стороны, отсутствие в модели денежных факторов и шоков спроса, являющихся столпами кейнсианской экономики и основой предыдущих работ в теории макроэкономических колебаний, породили значительное сопротивление и дискуссии о целесообразности ее использования. Основные заслуги теории РДЦ не относятся к теме этого учебника, и их обсуждение заведет нас слишком далеко от основных вопросов теории экономического роста. Несмотря на это, краткое описание теории РДЦ будет полезным по двум следующим причинам. Во-первых, она является одним из наиболее важных приложений неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности и в последние 25 лет стала одной из наиболее часто используемых в макроэкономическом анализе моделью. Во-вторых, она позволяет увидеть, как внесение в модель решений домохозяйств об оптимальном выборе предложения труда в условиях неопределенности приводит к новым результатам. До сих пор мы везде, кроме упражнения 8.33 из главы 8, полагали, что занятость поставляется домохозяйствами на рынок труда абсолютно неэластично. Однако, так как свойства кривой предложения труда являются ключевыми в ряде макроэкономических задач, краткий анализ неоклассической модели экономического роста с эластичным предложением труда также является интересным упражнением.

Структура экономики в модели совпадает с ее структурой в параграфах 17.1 и 17.2 с единственным отличием в том, что теперь моментальная функция полезности домохозяйства имеет следующий вид:

$$u(C, L),$$

где переменная C — потребление домохозяйства, а переменная L — его предложение труда. Мы будем использовать заглавные буквы для обозначения переменных для согласованности изложения материала с последующим далее. Предположим, что функция u является вогнутой и дифференцируемой по обоим аргументам, строго возрастающей по аргументу C и строго убывающей по аргументу L. Также предположим, что множеством значений переменной L является некоторое компактное выпуклое множество $[0, \bar{L}]$.

Принимая во внимание эквивалентность между задачей оптимального роста и распределением ресурсов в конкурентном равновесии, мы остановимся на формулировке в рамках задачи оптимального роста, которая задается максимизацией следующей целевой функции:

$$\mathbb{E}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(C(t),\ L(t))$$

при потоковом ресурсном ограничении

$$K(t+1) \le F(K(t),\ L(t),\ z(t)) + (1-\delta)K(t) - C(t),$$

где, как и ранее, предположим, что агрегированный шок производительности следует марковской цепи.

Задача общественного планировщика может быть записана в рекурсивной форме следующим образом:

$$V(K, z) = \sup_{\substack{L\in[0,\bar{L}] \\ K'\in[0,F(K,L,z)+(1-\delta)K]}} \{u(F(K, L, z) + (1-\delta)K - K',\ L) + \\ + \beta\mathbb{E}[V(K', z') \mid z]\}. \tag{17.28}$$

Как и ранее, следующее утверждение является прямым следствием теорем 16.1–16.7.

Утверждение 17.4. *Функция стоимости $V(K, z)$, определенная в уравнении (17.28), является непрерывной и строго вогнутой по аргументу K, строго возрастающей по аргументам K и z и дифференцируемой по K*

при $K > 0$. В задаче существуют единственные функции выбора $\pi^k(K, z)$ и $\pi^l(K, z)$, определяющие значения запаса капитала в следующем периоде времени и предложение труда в текущем периоде как функции от текущих значений капитала K и стохастической переменной z.

Доказательство. См. упражнение 17.17. ■

В предположении о существовании внутреннего решения задачи равновесные цены могут быть найдены как значения соответствующих множителей Лагранжа и вид равновесия характеризуется стандартными условиями оптимума первого порядка. В частности, два ключевых условия первого порядка описывают динамику потребления во времени и выбор предложения труда домохозяйством. Обозначим частные производные моментальной функции полезности по ее первому и второму аргументам как u_c и u_l соответственно, частные производные производственной функции F по ее первому и второму аргументам как F_k и F_l и определим функцию выбора для потребления следующим образом:

$$\pi^c(K, z) \equiv F(K, \pi^l(K, z), z) + (1 - \delta)K - \pi^k(K, z).$$

Тогда эти условия первого порядка имеют следующий вид:

$$u_c(\pi^c(K, z), \pi^l(K, z)) =$$
$$= \beta\mathbb{E}\left[R(\pi^k(K, z), z')u_c(\pi^c(\pi^k(K, z), z'), \pi^l(\pi^k(K, z), z')) \mid z\right],$$

$$w(K, z)u_c(\pi^c(K, z), \pi^l(K, z)) = -u_l(\pi^c(K, z), \pi^l(K, z)), \qquad (17.29)$$

где переменные

$$R(K, z) = F_k(K, \pi^l(K, z), z) + (1 - \delta)$$

и

$$w(K, z) = F_l(K, \pi^l(K, z), \mathrm{z})$$

задают валовую доходность капитала и равновесную заработную плату соответственно. Заметим, что первое из условий (17.29) по существу идентично условию (17.5), в то время как второе статическое условие определяет равновесное (оптимальное) значение предложения труда. Во втором условии отсутствует оператор математического ожидания, так как оно не является межвременным и выполняется при условии реализации текущих значений запаса капитала K и агрегированного шока производительности z.

По какой причине такая модель оказывается полезной для анализа макроэкономических колебаний? Ответ на этот вопрос основывается на наблюдении о том, что оценки совокупной производительности факторов производства, полученные по методике, описанной в главе 3, говорят о том, что эта производительность является проциклической переменной, то есть она значительно колеблется и принимает высокие значения в периоды времени, когда выпуск превышает свое трендовое значение и безработица мала. Рассмотрим период времени, в котором значение переменной z мало. Очевидно, что если в это время не происходит компенсирующего увеличения предложения труда, то выпуск также будет мал, и мы можем назвать этот период рецессией. Более того, в стандартных предположениях заработная плата $w(K, z)$ и равновесное предложение труда будут в это время сокращаться[4]. Значит занятость, как и выпуск, также будет находиться на низком уровне. Таким образом, отрицательный шок производительности объясняет два основных свойства рецессий в экономике. В дополнение — если марковская цепь (или, обобщенно, марковский случайный процесс), описывающая динамику шока производительности z, обладает свойством персистентности, то значение выпуска в следующем периоде также будет мало, то есть выпуск и занятость будут демонстрировать *персистентные колебания*. Наконец, если агрегированная производственная функция $F(K, L, z)$ выглядит так, что малому значению выпуска соответствует малое значение предельного продукта капитала, то ожидания о низком значении выпуска в следующем периоде, скорее всего, будут вести к сокращению текущих сбережений и, следовательно, будущего запаса капитала (однако решения о сбережениях зависят от вида функции полезности, который определяет степень желания домохозяйств сглаживать потребление и общее воздействие эффектов дохода и замещения).

Это краткое обсуждение показывает, что неоклассическая модель экономического роста с агрегированными шоками производительности и эластичным предложением труда способна описать некоторые основные качественные характеристики цикла экономической активности. В работах по теории РДЦ также утверждается, что при подходящих предположениях эта модель также способна описать основные количественные характеристики цикла, такие как корреляции между выпуском, инвестициями и занятостью. Основные споры экономистов, связанные с моделью РДЦ, группируются вокруг следующих вопросов : (1) действительно ли модель способна повторить стохастические моменты данных, (2) являются ли стохастические моменты разумной эмпирической характеристи-

[4] Среди экономистов нет согласия о том, что заработная плата действительно является проциклической переменной. Среднее значение заработной платы не выглядит проциклическим на частоте цикла экономической активности, однако причиной этого может служить наличие смещения, связанного с выборкой из-за изменений структуры рабочей силы в течение бизнес-цикла, возникающее в результате того, что работники, теряющие работу во время рецессии, обычно отличаются от среднего работника. В зависимости от того, каким образом экономист корректирует это смещение, заработная плата становится умеренно проциклической или ациклической переменной. См., например, работы: [Bils 1995; Solon, Barsky, Parker 1994; Abraham, Haltiwanger 1995].

кой цикла экономической активности (по сравнению, например, с показателями персистентности в выпуске и занятости на различных временных горизонтах) и (3) можно ли считать подход, в котором основным источником колебаний являются экзогенные шоки агрегированной производительности факторов, отклонением от более интересного вопроса о том, что является источником шоков, приводящих к рецессиям в экономике. Необходимо отметить, что несмотря на то, что в настоящее время дискуссия вокруг теории РДЦ не так активна, как в 1990-е гг., консенсус по этим вопросам среди экономистов не был достигнут. В то же время многие расширения стандартной модели РДЦ позволяют улучшить ее базовую версию, рассмотренную в этом параграфе.

В модели, описанной далее, мы рассмотрим неоклассическую модель экономического роста без экзогенного технологического прогресса. Экзогенный технологический прогресс вводится в нее в упражнении 17.8, в котором показано, что анализ модели с технологическим прогрессом, по сути, остается таким же. В следующем примере приведен очень простой вариант модели РДЦ, который позволяет найти ее решение в явном виде (однако ценой этого является потеря некоторых интересных свойств модели).

Пример 17.2. Рассмотрим пример экономики, схожей с экономикой в модели из параграфа 17.1. В частности, предположим, что моментальная функция полезности имеет вид $U(C, L) = \log C - \gamma L$, производственная функция задана как $F(K, L, z) = zK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ и норма амортизации капитала $\delta = 1$. Допустим, что производительность z является монотонной марковской цепью, принимающей значения на конечном множестве $\mathcal{Z} \equiv \{z_1, \ldots, z_N\}$, и обозначим переходные вероятности как $q_{jj'}$. Как и в предыдущем примере, предположим, что функция выбора для капитала имеет следующий вид:

$$\pi^k(K, z) = BzK^{\alpha}L^{1-\alpha}.$$

Тогда из стохастического уравнения Эйлера (17.29) вытекает следующее равенство:

$$\frac{1}{(1-B)zK^{\alpha}L^{1-\alpha}} = \beta\mathbb{E}\left[\frac{\alpha z'(BzK^{\alpha}L^{1-\alpha})^{-(1-\alpha)}(L')^{1-\alpha}}{(1-B)z'(BzK^{\alpha}L^{1-\alpha})^{\alpha}(L')^{1-\alpha}}\middle| z\right],$$

где L' обозначает предложение труда в следующем периоде времени. Приводя подобные члены и вынося множители, не содержащие z' из-под математического ожидания, упростим его:

$$\frac{1}{(1-B)zK^{\alpha}L^{1-\alpha}} = \beta\mathbb{E}\left[\alpha(BzK^{\alpha}L^{1-\alpha})^{-1} \mid z\right],$$

откуда следует уравнение $B = \alpha\beta$. Тогда функция выбора для капитала принимает вид:

$$\pi^k(K, z) = \alpha\beta zK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

который совпадает с ее видом в примере 17.1. Далее, из условия первого порядка на рынке труда следует равенство:

$$\frac{(1-\alpha)zK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{(1-B)zK^{\alpha}L^{1-\alpha}}=\gamma.$$

Тогда функция выбора для занятости имеет вид:

$$\pi^{l}(K,\ z)=\frac{(1-\alpha)}{\gamma(1-\alpha\beta)},$$

отсюда следует, что предложение труда — величина постоянная. Причиной этого является логарифмический вид моментальной функции полезности, при котором эффекты дохода и замещения в точности компенсируют друг друга, и увеличение заработной платы, вызванное ростом агрегированной производительности, не влияет на предложение труда. В упражнении 17.19 показано, что этот результат справедлив и для более общего вида моментальной функции полезности $u(C, L) = \log C + h(L)$ при некоторой убывающей и вогнутой функции $h(\cdot)$. Стало быть, такая простая версия модели РДЦ позволяет достичь положительной корреляции между выпуском, потреблением и инвестициями, но не ведет к колебаниям на рынке труда. ■

17.4. Экономический рост и неполные рынки: модель Бьюли

Далее перейдем к фундаментально другому типу моделей экономического роста, в которых экономика не допускает существования репрезентативного домохозяйства и индивидуальные риски не могут быть полностью диверсифицированы. Эта модель впервые была введена и изучена в работах Трумана Бьюли [Bewley 1977, 1980]. В дальнейшем она была изменена, расширена и применялась в анализе различных вопросов, включая анализ структуры оптимальной фискальной политики, циклов экономической активности и ценообразования финансовых активов в работах [Aiyagari 1994; Krusell, Smith 1998, 2005]. Многие экономисты считают, что эта модель в первом приближении является лучшей аппроксимацией действительности, чем неоклассическая модель экономического роста с полными рынками. К сожалению, такая модель, которую иногда называют моделью экономики Бьюли, является намного более сложной, чем базовая неоклассическая модель экономического роста. Более того, как будет показано далее, предположение о невозможности страхования от колебаний дохода для индивида, кроме самострахования (то есть накопления активов, используемых в периоды с низким доходом), является экстремальным и может ограничить возможность использования модели в приложениях теории экономического роста.

Рассмотрим экономику, населенную континуумом индивидов единичной меры, и обозначим множество домохозяйств как $\mathcal{H}$. Каждое домохозяйство обладает целевой функцией вида (17.2) и абсолютно неэластично поставляет занятость на рынок труда. Также предположим, что вторая производная моментальной функции полезности $u''(\cdot)$ является возрастающей функцией. В отличие от базовой неоклассической модели экономического роста количество эффективных единиц труда, которое домохозяйство поставляет на рынок, изменяется во времени. В частности, положим, что в периоде времени t каждое домохозяйство $h \in \mathcal{H}$ наделено запасом труда $z^h(t)$, где реализации $z^h(t)$ являются независимой выборкой из множества $\mathcal{Z} \equiv [z_{\min}, z_{\max}]$ $(0 < z_{\min} < z_{\max} < \infty)$, то есть минимальный запас труда составляет $z_{\min}$. Предположим, что запасы труда для каждого домохозяйства являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $G(z)$, заданной на множестве $[z_{\min}, z_{\max}]$.

Производственная структура экономики совпадает со структурой базовой неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности и задается агрегированной производственной функцией (17.1), удовлетворяющей предположениям 1 и 2 (см. главу 2). Единственное отличие состоит в том, что здесь общая занятость $L(t)$ является суммой (интегралом) предложения труда всех агентов и имеет следующий вид:

$$L(t) = \int_{h \in \mathcal{H}} z^h(t)dh.$$

Из закона больших чисел следует, что занятость $L(t)$ в каждый период времени является постоянной величиной и поэтому может быть нормализована единицей. Выпуск на душу населения в экономике задается следующей функцией:

$$y(t) = f(k(t)),$$

где $k(t) = K(t)$.

Заметим, что в модели отсутствуют агрегированные шоки производительности и единственным источником неопределенности в ней являются индивидуальные шоки (на уровне индивидуальных домохозяйств). Следовательно, несмотря на то что домохозяйства испытывают колебания своих трудовых доходов и потребления, мы можем рассмотреть *стационарное* равновесие, в котором агрегированные переменные постоянны во времени. В этом параграфе мы остановимся именно на таком стационарном равновесии. В частности, заработная плата w и валовая доходность капитала R в стационарном равновесии постоянны (конечно, при этом их равновесные значения являются эндогенными величинами). Вначале рассмотрим эти цены как заданные и опишем поведение типичного домохозяйства $h \in \mathcal{H}$

(мы будем использовать термин «типичное» домохозяйство, так как несмотря на то, что оно не является репрезентативным, его задача оптимизации совпадает с задачей оптимизации любого другого домохозяйства). Оптимизационная задача такого домохозяйства состоит в максимизации целевой функции (17.2) при следующем потоковом бюджетном ограничении:

$$a^h(t+1) \leq Ra^h(t) + wz^h(t) - c^h(t)$$

для всех t, где переменная $a^h(t)$ обозначает запас финансовых активов домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ в периоде времени t. Потребление не может быть отрицательным, поэтому имеет место ограничение $c^h(t) \geq 0$. В дополнение, несмотря на то что мы не накладываем какое-либо экзогенное ограничение на заимствования, по той же причине, что и в модели перманентного дохода (см. подпараграф 16.5.1 из предыдущей главы), требование о том, что решения домохозяйства должны удовлетворять межвременному бюджетному ограничению при любой реализации неопределенности, ведет к следующему эндогенному ограничению на заимствования:

$$a^h(t) \geq -\frac{z_{\min}}{R-1} \equiv -b \tag{17.30}$$

для всех t (см. упражнение 17.20). Тогда рекурсивная формулировка задачи максимизации для домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ принимает следующий вид:

$$V^h(a, z) = \max_{a' \in [-b, Ra+wz]} \left\{u(Ra+wz-a') + \beta \mathbb{E}\left[V^h(a', z') \mid z\right]\right\}. \tag{17.31}$$

Стандартные рассуждения ведут к следующему утверждению.

Утверждение 17.5. *Функция стоимости $V^h(a, z)$, определенная в уравнении (17.31), определена единственным образом и является непрерывной и строго вогнутой по аргументам a и z и дифференцируемой по аргументу a на интервале $(-b, Ra + wz)$. Более того, функция выбора $\pi(a, z)$, которая задает значение запаса финансовых активов в следующем периоде времени, определена единственным образом, непрерывна по аргументу a и не убывает по аргументам a и z.*

Доказательство. См. упражнение 17.21. ■

Значение общего запаса капитала может быть найдено с помощью агрегирования финансовых активов всех домохозяйств в экономике, то есть в стационарном равновесии имеем следующее равенство:

$$k(t+1) \int_{h \in \mathcal{H}} a^h(t)dh = \int_{h \in \mathcal{H}} \pi(a^h(t), z^h(t))dh.$$

В этом уравнении интеграл берется по всем домохозяйствам в предположении о том, что их запасы финансовых активов и реализации случай-

ных шоков заданы. В нем используется то, что средние значения запаса финансовых активов, как в текущем, так и в последующем периоде равны между собой по определению стационарного равновесия. Для того чтобы понять это уравнение, напомним, что в неоклассической модели экономического роста функция выбора $a' = \pi(a, z)$ задает марковский случайный процесс. При достаточно слабых предположениях этот марковский случайный процесс допускает существование единственного эргодического распределения. Если это не так, то экономика может обладать несколькими стационарными равновесиями или стационарное равновесие может не существовать. В дальнейшем анализе мы будем игнорировать такие сложности и предположим, что существует единственное эргодическое распределение, которое мы обозначим как $\Gamma(a)$, так что отношение капитала к труду в стационарном равновесии определено следующим образом:

$$k^* = \iint \pi(a, z) d\Gamma(a) dG(z),$$

где мы используем то, что случайные величины z независимы и одинаково распределены между домохозяйствами и периодами времени.

Возвращаясь к производственной структуре экономики, заметим, что цены факторов производства заданы так же, как и в неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности, то есть имеют место следующие равенства:

$$R = f'(k^*) + (1 - \delta) \text{ и } w = f(k^*) - k^* f'(k^*).$$

Напомним из глав 6 и 8, что в неоклассической модели экономического роста с полными рынками в отсутствии неопределенности существует единственное стационарное равновесие, в котором $\beta R = 1$, то есть

$$f(k^{**}) = \beta^{-1} - (1 - \delta), \tag{17.32}$$

где константа k^{**} обозначает значение отношения капитала к труду в стационарном равновесии в неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности.

В экономике Бьюли уравнение (17.32) не выполняется. В ней имеет место следующее утверждение.

Утверждение 17.6. *В любом стационарном равновесии в экономике Бьюли значение отношения капитала к труду в нем k^* удовлетворяет неравенствам*

$$f'(k^*) < \beta^{-1} - (1 - \delta), \tag{17.33}$$

и

$$k^* > k^{**}, \tag{17.34}$$

где константа k^{**} обозначает значение отношения капитала к труду в стационарном равновесии в неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности.

Доказательство. Предположим, что $f'(k^*) \geq \beta^{-1} - (1 - \delta)$. Тогда из упражнения 16.11 из предыдущей главы следует, что ожидаемое значение потребления каждого домохозяйства является строго возрастающей функцией. Тогда среднее значение потребления в экономике, которое является детерминистской величиной, также строго возрастает и стремится к бесконечности. Но это противоречит предположению 2, по которому агрегированное количество ресурсов в экономике ограничено. Из этих рассуждений следует неравенство (17.33). Тогда неравенство (17.34) непосредственно вытекает из уравнения (17.32) и из строгой вогнутости функции $f'(\cdot)$ (предположение 1). ■

На интуитивном уровне — значение процентной ставки в экономике с неполными рынками оказывается ниже, чем ее значение в неоклассической модели в отсутствие неопределенности из-за того, что каждое домохозяйство имеет дополнительные стимулы к сбережениям из предосторожности для самострахования дохода. Эти дополнительные сбережения увеличивают значение отношения капитала к труду, что ведет к снижению равновесной процентной ставки. Интересное наблюдение состоит в том, что в экономике Бьюли, как и в экономике ПП из главы 9, интенсивность использования капитала в производстве превышает ее значение в неоклассической модели экономического роста. Заметим, что в обоих случаях отсутствие в экономике репрезентативного домохозяйства играет важную роль в этом результате.

Несмотря на то что модель Бьюли является одной из основных моделей макроэкономики, два ее свойства представляют собой потенциальные недостатки. Во-первых, как мы уже отметили в контексте модели ПП, источники неэффективности, возникающие вследствие избыточного накопления капитала, вряд ли являются эмпирически важными детерминантами межстрановых различий в уровне дохода на душу населения. Поэтому модель Бьюли представляет интерес не из-за большого значения отношения капитала к труду в ней. Основная ее заслуга состоит в том, что в ней в экономике существует стационарное равновесие, в котором значения агрегированных переменных постоянны во времени, тогда как домохозяйства принимают решения в условиях неопределенности и индивидуальные потребление и доход являются стохастическими переменными. В модели также подчеркивается роль индивидуальных рисков в контексте неоклассической модели экономического роста. Как далее будет показано в параграфе 17.6 и в главе 21, вопросы риска имеют большое значение в контексте экономического развития. Во-вторых, предположение о неполноте рынков в модели представляется слишком сильным. На практике домохозяйства зачастую получают трансферты в периодах низкого дохода либо по частным страховым контрактам, заключенным ими ранее, либо в форме государственной поддержки. В модели Бьюли при этом делается экзогенное предположение об отсутствии рынка страхования в экономике. В данном контексте более удовлетворительными будут модели, в которых отсутствие рынка страхования выводится из микрообоснований (например, из-за проблем риска недобросовестности или неблагоприятного отбора), или модели в которых множество рынков в экономике определяется эндогенно. Анализ моделей с ограниченной возможностью страхования ввиду существования недобросовестности риска или неблагоприятного отбора находится за пределами этой книги, однако в параграфе 17.6 мы представим модель с эндогенно неполными рынками.

17.5. Модель перекрывающихся поколений в условиях неопределенности

В этом параграфе мы коротко опишем стохастическую версию канонической модели ПП из параграфа 9.3 из главы 9. Предположим, что время дискретно, а горизонт планирования агентов бесконечен. Каждое домохозяйство живет в течение двух периодов. Как и в параграфе 9.3, предположим, что функция полезности домохозяйства из поколения, рожденного в периоде времени t, имеет следующий вид:

$$U_t(c_1(t), c_2(t+1)) = \log c_1(t) + \beta \log c_2(t+1). \tag{17.35}$$

Темп роста населения постоянен и равен n, то есть имеет место равенство

$$L(t) = (1+n)^t L(0), \tag{17.36}$$

где константа $L(0)$ обозначает размер первого поколения индивидов. Как и в параграфе 9.3, предположим, что агрегированная производственная функция имеет вид функции Кобба—Дугласа, но теперь одним из ее аргументов является стохастический шок z, который следует марковскому случайному процессу. Следовательно, общий выпуск в периоде времени t задается следующим уравнением:

$$Y(t) = z(t)K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}.$$

Переходя к подушевым переменным, имеем уравнение $y(t) = z(t)k(t)^{\alpha}$. Для упрощения обозначений, предположим, что капитал полностью выбывает после использования (то есть норма амортизации равна единице, $\delta = 1$). Нетрудно заметить, что цены факторов производства зависят только от текущих значений шока z и отношения капитала к труду k:

$$R(k, z) = \alpha z k^{\alpha-1} \text{ и } w(k, z) = (1-a)zk^{\alpha}. \tag{17.37}$$

Уравнение Эйлера для потребления домохозяйства из поколения t имеет следующий вид:

$$\frac{c_2(t+1)}{c_1(t)} = \beta R(t+1) = \beta R(k,\ z),$$

где арендная стоимость капитала $R(k, z)$ задается уравнением (17.37). Тогда функция агрегированных сбережений в периоде времени t $s(t) = s(k(t), z(t))$ определяется следующим уравнением:

$$s(k,\ z) = \frac{\beta}{1+\beta} w(k,\ z), \tag{17.38}$$

из которого, как и в канонической модели ПП и модели экономического роста Солоу, следует, что норма сбережений является постоянной величиной и равна $\beta/(1 + \beta)$.

Объединяя уравнения (17.38) и (17.36) и используя равенство $\delta = 1$, запишем формулу для запаса капитала в следующем периоде времени $k(t + 1)$ в виде:

$$k(t+1) = \pi(k,\ z) = \frac{s(k,\ z)}{(1+n)} = \frac{\beta(1-\alpha)zk^{\alpha}}{(1+n)(1+\beta)}. \tag{17.39}$$

Нетрудно увидеть, что в случае отсутствия неопределенности $z = \bar{z}$ это уравнение обладает единственной неподвижной точкой, соответствующей стационарному равновесию с отношением капитала к труду, заданным следующим равенством:

$$k^* = \left[\frac{\beta(1-\alpha)\bar{z}}{(1+n)(1+\beta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{17.40}$$

Однако если распределение случайной величины z не вырождено, то уравнение (17.39) является стохастическим разностным уравнением первого порядка. Как и в неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности, долгосрочное равновесие в этой модели определяется как инвариантное распределение запаса капитала. В данном случае уравнение (17.39) является довольно простым уравнением, описывающим стохастическую динамику экономики, и многие свойства ее равновесной траектории могут быть получены с помощью графического анализа.

Предположим, что случайная величина z распределена на множестве $[z_{min}, z_{max}]$. Тогда динамика экономики может быть описана с помощью диаграммы *стохастического соответствия*, описываемого уравнением (17.39), показанной на рис. 17.1. Диаграмма стохастического соответствия показывает все возможные значения переменной $k(t + 1)$ при заданном значении $k(t)$. Верхняя сплошная линия на рисунке соответствует реализации шока z_{max},

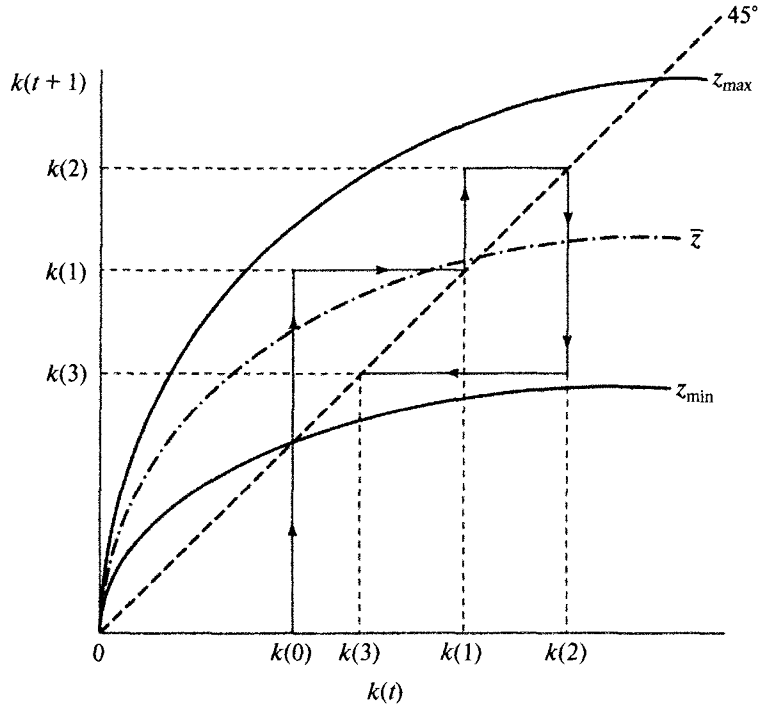

Рис. 17.1. Диаграмма стохастического соответствия в модели перекрывающихся поколений. Отношение капитала к труду в следующем периоде времени лежит в множестве, ограниченном двумя кривыми, обозначенными как z_{min} и z_{max}. Траектория $k(0) \to k(1) \to k(2) \to k(3)$, показанная на рисунке, является одной из возможных траекторий динамики экономики.

в то время как нижняя сплошная линия соответствует реализации шока z_{min}. Прерывистая кривая между ними описывает случай $z = \bar{z}$. Заметим, что обе кривые для z_{max} и z_{min} выходят из начала координат выше биссектрисы угла, что является следствием условий Инада, которые выполняются для функции типа Кобба—Дугласа — предельный продукт капитала расходится к бесконечности при стремлении запаса капитала к нулю. Диаграмма стохастического соответствия позволяет упростить анализ динамики ряда стохастических моделей. Например, на рис. 17.1 показана одна из возможных траекторий отношения капитала к труду в экономике ПП, на которой начиная со значения $k(0)$ вначале в результате достаточно благоприятного шока производительности экономика переходит в точку $k(1)$. Затем вследствие еще одного умеренно благоприятного шока производительности значение отношения капитала к труду возрастает до $k(2)$. Однако в следующем периоде времени реализация стохастической переменной оказывается очень неблагоприятной и поэтому отношение капитала к труду и выпуск на душу населения резко сокращаются. Таким образом, рис. 17.1 демонстрирует один из возможных типов динамики экономики. В следующем параграфе мы используем схожий метод для анализа другой немного более богатой модели.

Другое важное свойство модели ПП состоит в том, что наряду со стохастической моделью Солоу, описанной в упражнении 17.3, и частным случаем неоклассической модели экономического роста в примере 17.1, она является значительно более простой стохастической моделью экономического роста, чем неоклассическая модель экономического роста в условиях неопределенности. В модели ПП (с логарифмической функцией полезности) и в модели Солоу простота связана с тем, что решения домохозяйств о сбережениях являются близорукими и не зависят ни от вида функции распределения стохастических шоков, ни даже от их реализации. Поэтому такие близорукие модели или простая неоклассическая модель из примера 17.1 могут послужить альтернативой полной неоклассической модели экономического роста для анализа ряда макроэкономических задач.

17.6. Риски, диверсификация и экономический рост

В этом параграфе мы опишем стохастическую модель долгосрочного экономического роста, основанную на работе [Acemoglu, Zilibotti 1997]. Она представляет интерес по двум важным причинам. Во-первых, из-за того, что она проще, чем базовая неоклассическая модель экономического роста в условиях неопределенности, она позволяет полностью описать стохастическую динамику процесса экономического роста и показывает, как простые теоремы теории марковских случайных процессов могут быть использованы в контексте теории экономического роста. Вторая, более важная причина, состоит в том, что модель позволяет вести анализ ряда новых вопросов долгосрочного экономического роста. В частности, до сих пор наш анализ был сосредоточен на моделях с траекторией сбалансированного роста и относительно несложной переходной динамикой экономики. С другой стороны, эмпирическая динамика мирового экономического роста была намного менее упорядоченной, чем следует их таких моделей. Вплоть до наступления последних двухсот лет рост дохода на душу населения был относительно редким историческим явлением. Другими словами, устойчивый экономический рост является сравнительно недавним феноменом. Вплоть до «взлета» на траекторию устойчивого экономического роста динамика экономик характеризовалась периодами роста с последующими периодами значительного сокращения дохода и кризисами. В работах [Acemoglu, Zilibotti 1997; Imbs, Wacziarg 2003; Koren, Tenreyro 2007] показано, что даже в настоящее время динамика экономического роста в богатых странах оказывается намного более устойчивой, чем в менее развитых странах, в которых темп роста экономики имеет большую дисперсию. Во многих случаях волатильный экономический рост с низкой производительностью с последующим процессом углубления капитала, финансового развития и улучшения риск-менеджмента является хорошим описанием истории экономического роста. Знаменитый экономический историк Фернанд Бродель в своей книге [Braudel 1973; Бродель 2006–2007] описывает начало устойчивого экономического роста в Западной Европе следующим образом:

> Продвижение происходило очень медленно в течение длительного периода времени и прерывалось значительными рецессиями. Верная траектория была достигнута и после этого никогда не покинута только в XVIII в. и лишь несколькими привилегированными странами. Таким образом, вплоть до 1750 г., и даже до 1800 г., развитие прогресса могло быть остановлено неожиданными событиями и даже природными катаклизмами.

В модели, представленной в этом параграфе, такая динамика возникает эндогенно в силу того, что степень диверсификации рисков инвестиций в не полностью коррелированные проекты ограничена количеством капитала в экономике. При увеличении запаса капитала экономика достигает большей степени диверсификации и становится подвержена меньшему количеству рисков. Таким образом, равновесная динамика экономики описывается траекторией с большой волатильностью и риском на ранних этапах развития общества и со значительным снижением таких рисков после того, как экономика достигает возможности выхода на траекторию устойчивого роста. Более того, желание домохозяйств избавиться от риска ведет к инвестициям в инструменты с низкой доходностью и низким риском во время раннего этапа экономического развития, и поэтому темп роста экономики оказывается эндогенно низок до выхода ее на траекторию устойчивого роста. Следует добавить, что в этой модели экономическое развитие протекает параллельно с развитием финансовых рынков, так как большая доступность капитала позволяет добиться лучшего разделения рисков с помощью рынка финансовых инструментов. Наконец, так как эта модель является моделью с эндогенно неполными рынками, она позволяет показать, что то, что фирмы и домохозяйства рассматривают цены как заданные величины, само по себе не является достаточным условием оптимальности равновесия по Парето. Далее мы убедимся в том, что такой вид неэффективности равновесия в экономике представляет интерес как с концептуальной, так и с методологической точек зрения.

17.6.1. Предпочтения, технология и структура рынков

Рассмотрим модель ПП, в которой каждое поколение живет в течение двух периодов времени. Предположим, что население экономики постоянно, и нормализуем его единицей. Производственная структура экономики состоит из двух секторов. В первом секторе с помощью производственной функции типа Кобба—Дугласа производятся конечные товары:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}, \tag{17.41}$$

где, как обычно, переменная $L(t)$ обозначает общую занятость, а переменная $K(t)$ — общий запас капитала, доступный в периоде времени t. Предположим, что капитал полностью выбывает после использования (в терминах предыдущих обозначений $\delta = 1$).

Во втором секторе сбережения, сделанные в периоде $t - 1$, трансформируются в капитал, используемый в производстве в периоде t. Он состоит из континуума единичной меры [0, 1] промежуточных фирм. Неопределенность в экономике присутствует только в этом секторе. В частности, расположим все возможные реализации состояния природы в единичном интервале и предположим, что вложение в промежуточный сектор $j \in [0, 1]$ приносят доход только в случае реализации состояния природы j, а во всех остальных случаях их валовая доходность равна нулю. Такая структура модели предполагает, что инвестиции в промежуточный сектор эквивалентны приобретению простого требования Эрроу, приносящего доход только в одном определенном состоянии природы. Так как мощность множества промежуточных секторов континуальна, вероятность события, в котором инвестиции в заданный сектор приносят положительный доход, равна нулю, однако если домохозяйство осуществляет инвестиции в некоторое подмножество $\bar{J}$ отрезка [0, 1], то вероятность получения им положительного дохода будет положительной величиной, равной мере Лебега этого подмножества. Такая постановка задачи также предполагает, что инвестиции в каждый промежуточный сектор являются рискованными, но домохозяйства (и, в частности, репрезентативное домохозяйство в этой экономике) обладают возможностью диверсифицировать эти риски с помощью инвестиций во множество секторов. В частности, если домохозяйство осуществляет инвестиции во все промежуточные сектора, то оно получает положительный доход с вероятностью 1. Экономические взаимодействия агентов в этой модели становятся нетривиальными в силу того, что инвестиции во все сектора могут оказаться невозможны в каждый период времени ввиду возможной *невыпуклости* задачи. То есть предположим, что для каждого сектора существует *требование о минимальном размере инвестиций*, которое обозначим как $M(j)$, и положительная доходность инвестиций в этот сектор возможна лишь при том условии, что размер агрегированных инвестиций в него превышает $M(j)$.

В свете вышеописанной структуры экономики обозначим размер агрегированных инвестиций в промежуточный сектор j в периоде времени t как $I(j, t)$. Эти инвестиции приводят к образованию $QI(j, t)$ единиц капитала в периоде времени $t + 1$ в случае реализации состояния природы j и при выполнении неравенства $I(j, t) \geq M(j)$ и нуля единиц капитала в противном случае. Таким образом, требование о том, что агрегированный размер инвестиций в промежуточный сектор превышает минимальный размер, является необходимым условием их положительной доходности.

В дополнение к рисковым секторам в экономике присутствует безрисковый промежуточный сектор, в котором единица сбережений в периоде времени t трансформируется в q единиц капитала в периоде времени $t + 1$. Предположим, что выполняется следующее неравенство:

$$q < Q, \tag{17.42}$$

то есть безрисковые инвестиции являются менее доходными.

Из требования о том, что $I(j, t) \geq M(j)$, и наблюдения, что запас капитала, возникающий из сбережений $I(j, t)$ в случае реализации состояния природы j, равен $QI(j, t)$, следует, что все промежуточные секторы обладают линейной технологией, но только после выполнения требования о минимальном размере инвестиций. Для всех $I(j, t) < M(j)$ выпуск сектора равен нулю. Для того чтобы упростить изложение модели и вычисления, предположим, что распределение требования о минимальном размере инвестиций между секторами имеет следующий простой вид:

$$M(j) = \max\left\{0, \frac{D}{1-\gamma}(j-\gamma)\right\}. \tag{17.43}$$

Из этого уравнения следует, что требование о минимальном размере инвестиций отсутствует в промежуточных секторах $j \leq \gamma$, и в них могут осуществляться агрегированные инвестиции любого размера. В оставшихся секторах требование и минимальном размере инвестиций линейно растет. Требование о минимальном размере инвестиций демонстрируется на рис. 17.2. Мы будем использовать этот рисунок для демонстрации множества открытых секторов, после того как определим равновесное значение инвестиций.

Необходимо отметить три следующих важных свойства модели:

1. Рисковые инвестиции приносят бóльшую ожидаемую доходность, чем безрисковые инвестиции, что описывается предположением $q < Q$.
2. Выпуск в рисковых промежуточных секторах не полностью коррелирован, поэтому риск снижается при расширении множества секторов, в которые осуществляются инвестиции.
3. Из математической структуры модели следует простая взаимосвязь между размером инвестиций и их доходностью. Как уже неявно показано выше, если домохозяйство владеет портфелем, состоящим из равного количества инвестиций I во все промежуточные сектора j в множестве $\bar{J} \subset [0, 1]$ с мерой Лебега p, то доходность этого портфеля составляет QI с вероятностью p и 0 с вероятностью $1 - p$.

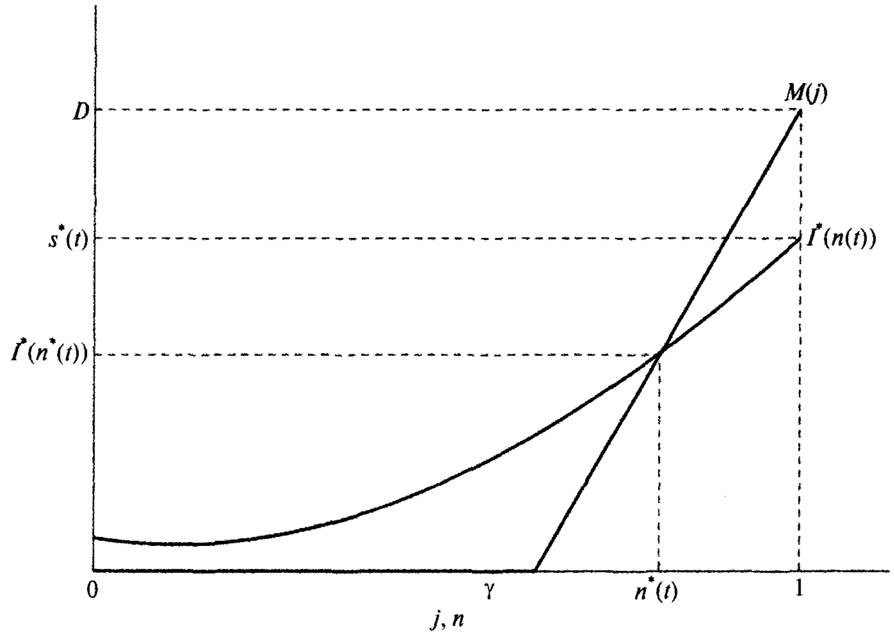

Рис. 17.2. Требование о минимальном размере инвестиций для различных секторов $M(j)$ и спрос на активы $I^*(n)$

Из двух первых свойств следует, что если бы агрегированное множество производственных возможностей в экономике было выпуклым, например при $D = 0$, то все домохозяйства бы осуществляли равные инвестиции во все сектора, что позволило бы полностью диверсифицировать все риски без снижения доходности инвестиций. Однако в присутствие невыпуклостей, возникающих из-за требования о минимальном размере инвестиций, домохозяйства вынуждены делать выбор между страхованием и высокой производительностью.

Далее перейдем к описанию предпочтений домохозяйств. Напомним, что размер каждого поколения нормализован единицей. Рассмотрим домохозяйство из поколения, рожденного в периоде времени t. Предпочтения этого домохозяйства выглядят как:

$$\mathbb{E}_t U_t(c_1(t),\ c_2(t+1)) = \log(c_1(t)) + \beta \int_0^1 \log c_2(j,\ t+1)dj, \qquad (17.44)$$

где переменная $c_1(t)$ обозначает потребление конечного товара в течение первого периода жизни домохозяйства (периода времени t), а переменная c_2 — потребление конечного товара в течение второго периода его жизни. Оператор математического ожидания $\mathbb{E}_t$ присутствует, потому что потребление во втором периоде является случайной величиной. Это явным образом показано в правой части уравнения (17.44), где переменная $c_2(j,\ t+1)$

обозначает потребление в случае реализации в периоде t состояния природы j. Так как вероятности реализации всех состояний природы равны, оператор математического ожидания заменяется интегралом. Как и в канонической модели ПП, каждое домохозяйство обладает единицей труда в первом периоде жизни и не работает во втором. Тогда общее предложение труда в экономике равно 1. Более того, во втором периоде жизни потребление домохозяйств определяется доходом от их сбережений. Для дальнейших выкладок обозначим множество молодых домохозяйств в периоде времени t как $\mathcal{H}_t$. На рис. 17.3 представлен жизненный цикл и показаны различные решения типичного домохозяйства. В нем подчеркивается, что неопределенность влияет на доходность его сбережений и поэтому на запас капитала, которым оно обладает во втором периоде своей жизни.

Агрегированный запас капитала зависит от реализации состояния природы, которое определяет, какое количество инвестиций в различные промежуточные секторы трансформировалось в капитал. Поэтому значение запаса капитала в периоде времени $t+1$ определяется реализацией состояния природы и композицией инвестиций молодых домохозяйств. В частности, в состоянии природы j агрегированный запас капитала составляет:

$$K(j,\ t+1)=\int_{h\in\mathcal{H}_t}(qX^h(t)+QI^h(j,\ t))dh,$$

где переменная $I^h(j,\ t)$ обозначает количество сбережений, инвестированное молодым домохозяйством $h\in\mathcal{H}_t$ в промежуточный сектор j, а переменная $X^h(t)$ — размер инвестиций в безрисковый промежуточный сектор.

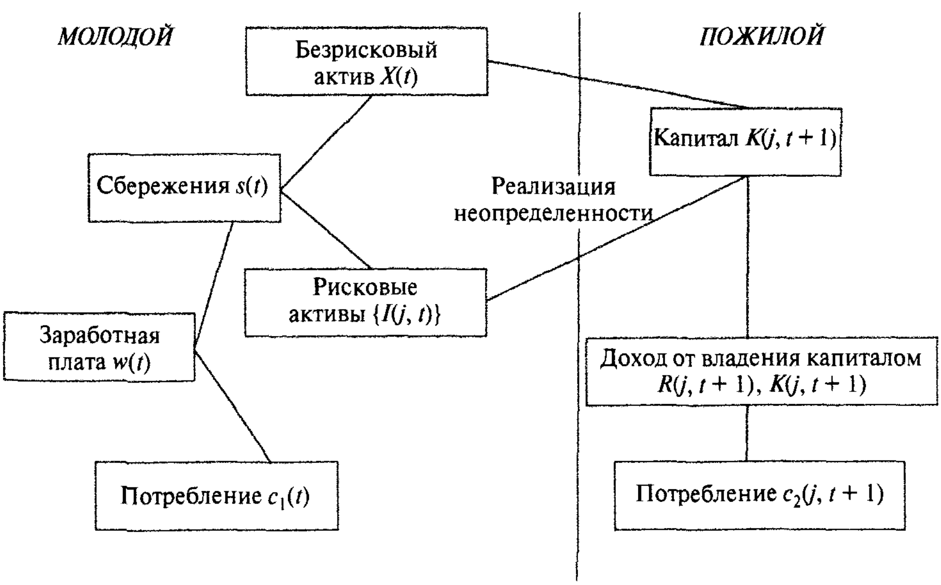

Рис. 17.3. Жизненный цикл типичного домохозяйства

Так как запас капитала является случайной величиной, выпуск и цены факторов производства также будут случайными величинами. В частности, рынки труда и капитала являются рынками с совершенной конкуренцией и поэтому равновесные цены факторов производств равны их реализовавшейся предельной производительности. Так как запас капитала в состоянии природы j в периоде времени $t+1$ равен $K(j, t+1)$, а совокупное предложение труда равно 1, цены факторов производства заданы следующими равенствами:

$$w(j,\ t+1) = (1-\alpha)K(j,\ t+1)^{\alpha}$$
$$= (1-\alpha)\left(\int_{h\in\mathcal{H}_t}(qX^h(t)+QI^h(j,\ t))dh\right)^{\alpha} \qquad (17.45)$$

и

$$R(j,\ t+1) = \alpha K(j,\ t+1)^{\alpha-1}$$
$$= \alpha\left(\int_{h\in\mathcal{H}_t}(qX^h(t)+QI^h(j,\ t))dh\right)^{\alpha-1}. \qquad (17.46)$$

Чтобы завершить описание экономики, необходимо специфицировать рыночную структуру промежуточного сектора. Предположим, что домохозяйства осуществляют инвестиции в различные промежуточные секторы с помощью финансовых посредников. Допустим свободный выход на рынок финансового посредничества (большого количества посреднических фирм или самих домохозяйств). Издержки формирования посредника равны нулю, и каждый из них направляет средства в определенный промежуточный сектор, то есть он привлекает средства, инвестирует их в определенный промежуточный сектор и предоставляет инвестору соответствующее требование Эрроу. Важное требование состоит в том, что для возможности осуществления инвестиций каждый посредник должен привлечь средства в объеме, превышающем требование о минимальном размере инвестиций. Для простоты предположим, что каждый финансовый посредник осуществляет деятельность только в одном промежуточном секторе. Такое предположение позволяет исключить возможность формирования финансовых мега-посредников, осуществляющих все инвестиции в экономике[5]. Мы вернемся к этому вопросу в подпараграфе 17.6.5.

[5] Мы жертвуем здесь математической строгостью для упрощения обозначений и рассуждений. Так как мера множества секторов континуальна, все утверждения о равновесии должны сопровождаться фразой «почти всюду». Отсюда следует, что инвестиции в определенный сектор (и даже в любое счетное подмножество отрезка $[0, 1]$ секторов) могут отклоняться от оптимальных. Кроме того, полностью строгий анализ требует рассмотрения случая, когда каждый финансовый посредник осуществляет инвестиции в множестве промежуточных секторов меры ε и перехода к предельному случаю $\varepsilon \to 0$. Далее мы будем игнорировать эти наблюдения и потребуем, чтобы инвестиции в каждом секторе были равновесными, а также предположим, что каждый посредник осуществляет инвестиции только в один сектор.

Обозначим цену требования Эрроу, связанного с промежуточным сектором j в периоде времени t как $P(j, t)$. Заметим, что неравенство $P(j, t) < 1$ не может выполняться в равновесии, так как одно требование обменивается на одну единицу конечного товара, и поэтому условие $P(j, t) < 1$ означает потерю средств покупателем. Возможно ли в равновесии неравенство $P(j, t) > 1$? Этот случай может быть отвергнут с помощью условия свободного выхода на рынок финансового посредничества. Допустим, что некоторый посредник предлагает требование на промежуточный сектор j по некоторой цене $P(j, t) > 1$ и привлекает достаточное количество средств, так что общий объем инвестиций в этот промежуточный сектор $I(j, t)$ превышает объем, заданный требованием о минимальном размере $M(j)$. Тогда в этом случае некоторый другой посредник также может выйти на рынок и предложить за это требование меньшую цену, тем самым привлекая все средства, которые бы в противном случае привлек первый посредник. Из таких рассуждений следует, что неравенство $P(j, t) > 1$ также не может выполняться в равновесии, и, таким образом, равновесная динамика описывается уравнением $P(j, t) = 1$ для всех требований, торгуемых на рынке.

17.6.2. Равновесие

Далее мы опишем равновесие в модели, представленной в подпараграфе 17.6.1. Напомним два наблюдения, сделанных нами ранее. Во-первых, не все промежуточные секторы будут *открыты* в каждом периоде времени, это значит, что на рынке в любом периоде времени обращаются требования Эрроу только на некоторое подмножество промежуточных секторов. Обозначим множество промежуточных секторов, открытых в периоде времени t, как $J(t)$. Во-вторых, из рассуждений в конце подпараграфа *17.6.1* следует, что для любого $j \in J(t)$ условие свободного выхода на рынок финансового посредничества ведет к равенству $P(j, t) = 1$. Два этих наблюдения позволят нам далее записать задачу максимизации для репрезентативного домохозяйства $h \in \mathcal{H}$, рассматривающего цены и множество торгуемых требований в периоде t как заданные. Эта задача имеет следующий вид:

$$\max_{s(t),X(t),[I(j,t)]_{0\le j\le 1}} \log c(t)+\beta\int_0^1 \log c(j,\ t+1)dj \tag{17.47}$$

при ограничениях

$$X(t)+\int_0^1 I(j,\ t)dj = s(t), \tag{17.48}$$

$$c(j, t+1) = R(j, t+1)(qX(t) + QI(i, t)), \tag{17.49}$$

$$I(j,t)=0,\ \forall j \notin J(t), \tag{17.50}$$

$$c(t) + s(t) \leq w(t), \tag{17.51}$$

где мы не используем нижний индекс h для упрощения записи. Целевая функция в уравнении (17.47) представляет собой функцию полезности домохозяйства. Уравнения (17.48)–(17.51) являются ограничениями в задаче максимизации. Первое ограничение, уравнение (17.48), говорит о том, что инвестиции в безрисковый сектор и сумма инвестиций во все остальные сектора совпадают с общим объемом сбережений домохозяйства $s(t)$. Уравнение (17.49) описывает потребление в периоде времени $t + 1$ при реализации состояния природы j. Здесь необходимо сделать два наблюдения. Во-первых, заметим, что домохозяйства поставляют занятость на рынок труда только в первом периоде жизни и потребляют доход от капитала во втором. Поэтому потребление домохозяйства в этом периоде равно произведению его запаса капитала и валовой доходности капитала $R(j, t + 1)$, заданной уравнением (17.46). Значение этой доходности зависит от реализации состояния природы j в периоде времени $t + 1$, так как количество капитала, и поэтому его предельный продукт, различаются в разных состояниях природы. Во-вторых, запас капитала, доступный домохозяйству, равен сумме дохода от безрисковых инвестиций $qX(t)$ и дохода от актива Эрроу в состоянии природы j $QI(i, t)$. Уравнение (17.50) описывает основное ограничение на поведение домохозяйства: в нем подчеркивается, что домохозяйство не имеет возможности осуществлять инвестиции в активы Эрроу, не обращающиеся на рынке. В частности, напомним, что необходимым условием открытия промежуточного сектора j является выполнение неравенства $I(i, t) \geq M(j)$ и поэтому в экономике могут существовать промежуточные секторы, которые не будут существовать в равновесии, и активы Эрроу на эти секторы не будут обращаться на рынке. Ограничение (17.50) гарантирует, что домохозяйство не осуществляет инвестиции в активы Эрроу, не обращающиеся на рынке. Наконец, неравенство (17.51) требует, чтобы сумма потребления и сбережений домохозяйства была меньше либо равна его доходу, который состоит только из заработной платы домохозяйства, заданной уравнением (17.45).

Далее определим понятие равновесия в экономике. *Статическое равновесие* — это равновесие в периоде времени t при заданном запасе капитала в периоде времени t, $K(t)$, и поэтому при заданной заработной плате $w(t)$. Назовем набор

$$s^*(t), X^*(t), \left[I^*(j,t)\right]_{0 \leq j \leq J^*(t)}, J^*(t),$$
$$\left[P^*(j,t)\right]_{0 \leq j \leq J^*(t)}, w^*(j,t), R^*(j,t)$$

статическим равновесием, если тройка $s^*(t)$, $X^*(t)$, $[I^*(j,t)]_{0 \leq j \leq 1}$ является решением задачи максимизации (17.47) при ограничениях (17.48)–(17.51) при заданных значениях $[P^*(j,\ t)]_{0\le j\le J^*(t)}$, $J^*(t)$, $w^*(j, t)$ и $R^*(j, t)$, а значения $w^*(j, t)$ и $R^*(j, t)$ удовлетворяют уравнениям (17.45) и (17.46) соответственно. В дополнение множество $J^*(t)$ и цены $[P^*(j,\ t)]_{0\le j\le J^*(t)}$ таковы, что для всех $j \in J^*(t)$ выполняется равенство $P^*(j, t) = 1$ и множество $J^*(t)$ определяется условием свободного выхода на рынок финансового посредничества в том смысле, что если некоторый актив Эрроу $j' \notin J^*(t)$ продается по цене $P^*(j', t) \ge 1$, то в решении модифицированной задачи максимизации (17.47) при ограничениях (17.48)–(17.51) выполняется неравенство $I(j, t) < M(j)$ (другими словами, размер сбережений в экономике недостаточен для открытия еще одного промежуточного сектора, который сможет привлечь достаточный объем средств для того, чтобы выполнялось условие минимального размера инвестиций). *Динамическим равновесием* назовем последовательность статических равновесий, связанных друг с другом с помощью уравнения (17.45) при заданных реализациях состояния природы j во все периоды времени $t = 1, 2, \ldots$.

Так как функция полезности в задаче максимизации (17.47) является логарифмической, норма сбережений каждого домохозяйства, как и в канонической модели ПП, будет постоянной величиной. Следовательно, независимо от задачи выбора между риском и доходностью, в равновесии выполняется следующее правило сбережений:

$$s^*(t) \equiv s^*(w(t)) = \frac{\beta}{1+\beta} w(t). \tag{17.52}$$

С помощью этого результата мы можем разбить задачу оптимизации для домохозяйства на две части: в первой определяется объем сбережений, а во второй происходит выбор оптимального портфеля активов. Такое разбиение задачи оптимизации оказывается особенно полезным в силу двух следующих наблюдений:

1. Для любых состояний природы j, $j \in J(t)$ и $j' \in J^*(t)$ выполняется равенство $I^*(j, t) = I^*(j', t)$. На интуитивном уровне, так как каждое домохозяйство наблюдает равные цены на все обращающиеся на рынке *симметричные* активы Эрроу, оно предпочтет приобретать равные количества всех активов, тем самым формируя *сбалансированный портфель активов* (см. упражнение 17.23).
2. Множество открытых промежуточных секторов в периоде времени t имеет вид $J^*(t) = [0, n^*(t)]$ при некотором $n^*(t) \in [0, 1]$. На интуитивном уровне — если в равновесии открыто лишь некоторое подмножество промежуточных секторов, то секторы с меньшим значением минимального размера инвестиций будут открываться раньше, чем секторы

с большим значением минимального размера инвестиций. Следовательно, если промежуточный сектор j^* открыт в равновесии, то открыты будут и все секторы $j \le j^*$ (см. упражнение 17.24).

Из этих наблюдений следует, что мы можем разделить множество всех состояний природы на два подмножества: состояния на отрезке $[0, n(t)]$ назовем «хорошими» в том смысле, что рисковые инвестиции оказались удачными и принесли положительную доходность, а состояния в интервале $(n(t), 1]$ назовем «плохими» в том смысле, что рисковые инвестиции оказались неудачными и принесли нулевую доходность. Очевидно, что значения доходности капитала (и заработной платы) отличаются друг от друга на этих двух подмножествах состояний природы. Обозначим доходность капитала при реализации хорошего состояния природы как $R^G(t+1)$, а при реализации плохого состояния природы как $R^B(t+1)$. Мы используем индекс $t+1$, так как доход по инвестициям выплачивается в периоде времени $t+1$. Используя такие обозначения, мы можем переписать задачу максимизации для домохозяйства в намного более простом виде следующим образом:

$$\max_{X(t),I(t)} n^*(t)\log\left[R^G(t+1)(qX(t)+QI(t))\right]+ \\ +(1-n^*(t))\log\left[R^B(t+1)qX(t)\right] \tag{17.53}$$

при ограничении

$$X(t) + n^*(t)I(t) \le s^*(t), \tag{17.54}$$

где значения переменных $n^*(t)$, $R^G(t+1)$ и $R^B(t+1)$ рассматриваются репрезентативным домохозяйством как заданные, а норма сбережений $s^*(t)$ определена уравнением (17.52). Нетрудно заметить, что из уравнения (17.46) следует равенство:

$$R^B(t+1) = \alpha(qX(t))^{\alpha-1},$$

задающее значение предельного продукта капитала в плохих состояниях природы, когда реализуется состояние $j > n^*(t)$ и доходность всех рисковых инвестиций равна нулю. Аналогичным образом уравнение

$$R^G(t+1) = \alpha(qX(t) + QI(t))^{\alpha-1}$$

задает предельный продукт капитала в хороших состояниях природы (то есть при реализации состояния $j \in [0, n^*(t)]$).

Задача максимизации (17.53) при ограничении (17.54) имеет следующее единственное решение:

$$X^*(t) = \frac{(1-n^*(t))Q}{Q-qn^*(t)}s^*(t) \tag{17.55}$$

и
$$I^*(j,\,t)=\begin{cases} I^*(n^*(t))\equiv\dfrac{Q-q}{Q-qn(t)}s^*(t) & \text{при } j\le n^*(t),\\ 0 & \text{при } j>n^*(t).\end{cases} \qquad (17.56)$$

Заметим, что из уравнения (17.56) следует, что спрос на каждый финансовый актив (или инвестиции в каждый промежуточный сектор) растет с увеличением меры множества открытых секторов, другими словами, функция $I^*(n)$ строго возрастает по n. Это следует из того, что с увеличением количества обращающихся на рынке финансовых инструментов появляется больше возможностей для диверсификации рисков и домохозяйства становятся готовы сократить свои инвестиции в безрисковые активы и увеличить свои инвестиции в рисковые активы. Этот результат имеет большое экономическое значение. Инвестиции в высокопроизводительные секторы осуществляются в недостаточном количестве, так как они несут больше риска, чем безрисковые инвестиции. Однако из-за описанной выше «безопасности в количестве» (то есть выгод первого порядка от диверсификации) при увеличении количества обращающихся на рынке финансовых инструментов (или открытых промежуточных секторов) каждое домохозяйство оказывается готовым осуществлять большие инвестиции в рисковые активы. Такая зависимость между размером множества обращающихся на рынке финансовых инструментов и инвестициями играет важную роль в динамике экономического развития, описанной далее.

Уравнения (17.52), (17.55) и (17.56) описывают максимизирующее полезность поведение репрезентативного домохозяйства при заданном множестве открытых промежуточных секторов. Чтобы полностью описать равновесие, необходимо найти множество открытых промежуточных секторов. Эта задача эквивалентна поиску порогового сектора $n^*(t)$, такого, что во всех секторах $j\le n^*(t)$ выполняется требование минимального размера инвестиций и при этом другие секторы не имеют возможности привлечь средства в объеме, достаточном для удовлетворения минимального размера инвестиций в них. Мы можем найти это пороговое значение с помощью графического анализа, построив кривую инвестиций в каждый сектор для сбалансированного портфеля активов $I^*(n^*(t))$, заданную уравнением (17.56), и кривую минимального размера инвестиций $M(j)$, заданную уравнением (17.43). Первая кривая в некотором смысле может быть проинтерпретирована как кривая спроса на активы на финансовом рынке, а вторая кривая — как кривая предложения активов. Две эти кривые и их пересечение представлены на рис. 17.2. На нем они пересекаются в единственной точке. Однако, так как обе функции являются возрастающими, в общем случае они могут пересекаться более чем в одной точке. Нетрудно убедиться, что неравенство $Q\ge(2-\gamma)q$ является достаточным условием единственности точки пересечения (см. упражнение 17.25). Если это неравенство не выполняется, то кривые могут иметь несколько точек пересечения, что соответствует случаю множественности равновесий в модели. При этом в различных равновесиях множества открытых секторов будут различаться. Если это множество невелико, то домохозяйства инвестируют большую долю своих ресурсов в безрисковые активы, и в равновесии финансируется лишь малое количество рисковых проектов. С другой стороны, при значительном количестве открытых рисковых секторов каждое домохозяйство инвестирует большую долю своих ресурсов в рисковые активы. Это, в свою очередь, позволяет открыться большему количеству секторов и приводит к лучшей диверсификации рисков для всех домохозяйств. Если в экономике существует множественность равновесий, то в равновесии с большим количеством открытых секторов ex ante полезность всех домохозяйств достигает большего значения. Несмотря на то что такая ситуация представляет интерес как иллюстрация этой модели, мы можем ожидать, что институт финансового посредничества в состоянии предотвратить возможность такого провала координации. Исходя из этого остановимся на параметризации модели, в которой выполняется неравенство $Q \geq (2-\gamma)q$. В этом случае статическое равновесие определено единственным образом и имеет место следующее утверждение.

Утверждение 17.7. *Предположим, что выполняется неравенство* $Q \geq (2-\gamma)q$. *Тогда при заданном запасе капитала* $K(t)$ *в периоде времени* t *существует единственное равновесие, в котором все сектора* $j \leq n^*(t) = n^*[K(t)]$ *открыты, а все сектора* $j > n^*[K(t)]$ *закрыты, где*

$$n^*[K(t)] = \frac{(Q+q\gamma)-\{(Q+q)^2-4q[D^{-1}(Q-q)(1-\gamma)\Gamma K(t)^{\alpha}+\gamma Q]\}^{1/2}}{2q}, \quad (17.57)$$

если $K(t) \leq D^{1/\alpha}\Gamma^{1/\alpha}$, *и* $n^*[K(t)] = 1$, *если* $K(t) > D^{1/\alpha}\Gamma^{-1/\alpha}$, *где параметр* Γ *определен как* $\Gamma \equiv (1-\alpha)\beta/(1+\beta)$. *В таком равновесии сбережения составляют*

$$s^*(t) = \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)K(t),$$

и значения переменных $X^*(t)$ *и* $I^*(j,t)$ *задаются уравнениями* (17.55) *и* (17.56) *соответственно при* $n^*(t) = n^*[K(t)]$.

Доказательство. См. упражнение 17.26. ■

Равновесное значение пороговой величины $n^*[K]$ возрастает по запасу капитала K: увеличение капитала в экономике позволяет открыться большему количеству секторов, что ведет к улучшению диверсификации рисков и стимулирует большее количество инвестиций в рисковые секторы (см. уравнение (17.56)).

17.6.3. Равновесная динамика

Перейдем к описанию равновесной динамики в модели. Используя статическое равновесие, представленное в утверждении 17.7, нетрудно полностью описать равновесную стохастическую траекторию экономики. Динамика капитала $K(t)$ определяется простым марковским процессом. Напомним, что инвестиции в рисковые секторы приносят доход с вероятностью $n^*[K(t)]$ и оказываются неуспешными с дополнительной вероятностью $1 - n^*[K(t)]$. Отсюда следует, что стохастический закон, описывающий процесс накопления капитала, выглядит как:

$$K(t+1) = \begin{cases} \dfrac{q(1-n^*[K(t)])}{Q-qn^*[K(t)]} Q\Gamma K(t)^\alpha & \text{с вероятностью } 1 - n^*[K(t)], \\ Q\Gamma K(t)^\alpha & \text{с вероятностью } n^*[K(t)], \end{cases} \tag{17.58}$$

где значение $n^*[K(t)]$ задано уравнением (17.57) и напомним, что $\Gamma = (1-\alpha)\beta/(1+\beta)$. Заметим, что значение первой строки в уравнении (17.58) всегда меньше значения второй строки, так как вторая строка описывает случай, когда инвестиции в рисковые секторы оказались успешными.

Уравнение (17.58) описывает достаточно простой марковский случайный процесс, так как при заданном значении $K(t)$ запас капитала в следующем периоде времени $K(t + 1)$ может принимать только два значения[6]. Наиболее удобным способом анализа такого процесса является графический анализ. Рассмотрим рис. 17.4, схожий с рис. 17.1. На нем показано стохастическое соответствие для марковского процесса (17.58). Основное отличие здесь в том, что на рис. 17.1 отношение капитала к труду может принимать любое значение, лежащее между кривыми для $z_{\min}$ и $z_{\max}$. С другой стороны, на рис. 17.4 капитал может принимать значение лишь на двух показанных на рисунке кривых. Верхняя кривая соответствует значению $Q\Gamma K(t)^\alpha$. Эта кривая описывает значение капитала в том случае, когда домохозяйства следуют своим равновесным инвестиционным стратегиям, заданным уравнениями (17.55) и (17.56), и в каждом периоде времени реализуется благоприятное состояние природы, так что инвестиции в рисковые секторы всегда приносят положительный доход. Нижняя кривая, имеющая вид перевернутой буквы U, соответствует значению $q(1 - n^*[K(t)])Q\Gamma K(t)^\alpha/(Q - qn^*[K(t)])$. Она описывает значение капитала

[6] Уравнение (17.58) описывает марковский случайный процесс, а не марковскую цепь, так как при разных значениях $K(t)$ множеством возможных значений переменной $K(t)$ является весь вещественный луч $\mathbb{R}_+$.

в том случае, когда инвестиции в рисковые секторы в каждом периоде времени не приносят дохода. Обе кривые на рисунке располагаются около начала координат выше прямой линии, проходящей под углом 45°. Причина этого совпадает с причиной, объясняющей схожую динамику на рис. 17.1 (напомним, что агрегированная производственная функция (17.41) удовлетворяет условиям Инада). Экономика будет находиться на верхней кривой с вероятностью $n^*[K(t)]$ и на нижней кривой с вероятностью $1 - n^*[K(t)]$. Поэтому при изменении совокупного запаса капитала в экономике изменяться будут не только вероятности успеха или провала рисковых инвестиционных проектов, но и средняя производительность. Чтобы численно описать изменения в средней производительности, введем понятие *ожидаемой* совокупной факторной производительности (СФП) при условии заданной доли открытых промежуточных секторов:

$$\sigma^e(n^*[K(t)]) = (1-n^*[K(t)])\frac{q(1-n^*[K(t)])}{Q-qn^*[K(t)]}Q + n^*[K(t)]Q. \qquad (17.59)$$

Прямым дифференцированием нетрудно убедиться, что функция $\sigma^e(n^*[K(t)])$ является строго возрастающей по аргументу $n^*[K(t)]$. Поэтому по мере того, как в экономике открываются новые промежуточные секторы, ее производительность эндогенно возрастает. Так как количество открытых секторов $n^*[K(t)]$ возрастает по $K(t)$, отсюда следует, что средняя производительность является возрастающей функцией от запаса капитала в экономике.

Утверждение 17.8. *Ожидаемая СФП в экономике $\sigma^e(n^*[K(t)])$ является возрастающей функцией от количества открытых промежуточных секторов n^* и поэтому возрастает и по запасу капитала K.*

Из анализа рис. 17.4 можно выделить еще два значения запаса капитала, они будут важны и полезны в дальнейшем анализе модели:

1. K^{QSSB}, соответствующее квазистационарному состоянию экономики, в котором всегда реализуются неблагоприятные состояния природы. Экономика будет сходиться к этому квазистационарному равновесию, если инвестиции в ней определяются уравнениями (17.55) и (17.56), но доход от рисковых инвестиций всегда равен нулю в силу неблагоприятной реализации неопределенности.
2. K^{QSSG}, соответствующее квазистационарному состоянию экономики, в котором всегда реализуются благоприятные состояния природы, что означает, что она всегда находится на верхней кривой на рис. 17.4.

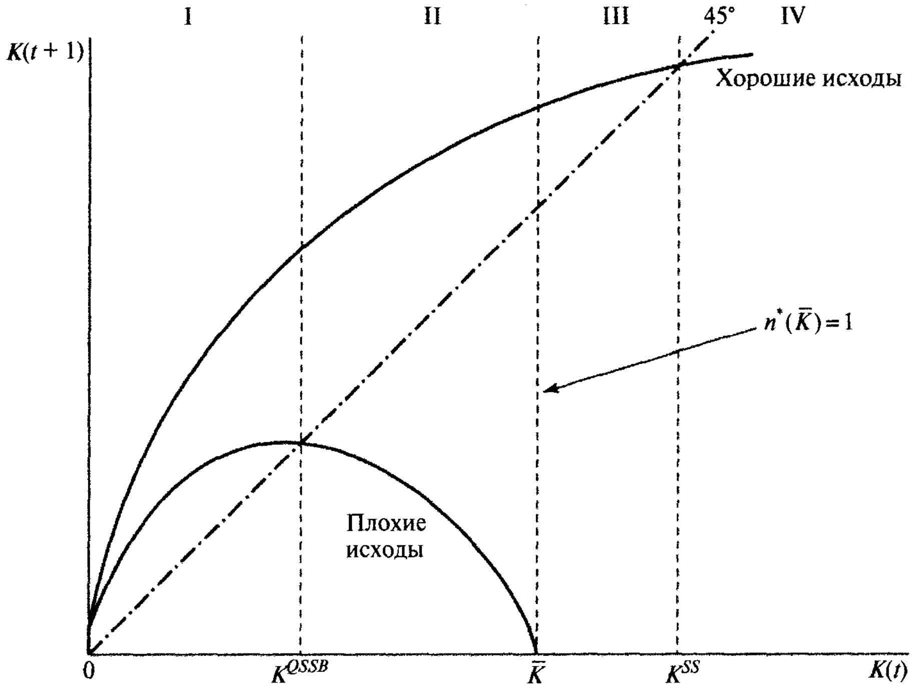

Рис. 17.4. Диаграмма стохастического соответствия для запаса капитала

Два этих значения запаса капитала показаны на рис. 17.4. Нетрудно увидеть, что они задаются следующими уравнениями:

$$K^{QSSB} = \left[\frac{q(1-n^*[K^{QSSB}]))}{Q-qn^*[K^{QSSB}]}Q\Gamma\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{ и } K^{QSSG} = (Q\Gamma)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (17.60)$$

Особенный интерес представляет значение K^{QSSG}, так как в этом случае в экономике полностью отсутствует риск и поэтому ее динамика во многом схожа с динамикой в стандартной неоклассической модели экономического роста. В частности, если в равновесии выполняется равенство $n^*[K^{QSSG}] = 1$, то значение K^{QSSG} становится надлежащим стационарным состоянием и в экономике с момента накопления запаса капитала K^{QSSG} его значение не будет изменяться. Это следует из того, что, когда экономика накопит достаточное для открытия всех секторов количество капитала, она диверсифицирует все риски и всегда будет находиться на верхней кривой на рис. 17.4.

Из уравнений (17.57) и (17.60) следует, что условие существования такого хорошего стационарного равновесия (в котором $n^*[K^{QSSG}] = 1$) состоит в том, что объем сбережений, соответствующий значению K^{QSSG}, является достаточным для возможности построения сбалансированного портфеля инвестиций во все промежуточные секторы в объеме, не меньшем, чем D. Нетрудно показать, что достаточным условием этого является следующее неравенство:

$$D < \Gamma^{\frac{1}{1-\alpha}} Q^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \qquad (17.61)$$

Поэтому если неравенство (17.61) выполняется, то в хорошем квазистационарном равновесии действительно накапливается достаточное для открытия всех промежуточных секторов и полной диверсификации рисков количество капитала и оно становится надлежащим стационарным состоянием. В этом случае обозначим значение K^{QSSG} как K^{SS}. На рис. 17.4 показано значение $n^*[K^{SS}]$ в предположении о том, что неравенство (17.61) выполняется. Более подробный анализ рис. 17.4 позволяет лучше описать равновесную стохастическую динамику модели. Рисунок делит множество значений капитала на 4 области. В области I значение запаса капитала достаточно мало, поэтому обе кривые, соответствующие благоприятной и неблагоприятной реализациям состояния природы, лежат выше биссектрисы угла, так что в этой области экономика растет независимо от того, происходит ли в ней благоприятная или неблагоприятная реализация шока производительности. Далее следует область II, которая во многом представляет наибольший интерес. В ней экономика растет в случае когда происходит позитивный шок, и переживает кризис в случае если инвестиции в рисковые активы оказываются неуспешными. Плохое квазистационарное равновесие K^{QSSB} лежит между двумя этими областями. Из анализа рис. 17.4 становится понятно, почему мы назвали это значение капитала квазистационарным равновесием. Если выполняется неравенство $K < K^{QSSB}$, то экономика растет по направлению к K^{QSSB}. Если же выполняется неравенство $K > K^{QSSB}$, то экономика может расти или сокращаться. Однако, как отмечено выше, из того, что функция $n^*[K]$ возрастает по K, следует, что в правой окрестности точки K^{QSSG} вероятность того, что экономика начнет сокращаться, максимальна (напомним, что слева от точки K^{QSSG} отрицательные шоки не ведут к рецессии).

При правдоподобной параметризации модели экономика может проводить в области II достаточно долгое время. В статье [Acemoglu, Zilibotti 1997] построен пример, в котором экономика проводит в областях I и II сколь угодно длительный период времени. Однако если экономика получает последовательность благоприятных шоков, она в конечном счете покидает область II и входит в область III. Запас капитала $\bar{K}$, который разделяет области II и III, определяется уравнением $n^*[\bar{K}] = 1$. Оно означает, что, как только экономика накапливает такое значение капитала, его становится достаточно для открытия всех промежуточных секторов. Следовательно, в области III все риски диверсифицированы и динамика модели совпадает с динамикой канонической модели ПП в отсутствие неопределенности. Наконец, начиная с любой точки в области III экономика движется к стационарному равновесию K^{SS}, которое разделяет области III и IV. С другой стороны, в области IV запас капитала настолько велик, что даже в случае благоприятной реализации случайного шока экономика будет сокращаться. Очевидно, что, если экономика не находилась в области IV в начальный период времени, она никогда не сможет войти в нее.

Такие рассуждения, объединенные с рис. 17.4, позволяют полностью описать стохастическую равновесную траекторию экономики в модели. В частности, экономика, обладающая небольшим запасом капитала в начальный период времени, вначале будет расти, но при этом испытывать значительную волатильность, когда периоды развития сменяются периодами острых кризисов. Однако в конечном счете последовательности благоприятных шоков позволяют экономике накопить достаточное количество капитала, так что почти все (в данном случае — все) риски оказываются диверсифицированы. Этот момент мы можем интерпретировать как момент взлета на траекторию устойчивого роста в анализе У. Ростоу, приведенном в главе 1. После такого взлета все риски в экономике диверсифицированы и начиная с этого периода времени экономический рост становится устойчивым, в отличие от значительных флуктуаций в области II. В дополнение из утверждения 17.8 следует, что агрегированная производительность (труда и капитала) начинает возрастать после достижения такого значения капитала. Поэтому взлет на траекторию устойчивого роста сопровождается сокращением волатильности экономической активности и ростом производительности факторов производства.

Необходимо также отметить, что с развитием экономики и накоплением большего количества капитала она достигает не только большей производительности, но и лучшей диверсификации рисков. Последнее достигается за счет открытия большего количества промежуточных секторов, что эквивалентно увеличению финансово-посреднической активности в экономике. Поэтому в этой модели экономическое и финансовое развитие происходят параллельно и их уровень определяется в равновесии совместно (то есть ни одно из них не является «причиной» другого).

Естественный вопрос, который представляет интерес: сможет ли экономика достичь области III, а затем и области IV? Ответ на него предоставляет утверждение 17.9.

Утверждение 17.9. *Предположим, что выполняется условие* (17.61). *Тогда случайный процесс* $[K(t)]_{t=1}^{\infty}$ *сходится к стационарному равновесию* K^{SS} *с вероятностью 1.*

Доказательство. См. упражнение 17.27. ■

В этом утверждении говорится о том, что волатильность в экономике в конечном счете сократится (в действительности полностью исчезнет). Еще один интересный вопрос состоит в том, будет ли амплитуда экономических флуктуаций систематически связана со значениями капитала и выпуска в экономике. Этот вопрос в особенности важен в свете того, что как из межстрановых, так и из межвременных сравнений следует, что колебания экономической активности имеют большую амплитуду в странах с низким доходом. Для ответа на этот вопрос рассмотрим условную дисперсию СФП (ее ожидаемое значение определено в уравнении (17.59)). Обозначим случайную величину, принимающую значения $q(1 - n^*[K(t)]) \times \times Q/(Q - qn^*[K(t)])$ и Q с вероятностями $(1-n^*[\bar{K}(t)])$ и $n^*[\bar{K}(t)]$ соответственно, как $\sigma(n^*[K(t)])$. Математическое ожидание этой случайной величины равно $\sigma^e(n^*[K(t)])$, заданное уравнением (17.59). Переходя к логарифмам, перепишем уравнение (17.58) в следующем виде:

$$\Delta\log(K(t+1)) = \log\Gamma - (1-\alpha)\log(K(t)) + \log(\sigma(n^*[K(t)])). \qquad (17.62)$$

Из уравнения (17.62) нетрудно увидеть, что волатильность темпа роста капитала (и выпуска) после очистки от стандартного неоклассического эффекта детерминистской сходимости определяется случайной величиной σ. Обозначим условную дисперсию случайной величины $\sigma(n^*[K(t)])$ при заданном значении капитала $K(t)$ как V_n и сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 17.10. *Пусть*

$$V_n \equiv \mathrm{Var}(\sigma(n^*) \mid n^*) = n^*(1-n^*)[Q(Q-q)/(Q-qn^*)]^2.$$

Если выполняется неравенство $\gamma \geq Q/(2Q - q)$, то $\partial V_n/\partial K \leq 0$ при всех $K \geq 0$. Если выполняется неравенство $\gamma < Q/(2Q - q)$, то существует положительное $\tilde{K}$, такое, что $n^*[\tilde{K}] = Q/(2Q-q) < 1$ и

$$\frac{\partial V_n}{\partial K} \leq 0 \text{ при всех } K \geq \tilde{K} \text{ и } \frac{\partial V_n}{\partial K_t} > 0 \text{ при всех } K < \tilde{K}.$$

Доказательство. См. упражнение 17.28. ■

Динамика волатильности темпа роста экономики определяется в этом утверждении эффектами двух противоположных сил: во-первых, с развитием экономики большее количество сбережений направляется в инвестиции в рисковые активы, во-вторых, по мере открытия новых промежуточных секторов улучшается диверсификация индивидуальных рисков. В утверждении показано, что если выполняется неравенство $\gamma \geq Q/(2Q - q)$, то второй эффект доминирует, поэтому в более богатых экономиках уровень риска оказывается ниже. Если выполняется неравенство $\gamma < Q/(2Q - q)$, то при достаточно малом запасе капитала первый эффект доминирует, однако после того как капитал достигает порогового значения $\tilde{K}$, доминировать начинает второй эффект. Поэтому, исключая достаточно малое значение капитала, волатильность темпа роста экономики везде будет убывающей функцией от уровня дохода в ней.

17.6.4. Оптимальность равновесия по Парето

В подпараграфе 17.6.3 мы описали стохастическое равновесие в модели. Является ли такое равновесие оптимальным по Парето? Так как все домохозяйства рассматривают цены в экономике как заданные величины, читатель может предположить, что ответ на этот вопрос будет утвердительным. Далее мы покажем, что это не так. Несмотря на то что на первый взгляд этот результат кажется неожиданным, на самом деле он интуитивен и представляет значительный интерес. Во-первых, он является следствием присутствия в экономике важной монетарной экстерналии. Во-вторых, он понятен с точки зрения теории общего равновесия: несмотря на то что все домохозяйства рассматривают цены как заданные величины, экономика в модели не является экономикой Эрроу—Дебре, так как множество торгуемых в ней товаров определяется в равновесии эндогенно условиям равенства прибыли нулю. Чтобы продемонстрировать эти результаты в наиболее прозрачной форме, мы проигнорируем все возможные источники межвременной неоптимальности (которая, как показано в главе 9, может возникать в модели ПП). Поэтому мы зафиксируем объем сбережений $s(t)$ (или запас капитала $K(t)$) и проанализируем, будут ли сбережения распределяться между различными промежуточными секторами экономики оптимально (при их заданной величине). Рассмотрим задачу общественного планировщика, который максимизирует ожидаемую полезность репрезентативного домохозяйства при заданном объеме сбережений $s(t)$:

$$\max_{n(t),X(t),[I(j,t)]_{0\le j\le n(t)}} \int_0^{n(t)} \log(qX(t)+QI(j,\ t)dj+(1-n(t))\log(qX(t)) \qquad (17.63)$$

при ограничении

$$X(t)+\int_0^{n(t)} I(j,\ t)dj \le s(t).$$

Общественный планировщик выбирает множество открытых промежуточных секторов, которое мы обозначим как $[0,\ n(t)]$, объем инвестиций в безрисковый сектор $X(t)$ и распределение средств по открытым рисковым секторам $[I(j,\ t)]_{0\le j\le n(t)}$. Вообще говоря, общественный планировщик может выбирать любое множество открытых секторов, а не только замкнутый отрезок $[0, n(t)]$, однако из рассуждений в упражнении 17.24 следует, что предположение о такой структуре множества открытых секторов не ограничивает общность анализа. Ограничение задачи говорит о том, что сумма инвестиций в безрисковый и рисковые секторы не превышает объем сбережений, доступный планировщику. Основное различие между этой задачей и задачей максимизации репрезентативного домохозяйства (17.47) состоит в том, что общественный планировщик выбирает переменную $n(t)$, в то время как домохозяйство рассматривает множество обращающихся на рынке активов как заданное. Распределение ресурсов общественным планировщиком (и, следовательно, оптимальное по Парето распределение ресурсов в экономике) задается решением этой задачи максимизации. Ее решение описано в следующем утверждении.

Утверждение 17.11. *Пусть значение* $n^*[K(t)]$ *задано уравнением* (17.57), *а текущие значения сбережений и капитала, доступные общественному планировщику, равны* $s(t)$ *и* $K(t)$. *Тогда единственное решение задачи максимизации* (17.63) *выглядит следующим образом. Для всех* $s(t) < D$ *множеством открытых промежуточных секторов является отрезок* $[0, n^S[K(t)]]$, *где* $n^S[K(t)] > n^*[K(t)]$. *Объем инвестиций в безрисковый сектор равен* $X^S(t)$, *где* $X^S(t) < X^*(K(t))$. *Наконец, существует* $j^*(t) \in (0, n^S[K(t)])$, *такой, что портфель инвестиций в рисковые активы имеет следующий вид:*

$$
\begin{aligned}
I^S(j, t) &= M(j^*) > M(j) \text{ при } j < j^*,\\
I^S(j, t) &= M(j) \text{ при } j \in [j^*(t), n^S[K(t)]], \qquad (17.64)\\
I^S(j, t) &= 0 \text{ при } j > n^S[K(t)].
\end{aligned}
$$

Для всех $s(t) > D$, $n^S[K(t)] = n^*[K(t)] = 1$, *и* $I^S(j, t) = s(t)$ *для всех* $j \in [0, 1]$.

Доказательство. См. упражнение 17.29. ■

Из этого утверждения следует, что если экономика не достигает полной диверсификации рисков, то общественный планировщик открывает большее количество секторов, чем в децентрализованном равновесии. Он будет финансировать дополнительные промежуточные секторы, отклоняясь от *сбалансированного портфеля* инвестиций, который всегда формирует домохозяйство в децентрализованном равновесии. Другими словами, он будет осуществлять меньше инвестиций в секторы без требования их минимального объема. Оптимальное по Парето распределение средств в рисковые секторы показано на рис. 17.5.

Отклонение от сбалансированного портфеля инвестиций означает, что общественный планировщик неявным образом осуществляет перекрест-

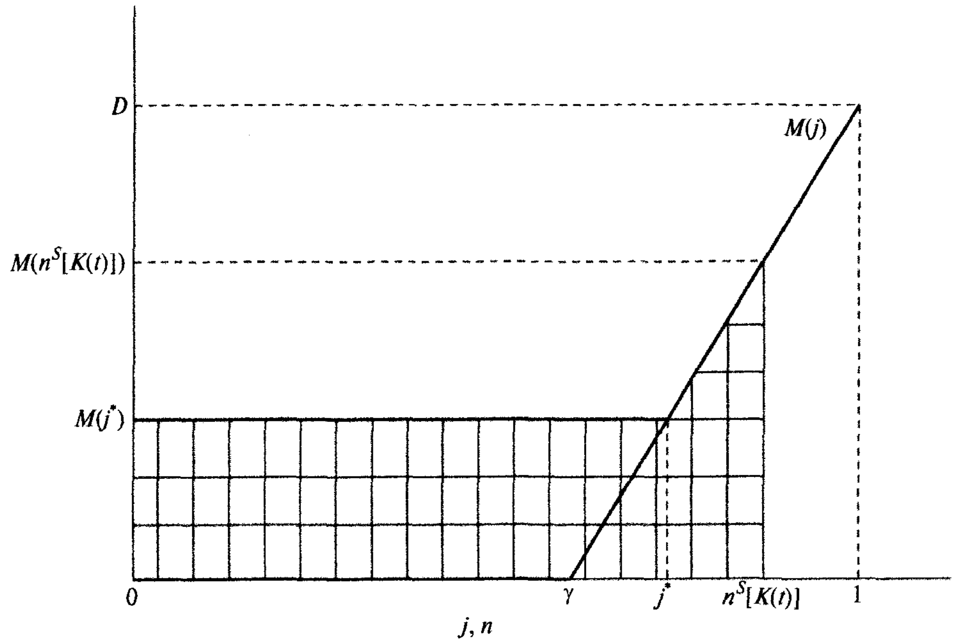

Рис. 17.5. Оптимальный по Парето портфель инвестиций

ное субсидирование секторов с высоким требованием о минимальном размере инвестиций за счет секторов с низким требованием о минимальном размере инвестиций и секторов, в которых этого требования нет. Это связано с тем, что открытие дополнительных секторов при начальном сбалансированном портфеле увеличивает полезность всех домохозяйств, так как они смогут добиться лучшей диверсификации рисков. Единственный способ для общественного планировщика достичь этого состоит в неявном налогообложении секторов с низким требованием о минимальном размере инвестиций и секторов, в которых этого требования нет (поэтому он осуществляет в них меньше инвестиций), и субсидировании предельных секторов с высоким требованием о минимальном размере инвестиций.

Почему в децентрализованном равновесии не достигается оптимального распределения ресурсов? Мы можем предложить два дополняющих друг друга интуитивных объяснения. Первое состоит в том, что предельный доллар инвестиций домохозяйств в промежуточные секторы с высоким требованием о минимальном размере инвестиций создает монетарную экстерналию, так как эти инвестиции способствуют открытию таких секторов и тем самым создают большие возможности диверсификации рисков для всех домохозяйств. Однако при этом каждое отдельное домохозяйство, рассматривающее цены как заданные величины, не принимает эту экстерналию во внимание и поэтому осуществляет недостаточное количество инвестиций в предельные секторы с высоким требованием о минимальном размере инвестиций. Таким образом, причина неоптимальности децентрализованного равновесия состоит в том, что каждое домохозяйство в своих решениях не учитывает их влияние на возможности диверсификации рисков другими домохозяйствами. Второе интуитивное объяснение неоптимальности децентрализованного равновесия связано с первым. Так как домохозяйства рассматривают цены как заданные величины, и в равновесии во всех открытых секторах $P(j, t) = 1$, они всегда будут формировать сбалансированный портфель активов. Однако в оптимальном по Парето распределении ресурсов общественный планировщик осуществляет перекрестное субсидирование промежуточных секторов и формирует несбалансированный портфель активов. Рыночные цены не побуждают домохозяйства формировать такой портфель.

Здесь читатель может спросить, почему в этой модели неприменима первая теорема экономики благосостояния (в особенности учитывая тот факт, что все домохозяйства рассматривают цены как заданные величины). Это связано с тем, что равновесие в экономике не является равновесием Эрроу—Дебре. В частности, это равновесие в экономике с эндогенно неполными рынками, в котором множество открытых рынков определяется условием равенства прибыли нулю. Ценообразование всех товаров, торгуемых в равновесии, происходит на рынке с совершенной конкуренцией, однако в экономике отсутствует конкурентное ценообразование товаров, которые не торгуются. С другой стороны, в равновесии Эрроу—Дебре цены определены даже для тех товаров, которые не торгуются в равновесии, и, более того, в нем товар не торгуется в равновесии, только если его цена равна нулю и при нулевой цене его предложение избыточно. В этом смысле децентрализованное равновесие, описанное выше, не является равновесием Эрроу—Дебре. На самом деле нетрудно убедиться, что такое равновесие Эрроу—Дебре в данной экономике не существует, так как множество производственных возможностей не является выпуклым. Вместо него мы здесь используем более естественное понятие конкурентного равновесия, требуя, чтобы ценообразование всех торгуемых товаров происходило на рынке с совершенной конкуренцией, и затем определяем множество торгуемых товаров с помощью условия свободного выхода на рынок финансового посредничества. Дополнительное обсуждение понятия такого равновесия приведено в параграфе Литература далее.

17.6.5. Неоптимальность по Парето и другие структуры рыночной организации

Сможем ли мы преодолеть провал финансового рынка, если введем в экономику другие финансовые институты, которые будут координировать инвестиционные решения домохозяйств? Представим себе, что вместо того, чтобы все домохозяйства действовали независимо и игнорировали воздействия своих решений на решения других домохозяйств, распределение средств в экономике осуществляется финансовыми коалициями. Такие коалиции могут привлекать все сбережения и предлагать домохозяйствам *сложные* финансовые инструменты (в отличие от активов Эрроу), доход по которым в каждом состоянии природы j равен $QI^S(j, t) + qX^S(t)$, где значения переменных $I^S(j, t)$ и $X^S(t)$ соответствуют оптимальному портфелю инвестиций. Владение таким активом позволит домохозяйству увеличить свою полезность по сравнению с конкурентным равновесием.

Несмотря на то что из подобного рассуждения может показаться, что неоптимальность распределения ресурсов в модели может быть связана с возможностью формирования более сложных финансовых институтов, в действительности это не так. Выдающийся результат состоит в том, что до тех пор, пока мы не делаем очень строгие предположения о множестве контрактов, предлагаемых финансовыми институтами, равновесное распределение ресурсов в экономике, возникающее в результате конкуренции между финансовыми посредниками, совпадает с распределением ресурсов в утверждении 17.7. Полный анализ этого результата выходит за рамки данной книги, однако краткое обсуждение позволит привести его интуитивное объяснение. Допустим, что сложные финансовые институты являются «союзом посредников», то есть множествами домохозяйств, которые объединяют свои сбережения и инвестируют в определенный портфель промежуточных секторов. Такие союзы могут формироваться некоторыми домохозяйствами, и если вступление в союз оказывается выгодно для других домохозяйств, то организатор союза может начать требовать премию (например, вступительный взнос) и тем самым получать прибыль. Допустим, что каждое домохозяйство обладает возможностью создавать союзы и поэтому любое из них будет пользоваться возможностью получить прибыль, если такая возможность есть. Также наложим некоторую структуру на временное устройство рынка финансового посредничества и на то, как домохозяйства могут участвовать в различных союзах.

1. В каждом периоде времени союз максимизирует взвешенное среднее полезностей всех ее членов. В частности, союз не может выбирать последовательность действий, которая противоречит интересам ее членов в будущем.
2. Союз не может запрещать домохозяйствам осуществлять инвестиции в тот или иной проект.

Следующее утверждение доказано в работе [Acemoglu, Zilibotti 1997].

Утверждение 17.12. *Множество равновесий в игре финансового посредничества, описанной выше, всегда не пусто. Все равновесия в ней имеют такую же структуру, как и равновесия, описанные в подпараграфе* 17.6.2 *и в утверждении* 17.7.

Мы не будем приводить доказательства этого утверждения, так как для строгой формулировки утверждения и его доказательства потребуются новые обозначения. Однако его интуитивное объяснение вполне очевидно: как показано в утверждении 17.11, в оптимальном по Парето распределении ресурсов формируется несбалансированный портфель инвестиций и происходит перекрестное субсидирование между различными промежуточными секторами. Поэтому скрытая стоимость инвестиций в некоторые секторы превышает ее значение для других секторов, несмотря на то что издержки осуществления инвестиций во все секторы равны 1 (в единицах конечного товара в периоде времени t). Такие различия в скрытой стоимости являются причиной формирования несбалансированного портфеля. Напомним также, что неявный налог в оптимальном по Парето распределении ресурсов накладывается на промежуточные секторы с низким требованием о минимальном размере инвестиций и на секторы без этого требования. Такой тип перекрестного субсидирования трудно реализуем в равновесии, так как каждое домохозяйство обладает стимулами отклониться от него, немного снизив объем своих инвестиций в союз финансовых посредников, осуществляющий перекрестное субсидирование, и увеличив инвестиции на стороне, тем самым смещаясь в сторону сбалансированного портфеля (инвестируя в секторы с низким или нулевым требованием о минимальном размере инвестиций). Поэтому в конечном счете в равновесии реализуются лишь распределения ресурсов без перекрестного субсидирования, то есть такие, которые описаны в утверждении 17.7.

Наиболее важным следствием из этого результата является утверждение о том, что даже при неограниченных возможностях формирования коалиций на рынке финансового посредничества неоптимальность конкурентного равновесия, возникающая вследствие эндогенно неполных рынков, не может быть предотвращена. Экономической причиной этого является то, что каждое домохозяйство, формируя несбалансированный портфель инвестиций, своими действиями создает положительную монетарную экстерналию, однако в децентрализованном равновесии каждое домохозяйство желает и легко может переместиться в сторону сбалансированного портфеля, тем самым сводя на нет усилия по поддержанию оптимального по Парето распределения ресурсов.

17.7. Основные выводы

В этой главе представлен ряд различных стохастических моделей экономического роста. Критерием выбора этих моделей была попытка достигнуть двух следующих целей. Во-первых, мы познакомились с несколькими наиболее часто используемыми макроэкономическими моделями, такими как неоклассическая модель экономического роста в условиях неопределенности и базовая модель Бьюли. Эти модели используются не только в теории экономического роста, но и обладают большим количеством приложений в других областях экономики.

Во-вторых, модель из параграфа 17.6 показывает, как стохастические модели позволяют значительно расширить анализ вопросов экономического роста и экономического развития. В частности, эта модель демонстрирует, как простое расширение стандартной модели позволяет объяснить равновесную траекторию, на которой экономики проводят долгое время в состоянии низкой производительности и частых кризисов. Затем после реализации последовательности благоприятных стохастических шоков они осуществляют взлет на траекторию устойчивого экономического роста. Этот переход приводит не только к снижению волатильности и увеличению темпа роста экономики, но и позволяет добиться лучшей диверсификации рисков и развития финансовой системы. Несмотря на то что эта модель очень стилизована, она является хорошей аппроксимацией процесса экономического развития в большинстве стран Западной Европы в течение последних семисот лет. Эта модель также показывает, что везение в виде благоприятной реализации случайных шоков могло играть важную роль в определении момента перехода на траекторию устойчивого экономического роста и возможно даже в выборе множества стран, в которых начался процесс индустриализации. Поэтому мы можем рассматривать эту модель как привлекательную формализацию гипотезы везения, описанной в главе 4. Однако равновесием в этой модели является множество рыночных институтов, регулирующих торговлю и инвестиции на рынке с совершенной конкуренцией. Поэтому наша интерпретация модели состоит в том, что она показывает, каким образом случайные элементы и везение могут иметь значение в определении момента перехода на траекторию устойчивого роста лишь в странах, которые удовлетворяют основным требованиям современного экономического роста. Она может объяснить некоторую часть наблюдаемых в наши дни межстрановых различий в уровне дохода, а также сделать важные наблюдения о начале процесса устойчивого экономического роста. Однако институционные факторы, которые определяют, удовлетворяет ли экономика этим требованиям, остаются наиболее важными мотивами для понимания того, почему некоторые страны мира не осуществили взлет в XIX в. и до сих пор не вышли на траекторию устойчивого долгосрочного экономического роста. Оставшаяся часть книги посвящена анализу этих вопросов.

В параграфе 17.6 также описан ряд важных идей, связанных с неполнотой рынков. Модель Бьюли, описанная в параграфе 17.4, является прототипом модели с неполными рынками и, как и в большинстве других моделей с неполными рынками в экономической литературе, множество открытых рынков рассматривается в ней как заданное. С другой стороны, модель из параграфа 17.6 включает в себя эндогенно неполные рынки. Наблюдение о том, что множество открытых рынков в ней (множество товаров, обращающихся на рынке) определяется в равновесии условием свободного выхода на рынок финансового посредничества, может приводить к новому типу неоптимальности по Парето, возникающей вследствие монетарной экстерналии (хотя все домохозяйства рассматривают цены как заданные величины). Несмотря на то что такой тип неоптимальности равновесия по Парето отличается от описанных нами ранее, нетрудно увидеть важные параллели между недостаточным количеством открытых рынков в этой модели и малым количеством изобретенных типов машин в базовой модели эндогенного технологического прогресса из главы 13.

17.8. Литература

Неоклассическая модель экономического роста в условиях неопределенности, представленная в параграфе 17.1, впервые была описана в статье [Brock, Mirman 1972]. Так как задача оптимального роста является значительно более простой, чем анализ экономического роста в децентрализованном равновесии в условиях неопределенности, большинство работ в литературе основывается на задаче оптимального роста и затем апеллирует ко второй теореме экономики благосостояния. Одним из примеров такого подхода является книга [Stokey, Lucas, Prescott 1989]. Подробный анализ динамического равновесия в такой модели требует более детального обсуждения общей теории марковских случайных процессов. Изложение методов теории случайных процессов выходит за рамки этой книги. Читатель может найти необходимый материал в учебнике [Stokey, Lucas, Prescott 1989, chapters 11, 12, 13]. Более компактное изложение этого материала представлено в книге [Fuita 1982]. Для более продвинутого и полного анализа порекомендуем читателю обратиться к работам: [Gikhman, Skorohod 1974; Ethier, Kurtz 1986]. Аппарат, представленный в книге [Stokey, Lucas, Prescott 1989], достаточен для доказательства утверждения о том, что оптимальная траектория отношения капитала к труду в неоклассической модели экономического роста сходится к единственному эргодическому распределению. Он также может быть использован для доказательства существования стационарного равновесия в модели Бьюли.

Систематический анализ конкурентного равновесия в условиях неопределенности впервые был проведен в статье [Lucas, Prescott 1971]. Прекрасный анализ этого вопроса представлен в учебнике [Ljungqvist, Sargent 2005, chapter 12]. Материал, представленный в параграфе 17.2, несколько более подробно повторяет анализ из этого учебника.

Литература по теории реальных деловых циклов огромна, и параграф 17.3 необходимо рассматривать лишь как введение в нее. Классическими статьями в этой области являются работы [Kydland, Prescott 1982; Long, Plosser 1983]. Хорошее введение также представлено в учебнике [Ljungqvist, Sargent 2005]. Подбор статей в книге [Cooley 1995] является прекрасной начальной точкой для знакомства с литературой и содержит ряд инструментов для теоретического и эмпирического анализа. Различная критика теории РДЦ резюмируется в книге [Blancard, Fischer 1989]. Заинтересованному читателю полезно будет ознакомиться с дискуссией между Эдвардом Прескоттом и Лоуренсом Саммерсом [Prescott 1986; Summers 1986] и с обзором более современных статей в работе [King, Rebello 1999].

В параграфе 17.4 представлена модель с неполными рынками, впервые изученная Труманом Бьюли [Bewley 1977, 1980]. Эта модель затем стала одной из наиболее популярных в макроэкономике моделей. Она часто используется для анализа динамики цикла экономической активности, распределения доходов, вопросов оптимальной бюджетной и денежной политики, а также ценообразования финансовых активов. Более современное изложение модели Бьюли представлено в работе [Aiyagari 1994], однако опубликованная версия этой статьи не содержит доказательств основных результатов. За более подробным анализом утверждений из параграфа 17.4 и доказательством существований стационарного равновесия рекомендуем читателю обратиться к работам [Bewlrey 1977, 1980] и препринту статьи Айагари [Aiyagari 1993]. Эта модель используется в ряде статей, в том числе в работах: [Krusell, Smith 1998, 2005] для анализа динамики циклов экономической активности. В этих двух статьях также предложены новые количественные методы анализа экономик с неполными рынками.

Материал параграфа 17.6 основывается на работе [Acemoglu, Zilibotti 1997], в которой основные результаты из этого параграфа изложены более подробно. Эмпирические свидетельства зависимости между уровнем экономического развития и волатильностью экономики представлены в статьях: [Acemoglu, Zilibotti 1997; Imbs, Wacziarg 2003; Koren, Tenreyro 2007]. Смежные свидетельства также приведены в работе [Ramey, Ramey 2005]. Понятие децентрализованного равновесия, используемое в этом параграфе, отличается от понятия равновесия Эрроу—Дебре. Вместо этого в нем предполагается совершенная конкуренция на всех открытых в экономике рынках, а само множество открытых рынков определяется условием свободного выхода на рынок финансового посредничества. Это понятие равновесия является естественным и используется в различных областях теории общего равновесия, см., например, работы: [Hart 1979; Makowski 1980; Allen, Gate 1991].

17.9. Упражнения

17.1. В утверждении 17.2 показано, что функция $k(t + 1)$ возрастает по аргументам $k(t)$ и $z(t)$. Найдите достаточные условия для того, чтобы функция $c(t)$ также возрастала по этим аргументам.

17.2. Рассмотрите неоклассическую модель экономического роста в условиях неопределенности, представленную в параграфе 17.1, и предположите, что реализация случайного шока $z(t)$ наблюдается после того, как приняты решения о капитале $k(t + 1)$ и потреблении $c(t)$.

(a) Покажите, что если случайные величины $z(t)$ распределены независимо во времени, то выбор капитала и потребления в этой экономике совпадает с выбором в детерминистской неоклассической модели экономического роста с измененной производственной функцией. Приведите развернутое объяснение вашего результата.

(b) Далее предположите, что случайные величины $z(t)$ не являются независимыми во времени. Сформулируйте в этом случае утверждение, эквивалентное утверждению 17.1. Как динамика такой экономики отличается от динамики в неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности из параграфа 17.1?

17.3. Рассмотрите экономику с производственной структурой, совпадающую со структурой в параграфах 17.1 и 17.2, однако предположите, что вне зависимости от значения запаса капитала и реализации стохастической переменной каждое домохозяйство сберегает фиксированную долю s своего дохода. Опишите стохастическую динамику такой экономики. В чем состоит отличие равновесной траектории в этой экономике от траектории в канонической неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности?

17.4. Рассмотрите неоклассическую модель экономического роста в условиях неопределенности из параграфа 17.1.

(a) Найдите условия, при которых функция $\pi(k, z)$ является строго возрастающей по обоим своим аргументам.

(b) Покажите, что если условия, найденные вами в части (a) упражнения, выполняются и функция распределения стохастической переменной z не вырождена (то есть z не принимает всегда одно постоянное значение), то отношение капитала к труду никогда не сходится к конечному пределу.

17.5. Рассмотрите пример 17.1.

(a) Докажите, что условие (17.10) не выполняется при любом $B_0 \neq 0$.

(b) Предположите, что функция стоимости в этом примере выглядит как $V(k, z) = B_2 + B_3\log k + B_4\log z$. Убедитесь в том, что это предположение верно, и найдите значения параметров B_2, B_3 и B_4.

17.6. Покажите, что функция выбора в примере 17.1 $\pi(k, z) = \beta\alpha z k^{\alpha}$ остается решением задачи в том случае, когда стохастическая переменная z следует общему марковскому случайному процессу, а не марковской цепи. [Подсказка: вместо суммирования замените символ математического ожидания надлежащим образом определенным интегралом и приведите подобные члены под знаком интеграла.]

17.7. **(a)** Рассмотрите экономику, описанную в примере 17.1, при $0 < z_1 < \ldots < z_N < \infty$. Опишите предельное эргодическое распределение отношения капитала к труду и покажите, что стохастическое соответствие для запаса капитала может быть описано рисунком 17.1 из параграфа 17.5. Используя этот рисунок, покажите, что отношение капитала к труду k всегда растет при его достаточно малых значениях и всегда сокращается при его достаточно больших значениях.

(b) Рассмотрите частный случай, в котором стохастическая переменная z принимает лишь два значения z_h и z_l с вероятностями $q > 1/2$ и $1 - q$ соответственно. Покажите, что в пределе при $q \to 1$ динамика отношения капитала к труду сходится к ее равновесной динамике в детерминистской неоклассической модели экономического роста.

17.8. Рассмотрите экономику, описанную в примере 17.1, однако предположите, что выполняется неравенство $\delta < 1$. Покажите, что в этом случае функция выбора $\pi(k, z)$ не может быть найдена в явном виде.

17.9. Запишите задачу максимизации для общественного планировщика в явном виде в итеративной форме в предположении о том, что выпуск, капитал и труд в различных реализациях истории интерпретируются как различные товары Эрроу—Дебре. Используя эту формулировку, убедитесь в том, что все условия теоремы 5.7 выполнены и поэтому траектория оптимального роста может быть децентрализована как конкурентное равновесие.

17.10. Рассмотрите расширенную версию неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности, в которой моментальная функция полезности репрезентативного домохозяйства выглядит как $u(c, b)$, где переменная b представляет собой случайную величину, являющуюся марковской цепью.

(a) Сформулируйте и решите задачу оптимального роста в такой экономике. Покажите, что последовательность оптимальных значений потребления удовлетворяет модифицированному стохастическому уравнению Эйлера.

(b) Докажите, что теорема 5.7 может быть использована для анализа этой экономики и поэтому траектория оптимального роста может быть децентрализована как конкурентное равновесие.

17.11. Объясните, почему в параграфе 16.5.1 в предыдущей главе множитель Лагранжа $\tilde{\lambda}[y^t]$ зависит от всей истории реализации трудового дохода, в то время как в формулировке задачи поиска конкурентного равновесия в экономике с полным набором товаров Эрроу—Дебре (контингентных требований) в параграфе 17.2 присутствует лишь один множитель Лагранжа λ, связанный с межвременным бюджетным ограничением домохозяйства.

17.12. Рассмотрите модель конкурентного равновесия из параграфа 17.2. Повторите анализ конкурентного равновесия в неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности в предположении о том, что вместо покупки или продажи капитала по цене $R_0[z^t]$ фирмы арендуют капитал на рынке. Обозначьте арендную стоимость капитала в единицах конечного товара в периоде времени 0 при реализации последовательности стохастической переменной z^t как $\tilde{R}_0[z^t]$. Опишите конкурентное равновесие и покажите, что оно совпадает с равновесием, описанным в параграфе 17.2. Объясните, почему две формулировки задачи приводят к одинаковому решению.

17.13. Докажите утверждение 17.13. [Подсказка: используйте теорему 16.8 вместе с уравнениями (17.6) и (17.22) и покажите, что из межвременного бюджетного ограничения (17.11) следует уравнение (17.7).]

17.14. Опишите траекторию конкурентного равновесия в неоклассической модели экономического роста в условиях неопределенности с последовательной торговлей, используя итеративную (а не рекурсивную) формулировку задачи максимизации для домохозяйства.

17.15. Покажите, что теоремы 16.1—16.7 могут быть использованы для анализа функции $V(a, z)$, определенной в равенстве (17.24), и убедитесь в том, что эта функция является непрерывной, строго возрастающей по своим обоим аргументам, вогнутой и дифференцируемой по аргументу a.

17.16. Выведите уравнение (17.27).

17.17. Докажите утверждение 17.4.

17.18. Рассмотрите модель РДЦ, представленную в параграфе 17.3, и предположите, что производственная функция выглядит как $F(K, zAL)$, где обе переменные z и A описывают трудоинтенсивные технологические изменения. Предположите, что стохастическая переменная z является марковской цепью, а переменная A описывает экзогенный детерминистский процесс роста производительности труда и $A(t + 1) = (1 + g)A(t)$. Сформулируйте задачу общественного планировщика в этом случае. Какие ограничения необходимо наложить на вид моментальной функции полезности $u(C, L)$ для того, чтобы гарантировать, что траектория оптимального роста соответствует «ТСР», то есть что предложение труда в равновесии не стремится к нулю или к бесконечности с вероятностью 1?

17.19. Предположите, что моментальная функция полезности домохозяйства в примере 17.2 имеет вид $u(C, L) = \log C + h(L)$, где функция $h(\cdot)$ является непрерывной, убывающей и вогнутой. Покажите, что равновесное значение предложения труда постоянно и не зависит от значения запаса капитала и от реализации шока производительности.

17.20. Объясните, почему в модели Бьюли из параграфа 17.4 бюджетное ограничение домохозяйства должно выполняться на всех возможных траекториях. Сравните получающееся ограничение (17.30) с межвременным бюджетным ограничением (17.11) из параграфа 17.2.

17.21. Докажите утверждение 17.5.

17.22. Что произойдет в случае, если вместо логарифмических предпочтений (17.44) моментальная функция полезности репрезентативного домохозяйства в параграфе 17.6 имеет более общий вид $u(c_1(t)) + \mathbb{E}_t(c_2(t + 1))$? Может ли темп роста экономики увеличиваться, если функция полезности $u(\cdot)$ становится более вогнутой? [Подсказка: заметьте различия между влиянием вида функции полезности $u(\cdot)$ на распределение активов в портфеле при заданном объеме сбережений и на общее количество сбережений в экономике.]

17.23. В модели из параграфа 17.6 докажите, что из решения задачи максимизации для репрезентативного домохозяйства следует, что для всех j и $j' \in J(t)$ выполняется равенство $I^*(j, t) = I^*(j', t)$.

17.24. В модели из параграфа 17.6 докажите, что если для промежуточного сектора j^* выполняется включение $j^* \in J(t)$, то все промежуточные сектора $j \leq j^*$ также лежат в множестве $J(t)$.

17.25. В модели из параграфа 17.6 докажите, что неравенство $Q \geq (2 - \gamma)q$ является достаточным условием единственности точки пересечения кривых (17.43) и (17.46) на рис. 17.2.

17.26. Докажите утверждение 17.7. В частности покажите, что если выполняется неравенство $n < n^*[K]$, то у финансового посредника существует прибыльное отклонение, в котором он предлагает требования на ранее закрытый промежуточный сектор и получает положительную прибыль, а если выполняется неравенство $n > n^*[K]$, то нарушается условие доступности.

17.27. **(a)** Докажите утверждение 17.9.

(b) Предположите, что условие (17.61) не выполняется. Будет ли в этом случае сходиться случайный процесс $[K(t)]_{t=0}^{\infty}$? Будет ли он сходиться к вещественному числу?

17.28. Докажите утверждение 17.10.

17.29. Докажите утверждение 17.11. [Подсказка: постройте функцию Лагранжа и покажите, что если все промежуточные секторы не могут быть открыты, то общественный планировщик не будет выбирать сбалансированный портфель инвестиций.]

***17.30.** Рассмотрите следующую модель двухпериодной экономики, схожую с моделью, описанной в параграфе 17.6. В экономике присутствуют I финансовых посредников, которые конкурируют по Бертрану, не используя какие-либо ресурсы. Они имеют возможность инвестировать от имени домохозяйств в любой проект в экономике. В экономике имеется N проектов, которые проиндексированы как $j = 1, 2, ..., N$. Осуществление проекта j требует минимального размера инвестиций $M(j)$, и без ограничения общности предположите, что проекты упорядочены по возрастанию минимального размера инвестиций. В экономике присутствует континуум домохозяйств, каждое с предпочтениями, описываемыми функцией полезности $u(c) + \mathbb{E}v(c')$, где переменная c обозначает потребление в текущем периоде времени, а переменная c' — потребление в последующем периоде, то есть функция $\mathbb{E}v(c')$ описывает ожидаемую полезность от потребления в следующем периоде времени. Нормализуйте меру множества домохозяйств единицей. Каждое домохозяйство обладает общим объемом ресурсов w и принимает решение об уровнях потребления и сбережений, а затем о том, как распределить свои сбережения. Предположите, что функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ являются строго вогнутыми и возрастающими. Трансформация сбережений в текущем периоде времени в потребление в последующем периоде осуществляется финансовыми посредниками. Средства также могут быть инвестированы в безрисковую линейную технологию с доходностью, равной q. Обозначьте инвестиции в актив j как $K(j)$. Тогда если выполняется неравенство $K(j) \geq M(j)$, то актив j приносит валовой доход $Qk(j)$ с вероятностью π, причем $\pi Q > q$. В противном случае, если выполняется неравенство $K(j) < M(j)$, валовой доход по активу j равен нулю.

(a) Обозначьте стоимость одного доллара на фондовом рынке инвестиций в проект j, приносящих валовой доход Q с вероятностью π, и не приносящих дохода в противном случае, как $p(j)$. Покажите, что из конкуренции на финансовом рынке следует, что если $K(j) > 0$ и $K(j') > 0$, то $p(j) = p(j') = 1$.

(b) Далее предположите, что реализации дохода от каждого проекта независимы между собой, то есть событие, при котором валовой доход по активу j составляет Q, имеет вероятность π и не зависит от реализаций дохода по другим активам. Покажите, что в этом случае $K(j) = K(j')$ для всех j и j'.

(c) Опишите децентрализованное равновесие в этой экономике.

(d) Покажите, что если некоторые проекты остаются нереализованными, то децентрализованное равновесие может быть ограниченно оптимальным по Парето. Объясните, почему децентрализованное равновесие может быть ограниченно оптимальным по Парето даже в случае, когда некоторые проекты остаются нереализованными.

(e) Опишите оптимальное по Парето распределение ресурсов в экономике.

(f) Опишите в свободной форме, что происходит в случае, если функция $M(j)$ описывает не минимальный размер инвестиций, а фиксированные издержки их осуществления (в этом случае средние издержки являются убывающей функцией). [Подсказка: в своих рассуждениях различите два случая: (1) линейные цены, (2) ценовая дискриминация.]

Часть VI

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕЖДУНАРОДНАЯ ТОРГОВЛЯ И МЕЖСТРАНОВЫЕ ВЗАИМОСВЯЗИ

Один из основных недостатков всех моделей, представленных в предыдущих частях книги, состоит в том, что каждая страна в них рассматривается как изолированный остров, никак не связанный с остальным миром. Мы можем выделить по крайней мере две причины, почему такое предположение не является правдоподобным. Первая из них связана с наличием технологических связей между странами, вторая — с международной торговлей (товарами и капиталом). В этой части книги мы остановимся на анализе влияния технологических и торговых межстрановых связей на процесс экономического роста.

В моделях, рассмотренных ранее, технологический прогресс предполагается экзогенным процессом или эндогенным процессом, динамика которого определяется факторами, формирующимися внутри границ анализируемой страны. Мы уже убедились в том, что предположение об эндогенности технологического развития позволяет увидеть новые важные свойства процесса экономического роста. Однако будет ли верным предположение о том, что возможные технологические различия между экономиками Португалии и Нигерии являются следствием недостаточного количества НИОКР в Нигерии? Ответ на этот вопрос, скорее всего, отрицательный. Нигерия, как и большинство других менее развитых и развивающихся стран, импортирует технологии из-за рубежа. Это утверждение верно и для Португалии, несмотря на намного более высокую степень развития ее экономики. Из этого наблюдения следует, что модель, в которой *передовые* технологии разрабатываются в США или других развитых экономиках, а затем копируются и внедряются другими странами, являются лучшей аппроксимацией реальности. Следовательно, чтобы понять причины технологических различий между развитыми и развивающимися странами, мы должны обратить внимание не только и не столько на различия в темпах эндогенного технологического прогресса, но также и на решения фирм и домохозяйств о внедрении технологий и об их эффективном использовании.

Несмотря на то что модели экзогенного экономического роста из глав 2 и 8 обладают этим свойством, они также имеют ряд важных недостатков.

Во-первых, технологический прогресс в них является полностью экзогенным, поэтому важные экономические решения агентов связаны лишь с инвестициями в физический капитал. Однако как с концептуальной, так и с эмпирической точек зрения существуют значительные различия между технологическим развитием и накоплением физического (и человеческого) капитала. Поэтому понимание причин технологического различия, возникающих между странами эндогенно, является важной задачей теории экономического роста. Следовательно, признание того, что внедрение технологий с мировой технологической границы имеет большое значение, не говорит о том, что модель Солоу или неоклассическая модель экономического роста являются лучшими моделями для анализа межстрановых различий в уровне дохода. Во-вторых, несмотря на то что фокус на внедрении технологий в модели делает процесс экономического роста схожим с динамикой в моделях экзогенного экономического роста из глав 2 и 8, технологический прогресс на мировом уровне вряд ли является «манной небесной». Наоборот, рост мировой экономики происходит вследствие взаимосвязей между внедрением технологий и исследовательской деятельности в разных странах или возможно инновационной активности в странах, находящихся на мировой технологической границе. Поэтому модели, в которых темп роста мировой экономики является эндогенной величиной и связан с процессом внедрения технологий, могут оказаться лучшей аппроксимацией реальности и лучшим инструментом для анализа механики экономического роста. Мы также убедимся, что международная торговля может играть аналогичную роль, связывая экономический рост в разных странах и при этом позволяя темпу роста мировой экономики определяться эндогенно.

В главе 18 мы начнем анализ с модели внедрения технологий и исследуем факторы, влияющие на скорость и структуру процесса внедрения технологий. В дополнение к анализу факторов, замедляющих процесс распространения технологий и важности барьеров, препятствующих внедрению новых технологий, мы остановимся на вопросе о том, насколько технологии с мировой технологической границы являются подходящими для нужд менее развитых стран. Напомним также, что термин «технологические различия» описывает не только различия технологий, используемых в производстве, но и различия в организации производственной деятельности, влияющие на эффективность использования имеющихся в экономике факторов производства. Следовательно, основными причинами технологических различий в удовлетворительной теории межстрановых технологических различий должны быть барьеры, препятствующие внедрению новых технологий, и возможная неэффективность организации производственной деятельности. В главе 18 также описана простая модель неэффективного внедрения технологий, возникающего вследствие трудностей в заключении контрактов между фирмами.

Второй важный элемент моделей, до сих пор отсутствующий в нашем анализе, — международная торговля товарами и капиталом, рассматривается в главе 19. Международная торговля товарами и финансовыми активами также связывает между собой уровни благосостояния различных экономик. Например, страна с низким значением отношения капитала к труду может обладать возможностью привлекать средства из-за рубежа, что приведет к изменению равновесной динамики экономики. Аналогично — и, возможно, более важно — менее производительные экономики, экспортирующие определенные товары на мировой рынок, становятся связанными с другими странами за счет изменений относительных цен товаров, так как эти изменения приводят к изменениям их условий торговли. Такой тип эффектов, связанных с изменениями условий торговли может привести к созданию моделей, в которых мировой экономический рост определяется эндогенно, а темпы роста различных экономик связаны между собой посредством торговых отношений. Наконец, мы остановимся на связях между международной торговлей и процессом внедрения технологий и покажем, каким образом международная торговля и «международный товарный жизненный цикл» ускоряет процесс распространения технологий.

В оставшихся главах книги, включая эту часть, изложение материала будет менее обстоятельным, чем в предыдущих главах. В частности, в целях сокращения объема книги, мы будем более избирательны в выборе моделей и остановимся лишь на тех из них, которые, по нашему мнению, показывают экономический смысл основных взаимодействий. Мы кратко опишем большое количество альтернативных моделей и подходов в параграфе Литература в конце глав или в упражнениях к ним. В дополнение, мы в большей степени будем пользоваться различными упрощающими предположениями и оставим читателю доказательство основных утверждений в общем случае в качестве упражнений.

Глава 18
Распространение технологий между странами

Построение моделей инновационной деятельности во многих смыслах является более сложной задачей, чем построение моделей внедрения технологий. Несмотря на это, в литературе по теории экономического роста и развития в моделировании инноваций был достигнут значительно больший прогресс (см., например, модели из глав 13–15), чем в моделировании процесса внедрения технологий. Отчасти это связано с тем, что процесс внедрения технологий обладает множеством трудно описываемых свойств. Во-первых, даже внутри одной страны мы наблюдаем значительные различия в технологиях, используемых различными фирмами, даже в узко определенных отраслях экономики. Во-вторых, очень трудно объяснить, почему в глобальном мире, в котором мы живем, некоторым странам не удается импортировать технологии, которые могли бы значительно увеличить их производительность. В этой главе мы начнем изучение этих вопросов. Так как анализ возможных барьеров, препятствующих внедрению новых технологий, тесно связан с политической экономией экономического роста, мы вернемся к некоторым из этих вопросов в части VIII. Здесь мы остановимся на анализе того, как технологические взаимосвязи между странами могут изменить механику роста экономик и, таким образом, улучшить наше понимание возможных причин межстрановых различий в уровне дохода и темпах экономического роста.

Вначале мы остановимся на кратком обзоре некоторых эмпирических фактов, описывающих процесс внедрения и распространения технологий между странами и отраслями экономики. Мы также покажем их важность в контексте внутриотраслевых различий в производительности. Затем мы опишем базовую модель равновесия в мировой экономике с диффузией технологий, которая является сокращенной формой модели для анализа медленного процесса распространения передовых технологий между странами. После этого мы расширим модель, включив в нее инвестиции в НИОКР и внедрение технологий. Далее мы обсудим вопросы, связанные с внедрением передовых технологий менее развитыми странами. Наконец, мы проанализируем влияние несовершенства контрактных механизмов на решения фирм о внедрении новых технологий. Во всей главе единственным типом взаимодействий между странами является обмен технологиями, а международная торговля товарами и финансовыми активами отсутствует.

18.1. Различия в производительности и уровне развития технологий

Мы начнем с краткого обзора внутристрановых различий в производительности и уровне развития технологий. Этот обзор затем поможет нам более точно описать межстрановые различия. Наиболее важный вывод из внутристрановых эмпирических исследований состоит в том, что различия в производительности и технологиях встречаются повсеместно даже между фирмами внутри узко определенных отраслей экономики в одной и той же стране.

18.1.1. Различия в производительности и уровне развития технологий внутри узко определенных секторов

В большом количестве эмпирических работ различия в производительности труда и СФП между предприятиями внутри узко определенных отраслей исследуются с помощью временных микроэкономических данных (чаще всего по отраслям промышленности в трех- или четырехзначной классификации). В контексте этой главы наиболее важный урок из этих исследований состоит в том, что даже внутри узко определенных отраслей экономики США наблюдаются значительные различия в производительности между предприятиями с двух- или трехкратным разрывом между наиболее и наименее производительными фирмами (обзор различных исследований и оценок приведен в работе [Bartelsman, Dobs 2000]). Более того, эти различия в производительности оказываются очень персистентными (см., например, работу [Baily, Hulten, Campbell 1992]).

Консенсус о причинах этих различий среди экономистов пока не достигнут. В большом количестве статей подтверждается наличие корреляции между производительностью на предприятии и размером фирмы или предприятия, различными переменными, описывающими технологии (в особенности информационные технологии), интенсивностью использования капитала, квалификацией работников и состоянием менеджмента на предприятии (см. работы: [Davis, Haltiwanger 1991; Doms, Dunne, Troske 1997; Black, Lynch 2005]). Несмотря на это, такие корреляции не могут рассматриваться как причинно-следственные связи, так как все вышеназванные показатели являются переменными выбора для фирмы. И факторы, определяющие различия в производительности между предприятиями, в большинстве своем до сих пор неизвестны. Поэтому отсутствие консенсуса между экономистами о причинах межстрановых различий в производительности не должно стать сюрпризом для читателя.

При этом необходимо отметить, что имеющиеся эмпирические свидетельства позволяют сделать вывод о том, что технологические различия являются важным определяющим фактором различий в производительности. Например, в статьях [Doms, Dunne, Troske 1997; Haltiwanger, Lane, Spletzer 1999] описаны значительные технологические различия между предприятиями внутри узко определенных отраслей экономики. Интересное наблюдение, сделанное в работах [Doms, Dunne, Troske 1997; Caselli, Coleman 2001a], состоит в том, что ключевым фактором, влияющим на решения о внедрении новых технологий, скорее всего, является квалификация работников предприятия (в эмпирических исследованиях она чаще всего аппроксимируется долей работников, не занятых в производстве). Однако при этом внедрение новых технологий в большинстве случаев не ведет к значительному изменению квалификации работников предприятия. Из этих наблюдений напрашивается вывод о том, что, как следует из некоторых моделей, описанных в главах 10 и 15, различия в доступности квалифицированных работников и их квалификации могут быть важными факторами, определяющими внедрение новых технологий (и экономическое развитие общества).

Эмпирические работы говорят о связи между распределением производительности между фирмами и выходом на рынок новых более производительных предприятий (и уходом с него менее производительных фирм). Например, в соответствии с базовой шумпетерианской моделью экономического роста, описанной в главе 14, в статьях [Bartelsman, Doms 2000; Foster, Haltiwanger, Krizan 2000] показано, что выход на рынок новых предприятий является важным фактором роста производительности в отрасли. Однако выход фирм на рынок и уход с рынка объясняет лишь 25% роста средней СФП, в то время как это или остальные улучшения производительности происходят за счет присутствующих на рынке фирм. Отсюда следует, что модели, в которых фирмы непрерывно инвестируют в развитие технологий и рост производительности (как модели из параграфов 14.3 и 14.4 из главы 14), могут оказаться полезными для понимания причин различий в производительности между фирмами и предприятиями, а также для анализа межстрановых различий в производительности.

18.1.2. Распространение новых технологий

Основной вывод из отраслевых эмпирических исследований состоит в том, что, несмотря на предположение о том, что технологии и секреты производства доступны и легко могут быть внедрены, в экономиках наблюдаются значительные различия в технологиях и производительности между фирмами, ведущими деятельность в схожих условиях. В дополнение новые более производительные технологии по мере их появления распространяются и постепенно внедряются большим количеством фирм и предприятий. Процесс внедрения новых технологий изучается в литературе по распространению технологий. Для читателя не станет сюрпризом существование большого количества параллелей между распространением технологий между странами и медленным процессом их распространения между фирмами. Далее мы совершим краткий обзор основных результатов из литературы по распространению технологий.

Классической работой в этой области является статья [Grileches 1957] о внедрении гибридной кукурузы. Ц. Грилихес показал, что процесс распространения более производительной гибридной кукурузы в сельском хозяйстве США проходил достаточно медленно и зависел от экономического состояния различных регионов. Согласно теоретическим моделям, рассмотренным нами ранее, вероятность внедрения оказалась связанной с вкладом гибридной кукурузы в производительность в определенном регионе, размером рынка и квалификацией работников в этом регионе. Значимость этих факторов подтверждается и в ряде других исследований. Другим важным результатом работы Ц. Грилихеса является открытие S-кривой распространения технологий, когда определенная технология вначале распространяется медленно, а затем, по достижении критического уровня внедрения, процесс распространения значительно ускоряется. Наконец, после того как большая доля предприятий переходит к использованию этой технологии, скорость внедрения снова снижается. Таким образом, динамика распространения технологии описывается *логистической функцией* или *S-кривой*.

Важный урок в контексте этой главы состоит в том, что различия в производительности и технологии наблюдаются не только на межстрановом уровне, но и внутри отдельных стран. Более того, даже внутри одной страны лучшие технологии не внедряются всеми фирмами моментально. Однако причины внутристрановых и межстрановых различий в производительности и технологии могут быть различны и, несмотря на существование внутристрановых различий, значительные межстрановые различия остаются важной загадкой для экономистов. Например, внутристрановые различия в производительности могут возникать вследствие различий в предпринимательских и управленческих способностях владельцев фирм или быть связаны с соответствием между менеджерами и технологиями (товарами). Аргументы такого типа вряд ли могут быть использованы для объяснения причин, по которым почти все фирмы во многих менее развитых странах менее производительны, чем средняя фирма в США и других развитых экономиках, и почему функции распределения производительности между фирмами значительно различаются между странами. Будучи мотивированными эмпирическими наблюдениями, кратко описанными выше, далее мы рассмотрим модели, в которых распространение технологий между странами происходит медленно, и модели, в которых межстрановые различия в производительности могут сохраняться, даже если распространение технологий и их внедрение происходят моментально.

18.2. Базовая модель распространения технологий

18.2.1. Модель экзогенного экономического роста

Чтобы продемонстрировать основные результаты с помощью наиболее простой подходящей модели, вернемся к модели экономического роста Солоу из главы 2. Предположим, что мировая экономика состоит из J стран, проиндексированных как $j = 1, \ldots, J$. Допустим, в каждой стране производится отличный единственный конечный товар и производственная функция имеет следующий вид:

$$Y_j(t) = F(K_j(t), A_j(t), L_j(t)),$$

где переменная $Y_j(t)$ обозначает выпуск специфичного конечного товара в стране j, а переменные $K_j(t)$ и $L_j(t)$ — запас капитала и предложение труда соответственно. Наконец, переменная $A_j(t)$ описывает технологию в этой экономике, которая различается между странами и изменяется во времени. В соответствии с теоремой 2.6 из главы 2 мы изначально будем предполагать, что технологические изменения являются исключительно трудоинтенсивными (нейтральными по Харроду). Более того, допустим, что функция F удовлетворяет всем стандартным неоклассическим предположениям, то есть предположениям 1 и 2 из главы 2. Во всех моделях в этой и в следующей главах в случае, когда мировая экономика состоит из J стран, мы будем предполагать, что значение J достаточно велико, так что каждая отдельная страна является «малой экономикой» по отношению к остальному миру, и будем игнорировать ее влияние на агрегированные показатели для мировой экономики[1].

Используя стандартный подход, перейдем к доходу на душу населения в стране j:

$$\begin{aligned} y_j(t) &\equiv \frac{Y_j(t)}{L_j(t)} = \\ &= A_j(t)F\left(\frac{K_j(t)}{A_j(t)L_j(t)}, 1\right) \equiv \\ &\equiv A_j(t)f(k_j(t)), \end{aligned}$$

[1] Мы можем рассматривать J как большое конечное число или перейти к пределу при $J \to \infty$. Альтернативно мы можем предположить, что множество стран континуально, а не счетно. Ни один из результатов из этой и следующей глав не изменяется в предположении о континуальном множестве стран. Далее для упрощения изложения мы будем предполагать, что множество стран конечно.

где во второй строке используется свойство постоянной отдачи от масштаба для функции F (предположение 1), а третья строка определяет производственную функцию на душу населения $f(\cdot)$ и эффективное отношение капитала к труду в стране j в момент времени t как

$$k_j(t) \equiv \frac{K_j(t)}{A_j(t)L_j(t)}.$$

Допустим, что время непрерывно, население в каждой стране j растет экспоненциально с постоянным темпом роста $n_j \geq 0$, норма сбережений в каждой стране j задана экзогенно и равна $s_j \in (0, 1)$ и норма амортизации капитала равна $\delta \geq 0$. Тогда динамика накопления капитала в каждой стране определяется следующим уравнением:

$$\dot{k}_j(t) = s_j f(k_j(t)) - (n_j + g_j(t) + \delta)k_j(t) \tag{18.1}$$

где темп роста технологии в стране j в момент времени t $g_j(t)$ равен

$$g_j(t) \equiv \frac{\dot{A}_j(t)}{A_j(t)} \tag{18.2}$$

(см. упражнение 18.1). Начальные условия для каждой страны $j = 1, ..., J$ заданы как $k_j(0) > 0$ и $A_j(0) > 0$.

Вначале отметим, что распространение технологий здесь моделируется в рамках модели в сокращенной форме. Предположим, что мировая технологическая граница, которую мы обозначим как $A(t)$, расширяется экзогенно с постоянным темпом

$$g \equiv \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} > 0$$

при начальном условии $A(0) > 0$. Мы будем называть переменную $A(t)$ «мировой технологией» или иногда «мировой технологической границей». Она описывает максимальный запас знаний, доступный любой стране, то есть $A_j(t) \leq A(t)$ для всех j и t. Развитие технологий в каждой стране происходит в результате принятия мировых технологических знаний. В частности, предположим, что динамика развития технологий в каждой стране j определяется следующим законом:

$$\dot{A}_j(t) = \sigma_j(A(t) - A_j(t)) + \lambda_j A_j(t), \tag{18.3}$$

где $\sigma_j \in (0, \infty)$ и $\lambda_j \in [0, g)$ для всех $j = 1, ..., J$. Из уравнения (18.3) следует, что каждая страна перенимает технологии с некоторым постоянным экзогенно заданным темпом принятия технологии σ_j. На практике принятие технологий может происходить как непосредственное внедрение существующих технологий или как адаптация имеющихся технологических процессов к условиям на рынке в определенной стране, так что они могут быть использованы одновременно с другими технологиями и производственными процессами. Значения параметра σ_j различаются между странами вследствие различий в запасе человеческого капитала и других инвестиций, а также ввиду институциональных и политических барьеров, препятствующих внедрению новых технологий. Этот параметр является множителем перед разностью $A(t) - A_j(t)$, так как страна перенимает именно разность этих технологий: если $A(t) = A_j(t)$, стране нечего перенимать с мировой технологической границы. Такая постановка задачи, хотя и выглядит естественной, имеет ряд важных экономических следствий. В частности, нетрудно увидеть, что страны, которые находятся относительно далеко от границы (в том смысле, что значение $A_j(t)$ мало по сравнению со значением $A(t)$), при прочих равных будут расти быстрее, так как они перенимают больший набор технологий и обладают большими возможностями для догоняющего развития. Такое возможное преимущество для относительно отсталых экономик играет в модели важную роль и позволяет добиться устойчивого мирового распределения доходов между странами. Такая постановка задачи также формализует идеи из эссе А. Гершенкрона *Экономическая отсталость в исторической перспективе* [Gerschenkron 1962] о том, что быстрое догоняющее развитие относительно отсталых стран важно для понимания межстрановых различий в темпе экономического роста.

Из уравнения (18.3) также следует, что технологический прогресс может происходить и в результате внутренних факторов, то есть за счет увеличения запаса знаний в стране j $A_j(t)$. Параметр λ_j описывает скорость такого развития технологий. Следовательно, уравнение (18.3) включает в себя два основных типа технологического прогресса в определенной стране j: принятие технологий с мировой технологической границы и внутреннее технологическое развитие. Функциональный вид уравнения выбран нами для простоты дальнейших выкладок.

Заметим, что уравнение (18.3) обходит один из важных вопросов, поднятых в начале главы: в нем утверждается, что, несмотря на относительно свободный обмен информацией между странами мира, процесс перемещения технологий между странами протекает медленно. Это следует из предположения о том, что $\sigma_j < \infty$. В частности, так как $\sigma_j < \infty$, если $A_j(t) < A(t)$ в момент времени t, то $A_j(t + \Delta t) < A(t + \Delta t)$, по крайней мере в течение достаточно короткого промежутка времени $\Delta t > 0$. Следовательно, страны, которые имеют доступ лишь к подмножеству производственных технологий, открытых в мире, не могут моментально получить все знания, которыми они не обладают в текущий момент времени.

Прежде чем перейти к анализу модели, введем переменную

$$a_j(t) \equiv \frac{A_j(t)}{A(t)},$$

которая представляет собой величину, обратную к технологическому разрыву между страной j и мировой технологической границей, или обратную величину к *расстоянию до границы* для страны j (расстоянию до мировой технологической границы). Используя эту переменную, перепишем уравнение (18.3):

$$\dot{a}_j(t) = \sigma_j - (\sigma_j + g - \lambda_j)a_j(t). \tag{18.4}$$

Нетрудно заметить, что из начальных условий $A(0) > 0$ и $A_j(0) > 0$ вытекает единственное начальное условие для дифференциального уравнения на переменную a_j: $a_j(0) \equiv A_j(0)/A(0) > 0$.

В такой формулировке модели динамика дохода на душу населения и технологий в мире определяется $2J$ дифференциальными уравнениями. Каждая страна j описывается одним из уравнений (18.1) и одним из уравнений (18.4). Эти уравнения характеризуют стационарное распределение технологий и дохода на душу населения в мировой экономике и их переходную динамику. *Блочная рекурсивность* системы дифференциальных уравнений, определяющей динамику технологии и дохода на душу населения в разных странах делает анализ модели достаточно простым. Динамика расстояния до границы страны j в уравнении (18.4) определяется только переменной $a_j(t)$, что позволяет решить это уравнение независимо от динамики отношения капитала к труду $k_j(t)$ и динамики экономик других стран $\{k_{j'}(t), a_{j'}(t)\}_{j' \neq j}$. После того как найдено решение уравнения (18.4), уравнение (18.1) становится неавтономным дифференциальным уравнением первого порядка на одну переменную. Оно является неавтономным вследствие того, что переменная $g_j(t)$ в его правой части определена как

$$g_j(t) = \frac{\dot{a}_j(t)}{a_j(t)} + g.$$

После того как решение уравнения (18.4) найдено, переменная $a_j(t)$ становится лишь функцией времени, что делает уравнение (18.1) простым неавтономным дифференциальным уравнением.

Начнем с анализа стационарного равновесия в мировой экономике. Определим *мировое равновесие* как набор $\left\{[k_j(t),\ a_j(t)]_{t\geq 0}\right\}_{j=1}^{J}$, такой, что для каждой страны $j = 1, \ldots, J$ и для каждого t выполняются уравнения (18.1) и (18.4) при начальных условиях $\left\{k_j(0),\ a_j(0)\right\}_{j=1}^{J}$. Далее определим *ста-*

ционарное мировое равновесие как стационарное состояние такой равновесной траектории, то есть равновесие в котором в любой стране $j = 1, ..., J$ $\dot{k}_j(t) = \dot{a}_j(t) = 0$. В стационарных равновесиях, описанных в этой главе, в странах происходит экономический рост, поэтому мы могли бы называть их равновесиями на траектории сбалансированного роста. Однако в целях сохранения последовательности изложения материала мы будем продолжать называть их стационарными равновесиями[2].

Утверждение 18.1. *В описанной выше модели существует единственное стационарное мировое равновесие, в котором доход на душу населения растет во всех странах с одинаковым темпом $g > 0$. Более того, для каждой страны $j = 1, ..., J$ выполняется равенство*

$$a_j^* = \frac{\sigma_j}{\sigma_j + g - \lambda_j}, \tag{18.5}$$

а равновесное отношение капитала к труду k_j^* определяется единственным образом уравнением

$$s_j \frac{f(k_j^*)}{k_j^*} = n_j + g + \delta.$$

Стационарное мировое равновесие $\left\{k_j^*, a_j^*\right\}_{j=1}^J$ является глобально устойчивым в том смысле, что при любых строго положительных начальных условиях $\left\{k_j(0), a_j(0)\right\}_{j=1}^J$ равновесные траектории $\left\{k_j(t), a_j(t)\right\}_{j=1}^J$ сходятся к $\left\{k_j^*, a_j^*\right\}_{j=1}^J$ при $t \to \infty$.

Доказательство. Вначале решим уравнения (18.1) и (18.4) для каждой страны $j = 1, ..., J$, наложим условия стационарного равновесия $\dot{k}_j(t) = \dot{a}_j(t) = 0$. Они обладают единственным решением, что доказывает единственность стационарного равновесия. Далее, используя стандартные рассуждения, покажем, что стационарное решение дифференциального уравнения для переменной $a_j(t)$ a_j^* глобально устойчиво. Из этого результата моментально следует глобальная устойчивость решения дифференциального уравнения для переменной $k_j(t)$. В упражнении 18.4 читателю предоставлена возможность закончить строгое доказательство утверждения. ■

Необходимо отметить несколько свойств стационарного мирового равновесия. Во-первых, существует единственное стационарное мировое

[2] В оставшейся части главы мы для упрощения записи иногда будем использовать обозначение $[k_j(t), a_j(t)]_{t\geq 0}$ вместо обозначения $[k_j(t), a_j(t)]_{t=0}^{\infty}$.

равновесие и оно является глобально устойчивым. Это позволяет нам провести ряд простых упражнений по сравнительной статике и сравнительной динамике (см. упражнение 18.5). Во-вторых, и наиболее важно, несмотря на наличие различий в норме сбережений и скорости принятия технологий между странами, доход на душу населения растет во всех странах с одинаковым темпом, равным темпу расширения мировой технологической границы g. Причина этого объясняется уравнением (18.3): скорость распространения технологий (их принятия страной) возрастает при увеличении отрыва данной страны от мировой технологической границы. Поэтому в модели присутствуют силы, толкающие отстающие страны к мировой технологической границе, и в стационарном равновесии эти силы достаточно мощны для того, чтобы все страны росли с одинаковым темпом.

Следует ли из утверждения 18.1, что все страны сойдутся к одинаковому уровню дохода на душу населения? Ответ на этот вопрос очевидно отрицательный. Различия в норме сбережений и скорости принятия технологий трансформируются в различия в *уровне дохода* (вместо различий в темпах экономического роста) между странами. Например, экономика с низким значением параметра σ_j вначале будет расти медленнее других стран до тех пор, пока ее отставание от мировой технологической границы не станет достаточно большим. С этого момента темп роста дохода на душу населения становится равным g. Из таких рассуждений следует, что равенство темпов роста в стационарном равновесии во всех странах является прямым следствием эндогенности технологического отрыва между различными странами и мировой технологической границей. При этом страны, неуспешные в принятии новых технологий, которые воздвигают барьеры, препятствующие их внедрению (то есть страны с низким значением σ_j), и которые осуществляют недостаточное количество инноваций в развитие собственных технологий (то есть страны с низким значением λ_j), будут иметь более низкий уровень дохода на душу населения. Более того, как и в базовой модели экономического роста Солоу, страны с низкой нормой сбережений также будут беднее. Эти результаты резюмируются в следующем утверждении.

Утверждение 18.2. *Доход на душу населения в стационарном равновесии в стране j определяется уравнением $y_j^*(t) = \exp(gt)y_j^*$, где y_j^* является возрастающей функцией от σ_j, λ_j и s_j и убывающей функцией от n_j и δ. Значение y_j^* не зависит от от $\sigma_{j'}$, $\lambda_{j'}$, $s_{j'}$ и $n_{j'}$ для всех $j' \neq j$.*

Доказательство. См. упражнение 18.7. ■

Наиболее удобным, хотя и ограничивающим общность, свойством равновесия, описанного выше, является то, что, несмотря на распространение технологий и другие зависимости в равновесии в мировой экономике, в нем отсутствуют взаимодействия между странами. Доход на душу населения в стационарном равновесии в каждой стране (и даже вся равновесная траектория дохода на душу населения) зависит только от развития мировой технологической границы и параметров экономики этой страны. Далее в этой главе мы рассмотрим модели, в которых имеется больше взаимосвязей между экономиками различных стран.

18.2.2. Оптимизационная задача домохозяйства

В базовую модель распространения технологий, описанную выше, нетрудно ввести оптимизационное поведение домохозяйств. В частности, предположим, что экономика каждой страны допускает существование репрезентативного домохозяйства со следующей целевой функцией в момент времени $t = 0$:

$$U_j = \int_0^\infty \exp(-(\rho - n_j)t)\frac{c_j(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}dt, \tag{18.6}$$

где переменная $c_j(t) \equiv C_j(t)/L_j(t)$ обозначает потребление на душу населения в стране j в момент времени t, и мы накладываем ограничение о том, что домохозяйства во всех странах имеют равные нормы дисконтирования. Это предположение сделано для упрощения изложения модели в тексте главы, обобщению модели для мировой экономики с различными нормами дисконтирования посвящено упражнение 18.9. Это обобщение достаточно важно, так как из него следует, что устойчивость мирового распределения дохода на душу населения не зависит от равенства норм дисконтирования или асимптотического равенства норм сбережений между странами.

Как и в неоклассической модели экономического роста, ресурсное ограничение в каждой стране j выглядит как

$$\dot{k}_j(t) = f(k_j(t)) - \tilde{c}_j(t) - (n_j + g_j(t) + \delta)k_j(t),$$

где переменная $\tilde{c}_j(t) \equiv c_j(t)/A_j(t) \equiv C_j(t)/(A_j(t)L_j(t))$ обозначает потребление на единицу эффективного труда. Это уравнение заменяет уравнение (18.1) и определяет динамику эффективного отношения капитала к труду в стране j.

Определим мировое равновесие и стационарное мировое равновесие аналогично предыдущему подпараграфу с единственным отличием, что в данном случае выбор потребления определяется как решение задачи максимизации полезности репрезентативного домохозяйства в каждой стране j. Тогда из рассуждений, аналогичных рассуждениям из главы 8, вытекает следующее утверждение.

Утверждение 18.3. *Рассмотрим описанную выше модель с оптимизирующими домохозяйствами, чьи предпочтения заданы уравнением* (18.6). *Предположим, что для всех* $j = 1, \ldots, J$ *выполняется неравенство* $\rho - n_j > (1 - \theta)g$. *Тогда в модели существует единственное стационарное равновесие, в котором для каждой страны* j *значение* a_j^* *задается уравнением* (18.5), *а значение* k_j^* *единственным образом определяется уравнением*

$$f'(k_j^*) = \rho + \delta + \theta g,$$

и потребление на душу населения в каждой стране растет с темпом g.

Более того, стационарное мировое равновесие является глобально устойчивой седловой точкой: при любых строго положительных начальных условиях $\{k_j(0),\ a_j(0)\}_{j=1}^J$ *равновесная траектория* $\{k_j(t),\ a_j(t),\ \tilde{c}_j(t)\}_{j=1}^J$ *сходится при* $t \to \infty$ *к* $\{k_j^*,\ a_j^*,\ \tilde{c}_j^*\}_{j=1}^J$, *где* $\tilde{c}_j^*$ *обозначает потребление на единицу эффективного труда в стационарном равновесии в стране* j.

Доказательство. Вначале покажем, что значение a_j^* может быть найдено из дифференциального уравнения (18.4) без использования других переменных и удовлетворяет уравнению (18.5). Из равенства $g_j(t) = g$ в стационарном равновесии следует, что уравнение Эйлера для потребления и уравнение, описывающее динамику накопления капитала, в модели совпадают с соответствующими уравнениями в базовой неоклассической модели экономического роста. Далее для завершения доказательства утверждения необходимо показать устойчивость a_j^* и затем, учитывая динамику переменной $g_j(t)$ и используя рассуждения из главы 8, — седловую устойчивость k_j^*. В данном случае эта задача чуть более сложна, так как дифференциальное уравнение, описывающее динамику накопления капитала, является неавтономным. Возможность закончить доказательство предоставляется читателю в упражнении 18.8. ■

В этом утверждении показано, что качественные результаты базовой модели распространения технологий остаются неизменными вне зависимости от предположения о постоянной норме сбережений или о динамической оптимизации со стороны домохозяйств (до тех пор, пока мы ограничиваем темп роста экономики сверху так, чтобы целевая функция домохозяйства принимала конечное значение и не нарушалось условие трансверсальности). Естественно, что теперь равновесие описывается не только динамикой пары $[k_j(t), a_j(t)]$, но также включает в себя траекторию потребления на единицу эффективного труда $\tilde{c}_j(t)$. Следовательно, подходящей концепцией устойчивости в данном случае является седловая устойчивость и равновесие в утверждении 18.3 обладает этим свойством.

18.2.3. Роль человеческого капитала в распространении технологий

Модель, описанная выше, отчасти инспирирована классической статьей Ричарда Нельсона и Эдмунда Фелпса [Nelson, Phelps 1966], которую мы уже упоминали в главе 10. Напомним, что подход Бекера—Минсера основан на утверждении о том, что человеческий капитал увеличивает производительность труда, поставляемого индивидами на рынок. Несмотря на то что этот подход позволяет влиянию человеческого капитала различаться при выполнении работниками различных заданий, в большинстве приложений делается предположение о том, что увеличение человеческого капитала ведет к росту производительности во всех или почти всех трудовых действиях, а множество различных трудовых действий рассматривается как заданное. С другой стороны, Р. Нельсон и Э. Фелпс (а также Тэд Шульц) делают акцент на роли человеческого капитала в способствовании внедрению новых технологий и адаптации к изменяющимся производственным условиям.

В рамках модели, описанной выше, наиболее простым способом описать такой подход будет предположение о том, что параметр σ_j является функцией от запаса человеческого капитала работников. Чем большим запасом человеческого капитала владеют работники, тем большими возможностями по принятию новых технологий обладает экономика. Если это так, то страны с большим запасом человеческого капитала будут богаче, потому что, как следует из утверждения 18.2, у стран с большим значением σ_j более высокий уровень дохода на душу населения в стационарном равновесии.

Используя такую модификацию модели и оставив ее математическую структуру неизменной, мы приходим к объяснению экономического роста в странах с различным запасом человеческого капитала, значительно отличающимся от выводов из подхода Бекера—Минсера (или по меньшей мере из наиболее простой версии подхода Бекера—Минсера). В этом подходе утверждается, что мы можем аппроксимировать роль человеческого капитала в экономическом развитии с помощью детального описания его вклада в агрегированную производственную функцию. Этот вклад, в свою очередь, может быть найден из оценивания дохода от образования и от других качеств человеческого капитала на рынке труда на уровне отдельных работников. С другой стороны, в подходе Нельсона—Фелпса—Шульца утверждается, что если вклад человеческого капитала в производительность посредством производственной функции невелик, недостаток человеческого капитала может привести к замедлению процесса распространения новых технологий.

18.2.4. Барьеры, препятствующие внедрению технологий

Как показано в главе 8, одно из основных направлений критики неоклассической модели экономического роста связано с ее неспособностью количественно объяснить значительные межстрановые различия в уровне дохода на душу населения. Многие экономисты связывают это с тем, что базовая неоклассическая модель не способна объяснить технологические различия между странами. Модель их этого параграфа является сокращенной формой модели межстрановых технологических различий и поэтому позволяет нам расширить модель Солоу и неоклассическую модель экономического роста, включив в них технологические различия. Однако такая модель будет представлять интерес только в том случае, если мы сможем получить оценки ее основных параметров, таких как σ_j и λ_j из эмпирических данных. В подпараграфе 18.2.3 мы связали значение параметра σ_j с запасом человеческого капитала в экономике. Альтернативный подход, описанный в работе [Parente, Prescott 1994], состоит в связи значения σ_j с барьерами, препятствующими внедрению новых технологий. В этой статье авторы строят вариант неоклассической модели экономического роста, в котором инвестиции влияют на процесс принятия новых технологий и страны различаются по размеру барьеров, которые препятствуют фирмам осуществлять такие инвестиции. В рамках вышеописанной модели в сокращенной форме это означает, что параметр σ_j является функцией от степени защиты права собственности в экономике и других институциональных и политических факторов.

Такой подход может быть полезен, так как он позволяет выделить явные причины различий значения параметра σ_j в разных странах. Несмотря на это, он остается неудовлетворительным по двум важным причинам. Во-первых, то, каким образом институциональное устройство общества оказывает влияние на процесс внедрения технологий, остается в модели черным ящиком. Во-вторых, и более важно, модель не объясняет, почему некоторые общества решают воздвигать барьеры, препятствующие внедрению новых технологий, а другие общества не воздвигают таких барьеров. Модели, в которых распространение технологий объединено с эндогенными решениями о внедрении технологий, являются шагом на пути к решению этих вопросов. Часть VIII книги посвящена анализу вопроса о том, почему некоторые страны создают барьеры, препятствующие внедрению новых технологий.

18.3. Распространение технологий и эндогенный экономический рост

В моделях из предыдущего параграфа распространение технологий протекает экзогенно в том смысле, что фирмы не принимают участия в исследовательской и инвестиционной деятельностях, направленных на улучшение используемых ими технологий. В этом параграфе мы рассмотрим модели, в которых фирмы заняты такой деятельностью. Параграф состоит из двух частей. В первой части мы будем рассматривать темп роста мировой экономики как заданную экзогенную величину, во второй части он будет определяться внутри модели эндогенно.

18.3.1. Экзогенный темп роста мировой экономики

Чтобы как можно более сократить изложение материала, мы будем использовать базовую модель эндогенного технологического прогресса с расширяющимся множеством типов машин и модель лабораторного оборудования из параграфа 13.1 из главы 13 и часто ссылаться на результаты из этой главы. Отметим, что для анализа в этом параграфе могут быть использованы различные версии модели эндогенного технологического прогресса.

Агрегированная производственная функция для страны $j = 1, \ldots, J$ в момент времени t имеет следующий вид:

$$Y_j(t) = \frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^{N_j(t)} x_j(v, t)^{1-\beta} d\nu\right) L_j^{\beta}, \tag{18.7}$$

где переменная L_j обозначает совокупную занятость, которая, как мы предположим, является постоянной величиной, переменная $N_j(t)$ — количество (мера множества) типов машин, используемых в стране j, а переменная $x_j(v, t)$ — общее количество машин типа v, занятых в производстве в момент времени t. Как и ранее, предположим, что каждая машина x полностью выбывает после использования. Как и в главе 13, допустим, что права на каждый тип машин v принадлежат фирме — технологическому монополисту, продающей машины, в которых используется такая технология, по цене (арендной стоимости), при которой ее прибыль достигает максимума. Издержки производства одной машины для фирмы-монополиста составляют $\psi = 1 - \beta$ единиц конечного товара, где мы вновь используем такую нормализацию для упрощения последующих выкладок.

Так как в мировой экономике отсутствует международная торговля, фирмы в стране j могут использовать только те типы машин, которые производятся технологическими монополистами в этой стране. Такое предположение приводит к появлению возможных различий в запасе знаний, доступных резидентам разных стран.

Экономика каждой страны допускает существование репрезентативного домохозяйства с целевой функцией (18.6), однако мы будем предполагать, что население каждой страны постоянно, то есть $n_j = 0$ для всех j. Как и ранее, будем считать, что открытие новых типов машин требует осуществления инвестиций, и поэтому ресурсное ограничение для экономики каждой страны в любой момент времени имеет следующий вид:

$$C_j(t) + X_j(t) + \zeta_j Z_j(t) \leq Y_j(t), \tag{18.8}$$

где переменная $X_j(t)$ обозначает инвестиции или расходы на комплектующие в момент времени t, а переменная $Z_j(t)$ — расходы на внедрение технологий в момент времени t, которые могут представлять собой расходы на НИОКР или какие-либо другие расходы, например покупку или аренду машин, использующих новые технологии. Параметр ζ_j отражает возможные межстрановые различия в издержках внедрения технологий, которые могут возникать вследствие существования различных институционных барьеров, препятствующих внедрению новых технологий, как показано в статье [Parente, Prescott 1994], субсидирования НИОКР и технологий или другой налоговой политики. Он также может быть функцией от запаса человеческого капитала рабочей силы в стране j, отражая роль человеческого капитала в процессе внедрения новых технологий, описанную в работе [Nelson, Phelps 1966].

Основное отличие этой модели от моделей из главы 13 состоит в виде границы инновационных возможностей, которая описывается следующим уравнением:

$$\dot{N}_j(t) = \eta_j \left(\frac{N(t)}{N_j(t)} \right)^{\phi} Z_j(t), \tag{18.9}$$

где $\eta_j > 0$ для всех j и константа $\phi > 0$ едина для всех экономик.

Такой вид границы инновационных возможностей описывает те же идеи, что и уравнение (18.3), однако здесь ключевым элементом является не абсолютный, а относительный разрыв в уровне технологий. Мы выбрали такую функциональную форму для упрощения последующих выкладок. Предположим, что в начальный момент времени каждая экономика обладает некоторым положительным запасом технологий $N_j(0) > 0$. Наконец, как отмечено выше, предположим, что мировая технологическая граница расширяется с экзогенно заданным темпом g, то есть

$$\dot{N}(t) = gN(t). \tag{18.10}$$

Из анализа из главы 13 следует, что потоковая прибыль технологического монополиста в стране j в момент времени t составляет $\pi_j(t) = \beta L_j$. Допустим, что стационарное равновесие (ТСР) существует и что процентная ставка в нем постоянна и равна некоторому $r_j^* > 0$. Тогда чистая приведенная дисконтированная стоимость нового типа машин равна:

$$V_j^* = \frac{\beta L_j}{r_j^*}.$$

Если темпы роста всех экономик в стационарном равновесии совпадают, то все $N_j(t)$ также растут с темпом g, и поэтому отношение $N_j(t)/N(t)$

остается постоянным — допустим, равным μ_j^*. В этом случае дополнительные единичные расходы на технологию увеличивают прибыль на $\eta_j(\mu_j^*)^{-\phi}V_j^*$ при издержках ζ_j. Тогда из условия свободного выхода на рынок следует равенство:

$$\mu_j^* = \left(\frac{\eta_j \beta L_j}{\zeta_j r^*}\right)^{1/\phi}, \qquad (18.11)$$

где мы используем результат о том, что если предпочтения домохозяйств заданы уравнением (18.6), то из равенства темпов роста экономик всех стран следует равенство процентных ставок в них и единая процентная ставка задается уравнением $r^* = \rho + \theta g$.

Так как более высокое значение параметра μ_j означает, что страна j является более технологически развитой и поэтому более богатой, чем другие страны, уравнение (18.11) показывает, что экономики с лучшими инновационными возможностями (что описывает параметр η_j) и с меньшими издержками исследовательской деятельности (что описывает параметр ζ_j) будут более технологически развиты и более богаты. Это уравнение также включает в себя эффект масштаба из стандартной модели эндогенного технологического прогресса, поэтому страны с большим населением также будут более богаты. Это наблюдение является следствием того, что, как и в базовой модели эндогенного технологического прогресса, увеличение рабочей силы ведет к ускорению экономического роста: увеличение рабочей силы ведет к росту спроса на машины, что делает исследовательскую деятельность более прибыльной.

Утверждение 18.4. *Рассмотрим модель эндогенного внедрения технологий, описанную выше. Предположим, что выполняется неравенство $\rho > (1 - \theta)g$. Тогда в ней существует единственное стационарное мировое равновесие, в котором относительный уровень технологий в странах задается уравнением (18.11) и экономики всех стран растут с одинаковым темпом $g > 0$.*

Более того, это стационарное равновесие является глобально устойчивым седловым равновесием в том смысле, что при любом строго положительном векторе начальных значений $N(0)$ и $(N_1(0), \ldots, N_J(0))$ равновесная траектория сходится к $(\mu_1^* N(t), \ldots, \mu_J^* N(t))$ при $t \to \infty$.

Доказательство. Во-первых, покажем, что описанное стационарное равновесие является единственным стационарным равновесием, в котором темпы роста экономик всех стран совпадают. Затем, как и в главе 13, рассмотрим функцию стоимости фирмы-технологического монополиста в каждой стране и покажем, что количество типов машин в каждой стране асимптотически растет с темпом g.

Завершение доказательства утверждения предоставим читателю в упражнении 18.11. ■

Это утверждение и предыдущие рассуждения показывают, что равновесие в модели с эндогенными инвестициями во внедрение технологий схоже с равновесием в модели из предыдущего параграфа. Основное отличие состоит в том, что здесь мы можем выделить факторы, определяющие скорость внедрения новых технологий, и связать их со стимулами фирм к получению прибыли. Модель с эндогенными инвестициями также позволяет нам исследовать, каким образом различия в издержках инвестиций в технологии могут влиять на межстрановые различия в уровне технологий и дохода на душу населения (см. упражнение 18.12).

18.3.2. Эндогенный темп роста мировой экономики

В модели из подпараграфа 18.3.1 мы сделали упрощение, предположим, что темп роста мировой экономики задан экзогенно. Более удовлетворительной будет модель, в которой темп роста мировой экономики определяется внедрением технологий и исследовательской деятельностью в каждой стране. Такие модели обычно являются более сложными, так как они описывают большее количество взаимосвязей между странами. Более того, чтобы гарантировать, что мировая экономика растет с постоянным эндогенным темпом, а темпы роста экономик отдельных стран не слишком сильно отличаются друг от друга, при построении модели необходимо проявить некоторую предосторожность. Одной из очевидных возможностей здесь будет модель, в которой экономики всех стран растут с перманентно отличающимися долгосрочными темпами (см., например, упражнение 13.7 из главы 13). Эмпирические свидетельства, представленные в главе 1, говорят о том, что в течение последних двухсот-пятисот лет мы действительно наблюдаем такие различия в долгосрочных темпах экономического роста, однако межстрановые различия в темпах устойчивого экономического роста в течение последних шестидесяти лет значительно менее велики (откуда следует, что изменения мирового распределения доходов в послевоенное время были минимальны). Поэтому долгосрочные межстрановые различия в темпах экономического роста являются вопросом выбора исследователя, отчасти это зависит от того, желает ли он построить долгосрочную модель, ведущую к значительным различиям в уровне дохода на душу населения или аппроксимировать стационарное равновесие развитием мировой экономики в течение последних двухсот или пятисот лет. Так как такие различия в темпах экономического роста естественным образом возникают в большом количестве моделей (включая модели эндогенного технологического развития, описанные выше, см. упражнение 13.7), здесь мы остановимся на силах, ведущих к сближению темпов роста экономик различных стран в моделях с эндогенным технологическим развитием на мировом уровне.

Основное отличие этой модели от модели из подпараграфа 18.3.1 состоит в том, что здесь уравнение для экзогенного темпа роста мировой экономики (18.10) заменяется на уравнение, которое связывает улучшения мировой технологии с технологическим развитием в каждой стране. В частности, мы воспользуемся наиболее простым способом агрегирования технологий в различных странах, который состоит в построении среднего арифметического:

$$N(t) = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} N_j(t). \tag{18.12}$$

В этом уравнении переменная $N(t)$ уже не описывает мировую технологическую границу. Здесь она представляет собой среднее значение технологии в мире, и до тех пор, пока уровни технологии в разных странах различаются, естественным образом для некоторых стран j будет выполняться неравенство $N_j(t) > N(t)$. Несмотря на это, подход, в котором мировая технология описывается средним значением технологий во всех странах, является логичным обобщением идей, представленных ранее в этой главе. Один из недостатков такой формулировки состоит в том, что здесь мы неявно предполагаем, что вклады всех стран в развитие мировой технологии совпадают. В упражнении 18.18 описаны альтернативные подходы к агрегированию технологий в отдельных странах в мировую технологическую переменную и показано, что качественные результаты этой модели не изменяются при использовании других способов агрегирования. Кроме уравнения (18.12), все остальные уравнения из подпараграфа 18.3.1 продолжают выполняться в этой модели.

Основной результат этого подпараграфа состоит в том, что динамика экономического роста различных стран в модели с эндогенным темпом роста мировой экономики g, который определяется инвестициями в технологии фирм в различных странах, во многом схожа с динамикой в модели из подпараграфа 18.3.1. Предположим, что в модели существует стационарное мировое равновесие, в котором темп роста экономики каждой страны равен g. Тогда из уравнения (18.12) следует, что мировая технология $N(t)$ также растет с темпом g. Чистая приведенная дисконтированная стоимость нового типа машин в стране j остается равной $\beta L_j/r^*$, а из условия отсутствия арбитража в инвестициях в НИОКР следует, что при заданном значении g значение относительного уровня технологии в каждой стране j μ_j^* удовлетворяет уравнению (18.11). Однако, разделив обе части уравнения (18.12) на $N(t)$, нетрудно убедиться, что в стационарном мировом равновесии выполняются следующие равенства:

$$\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\mu_j^* = 1,$$

$$\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{\eta_j \beta L_j}{\zeta_j(\rho+\theta g)}\right)^{1/\phi} = 1, \qquad (18.13)$$

где во втором равенстве мы используем определение μ_j^* из уравнения (18.11) и подставляем, вместо общей для всех стран процентной ставки, выражение для ее значения как функции от темпа роста мировой экономики. Единственной неизвестной величиной в уравнении (18.13) является переменная g. Более того, нетрудно заметить, что левая часть уравнения является убывающей функцией от g, и поэтому это уравнение имеет не более одного корня, который мы обозначим как g^*. Следующее неравенство — необходимое и достаточное условие для того, чтобы темп роста мировой экономики составлял положительную величину (см. упражнение 18.14):

$$\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{\eta_j \beta L_j}{\zeta_j \rho}\right)^{1/\phi} > 1. \qquad (18.14)$$

Утверждение 18.5. *Предположим, что выполняется неравенство* (18.14) *и что единственное решение уравнения* (18.13) g^* *удовлетворяет неравенству* $\rho > (1-\theta)g^*$. *Тогда в модели существует единственное стационарное мировое равновесие, в котором темп роста мировой экономики равен* g^* *и экономики всех стран растут с одинаковым темпом* g^*. *Значение темпа роста* g^* *определяется эндогенно инвестициями в технологии и экономической политикой в каждой стране. В частности, темп роста мировой экономики является возрастающей функцией от* η_j *и* L_j *и убывающей функцией от* ζ_j *для каждой страны* $j = 1, \ldots, J$.

Доказательство. См. упражнение 18.15. ■

Необходимо отметить несколько свойств этого равновесия. Во-первых, при заданном значении темпа роста мировой экономики его структура схожа со структурой равновесия в утверждении 18.4. Поэтому интуитивное объяснение вывода о том, что экономики всех стран растут с одинаковым темпом и различия в границе инновационных возможностей η_j, населении страны L_j и количестве барьеров, препятствующих инвестициям в технологии ζ_j, ведут лишь к различиям в уровне дохода на душу населения, аналогично. Более интересное наблюдение заключается в том, что в модели, по существу совпадающей с моделью из подпараграфа 18.3.1, темп роста мировой экономики определяется эндогенно. В частности, несмотря на то что темп экономического роста каждой страны выглядит экзогенным в том смысле, что экономика каждой страны растет с темпом, определяемым на мировом уровне, темп роста мировой экономики является эндогенным и определяется инвестиционными решениями фирм в каждой стране. Поэтому такая модель является более подходящей для анализа мирового экономического роста, чем модели исключительно экзогенного или исключительно эндогенного экономического роста. В этой модели технологический прогресс и экономический рост являются следствием инвестиций фирм во всех странах в мировой экономике, однако в ней присутствует достаточное количество мощных механизмов, действующих через переливы технологий, которые двигают относительно отсталые страны к среднему уровню развития, что ведет к выравниванию долгосрочных темпов экономического роста во всех экономиках. При этом очевидно, что равенство темпов роста не противоречит существованию достаточно больших межстрановых различий в уровне дохода на душу населения (см. упражнение 18.12).

В упражнении 18.5 мы использовали ряд упрощающих предположений. Во-первых, мы положили, что нормы дисконтирования совпадают во всех странах. Это предположение было сделано лишь с целью упростить изложение материала, в упражнении 18.13 рассмотрен случай различных норм дисконтирования в разных странах. Во-вторых, в утверждении описано лишь стационарное равновесие. Переходная динамика в модели достаточно сложна, так как динамическая система уравнений не является блочно-рекурсивной и дифференциальные уравнения, описывающие равновесные траектории экономик каждой из стран, решаются совместно. Однако, как показано в упражнении 18.16, стационарное мировое равновесие остается локально устойчивым.

18.4. Подходящие и неподходящие технологии и различия в уровне производительности

В моделях, представленных в этой главе ранее, явным образом описывается медленный процесс трансформации технологий из мирового запаса накопленных знаний во множество технических приемов, используемых в производстве в каждой стране. Мы мотивировали медленность принятия новых технологий издержками их внедрения и возможными барьерами, препятствующими их распространению. Однако, как отмечено в начале главы, в глобальном современном мире, в котором информационные технологии и скорость распространения информации делают большое количество технологий легкодоступными большинству индивидов и фирм во всем мире, мы вправе ожидать намного более быстрого перемещения технологий между странами. Почему быстрый процесс распространения знаний не ведет к устранению всех, или по меньшей мере большинства, межстрановых технологических различий? Оставив обсуждение институциональных и политических барьеров, препятствующих распространению технологий на будущее, в этом и следующем параграфах мы остановимся на анализе вопроса, почему технологические различия и различия в уровне дохода на душу населения могут оставаться значительными даже при свободном распространении знаний.

Во-первых, различия в производительности могут оставаться даже когда технологические различия отсутствуют в силу различий в организации производственной деятельности и межстрановых различий в уровне неэффективности производства. Следующий параграф посвящен анализу такой ситуации. Во-вторых, другая важная причина различий в производительности в том, что технологии с мировой технологической границы могут не подходить для нужд экономики определенной страны и поэтому импорт наиболее развитых передовых технологий не будет гарантировать достижения всеми странами одинакового уровня технологий. Эта идея в некотором смысле является одновременно простой и привлекательной. Технологии и навыки рабочей силы состоят из наборов дополняющих друг друга элементов, и эти наборы могут различаться между странами. Поэтому технология, которая работает хорошо при заданном наборе навыков и знаний работников в США или в Швейцарии, может не работать в Нигерии или Турции. Несмотря на это, до тех пор пока мы не опишем специфические элементы, которые делают технологии успешными в некоторых странах и не делают их такими в других странах, такой подход будет иметь малую объясняющую силу. В этом параграфе мы рассмотрим три версии модели, основанной на этом подходе, которые могут обладать некоторой теоретической и эмпирической привлекательностью. Во-первых, мы обсудим, как различия в экзогенных (например, географических) условиях могут приводить к тому, что одинаковые технологии могут обладать различной производительностью в различных странах и регионах. Во-вторых, мы покажем, почему межстрановые различия в интенсивности использования капитала могут делать некоторые типы технологий неподходящими для нужд определенных стран. Наконец, большая часть этого параграфа посвящена анализу влияния различий навыков рабочей силы между странами на целесообразность внедрения передовых технологий развивающимися странами. В этом контексте мы покажем, как степень целесообразности определенной технологии может определяться в мировом равновесии эндогенно, и опишем модель экономического роста, в которой труд распределяется между различными секторами экономики, которая является важной моделью сама по себе.

18.4.1. Неподходящие технологии

Гипотеза о неподходящих технологиях наилучшим образом может быть проиллюстрирована на примере инноваций в здравоохранении. Предположим, что производительность в стране j в момент времени t, $A_j(t)$, является функцией от наличия в стране эффективных вакцин против определенных заболеваний, поражающих значительную часть населения. Допустим, что таких заболеваний два: инфаркт миокарда и малярия. В странах $j = 1, ..., J'$ население заболевает малярией, но не заболевает болезнями сердца, а в странах $j = J' + 1, ..., J$ население подвержено инфаркту, но не заболевает малярией. Если заболевание в стране j неизлечимо, то производительность в этой стране равна $A_j(t) = \underline{A}$, а после открытия вакцины она возрастает до $A_j(t) = \bar{A}$. Представим себе, что произошло открытие нового лекарства от инфаркта и оно становится свободно доступным во всех странах. В этом случае производительность в странах $j = J' + 1, ..., J$ возрастает с $\underline{A}$ до $\bar{A}$, а производительность в странах $j = 1, ..., J'$ остается равной $\underline{A}$. Этот простой пример показывает, как технологии с мировой границы производительности могут оказаться неподходящими для нужд определенных стран (в данном случае стран $j = 1, ..., J'$, подверженных малярии). Более того, в экстремальном случае новые технологии, свободно доступные во всех странах мира, ведут к росту производительности лишь в подмножестве стран и, таким образом, увеличивают межстрановые различия в уровне дохода на душу населения.

Можем ли мы ожидать, что наблюдения такого типа будут важны в контексте теории экономического роста? Ответ на этот вопрос неоднозначен: и да и нет. С одной стороны, естественно ожидать, что новые технологии должны быть оптимизированы под условия и нужды стран ОЭСР, так как эти страны являются крупнейшим рынком новых технологий, и большинство новых технологических знаний производится именно в них (см. подпараграф 18.4.3 далее). С другой стороны, мы не можем выделить достаточное количество фиксированных страновых характеристик, аналогичных предотвращению заболеваний, которые приводили бы к нецелесообразности технологий такого типа. Поэтому намного более вероятным представляется то, что вопрос целесообразности технологий будет важен в контексте увеличения новыми технологиями производительности на рынках с различной интенсивностью использования факторов производства. Подпараграфы 18.4.2 и 18.4.3 посвящены анализу того, могут ли технологии, разработанные в развитых странах, производительно использоваться в странах с отличными от развитых стран значениями отношений капитала к труду и квалифицированной к неквалифицированной рабочей силе.

18.4.2. Отношение капитала к труду и неподходящие технологии

В классической статье [Atkinson, Stiglitz 1969] авторы утверждают, что подходящий способ моделирования технологического развития состоит в рассмотрении его как сдвига изоквант (увеличении производительности) при заданном отношении капитала к труду. Например, фирма, которая использует определенный тип машин, допустим определенную модель тракторов, и единственного работника, может найти способ увеличить производительность этого работника. Эта инновация может быть применена другими фирмами, которые используют трактор того же типа и одного работника. Однако она будет менее полезна для фирм, использующих скот или менее современные трактора, а может быть и для фирм, использующих более современные трактора. Поэтому технологические изменения могут быть локализованы для определенного значения отношения капитала к труду и не быть настолько же производительными при других значениях этого отношения. Это наблюдение может иметь очень важные следствия для межстрановых различий в уровне дохода. Если новые технологии развиваются для значительно капиталоинтенсивной производственной деятельности в странах ОЭСР, то они могут не быть производительными в менее развитых странах с большим запасом труда, в которых отношение капитала к труду на большинстве фирм значительно ниже его значения в странах ОЭСР. Такой подход развит в контексте модели экономического роста Солоу в статье [Basu, Weil 1998]. Далее мы опишем упрощенную версию этой модели.

Допустим, что выпуск на одного работника в стране задается следующей производственной функцией:

$$y \equiv \frac{Y}{L} = A(k \mid k')k^{1-\alpha},$$

где для упрощения записи мы опустили страновой и временной индексы, переменная $k \equiv K/L$ обозначает отношение капитала к труду в стране, а переменная $A(k \mid k')$ общую факторную производительность технологии, разработанной для использования при отношении капитала к труду k', когда она используется при отношении капитала к труду k. Допустим, что если технология, разработанная для отношения капитала к труду k', используется при меньшем значении отношения капитала к труду, то ее эффективность снижается. В частности, предположим, что выполняется следующее равенство:

$$A(k \mid k') = A\min\left\{1, \left(\frac{k}{k'}\right)^{\gamma}\right\}$$

при некотором значении $\gamma \in (0, 1)$. Допустим, что новые технологии разрабатываются в более развитых странах, которые обладают большим отношением капитала к труду. Тогда выпуск на одного работника в менее развитых странах с меньшим отношением капитала к труду $k < k'$ составляет:

$$y = A(k \mid k')k^{1-\alpha} = Ak^{1-\alpha+\gamma}(k')^{-\gamma}. \tag{18.15}$$

Из уравнения (18.15) моментально следует, что менее развитые страны будут менее производительны, чем развитые страны, даже если они используют такие же технологии. Более того, этот разрыв производительности увеличивается при росте разницы в интенсивности использования капитала в производственной деятельности между этими странами и технологически развитыми странами. В зависимости от величины параметра γ такое наблюдение о неэффективности новых технологий может быть важно для понимания межстрановых различий в уровне дохода на душу населения. Используя рассуждения из глав 2 и 3, мы можем положить $\alpha \approx 2/3$. В этом случае экономика, в которой отношение капитала к труду в 8 раз выше, чем в другой стране, будет лишь в 2 раза богаче в том случае, когда обе страны имеют доступ к одним и тем же технологиям и неэффективность технологий, описанная выше, отсутствует. Однако если $\gamma = 2/3$ и страна с более высоким отношением капитала к труду находится на границе технологических возможностей, то из вида функции $A(k \mid k')$ следует, что разрыв в доходе на одного работника будет восьмикратным, а не двукратным, как в модели, где неэффективность технологий отсутствует. Поэтому неэффективность новых технологий может приводить к росту межстрановых различий в уровне дохода на душу населения, даже когда все страны имеют доступ к одним и тем же технологиям. Более подробно эта модель описана в упражнении 18.20.

18.4.3. Эндогенные технологические изменения и подходящие технологии

Подход Аткинсона—Стиглица и Базу—Вейла, описанный в подпараграфе 18.4.2, основан на различиях в интенсивности использования капитала в производстве между богатыми и бедными странами. Из эмпирических свидетельств, представленных в параграфе 18.1, следует, что особенно важными в контексте внедрения новых технологий могут быть межстрановые различия в запасе человеческого капитала. Более того, последние тридцать лет характеризуются появлением как в развитых, так и в развивающихся экономиках значительного числа технологий, смещенных в сторону навыков. Принимая во внимание эти эмпирические свидетельства, заметим, что несоответствие между требованием передовых технологий к квалификации работников и навыками рабочей силы в менее развитых странах может быть более важно, чем различия в интенсивности использования капитала в производственной деятельности. В этом подпараграфе мы кратко остановимся на модели, описанной в работе [Acemoglu, Zilibotti 2001], в которой описываются следствия из несоответствия между технологиями, разработанными в развитых экономиках, и квалификацией рабочей силы в менее развитых странах. Более того, эта модель позволит нам использовать идеи, связанные с направленным технологическим прогрессом, изложенные в главе 15, в контексте анализа межстрановых различий в производительности. Она также является примером математически несложной многосекторной модели экономического роста.

Мировая экономика состоит из двух групп стран: Севера и Юга, и в ней существуют два типа работников: квалифицированные и неквалифицированные работники. Между странами Севера и Юга выделяются два различия. Во-первых, все исследования и инновации осуществляются в странах Севера (таким образом, мы можем рассматривать Север как страны ОЭСР или США и ряд других развитых стран). Страны Юга лишь копируют технологии, разработанные на Севере. Так как в странах Юга отсутствует защита прав интеллектуальной собственности, основным рынком новых технологий являются северные фирмы. Во-вторых, квалификация работников в северных странах превосходит их квалификацию в странах Юга, то есть

$$H^n/L^n > H^s/L^s,$$

где переменная H^j обозначает количество квалифицированных работников в стране j, а переменная L^j — количество неквалифицированных работников в ней. Для обозначения северных и южных стран мы будем использовать индексы $j = n$ или $j = s$ и допустим, что количество стран на Севере и на Юге достаточно велико. Предположим, что рост населения в мире отсутствует и что страны не участвуют в международной торговле товарами. Также предположим, что все страны обладают доступом к единому множеству технологий, то есть в мировой экономике отсутствует медленное распространение технологий. Все различия в производительности являются следствием возможных несоответствий между технологиями и квалификацией работников.

Положим, что все экономики допускают существование репрезентативного домохозяйства со стандартными предпочтениями, описываемыми, например, уравнением (18.6) при $n_j = 0$ для всех j, так как население во всех странах остается постоянным. Производство конечного товара в каждой стране задано производственной функцией, являющейся агрегатом Кобба—Дугласа континуума единичной меры промежуточных товаров, как в уравнении (14.59) из параграфа 14.4 из главы 14. В частности, для страны j имеем:

$$Y_j(t) = \exp\left(\int_0^1 \log y_j(i, t)di\right), \qquad (18.16)$$

где переменная $Y_j(t)$ обозначает выпуск конечного товара в стране j в момент времени t, а переменная $y_j(i, t)$ — выпуск промежуточного товара i. Как обычно, конечный товар используется на потребление $C_j(t)$, расходы на промежуточные товары $X_j(t)$, а на Севере также и на расходы на исследовательскую деятельность, равные $Z_j(t)$. Страны Юга не совершают собственных исследований, но могут внедрять технологии, разработанные на Севере.

Предположим, что производственная функция промежуточного товара i в стране j в момент времени t имеет следующий вид:

$$y_j(i, t) = \frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^{N_L(t)} x_{L,j}(i, \nu, t)^{1-\beta} d\nu\right)((1-i)l_j(i, t))^\beta +$$
$$+\frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^{N_H(t)} x_{H,j}(i, \nu, t)^{1-\beta} d\nu\right)(i\omega h_j(i, t))^\beta. \qquad (18.17)$$

Необходимо отметить несколько свойств такой производственной функции промежуточных товаров. Во-первых, производство любого промежуточного товара возможно с использованием двух альтернативных технологий, в одной из них занят квалифицированный труд, в другой — неквалифицированный труд. Здесь переменная $l_j(i, t)$ обозначает количество неквалифицированных работников, занятых в производстве промежуточного товара i в стране j в момент времени t. Аналогичным образом определена функция $h_j(i, t)$. Во-вторых, производительность квалифицированных и неквалифицированных работников разнится в производстве различных промежуточных товаров, это свойство отражает возможные межстрановые сравнительные преимущества. В частности, присутствие множителей $(1 - i)$ и i в производственной функции (18.17) означает, что квалифицированные работники относительно более производительны в производстве промежуточных товаров с индексами, близкими к единице, а неквалифицированные работники обладают сравнительным преимуществом в производстве промежуточных товаров с индексами, близкими к нулю. В-третьих, из предположения о том, что значение параметра ω больше единицы, следует, что квалифицированные работники также обладают абсолютным преимуществом. В-четвертых, как и в стандартной модели расширяющегося разнообразия типов машин, переменная $x_{L,j}(i, \upsilon, t)$ обозначает количество машин типа υ, которые используют неквалифицированные работники, а переменная $x_{H,j}(i, \upsilon, t)$ — количество машин типа υ, которые используют квалифицированные работники. Эта часть производственной функции аналогична функции из главы 15. Количества типов машин, используемых квалифицированными и неквалифицированными работниками, различаются между собой и составляют $N_L(t)$ и $N_H(t)$ соответственно. Необходимо отметить, что эти переменные не индексируются страной j, так как мы предполагаем, что все технологии доступны индивидам во всех странах. Поэтому мы оставляем в стороне вопрос медленного распространения технологий и, таким образом, все межстрановые различия в модели являются следствием неэффективности технологий. Наконец, мы используем в уравнении (18.17) множитель $\frac{1}{1-\beta}$ для удобной нормализации.

Предположим, что рынки конечного товара и труда являются рынками с совершенной конкуренцией, а фирма — технологический монополист, как и в моделях из глав 13 и 15, производит машины с предельными издержками, равными ψ. Обозначим цены машин типа υ в двух секторах в стране j в момент времени t как $p^x_{L,j}(\nu, t)$ и $p^x_{H,j}(\nu, t)$. Заметим, что эти цены не зависят от отрасли i, так как все машины могут быть использованы в производстве любого промежуточного товара. Однако квалифицированные и неквалифицированные работники используют различные типы машин. Как и в моделях из глав 13 и 15, максимизация прибыли фирмой в секторе производства конечного товара ведет к следующим функциям спроса на машины:

$$x_{L,j}(i, \nu, t) = \left[p_j(i, t)(1-i)l_j(i, t)^{\beta} / p^x_{L,j}(\nu, t)\right]^{1/\beta},$$

$$x_{H,j}(i, \nu, t) = \left[p_j(i, t)(i\omega h_j(i, t))^{\beta} / p^x_{H,j}(\nu, t)\right]^{1/\beta},$$

где переменная $p_j(i, t)$ обозначает относительную цену промежуточного товара i в единицах конечного товара (который мы используем как единицу измерения в каждой стране) в стране j в момент времени t. Фирма — технологический монополист в северной стране изобретает новые типы машин, и поэтому анализ совпадает с анализом в главах 13 и 15. Далее, для того чтобы описание северных и южных стран оставалось симметричным, предположим, что в каждой южной стране технологическая фирма внедряет (копирует) новые машины, изобретенные на Севере без издержек и ведет себя как монополист на рынке машин в своей стране. Более того, положим, что предельные издержки производства машин для южной фирмы совпадают с предельными издержками северной фирмы и равны $\psi > 0$.

Как обычно, из постоянной эластичности функции спроса на машины следует, что цена, при которой прибыль фирмы — технологического монополиста достигает максимума, равна постоянной наценке на ее предельные издержки, которые мы нормализуем равенством $\psi = 1 - \beta$. Из симметрии между экономиками Севера и Юга следует, что цена машин и поэтому спрос на машины совпадают во всех странах. В частности, выпуск промежуточного товара i в стране j определяется следующим уравнением:

$$y_j(i, t) = \frac{1}{1-\beta} p_j(i, t)^{(1-\beta)/\beta} \left[N_L(t)(1-i)l_j(i, t) + N_H(t)i\omega h_j(i, t) \right]. \quad (18.18)$$

Переменные $N_L(t)$ и $N_H(t)$ для каждой страны являются переменными состояния. При заданных значениях этих переменных состояния мы можем легко характеризовать равновесие. В частности, структура равновесия в каждой экономике описана в следующем утверждении.

Утверждение 18.6. *При заданных значениях мировых технологий $N_L(t)$ и $N_H(t)$ для каждой страны j существует пороговое значение $I_j(t) \in [0, 1]$, такое, что квалифицированные работники заняты только в промежуточных секторах $i > I_j(t)$, то есть для всех $i < I_j(t)$ выполняется равенство $h_j(i, t) = 0$, а для всех $i > I_j(t)$ выполняется равенство $l_j(i, t) = 0$.*

Более того, цены и распределение работников между промежуточными секторами определяются следующими условиями:

$$\text{для всех } i < I_j(t)\ p_j(i, t) = P_{L,j}(t)(1 - i)^{-\beta} \text{ и } l_j(i, t) = L_j/I_j(t),$$

в то время как

$$\text{для всех } i > I_j(t)\ p_j(i, t) = P_{H,j}(t)i^{-\beta} \text{ и } h_j(i, t) = H_j/(1 - I_j(t)),$$

где положительные величины $P_{L,j}(t)$ и $P_{H,j}(t)$ могут быть проинтерпретированы как индексы цен трудоинтенсивных и навыкоинтенсивных промежуточных товаров соответственно.

Доказательство. См. упражнение 18.21. ■

С помощью утверждения 18.6 нетрудно описать равновесие при заданных значениях мировых технологий $N_L(t)$ и $N_H(t)$. В частности из вида технологии в производстве конечного товара в уравнении (18.16) следует, что индексы цен в стране j в момент времени t удовлетворяют следующему равенству:

$$\frac{P_{H,j}(t)}{P_{L,j}(t)} = \left(\frac{N_H(t)\omega H_j/(1-I_j(t))}{N_L(t)L_j/I_j(t)} \right)^{-\beta}. \quad (18.19)$$

Более того, пороговое значение $I_j(t)$ для страны j в момент времени t не зависит от использования в производстве квалифицированного или неквалифицированного труда (и технологий), и поэтому имеет место равенство $P_{L,j}(t)(1 - I_j(t))^{-\beta} = P_{H,j}(t)I_j(t)^{-\beta}$. Объединяя это уравнение с уравнением (18.19), получаем следующее равенство:

$$\frac{P_{H,j}(t)}{P_{L,j}(t)} = \left(\frac{N_H(t)}{N_L(t)}\frac{\omega H_j}{L_j}\right)^{-\beta/2}, \tag{18.20}$$

а равновесное пороговое значение $I_j(t)$ определяется единственным образом уравнением

$$\frac{I_j(t)}{1 - I_j(t)} = \left(\frac{N_H(t)}{N_L(t)}\frac{\omega H_j}{L_j}\right)^{-1/2}. \tag{18.21}$$

Объединяя эти два уравнения, мы также можем найти общий выпуск конечного товара и размер премии за квалификацию в экономике j следующим образом:

$$Y_j(t) = \exp(-\beta)\left[(N_L(t)L_j)^{1/2} + (N_H(t)\omega H_j)^{1/2}\right]^2, \tag{18.22}$$

$$\frac{w_{H,j}(t)}{w_{L,j}(t)} = \omega\left(\frac{N_H(t)}{N_L(t)}\right)^{1/2}\left(\frac{\omega H_j}{L_j}\right)^{-1/2} \tag{18.23}$$

(см. упражнение 18.22). Интересным свойством такого равновесия является то, что за исключением уравнения (18.22) равновесное распределение ресурсов этой многосекторной модели совпадает с распределением ресурсов в модели с производственной функцией типа ПЭЗ и эластичностью замещения, равной 2. Это наблюдение является следствием более общего свойства, и, изменяя структуру сравнительных преимуществ квалифицированного и неквалифицированного труда, мы можем получить агрегированную производственную функцию с различными значениями эластичности замещения.

В равновесии, описанном выше, различные типы технологий $N_L(t)$ и $N_H(t)$ по-разному влияют на производительность в экономиках с различным отношением факторов производства. Например, рассмотрим экстремальный случай $H^S = 0$, то есть когда в странах Юга вся рабочая сила состоит только из неквалифицированных работников. Тогда рост переменной $N_H(t)$ ведет к увеличению производительности в странах Севера, но не влияет на производительность в южных странах. Очевидно, что если и в северных, и в южных странах рабочая сила состоит из квалифицированных и неквалифицированных работников, то влияние изменений переменных $N_L(t)$ и $N_H(t)$ уже не настолько экстремально. Однако общий принцип остается в силе: рост отношения $N_H(t)$ к $N_L(t)$ в большей степени благоприятствует северным странам с большим запасом квалифицированного труда, чем южным странам с недостатком квалифицированных работников. С другой стороны, увеличение переменной $N_L(t)$ в большей степени благоприятствует экономикам Юга. Таким образом, вопрос состоит в том, являются ли мировые технологии более подходящими для нужд экономик Севера или Юга. Важными элементами данной модели является то, что новые технологии разрабатываются в северных странах и что в южных странах отсутствует защита права интеллектуальной собственности на такие технологии. Отсюда следует, что новые технологии разрабатываются *предназначенными* для нужд северных стран.

Далее применим наиболее простую модель направленного технологического прогресса из главы 15 (то есть модель лабораторного оборудования из параграфа 15.3) и предположим, что динамика мировых технологий определяется следующим образом:

$$\dot{N}_L(t) = \eta Z_L(t) \text{ и } \dot{N}_H(t) = \eta Z_H(t), \tag{18.24}$$

который совпадает с границей инновационных возможностей в параграфе 15.3 за исключением того, что здесь для упрощения изложения мы положили значения η_L и η_H равными. Определим равновесие и ТСР стандартным образом. Объединяя рассуждения из параграфа 15.3 с наблюдением о том, что размер соответствующих рынков определяется переменными H^n и L^n (потому что исследовательская фирма имеет возможность продавать свои технологии только фирмам в северных странах), получаем следующее утверждение.

Утверждение 18.7. *В модели направленного технологического прогресса с лабораторным оборудованием* (18.24) *при отсутствии защиты права интеллектуальной собственности в странах Юга относительные цены в странах Севера и отношение мировых технологий на единственной ТСР определяются следующими уравнениями:*

$$\frac{P_H^n}{P_L^n} = \left(\frac{\omega H^n}{L^n}\right)^{-\beta},$$

$$\left(\frac{H_H}{L_L}\right)^* = \frac{\omega H^n}{L^n}. \tag{18.25}$$

Более того, равновесное пороговое значение I^{n*} в странах Севера и размер премии за квалификацию удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{1-I^{n*}}{I^{n*}} = \frac{\omega H^n}{L^n},$$

$$\left(\frac{w_H^n}{w_L^n}\right)^* = \omega.$$

Эта единственная ТСР является глобально устойчивой в седловом смысле траекторией.

Доказательство. См. упражнение 18.23. ■

Чтобы понять последствия направленного технологического прогресса в контексте межстрановых различий в производительности, введем три следующих простых понятия: *чистый выпуск, доход на душу населения* и *доход на единицу эффективного труда* — и зададим их следующим образом:

$$Y_j^N \equiv Y_j - X_j,\ y_j \equiv \frac{Y_j}{L_j + H_j} \text{ и } y_j^{\text{eff}} \equiv \frac{Y_j}{L_j + \omega H_j}.$$

Эти переменные являются функциями от предложения труда и относительного запаса технологий N_H/N_L. Мы опустили эту зависимость для упрощения записи.

В следующем утверждении показано, что в стационарном состоянии технологии действительно являются подходящими для экономических условий (отношения факторов производства) в странах Севера и что это эндогенно создает различия в уровне дохода на душу населения между северными и южными странами.

Утверждение 18.8. *Рассмотрим модель, описанную выше. В стационарном равновесии в ней:*

1. *Отношение $(N_H/N_L)^*$ на ТСР таково, что при заданном значении $N_H + N_L$ чистый выпуск в странах Севера достигает максимального значения как функция от отношения технологий N_H/N_L.*
2. *В стационарном равновесии при отношении технологий, равном $(N_H/N_L)^*$, выполняются неравенства $y_n > y_s$ и $y_n^{\text{eff}} > y_s^{\text{eff}}$.*

Доказательство. См. упражнение 18.24. ■

В этом утверждении устанавливается два важных результата. Во-первых, в стационарном состоянии технологии действительно являются подходящими для нужд стран Севера. Этот результат понятен интуитивно, так как исследовательские фирмы ориентируются на рынок северных стран (в частности на отношение квалифицированных и неквалифицированных работников в них). Более того, из утверждения о единственности максимума Y_n^N (при заданном значении общего количества технологий $N_H + N_L$) также следует, что чистый выпуск в странах Юга, заданный схожим выражением, не будет достигать максимума при $(N_H/N_L)^*$. В этом состоит суть второй части утверждения 18.8: так как технологии разрабатываются в северных странах (на практике, им в некотором смысле соответствуют страны ОЭСР) и предназначены для нужд (отношения факторов производства) северных экономик, они не подходят для нужд стран Юга. В результате этого доход на душу населения и доход на единицу эффективного труда в северных странах оказывается выше, чем в южных. Поэтому процесс направленного технологического прогресса ведет к увеличению межстранового неравенства доходов. В работе [Acemoglu, Zilibotti 2001] с помощью простой калибровки модели показано, что несоответствие между технологиями и квалификацией рабочей силы, создаваемое таким каналом, может иметь значительный вклад в межстрановые различия в производительности и уровне дохода на душу населения.

18.5. Структура экономических контрактов и внедрение технологий

Важным фактором, определяющим различия в технологиях и процесс внедрения технологий, являются межстрановые институциональные различия. Как отмечено выше, мы можем интерпретировать параметр σ_j в модели из параграфа 18.2 как изменяющийся вследствие различий в количестве институциональных и политических барьеров, препятствующих внедрению новых технологий. Очевидно, что подход, в котором параметр σ_j связан с такими технологическими барьерами, является моделью в сокращенной форме. Для того чтобы достичь дальнейшего прогресса, нам понадобится микрообоснованная модель, объясняющая, почему эти барьеры возникают и как они влияют на технологический выбор фирм и индивидов. Причины, по которым определенные группы агентов могут желать воздвигнуть барьеры, препятствующие внедрению новых технологий, подробно обсуждаются в части VIII книги. В ней же мы также опишем другие факторы, влияющие на эффективность организации производственной деятельности. Однако, прежде чем перейти к такому типу моделей, полезно будет показать, как способность составлять контракты между фирмами и их поставщиками (или между фирмами и работниками) может иметь последствия первого порядка малости на принятие решений о внедрении новых технологий. Далее мы кратко опишем модель эндогенного внедрения технологий, которая, как и предыдущая модель, основана на подходе, изложенном в главе 13. Основная цель этой модели — проиллюстрировать, как трудности в заключении контрактов могут приводить к межстрановым различиям в производительности и в процессе внедрения новых технологий. Модель является некоторым упрощением модели из статьи [Acemoglu, Antras, Helpman 2007]. В ней показано, как институты заключения контрактов воздействуют на отношения между фирмами-производителями и их поставщиками и таким образом изменяют прибыльность внедрения новых технологий.

18.5.1. Предпочтения, технология и рыночная организация

Для упрощения изложения материала рассмотрим статическую модель и остановимся на случае одной страны. Предположим, что в экономике производится континуум конечных товаров $q(z)$, где $z \in [0, M]$ и параметр M обозначает количество (меру множества) конечных товаров (мы будем использовать символ M, так как символ N обозначает выбор технологии). Все домохозяйства обладают одинаковой функцией полезности типа ПЭЗ в виде:

$$u = \left(\int_0^M q(v)^{\beta} dv \right)^{1/\beta} - \psi e,\ 0 < \beta < 1, \tag{18.26}$$

где переменная e обозначает общее усилие, предпринимаемое индивидом, а параметр ψ — издержки от него, выраженные в единицах реального потребления. Параметр $\beta \in (0, 1)$ задает эластичность функции спроса и определяет эластичность замещения между конечными товарами, превосходящую единицу и равную $1/(1 - \beta)$.

Из постоянной эластичности замещения в функции полезности (18.26) следует, что функция спроса на конечный товар для каждого производителя $v \in [0, M]$ имеет следующий вид:

$$q(v) = \left(\frac{p(v)}{p^I} \right)^{-1/(1-\beta)} \frac{A}{p^I},$$

где переменная $p(v)$ обозначает цену товара v, переменная A — совокупные расходы, а переменная

$$p^I \equiv \left(\int_0^M p(v)^{-\beta/(1-\beta)} dv \right)^{-(1-\beta)/\beta}$$

— идеальный индекс цен, который мы выберем единицей измерения, то есть положим $p^I = 1$. Таким образом, каждый производитель конечного товара наблюдает функцию спроса вида $q = Ap^{-1/(1-\beta)}$, где переменная q обозначает количество товара, а переменная p — его цену, и мы опустили индекс z, так как остановимся на описании поведения отдельной фирмы. Из функции спроса следует, что выручка фирмы может быть записана следующим образом:

$$R = {}^{A^{1-\beta}} q^{\beta}. \tag{18.27}$$

Выпуск определяется технологическим выбором фирмы, который мы обозначим как $N \in \mathbb{R}_+$. Более развитые технологии требуют большего количества комплектующих (промежуточных товаров), которые поставляются различными фирмами-поставщиками. Транзакции между производителем и поставщиками вызывают необходимость контрактных отношений в экономике. Для каждого $j \in [0, N]$ обозначим количество промежуточного товара j как $X(j)$. Производственная функция фирмы также имеет стандартный вид ПЭЗ и задана следующим образом

$$q = N^{\kappa+1-1/\alpha}\left(\int_0^N X(j)^\alpha dj\right)^{1/\alpha}, \tag{18.28}$$

где $\alpha \in (0, 1)$, и поэтому эластичность замещения между различными промежуточными товарами $\varepsilon \equiv 1/(1-\alpha)$ всегда превосходит единицу. В дополнение положим $\kappa > 0$. В стандартной спецификации агрегатора типа ПЭЗ множитель $N^{\kappa+1-1/\alpha}$ отсутствует (то есть неявно предполагается равенство $\kappa = 1/\alpha - 1$). В этом случае, как и в модели из параграфа 12.4 из главы 12, если все $X(j) = X$, то общий выпуск задан как $q = N^{1/\alpha}X$ и оба значения эластичности замещения между промежуточными товарами и эластичности выпуска по изменениям технологии определяются единственным параметром α. Введение множителя $N^{\kappa+1-1/\alpha}$ перед интегралом в уравнении (18.28) позволяет разделить эти эластичности.

В экономике занято большое количество максимизирующих прибыль фирм-поставщиков, которые производят необходимые промежуточные товары. Допустим, что каждая фирма-поставщик обладает альтернативной возможностью получения прибыли $w_0 > 0$. На данном этапе будем рассматривать значение w_0 как заданное, а также предположим, что все промежуточные товары производятся разными поставщиками, с которыми фирма из сектора конечных товаров заключает контракты (эндогенность альтернативной возможности получения прибыли моделируется в упражнении 18.31). Поставщик, занятый производством промежуточного товара, осуществляет специфические инвестиции в множество симметричных проектов единичной меры. Предельные издержки инвестиций в каждый проект равны ψ (см. уравнение (18.26)). Производственная функция промежуточного товара имеет вид функции Кобба—Дугласа и симметрична по всем проектам, то есть

$$X(j) = \exp\left(\int_0^1 \log x(i, j) di\right), \tag{18.29}$$

где переменная $x(i, j)$ обозначает количество инвестиций в проект i поставщиком промежуточного товара j. Такая постановка задачи позволяет получить простую параметризацию неполноты контрактов, так как подмножество инвестиций, необходимых для производства, является неверифицируемым и поэтому на них не могут заключаться контракты. Наконец, предположим, что внедрение технологии N сопряжено с издержками $\Gamma(N)$, такими, что

1. Для всех $N > 0$ функция $\Gamma(N)$ дважды дифференцируема и $\Gamma''(N) > 0$, а $\Gamma''(N) < 0$.
2. Для всех $N > 0$ выполняется неравенство $N\Gamma''(N)/[\Gamma'(N) + w_0] >$ $> [\beta(\kappa + 1) - 1]/(1 - \beta)$.

Второе предположение вносит в модель достаточно выпуклости, что гарантирует существование внутреннего решения.

Отношения между производителями и поставщиками требуют заключения контракта, гарантирующего поставку необходимых промежуточных товаров. Предположим, что выплаты поставщику j состоят из двух частей: ex ante платежа $\tau(j) \in \mathbb{R}$ перед осуществлением им инвестиций $x(i,j)$ и платежа $s(j)$ после осуществления инвестиций. Тогда прибыль поставщика j, с учетом альтернативой деятельности, определяется следующим выражением:

$$\pi_x(j) = \max\left\{\tau(j) + s(j) - \int_0^1 \psi x(i,j)di,\ w_0\right\}. \tag{18.30}$$

Аналогичным образом, прибыль фирмы задается выражением:

$$\pi = R - \int_0^N [\tau(j) + s(j)]dj - \Gamma(N), \tag{18.31}$$

где переменная R обозначает выручку фирмы, а остальные члены в уравнении (18.31) — ее издержки. Подставляя уравнения (18.28) и (18.29) в уравнение (18.27), приходим к следующему выражению для выручки фирмы-производителя:

$$R = A^{1-\beta} N^{\beta(\kappa+1-1/\alpha)} \left[\int_0^N \left(\exp\left(\int_0^1 \log x(i,j)di\right)\right)^{\alpha} dj\right]^{\beta/\alpha}. \tag{18.32}$$

18.5.2. Равновесие с полными контрактами

В качестве исходного пункта рассмотрим идеальный случай полных контрактов, когда фирма-производитель обладает полным контролем над всеми инвестициями и выплачивает поставщику его альтернативную прибыль w_0. На концептуальном уровне полнота контрактов соответствует случаю полноты всех рынков, когда все промежуточные товары (или товары различного качества) могут быть куплены и проданы на квазиконкурентном рынке. В большинстве моделей, рассмотренных ранее, предполагается полнота контрактов. Несмотря на то что такое предположение является хорошей аппроксимацией многих товарных рынков, модель с полными контрактами (и, соответственно, с полными рынками) не всегда способна описать суть взаимодействий между фирмами-производителями и их поставщиками, особенно в случае, когда контрактные институты несовершенны, и поэтому судебные или другие юридические санкции против фирм, нарушающих свои контрактные обязательства, могут быть сопряжены с издержками.

Чтобы подготовиться к анализу процесса внедрения технологий в экономике с неполными контрактами, вначале рассмотрим игру, в которой фирма-производитель выбирает уровень технологии N и предлагает поставщикам контракты $[\{x(i, j)\}_{i\in[0,1]}, \{s(j), \tau(j)\}]$ за каждый промежуточный товар $j \in [0, N]$. Если фирма-поставщик принимает контракт, то она обязуется поставить $\{x(i, j)\}_{i\in[0,1]}$ единиц промежуточного товара в обмен на выплаты $\{s(j), \tau(j)\}$. *Совершенным по подыграм равновесием* (СПР) в этой игре будет набор стратегий производителя и поставщиков, такой, что функции прибыли каждого поставщика (18.30) и производителя (18.31) достигают максимума. По-другому СПР может быть определено как решение следующей задачи оптимизации:

$$\max_{N, \{x(i,j)\}_{i,j} \{s(j),\tau(j)\}_j} R - \int_0^N [\tau(j) + s(j)]dj - \Gamma(N) \tag{18.33}$$

при ограничении (18.32) и *условии участия* поставщика

$$s(j) + \tau(j) - \psi \int_0^1 x(i, j)di \geq w_0 \quad \text{для всех } j \in [0, N]. \tag{18.34}$$

Так как фирма-производитель не обладает стимулами предоставлять ренту поставщику, она выбирает значения $s(j)$ и $\tau(j)$ таким образом, чтобы неравенство (18.34) выполнялось как равенство. Более того, в случае полных контрактов платежи $s(j)$ и $\tau(j)$ являются совершенными заменителями и в равновесии имеет значение только их сумма $s(j) + \tau(j)$.

Далее, так как целевая функция фирмы (18.33) является совместно вогнутой по всем уровням инвестиций $x(i, j)$ и издержки всех типов инвестиций равны между собой, фирма будет выбирать равные значения x для всех проектов i и для всех промежуточных товаров j. Тогда, подставляя неравенство (18.34) в задачу (18.33), получаем следующий более простой вид задачи безусловной максимизации для фирмы:

$$\max_{N,x} A^{1-\beta} N^{\beta(\kappa+1)} x^{\beta} - \psi N x - \Gamma(N) - w_0 N. \qquad (18.35)$$

Из условия первого порядка для этой задачи следуют равенства:

$$(N^*)^{\frac{\beta(\kappa+1)-1}{1-\beta}} A\kappa\beta^{1/(1-\beta)}\psi^{-\beta/(1-\beta)} = \Gamma'(N^*) + w_0, \qquad (18.36)$$

$$x^* = \frac{\Gamma'(N^*) + w_0}{\kappa\psi}. \qquad (18.37)$$

Решения уравнений (18.36) и (18.37) могут быть найдены рекурсивно. Ограничения на вид функция $\Gamma(\cdot)$, принятые выше, гарантируют, что уравнение (18.36) обладает единственным решением для N^*, которое вместе с уравнением (18.37) позволяет найти единственное решение для x^*.

В случае когда инвестиции во все проекты равны между собой и составляют x, выпуск задается уравнением $q = N^{\kappa+1}x$. Так как в производственной деятельности используется общее количество промежуточных товаров $NX = Nx$, естественной мерой производительности будет отношение выпуска конечного товара к общему количеству промежуточных товаров $P = N^{\kappa}$. При полных контрактах в экономике этот уровень производительности составляет $P^* = (N^*)^{\kappa}$ и является возрастающей функцией от уровня технологии. Эти рассуждения резюмируются в следующем утверждении.

Утверждение 18.9. *Рассмотрим описанную выше модель, положим, что значение A является заданной величиной и экономика является экономикой с полными контрактами. Тогда в ней существует единственное СПР, в котором значения технологии и инвестиций $N^* > 0$ и $x^* > 0$ задаются уравнениями* (18.36) *и* (18.37) *соответственно. Более того, это СПР обладает следующими свойствами:*

$$\frac{\partial N^*}{\partial A} > 0, \quad \frac{\partial x^*}{\partial A} \geq 0 \text{ и } \frac{\partial N^*}{\partial \alpha} = \frac{\partial x^*}{\partial \alpha} = 0.$$

Доказательство. См. упражнение 18.27. ■

В случае полноты контрактов размер рынка (который соответствует переменной A и с точки зрения отдельной фирмы является экзогенной величиной) оказывает положительное влияние на инвестиции фирм-поставщиков и производительность, так как увеличение размера рынка делает инвестиции как поставщика, так и производителя более производительными. Еще один важный вывод из этого утверждения состоит в том, что при полноте контрактов уровень технологии, и как следствие производительность, не зависят от эластичности замещения между промежуточными товарами $1/(1-\alpha)$.

18.5.2. Равновесие с неполными контрактами

Далее рассмотрим аналогичную экономику с неполными контрактами. Мы будем моделировать несовершенство контрактных институтов, предполагая, что существует вещественное $\mu \in [0, 1]$, такое, что для каждого промежуточного товара j инвестиции в проекты $0 \le i \le \mu$ наблюдаемы и верифицируемы и поэтому на них могут заключаться контракты, в то время как на инвестиции в проекты $\mu < i \le 1$ контракты заключаться не могут. Следовательно, в контракте оговариваются значения инвестиций $x(i, j)$ для первых μ проектов, но не описываются значения инвестиций для оставшихся $1 - \mu$ проектов, на которые не заключаются контракты. Вместо этого выбор уровня инвестиций в неконтрактные проекты определяется фирмами-поставщиками из их ожиданий об ex post распределении выручки, и они могут решить прекратить предоставление таких услуг производителю. Экономики со слабыми контрактными институтами описываются низким значением параметра μ и в них множество контрактных проектов невелико, в то время как более развитые контрактные институты соответствуют высокому значению параметра μ.

Ex post распределение выручки от ex ante неконтрактных проектов определяется совместными переговорами между фирмой-производителем и поставщиками. Точная форма переговорного процесса определяет стимулы поставщиков к осуществлению инвестиций и прибыльность инвестиций для фирмы-производителя. Вначале опишем временную структуру заключения контракта:

- Фирма-производитель внедряет технологию N и предлагает поставщикам каждого промежуточного товара $j \in [0, N]$ контракт $\left[\{x_c(i,j)\}_{i=0}^{\mu}, \tau(j)\right]$, где переменная $x_c(i, j)$ обозначает инвестиции в контрактные проекты, а переменная $\tau(j)$ — размер предоплаты поставщику j. Величина $\tau(j)$ может быть как положительной, так и отрицательной.
- Возможные поставщики принимают решения о согласии с контрактом. Затем фирма-производитель выбирает N поставщиков, по одному для каждого промежуточного товара j.
- Все поставщики $j \in [0, N]$ одновременно выбирают уровень инвестиций $x(i,j)$ для всех проектов $i \in [0, 1]$. Для контрактных проектов $i \in [0, \mu]$ поставщик осуществляет инвестиции в размере $x(i, j) = x_c(i,j)$.

- Поставщики и фирма-производитель ведут переговоры о распределении выручки, и на этом этапе поставщики могут принять решение о прекращении поставки услуг по проектам, на которые не заключаются контракты.
- Производится выпуск и продажа конечного товара, и выручка R распределяется в соответствии с результатами переговоров.

Предположим, что результаты переговоров определяются *значением вектора Шепли*, которое является естественной концепцией решения задачи многосторонних переговоров (более подробное описание см. в подпараграфе 18.5.4). Далее опишем *симметричное, совершенное по подыграм равновесие* (ССПР) в этой игре, рассматривая такой результат переговоров как заданный.

Динамика экономики на ССПР может быть описана набором $\left\{\tilde{N}, \tilde{x}_c, \tilde{x}_n, \tilde{\tau}\right\}$, где переменная $\tilde{N}$ обозначает уровень технологии, переменная $\tilde{x}_c$ — инвестиции в контрактные проекты, переменная $\tilde{x}_n$ — инвестиции в неконтрактные проекты, и переменная $\tilde{\tau}$ — размер предоплаты каждой фирме-поставщику. Другими словами, для всех $j \in [0, \tilde{N}]$ предоплата составляет $\tau(j) = \tilde{\tau}$, а инвестиции определяются равенствами $x(i, j) = \tilde{x}_c$ для $i \in [0, \mu]$ и $x(i, j) = \tilde{x}_n$ для $i \in (\mu, 1]$. Отчасти злоупотребляя терминологией, обозначим ССПР как $\left\{\tilde{N}, \tilde{x}_c, \tilde{x}_n\right\}$.

Как во многих играх с полной информацией в экстенсивной форме, ССПР может быть описано с помощью обратной индукции. Вначале рассмотрим предпоследний этап игры с заданными значениями технологии N и инвестиций в контрактные проекты x_c. Предположим, что все фирмы-поставщики, за исключением поставщика j, выбирают размер инвестиций в неконтрактные проекты, равный $x_n(-j)$ (они все равны между собой, так как мы строим симметричное равновесие), а инвестиции в неконтрактные проекты поставщика j равны $x_n(j)$. Поставщики и фирма-производитель ведут многосторонние переговоры при таком уровне инвестиций. Обозначим доход поставщика j, который он получает в результате этих переговоров как $\bar{s}_x\left[N, x_c, x_n(-j), x_n(j)\right]$. Из оптимизации инвестиций поставщиком j следует, что значение $x_n(j)$ должно максимизировать разность выражения $\bar{s}_x\left[N, x_c, x_n(-j), x_n(j)\right]$ и издержек инвестиций в неконтрактные проекты $(1-\mu)\psi x_n(j)$. В симметричном равновесии выполняется равенство $x_n(j) = x_n(-j)$, другими словами значение x_n должно быть неподвижной точкой, заданной следующим выражением:

$$x_n \in \arg\max_{x_n(j)} \bar{s}_x(N, x_c, x_n, x_n(j)) - (1-\mu)\psi x_n(j). \qquad (18.38)$$

Уравнение (18.38) может рассматриваться как ограничение на совместимость стимулов с дополнительным требованием симметричности равновесия. Несмотря на то что в этом уравнении, чтобы позволить существование более чем одного максимизатора выражения в правой части, используется символ принадлежности $\in$, из структуры данной модели следует его единственность и поэтому символ принадлежности $\in$ в уравнении (18.38) может быть заменен равенством =.

В симметричном равновесии с технологией N, инвестициями в контрактные проекты x_c и инвестициями в неконтрактные проекты x_n выручка фирмы-производителя определяется равенством $R = A^{1-\beta}(N^{\kappa+1}x_c^{\mu}x_n^{1-\mu})^{\beta}$. Более того, положим $s_x(N, x_c, x_n) = \bar{s}_x(N, x_c, x_n, x_n)$. Тогда значение Шепли для фирмы-производителя определяется разностью:

$$s_q(N, x_c, x_n) = A^{1-\beta}(N^{\kappa+1}x_c^{\mu}x_n^{1-\mu})^{\beta} - Ns_x(N, x_c, x_n).$$

Далее рассмотрим этап игры, на котором фирма-производитель выбирает из пула подрядчиков N поставщиков. Если поставщики ожидают получить доход, меньший альтернативного дохода w_0, то этот пул пуст. Поэтому для производства товаров и услуг фирма должна предложить поставщикам контракт, который удовлетворяет условию участия поставщика при неполных контрактах в виде:

$$\bar{s}_x(N, x_c, x_n, x_n) + \tau \geq \mu\psi x_c + (1-\mu)\psi x_n + w_0, \qquad (18.39)$$

для значения x_n, которое удовлетворяет уравнению (18.38). Другими словами при заданных значениях технологии N и пары (x_c, τ) каждая фирма-поставщик $j \in [0, N]$ должна ожидать, что сумма значения Шепли и предоплаты превосходит сумму издержек инвестиций в контрактные и неконтрактные проекты и альтернативного дохода.

Задача максимизации для фирмы может быть записана следующим образом:

$$\max_{N, x_c, x_n, \tau} s_q(N, x_c, x_n) - N\tau - \Gamma(N)$$

при ограничениях (18.38) и (18.39). Без ограничений на значение τ условие участия (18.39) выполняется как равенство, иначе фирма-производитель может снизить его и добиться увеличения прибыли без нарушения условия (18.39). Следовательно, величина предоплаты τ может быть найдена с помощью этого ограничения. Подставляя ее затем в целевую функцию фирмы, приходим к более простому виду задачи:

$$\max_{N, x_c, x_n} s_q(N, x_c, x_n) +$$
$$+ N\left[\bar{s}_x(N, x_c, x_n, x_n) - \mu\psi x_c - (1-\mu)\psi x_n\right] - \Gamma(N) - w_0 N \qquad (18.40)$$

при ограничении (18.38).

ССПР $\{\tilde{N}, \tilde{x}_c, \tilde{\tau}\}$ является решением этой задачи, и соответствующая величина предоплаты $\tilde{\tau}$ удовлетворяет уравнению:

$$\tilde{\tau} = \mu\psi\tilde{x}_c + (1-\mu)\psi\tilde{x}_n + w_0 - \bar{s}_x(\tilde{N}, \tilde{x}_c, \tilde{x}_n, \tilde{x}_n). \tag{18.41}$$

Основным элементом модели с неполными контрактами является то, что размер платежей фирмы-производителя поставщикам определяются ex post в процессе переговоров, а не специфицируются заранее в контракте. Как отмечено выше, различные виды организации переговоров между поставщиками и производителем приводят к несколько отличающимся результатам. В контексте данной модели наиболее естественным типом переговоров представляется разделение выручки с помощью значений Шепли, так как оно является правдоподобным и математически несложным способом описания многосторонних переговоров. Строгий вывод формул не является ключевым с точки зрения результатов модели, для полноты он приведен в заключении этого параграфа. Следующее утверждение описывает вид решения задачи переговоров.

Утверждение 18.10. *Предположим, что фирма-поставщик j осуществляет инвестиции $x_n(j)$ в свои неконтрактные проекты, все остальные фирмы-поставщики осуществляют инвестиции $x_n(-j)$ в свои неконтрактные проекты, каждая фирма-поставщик осуществляет инвестиции x_c в свои контрактные проекты, и уровень технологии равен N. Тогда значение Шепли для поставщика j определяется следующим уравнением:*

$$\bar{s}_x(N, x_c, x_n(j), x_n(-j)) =$$
$$= (1-\gamma)A^{1-\beta}\left(\frac{x_n(j)}{x_n(-j)}\right)^{(1-\mu)\alpha} x_c^{\beta\mu} x_n(-j)^{\beta(1-\mu)} N^{\beta(\kappa+1)-1}, \tag{18.42}$$

где

$$\gamma \equiv \frac{\alpha}{\alpha+\beta}. \tag{18.43}$$

Доказательство. См. подпараграф 18.5.4. ■

Необходимо отметить несколько особенностей уравнения (18.42). Во-первых, введенный параметр $\gamma \equiv \alpha/(\alpha + \beta)$ описывает переговорную силу фирмы-производителя, его значение является возрастающей функцией от α и убывает по β. Более высокое значение параметра α, эластичности замещения между промежуточными товарами, ведет к росту переговорной силы фирмы-производителя, так как снижает важность использования определенного промежуточного товара в производстве и поэтому увеличивает размер доли выручки, переходящей фирме-производителю. С другой стороны, более высокое значение параметра β, эластичности функции спроса на конечный товар по цене, ведет к снижению переговорной силы фирмы-производителя, так как в любой коалиции оно снижает предельный вклад производителя в доход коалиции как долю общей выручки.

Во-вторых, в симметричном равновесии инвестиции всех поставщиков в неконтрактные проекты совпадают, то есть $x_n(j) = x_n(-j) = x_n$, и поэтому имеют место равенства:

$$s_x(N,\ x_c,\ x_n) = \overline{s}_x(N,\ x_c,\ x_n,\ x_n) = \\ = (1-\gamma)A^{1-\beta}x_c^{\beta\mu}x_n^{\beta(1-\mu)}N^{\beta(\kappa+1)-1} = (1-\gamma)\frac{R}{N}, \tag{18.44}$$

где переменная $R = A^{1-\beta}x_c^{\beta\mu}x_n^{\beta(1-\mu)}N^{\beta(\kappa+1)}$ описывает общую выручку фирмы-производителя. Поэтому сумма значений Шепли для всех поставщиков $Ns_x(N, x_c, x_n)$ составляет долю $(1-\gamma)$ выручки, а фирма-производитель получает оставшуюся долю γ, то есть

$$s_q(N,\ x_c,\ x_n) = \gamma A^{1-\beta}x_c^{\beta\mu}x_n^{\beta(1-\mu)}N^{\beta(\kappa+1)} = \gamma R. \tag{18.45}$$

Уравнение (18.45) представляет собой достаточно простое правило разделения выручки между фирмой-производителем и поставщиками.

Наконец если значение параметра α невелико, то функция $\overline{s}_x(N,\ x_c,\ x_n(j),\ x_n(-j))$ становится более вогнутой по аргументу $x_n(j)$, так как из большей взаимозаменяемости между промежуточными товарами следует, что заданное изменение относительного количества занятых в производстве двух промежуточных товаров ведет к большему изменению их относительной предельной производительности. С другой стороны, параметр β влияет на вогнутость функции выручки фирмы-производителя (см. уравнение (18.27)), но не влияет на вогнутость функции $\overline{s}_x$, так как при континууме поставщиков действия единственного поставщика оказывают бесконечно малое влияние на выпуск.

Чтобы описать ССПР, выведем из уравнений (18.38) и (18.42) условие соответствия стимулов:

$$x_n = \arg\max_{x_n(j)} (1-\gamma)A^{1-\beta}\left(\frac{x_n(j)}{x_n}\right)^{(1-\mu)\alpha} x_c^{\beta\mu}x_n^{\beta(1-\mu)}N^{\beta(\kappa+1)-1} - \\ - \psi(1-\mu)x_n(j).$$

Отметим два отличия от наилучшего для фирмы-производителя случая полных контрактов, описанного в подпараграфе 18.5.2. Во-первых, множитель $(1-\gamma)$ означает, что поставщики получают не весь доход от инвестиций в неконтрактные проекты и поэтому осуществляют недостаточное количество таких инвестиций. Во-вторых, как показано выше, многосторонние переговоры искажают вогнутость функции дохода частной фирмы по сравнению с общественной функцией дохода. Чтобы найти единственное значение x_n, используем условие первого порядка для этой задачи максимизации и с помощью подстановки $x_n(j) = x_n$ найдем неподвижную точку:

$$x_n = \bar{x}_n(N, x_c) \equiv \left[\alpha(1-\gamma)\psi^{-1} x_c^{\beta\mu} A^{1-\beta} N^{\beta(\kappa+1)-1}\right]^{1/(1-\beta(1-\mu))}. \qquad (18.46)$$

Из уравнения (18.46) следует, что размер инвестиций в неконтрактные проекты является возрастающей функцией от параметра α. В этом нетрудно убедиться, заметив, что значение выражения $\alpha(1-\gamma) = \alpha\beta/(\alpha+\beta)$ возрастает по α. Экономический смысл этой зависимости определяется двумя противодействующими силами. Размер доли выручки, переходящей поставщику, $(1-\gamma)$, убывает по α, так как большая замещаемость между промежуточными товарами ведет к снижению ex post переговорной силы поставщиков. Однако увеличение параметра α также ведет к снижению вогнутости функции $\bar{s}_x(\cdot)$ по аргументу x_n, что увеличивает предельную выгоду дальнейших инвестиций в неконтрактные проекты. Значение x_n возрастает по α, так как второй эффект доминирует над первым.

Другое интересное свойство равновесия состоит в том, что контрактные и неконтрактные проекты дополняют друг друга, в частности функция $\bar{x}_n(N, x_c)$ возрастает по аргументу x_c. Наконец влияние технологии N на значение x_n неоднозначно, так как инвестиции в неконтрактные проекты убывают по уровню технологии N, если $\beta(\kappa+1) < 1$, и возрастают по нему, если $\beta(\kappa+1) > 1$. Это связано с тем, что при росте технологии наблюдается два противоположных эффекта на стимулы поставщиков к осуществлению инвестиций: увеличение количества промежуточных товаров ведет к росту предельной производительности инвестиций ввиду «предпочтения разнообразия», содержащегося в технологии (18.28), однако при этом переговорная сила поставщика, равная $(1-\gamma)/N$, убывает по N. При большом значении параметра κ первый эффект доминирует над вторым, при малом значении κ второй эффект оказывается сильнее.

Далее, используя уравнения (18.44), (18.45) и (18.46), перепишем задачу оптимизации для фирмы в виде максимизации выражения

$$\begin{aligned} &A^{1-\beta}(x_c^{\mu}\bar{x}_n(N, x_c)^{1-\mu})^{\beta} N^{\beta(\kappa+1)} - \psi N \mu x_c - \\ &- \psi N(1-\mu)\bar{x}_n(N, x_c) - \Gamma(N) - w_0 N \end{aligned} \qquad (18.47)$$

по переменным выбора N и x_c, где функция $\bar{x}_n(N, x_c)$ определена в уравнении (18.46). Подставляя уравнение (18.46) в выражение (18.47) и дифференцируя по N и x_c, получаем два условия первого порядка, которые позволяют найти единственное решение задачи (18.47) $(\tilde{N}, \tilde{x}_c)$:

$$\left(\tilde{N}^{\frac{\beta(\kappa+1)-1}{1-\beta}} A\kappa\beta^{\frac{1}{1-\beta}}\psi^{-\frac{1}{1-\beta}}\right)\left(\frac{1-\alpha(1-\gamma)(1-\mu)}{1-\beta(1-\mu)}\right)^{\frac{1-\beta(1-\mu)}{1-\beta}} \times$$

$$\times(\beta^{-1}\alpha(1-\gamma))^{\frac{\beta(1-\mu)}{1-\beta}} = \Gamma'(\tilde{N})+w_0, \tag{18.48}$$

$$\tilde{x}_c = \frac{\Gamma'(\tilde{N})+w_0}{\kappa\psi}. \tag{18.49}$$

Как и в модели с полными контрактами, эти два условия рекурсивно определяют равновесие. Вначале уравнение (18.48) позволяет найти значение $\tilde{N}$, а затем подстановка $\tilde{N}$ в уравнение (18.49) позволяет найти значение $\tilde{x}_c$. Более того, из уравнений (18.46), (18.48) и (18.49) находим следующее выражение для значения уровня инвестиций в неконтрактные проекты:

$$\tilde{x}_n = \frac{\alpha(1-\gamma)(1-\beta(1-\mu))}{\beta(1-\alpha(1-\gamma)(1-\mu))}\left(\frac{\Gamma'(\tilde{N})+w_0}{\kappa\psi}\right). \tag{18.50}$$

Сравнив уравнения (18.37) и (18.49), нетрудно заметить, что при заданном значении технологии N значение уровня инвестиций в контрактные проекты в случае неполных контрактов $\tilde{x}_c$ совпадает со значением уровня инвестиций в контрактные проекты в случае полных контрактов x^*. Это наблюдение подчеркивает, что различия в инвестициях между двумя моделями являются лишь следствием различий в решениях о внедрении технологий. Действительно, сравнив уравнения (18.36) и (18.48), заметим, что значения $\tilde{N}$ и x^* отличаются друг от друга только вследствие наличия в левой части уравнения (18.48) множителей во второй и третьей скобках. Они описывают искажения в экономике, вызываемые переговорами между фирмой-производителем и поставщиками. На интуитивном уровне, процесс внедрения технологий искажается вследствие того, что неполнота контрактов ведет к снижению инвестиций в неконтрактные проекты по сравнению с уровнем инвестиций в контрактные проекты, и этот недостаток инвестиций снижает прибыльность технологии при большом значении N. В пределе при $\mu \to 1$ оба множителя в скобках в левой части уравнения (18.48) сходятся к единице и равновесие $(\tilde{N}, \tilde{x}_c)$ сходится к равновесию (N^*, x^*).

Далее мы продемонстрируем ряд результатов по сравнительной статике для ССПР в экономике с неполными контрактами и сравним равновесие при неполных контрактах с равновесием в модели с полными контрактами. Вывод результатов по сравнительной статике оказывается достаточно простым ввиду блочно-рекурсивной структуры равновесия: любое изменение параметров A, μ или α, ведущее к росту левой части уравнения (18.48), также влечет рост величины $\tilde{N}$, и воздействие его на значения $\tilde{x}_c$ и $\tilde{x}_n$ определяется уравнениями (18.49) и (18.50). Основные результаты приведены в следующем утверждении.

Утверждение 18.11. *Рассмотрим модель экономики с неполными контрактами, описанную выше, и предположим, что выполняются ограничения на вид функции* $\Gamma(\cdot)$. *Тогда в ней существует единственное ССПР при неполных контрактах* $\{\tilde{N}, \tilde{x}_c, \tilde{x}_n\}$, *описываемое уравнениями* (18.48), (18.49) *и* (18.50). *Более того, набор* $\{\tilde{N}, \tilde{x}_c, \tilde{x}_n\}$ *удовлетворяет неравенствам* $\tilde{N} > 0, \tilde{x}_c > 0, \tilde{x}_n > 0$ *и*

$$\tilde{x}_n < \tilde{x}_c,$$

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial A} > 0, \ \frac{\partial \tilde{x}_c}{\partial A} \geq 0, \ \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial A} \geq 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial \mu} > 0, \ \frac{\partial \tilde{x}_c}{\partial \mu} \geq 0, \ \frac{\partial (\tilde{x}_n / \tilde{x}_c)}{\partial \mu} > 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial \alpha} > 0, \ \frac{\partial \tilde{x}_c}{\partial \alpha} \geq 0, \ \frac{\partial (\tilde{x}_n / \tilde{x}_c)}{\partial \alpha} > 0.$$

Доказательство. См. упражнение 18.28. ■

В этом утверждении говорится о том, что фирмы-поставщики осуществляют меньшее количество инвестиций в неконтрактные проекты по сравнению с инвестициями в контрактные проекты. В частности, имеет место следующее неравенство:

$$\frac{\tilde{x}_n}{\tilde{x}_c} = \frac{\alpha(1-\gamma)[1-\beta(1-\mu)]}{\beta[1-\alpha(1-\gamma)(1-\mu)]} < 1, \tag{18.51}$$

которое следует из уравнений (18.48) и (18.50) и неравенства $\alpha(1 - \gamma) = \alpha\beta/(\alpha + \beta) < \beta$ (см. уравнение (18.43)). Этот результат интуитивен: фирма-производитель является остаточным получателем всего дохода от инвестиций в контрактные проекты и включает уровень таких инвестиций в контракт. С другой стороны, размер инвестиций в неконтрактные проекты определяется поставщиками, которые не являются остаточными получателями всего дохода от таких инвестиций (см. уравнение (18.44)) и поэтому осуществляют недостаточное их количество.

В дополнение уровни технологии и инвестиций как в контрактные, так и в неконтрактные проекты являются возрастающими функциями от размера рынка, доли контрактных проектов (качества контрактных институтов в экономике) и эластичности замещения между различными промежуточными товарами. Влияние размера рынка понятно интуитивно: рост переменной A делает производственную деятельность более прибыльной и ведет к увеличению инвестиций и улучшению технологии в равновесии. С другой стороны, при улучшении контрактных институтов в большей доле проектов осуществляется больше инвестиций ($\tilde{x}_c$, а не $\tilde{x}_n < \tilde{x}_c$). Это делает переход к более развитой технологии более прибыльным. Увеличение величины N, в свою очередь, ведет к росту прибыльности дальнейших инвестиций в $\tilde{x}_c$ и $\tilde{x}_n$, так как при большей доле контрактных проектов предельный доход от инвестиций в неконтрактные проекты также возрастает.

Увеличение параметра α (снижение степени дополняемости между промежуточными товарами) также ведет к улучшению технологии и росту инвестиций. Причины этого связаны с анализом из подпараграфа 18.5.2, где мы показали, что рост α ведет к снижению доли каждого поставщика, но при этом делает функцию $\tilde{s}_x(\cdot)$ менее вогнутой. Так как второй эффект доминирует над первым, снижение степени замещаемости приводит к росту инвестиций поставщиков и делает внедрение более развитых технологий более прибыльным.

Одно из основных следствий этого анализа таково, что несовершенства в процессе заключения контрактов приводят к недостаточному объему инвестиций в качество. Поэтому они препятствуют внедрению новых технологий и снижают прибыльность. Этот результат резюмируется в следующем утверждении. Заметим, что производительность в экономике с неполными контрактами задается равенством $\tilde{P} = \tilde{N}^{\kappa}$, а в экономике с полными контрактами — равенством $P^* = (N^*)^{\kappa}$.

Утверждение 18.12. *Рассмотрим единственное ССПР в экономике с неполными контрактами* $\{\tilde{N}, \tilde{x}_c, \tilde{x}_n\}$ *и единственное ССПР в экономике с полными контрактами* $\left\{N^*, x^*\right\}$. *Тогда имеют место неравенства*

$$\tilde{N} < N^* \text{ и } \tilde{x}_n < \tilde{x}_c < x^*.$$

Доказательство. См. упражнение 18.29. ■

Так как неполнота контрактов ведет к выбору менее развитой технологии (меньшего значения N), она также снижает производительность и объем инвестиций в контрактные и неконтрактные проекты. В статье [Acemoglu, Antras, Helpman 2007] авторы показывают, что различия в технологии и уровне дохода на душу населения, возникающие вследствие относительно умеренных различий качества контрактных институтов, могут быть достаточно большими. Следовательно, связь между качеством контрактных институтов и процессом внедрения новых технологий предоставляет нам теоретическую модель, которая может объяснить значительные межстрановые технологические различия.

*18.5.4. Значение Шепли и доказательство утверждения 18.10**

Понятие значения Шепли, впервые введенное в работе [Shapley 1953], выглядит привлекательным как с интуитивной, так и с теоретико-игровой точки зрения. В переговорной игре с конечным числом участников значение Шепли для каждого участника определяется как среднее значение его вкладов во все союзы, состоящие из игроков, расположенных ниже его во всех возможных перестановках. Более точно, в игре с $K + 1$ участниками обозначим перестановку игроков 0, 1, 2, ..., K как $g = \{g(0), g(1), ..., g(K)\}$, где обозначим фирму участником 0, а поставщиков — участниками 1, 2, ..., K, и рассмотрим множество участников, расположенных ниже участника j в перестановке g $z_g^j = \{j' \mid g(j) > g(j')\}$. Обозначим множество всех возможных перестановок как G, множество всех подмножеств множества $K + 1$ игроков как S и функцию стоимости коалиции, состоящей их подмножества $K + 1$ игроков, как v: $S \to \mathbb{R}$. Тогда значение Шепли для участника j задается следующим равенством:

$$s_j = \frac{1}{(K+1)!} \sum_{g \in G} [\upsilon(z_g^j \cup j) - \upsilon(z_g^j)].$$

Далее введем асимптотическое значение Шепли, предложенное в статье [Auman, Shapley 1974], которое определяется как предел этого выражения при стремлении количества участников игры к бесконечности. Предположим, что в игре участвуют K поставщиков, каждый из которых контролирует долю $\xi = N/K$ континуума промежуточных товаров. Из соображений симметрии следует, что все поставщики поставляют объем $\tilde{x}_c$ каждого контрактного проекта. Для описания неконтрактных проектов рассмотрим случай, когда поставщик j поставляет объем $x_n(j)$ неконтрактного проекта, а оставшиеся $K - 1$ поставщиков поставляют объем $x_n(-j)$ (отметим, что мы снова пользуемся соображениями симметрии).

Для вычисления значения Шепли для определенного поставщика j необходимо найти предельный вклад этого поставщика в заданный союз агентов. Союз, состоящий из n поставщиков и фирмы-производителя, получает выручку, равную

$$F_{\mathrm{IN}}(n, N; \xi) = A^{1-\beta} N^{\beta(\kappa+1-1/\alpha)} x_c^{\beta\mu} [(n-1)\xi x_n(-j)^{(1-\mu)\alpha} + \xi x_n(j)^{(1-\mu)\alpha}]^{\beta/\alpha},$$

если поставщик j состоит в союзе, и равную

$$F_{\mathrm{OUT}}(n, N, \xi) = A^{1-\beta} N^{\beta(\kappa+1-1/\alpha)} x_c^{\beta\mu} [n\xi x_n(-j)^{(1-\mu)\alpha}]^{\beta/\alpha},$$

если поставщик j не состоит в союзе. Заметим, что даже в случае $n < N$ множитель $N^{\beta(\kappa+1-1/\alpha)}$ остается в этих выражениях, потому что он описывает свойство технологии, определяющее размер выпуска, которое не зависит от количества и качества промежуточных товаров. С другой стороны, они оказывают влияние на производительность, которая снижается, так как значение множителя в квадратных скобках уменьшается.

Напомним, что значение Шепли для участника j определяется следующим уравнением:

$$s_j = \frac{1}{(K+1)!}\sum_{g\in G}[\upsilon(z_g^j \cup j) - \upsilon(z_g^j)]. \tag{18.52}$$

Доля перестановок, для которых выполняется равенство $g(j) = i$, составляет $1/(K+1)$ для каждого i. Если $g(j) = 0$, то $\upsilon(z_g^j \cup j) = \upsilon(z_g^j) = 0$, так в этом случае фирма-производитель всегда расположена *после* поставщика j. Если $g(j) = 1$, то фирма-производитель расположена перед поставщиком j с вероятностью $1/K$ и после него с вероятностью $1 - 1/K$. В первом случае $\upsilon(z_g^j \cup j) = F_{\text{IN}}(1, N; \xi)$, в то время как во втором случае $\upsilon(z_g^j \cup j) = 0$. Следовательно, условное математическое ожидание $\upsilon(z_g^j \cup j)$ при условии $g(j) = 1$ составляет $F_{\text{IN}}(1, N; \xi)/K$. Из аналогичных рассуждений следует, что условное математическое ожидание $\upsilon(z_g^j)$ равно $F_{\text{OUT}}(0, N; \xi)/K$. Используя аналогичные доводы для случая $g(j) = i > 1$, нетрудно убедиться, что условное математическое ожидание $\upsilon(z_g^j \cup j)$ при условии $g(j) = i$ составляет $iF_{\text{IN}}(i, N; \xi)/K$, а условное математическое ожидание $\upsilon(z_g^j)$ равно $iF_{\text{OUT}}(i-1, N; \xi)/K$. Тогда из уравнения (18.52) следует, что

$$s_j = \frac{1}{(K+1)K}\sum_{i=1}^{K} i[F_{\text{IN}}(i, N, \xi) - F_{\text{OUT}}(i-1, N; \xi)] =$$

$$= \frac{1}{(N+\xi)N}\sum_{i=1}^{K} i\xi[F_{\text{IN}}(i, N; \xi) - F_{\text{OUT}}(i-1, N; \xi)]\xi.$$

Подставляя в это равенство выражения для функций F_{IN} и F_{OUT}, приходим к следующему уравнению:

$$s_j = \frac{A^{1-\beta}N^{\beta(\kappa+1-1/\alpha)}x_c^{\beta\mu}}{(N+\xi)N}\sum_{i=1}^{K} i\xi\Big\{i\xi x_n(-j)^{(1-\mu)\alpha} +$$

$$+ \xi\Big[x_n(j)^{(1-\mu)\alpha} - x_n(-j)^{(1-\mu)\alpha}\Big]\Big\}^{\beta/\alpha}\xi -$$

$$- \frac{A^{1-\beta}N^{\beta(\kappa+1-1/\alpha)}x_c^{\beta\mu}}{(N+\xi)N}\sum_{i=1}^{K} i\xi\Big[i\xi x_n(-j)^{(1-\mu)\alpha} - \xi x_n(-j)^{(1-\mu)\alpha}\Big]^{\frac{\beta}{\alpha}}\xi.$$

Далее, используя разложение в ряд Тейлора до линейного члена, получаем уравнение:

$$s_j = \frac{A^{1-\beta} N^{\beta(\kappa+1-1/\alpha)} x_c^{\beta\mu} (\beta/\alpha)\xi x_n(j)^{(1-\mu)\alpha}}{(N+\xi)N} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{K} (i\xi)[i\xi x_n(-j)^{(1-\mu)\alpha}]^{(\beta-\alpha)/\alpha}\xi + o(\xi),$$

где символ $o(\xi)$ обозначает величину, бесконечно малую по ξ, то есть $\lim\limits_{\xi\to 0} o(\xi)/\xi = 0$. Группируя это уравнение и деля на ξ, приходим к следующему равенству:

$$\frac{s_j}{\xi} = \frac{A^{1-\beta} N^{\beta(\kappa+1-1/\alpha)} (\beta/\alpha) \left(\frac{x_n(j)}{x_n(-j)}\right)^{(1-\mu)\alpha} x_c^{\beta\mu} (x_n(-j))^{\beta(1-\mu)}}{(N+\xi)N} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{K} (i\xi)^{\beta/\alpha}\xi + \frac{o(\xi)}{\xi}.$$

Переходя к пределу при $K \to \infty$ (который при $\lim\limits_{\xi\to 0} o(\xi)/\xi = 0$ эквивалентен пределу при $\xi = N/K \to 0$), получаем интеграл Римана (см. параграф B.2 в приложении B):

$$\lim_{K\to\infty} \frac{s_j}{\xi} = \frac{A^{1-\beta} N^{\beta(\kappa+1-1/\alpha)} (\beta/\alpha) \left(\frac{x_n(j)}{x_n(-j)}\right)^{(1-\mu)\alpha} x_c^{\beta\mu} (x_n(-j))^{\beta(1-\mu)}}{N^2} \int_0^N z^{\beta/\alpha} dz.$$

Вычисляя этот интеграл, приходим к уравнению (18.42), что завершает доказательство утверждения.

18.6. Основные выводы

Эта глава посвящена моделям, описывающим межстрановые технологические различия. Несмотря на то что базовые модели эндогенного экономического роста, рассмотренные в части IV книги, полезны с точки зрения понимания стимулов исследовательских фирм к созданию новых технологий и в состоянии сгенерировать различные темпы технологического прогресса в разных странах, два фактора говорят о необходимости использования другого подхода при объяснении межстрановых технологических различий. Во-первых, различия в технологии и производительности наблюдаются не только между странами, но повсеместно встречаются и внутри отдельных стран. Даже в узко определенных отраслях экономики наблюдаются технологические различия на уровне фирм и лишь малая часть этих различий может быть объяснена различиями в интенсивности использования капитала в производственной деятельности. Из такой внутристрановой динамики следует, что процесс внедрения и использования фирмами новых технологий довольно сложен и что новые технологии распространяются между фирмами достаточно медленно. Такая динамика также позволяет нам сделать предположения о возможных причинах межстрановых различий в производительности и технологии и убедиться в том, что вывод о медленном процессе распространения технологий между странами не выглядит противоречащим эмпирическим фактам. Во-вторых, несмотря на то что ученые в таких странах, как США, Германия, Япония, создают свои собственные новые технологии в процессе НИОКР, большинство экономик мира являются импортерами технологий, а не их создателями. Это не отменяет того, что некоторые фирмы в этих странах ведут исследовательскую деятельность и что ряд важных технологий, в особенности связанных с Зеленой революцией, были разработаны в развивающихся странах. Несмотря на эти исключения, внедрение технологий с мировой технологической границы представляется более важной деятельностью для большинства фирм в развивающихся странах, чем разработка полностью собственных новых технологий. Из вышеперечисленных наблюдений следует, что для отчетливого понимания межстрановых различий в производительности и технологии необходим подробный анализ процесса распространения технологий и решений фирм о внедрении новых технологий.

Из этой главы мы извлекли несколько важных уроков. Во-первых, мы можем значительно продвинуться в анализе межстрановых различий в технологии и производительности, предполагая медленный процесс распространения технологий между странами. Такой подход позволяет построить математически несложную модель межстрановых технологических различий. Важным элементом большинства моделей распространения технологий является встроенное в нее премущество относительно отсталых стран (или фирм): так как их отрыв от мировой технологической границы относительно велик, им проще его сокращать. Это преимущество догоняющего развития для отстающих стран гарантирует то, что в моделях медленного распространения технологии возникают межстрановые различия в уровне дохода на душу населения, но не обязательно в темпах роста различных экономик. Другими словами, из канонической модели распространения технологии следует, что страны, создающие барьеры, препятствующие распространению технологий (или страны, в которых процесс внедрения новых технологий протекает медленно по другим причинам) окажутся более бедными, но в конце концов их темп экономического роста сравняется с темпом роста передовых экономик. Поэтому анализ процесса распространения технологий позволяет нам построить модель мирового распределения доходов, в которой позиция каждой страны в этом распределении определяется ее способностью внедрять новые технологии с мировой технологической границы. Такое теоретическое построение также оказывается полезным и для развития подхода, в котором экономика каждой страны описывается неоклассической моделью экзогенного экономического роста с импортом технологий, в то время как динамика всей мировой экономики определяется моделью эндогенного экономического роста и темп роста мировой экономики зависит от инвестиций всех фирм мира в исследовательскую деятельность. Такой тип моделей становится в особенности полезным в том случае, когда мы хотим совместно описать процессы роста мировой экономики и межстранового распределения доходов. Такие модели также показывают, что если мы описываем каждую страну как изолированный остров, не взаимодействующий с другими экономиками мира с помощью базовой неоклассической модели экономического роста, то мы упускаем из виду ряд важных выводов. Значительное количество межстрановых технологических взаимосвязей говорит о том, что необходимо вести анализ равновесия в мировой экономике, а не равновесий в каждой отдельно взятой стране.

В то время как медленность процесса распространения технологий между странами выглядит разумной, в глобальном современном мире процесс внедрения фирмами технологий, уже испробованных и внедренных в других частях планеты, становится все более и более простым. Если мы позволим относительно быстрое распространение технологий, сможем ли мы указать другие причины существования межстрановых различий в технологии и производительности (за исключением запаса физического и человеческого капитала)? Во второй части этой главы утверждается, что ответ на этот вопрос также положительный и связан с тем, насколько новые технологии подходят для нужд различных стран и с различиями в организации контрактных институтов, которые влияют на процесс внедрения новых технологий (и на производительность).

Вопрос соответствия технологии связан с тем, что заданная технология по-разному изменяет производительность в различных странах, например потому, что в одних странах она может лучше, чем в других, соответствовать экономическим условиям или отношению факторов производства. В особенности важной причиной (не)соответствия технологии является возможное (не)соответствие между технологиями, разработанными на мировой технологической границе, и квалификацией рабочей силы в стране, внедряющей эти технологии. Несоответствие между технологией и квалификацией может привести к значительным эндогенным различиям в уровне производительности. Если бы тип технологии, разрабатываемой на мировой технологической границе, был случайной величиной, то вероятность того, что несоответствие между технологиями и квалификацией ведет к значительным различиям между богатыми и бедными странами, была бы очень мала. Однако у нас есть причины предполагать, что несоответствие между технологиями и квалификацией может иметь большее значение ввиду устройства мирового рынка технологий. Здесь необходимо отметить два его важных свойства. Во-первых, подавляющее число передовых технологий разрабатывается в малом количестве богатых стран. Во-вторых, из отсутствия эффективной защиты права интеллектуальной собственности следует, что большинство технологических фирм в развитых экономиках ориентируется на нужды внутреннего рынка. Это создает мощную силу, приводящую к тому, что новые технологии создаются подходящими для нужд развитых стран и поэтому зачастую неподходящими для отношения факторов производства в развивающихся странах. В частности, новые технологии часто оказываются слишком смещенными в сторону квалификации и поэтому не могут быть эффективно использованы в развивающихся странах. Эта причина несоответствия технологий может привести к значительному эндогенному разрыву в уровнях технологии и дохода на душу населения между странами.

Наконец, в этой главе мы также подчеркнули, что межстрановые различия в производительности возникают не только из-за различий в используемых производственных технологиях, но и могут быть следствием различий в организации производственной деятельности в мире. Основной причиной таких различий являются институты и экономическая политика в разных странах мира. В заключительной части главы показано, как контрактные институты, определяющие типы контрактов, которые фирмы-производители имеют возможность заключать со своими поставщиками, могут оказывать значительное влияние на их решения о внедрении новых технологий и, следовательно, на межстрановые различия в производительности. Контрактные институты являются лишь одним из множества типов межстрановых организационных различий, которые могут повлиять на равновесный уровень технологии. Другие источники различий в организации производственной и технологической деятельности описаны в главе 21.

18.7. Литература

Большое количество работ, описывающих различия в производительности и технологии на уровне фирм и динамику процесса распространения технологий, упомянуто в параграфе 18.1, и читатель может найти там подходящие ссылки. Простая модель распространения технологий, представленная в параграфе 18.2, основана на эссе [Gerschenkron 1962] и важной статье [Nelson, Phelps 1966] (а также [Schultz 1975]). Подход Нельсона—Фелпса, подробно описанный в главе 10, используется в ряде более поздних статей. В работе [Benhabib, Spiegel 1994] авторы реинтерпретируют и модифицируют регрессии роста Р. Барро в свете взглядов Р. Нельсона и Э. Фелпса на роль человеческого капитала. Схожая интерпретация регрессий роста сделана в статье [Aghion, Howitt 1998]. В работах: [Greenwood, Yorukoglu 1997; Caselli 1999; Galor, Moav 2000; Aghion, Howitt, Violante 2004] предложены модели, основанные на взгляде Нельсона—Фелпса—Шульца на роль человеческого капитала. Авторы используют эти модели для объяснения недавнего роста премии за квалификацию в США и других странах ОЭСР.

Модель из параграфа 18.3 основана на работе [Howitt 2000], однако имеет ряд важных отличий от модели из этой статьи. П. Ховитт рассматривает модель шумпетерианского экономического роста, а не базовую модель с расширяющимся разнообразием факторов производства, и вводит в нее ряд технологических экстерналий. Модель, представленная в параграфе 18.3, является более простой начальной моделью для анализа эндогенного роста мировой экономики.

Гипотеза о соответствии технологий, изложенная в параграфе 18.4, описана в статьях [Salter 1960; David 1975; Stewart 1977]. В классической статье [Atkinson, Stiglitz 1969] предложена простая и мощная формализация идеи о том, что технологические изменения могут быть локальными и труднопереносимыми с одной производственной единицы на другую (или из одной страны в другую). Подход А. Аткинсона и Дж. Стиглица используется в модели экономического роста в статье [Basu, Weil 1998], на которой основана одна из моделей из параграфа 18.4. Последняя часть этого параграфа базируется на работе [Acemoglu, Zilibotti 2001]. В этой статье показано, что такие эффекты могут быть значительны количественно и что динамика отраслевых различий согласуется с гипотезой о важности такого типа несоответствий между технологией и квалификацией.

Модель, представленная в параграфе 18.5, основана на статье [Asemoglu, Antras, Helpman 2007]. Другие модели также приводят к эндогенным межстрановым различиям в производительности и технологии вследствие различий в организации производственной деятельности. Некоторые из них описаны в главе 21.

18.8. Упражнения

18.1. Выведите уравнение (18.1).

18.2. Покажите, что ослабление ограничения $\lambda_j \in [0, g)$ может привести к тому, что требование $A_j(t) \leq A(t)$ перестанет выполняться.

18.3. Выведите уравнение (18.4).

18.4. Завершите доказательство утверждения 18.1.

18.5. Опишите влияние увеличения параметра λ_j на динамику переменных $a_j(t)$ и $k_j(t)$ (уравнения (18.4) и (18.1) соответственно). В чем отличие от влияния увеличения параметра σ_j? Объясните, почему два эти параметра по-разному воздействуют на динамику технологии и запаса капитала.

18.6. В модели из параграфа 18.2 покажите, что если выполняется равенство $g = 0$, то все страны сходятся к единому уровню технологии. Подробно объясните, почему предположение $g > 0$ ведет к появлению технологических различий в стационарном равновесии и почему эти различия исчезают при $g = 0$.

18.7. Докажите утверждение 18.2.

18.8. **(a)** Почему условие $\rho - n_j > (1 - \theta)g$ является необходимым в утверждении 18.3?

(b) Завершите доказательство утверждения 18.3.

(c) Поставьте задачу поиска мирового равновесия из подпараграфа 18.2.2 как задачу, в которой в каждой стране выполняется вторая теорема экономики благосостояния. Подробно определите равновесную траекторию в таком предположении. Объясните важность этого предположения.

(d) Далее рассмотрите задачу поиска мирового равновесия, не прибегая к использованию второй теоремы экономики благосостояния. Объясните, почему математическая структура этой задачи совпадает со структурой задачи из части (c).

18.9. В модели из подпараграфа 18.2.2 с оптимизирующими домохозяйствами предположите, что целевая функция агентов в стране j задана следующим уравнением:

$$U_j = \int_0^\infty \exp(-\rho_j - n_j)t)[(c_j(t)^{1-\theta} - 1)/(1-\theta)]dt,$$

где значения параметра ρ_j различаются между странами.

(a) Покажите, что и в этом случае существует единственное стационарное мировое равновесие и что в нем экономики всех стран растут с одинаковым темпом g.

(b) Объясните интуитивно, почему экономики всех стран растут с одинаковым темпом, несмотря на различия в норме дисконтирования.

(c) Покажите, что стационарное равновесие является глобально устойчивой седловой точкой.

***18.10.** Рассмотрите модель из параграфа 18.12, где функция F является производственной функцией отдельной фирмы j. Предположите, что уравнение (18.3) описывает динамику технологии фирмы и $\sigma_j = \sigma(h_j)$, где переменная h_j обозначает среднее значение запаса человеческого капитала работников фирмы j, а функция σ является строго возрастающей и дифференцируемой. Для упрощения выкладок предположите, что каждая фирма нанимает только одного работника.

(a) Выведите уравнение для заработной платы работника, обладающего человеческим капиталом h_j. [Подсказка: его заработная плата составляет сумму предельного продукта работника в производственной деятельности и его вклада в увеличение производительности фирмы, вызванное улучшением технологии фирмы.]

(b) Покажите, что увеличение переменной g (в любой момент времени t) ведет к росту заработной платы. Выведите уравнение, описывающее зависимость между доходом от владения человеческим капиталом и переменной g. Сравните увеличение дохода от человеческого капитала, вызванное ростом g, с увеличением, описанным в главе 15.

18.11. Завершите доказательство утверждения 18.4.

18.12. Рассмотрите модель из подпараграфа 18.3.1 и предположите, что все страны обладают равным запасом рабочей силы $L_j = 1$, равными значениями параметра $\eta_j = \eta$ и различаются значениями параметра ζ_j. Предположите, что межстрановые различия в параметре ζ_j аналогичны использованным в количественной оценке неоклассической модели экономического роста в главе 8.

(a) Оцените влияние различий в ξ_j на межстрановые различия в технологии и уровне дохода на душу населения при различных значениях параметра ϕ.

(b) Найдите значение параметра ϕ, необходимое для того, чтобы четырехкратная разница значений ξ_j вела к тридцатикратной разнице в уровне дохода на душу населения.

(c) Каким образом вы описали бы экономический смысл такого значения параметра ϕ? Является ли эта модель более разумной моделью межстрановых различий в технологии и уровне дохода на душу населения, чем неоклассическая модель экономического роста?

***18.13.** Рассмотрите модель из подпараграфов 18.3.1 и 18.3.2. Предположите, что предпочтения агентов задаются следующей целевой функцией:

$$U_j = \int_0^\infty \exp(-\rho_j t)[(c_j(t)^{1-\theta} - 1)/(1-\theta)dt,$$

где значения параметра ρ_j различаются между странами. Покажите, что в этом случае имеют место утверждения, эквивалентные утверждениям 18.4 и 18.5, и мировое равновесие является единственной глобально устойчивой седловой траекторией, на которой экономики всех стран растут с одинаковым темпом.

18.14. Покажите, что неравенство (18.14) является необходимым и достаточным условием положительности темпа роста мировой экономики в модели из подпараграфа 18.3.2. Найдите условия, описывающие мировое равновесие в случае, когда это неравенство выполняется.

18.15. Докажите утверждение 18.5.

***18.16.** Проведите анализ локальной динамики стационарного мирового равновесия в утверждении 18.5. [Подсказка: Линеаризуйте систему дифференциальных уравнений, описывающих равновесную динамику, вокруг стационарного состояния.]

***18.17.** Рассмотрите утверждение 18.5 при различных значениях нормы дисконтирования ρ_j между странами. Докажите что и в этом случае существует единственное стационарное равновесие, в котором экономики всех стран растут с одинаковым темпом.

18.18. В модели из подпараграфа 18.3.2 замените уравнение (18.12) уравнением

$$N(t) = G(N_1(t), \ldots, N_J(t)),$$

где функция G возрастает по всем своим аргументам и является однородной степени 1.

(a) Обобщите результаты из утверждения 18.5 для этого случая и выведите уравнение, неявным образом задающее темп роста мировой экономики.

(b) Выведите уравнение, задающее темп роста мировой экономики в явном виде, для случая $N(t) = \max_j N_j(t)$.

18.19. **(a)** Покажите, что если в модели из подпараграфа 18.3.2 население каждой страны растет с некоторым постоянным темпом $n > 0$, то в ней не существует стационарного равновесия.

(b) Постройте вариант модели по аналогии с моделью полуэндогенного роста из параграфа 13.3 из главы 13, в которой отсутствует значительный эффект масштаба и экономики растут с постоянным долгосрочным темпом (в случае когда население каждой страны растет с темпом $n > 0$). [Подсказка: преобразуйте уравнение (18.9) таким образом, что $\dot{N}_j(t) = \eta_j N(t)^{\phi} N_j(t)^{-\tilde{\phi}} Z_j(t)$, где $\tilde{\phi} > \phi$.]

(c) Полностью охарактеризуйте стационарное мировое равновесие в случае, описанном в части (b).

18.20. Рассмотрите модель из подпараграфа 18.4.2. Предположите, что мир состоит из двух экономик с постоянным и равным между собой населением и постоянными нормами сбережения $s_1 > s_2$. Предположите, что производственные функции в каждой стране задаются уравнением (18.15), где величина k' обозначает наибольшее значение отношения капитала к труду в каждой из стран за всю историю до текущего момента. Технологический прогресс отсутствует и обе страны в начальный момент времени обладают равным запасом отношения капитала к труду.

(a) Опишите стационарное мировое равновесие (то есть стационарное значение отношения капитала к труду в каждой стране).

(b) Опишите динамику выпуска на душу населения в каждой экономике. Как увеличение параметра γ изменяет эту динамику?

(c) Покажите, что размер следующих из модели различий в уровне дохода на душу населения между двумя странами возрастает по γ. Проинтерпретируйте этот результат.

(d) Как по вашему мнению, предоставляет ли эта модель правдоподобный механизм, ведущий к значительному уровню межстрановых различий в уровне дохода на душу населения? Обоснуйте ваш ответ с помощью теоретических и эмпирических доводов.

18.21. Завершите доказательство утверждения 18.6. Найдите формулы, описывающие пороговое значение $I_j(t)$ и размер премии за квалификацию $w_{Hj}(t)/w_{Lj}(t)$ в стране j в момент времени t в явном виде.

18.22. Выведите уравнения (18.20)–(18.23).

18.23. Докажите утверждение 18.7. [Подсказка: в стационарном равновесии прибыли от владения машинами, дополняющими квалифицированную и неквалифицированную рабочую силу, совпадают.]

18.24. Докажите утверждение 18.8.

18.25. Рассмотрите модель подходящих технологий из подпараграфа 18.4.3.

(a) Предположите, что исследовательская фирма обладает возможностью продавать машины производителям во всех странах мира, включая южные страны, и везде устанавливать на них одинаковую цену. Опишите стационарное равновесие в такой модели. [Подсказка: предположите, что в странах Севера и Юга цены конечного товара совпадают.]

(b) Сравните ваш ответ в пункте (a) с анализом в тексте главы и объясните влияние введения защиты права интеллектуальной собственности в странах Юга на равновесный уровень технологии. Как оно влияет на величину различия в уровне дохода на душу населения в странах Севера и Юга?

(c) В свете ваших ответов в пунктах (a) и (b) возможно ли, что южные экономики предпочтут отсутствие защиты права интеллектуальной собственности их строгой защите? [Подсказка: проведите различие между миром с единственной южной страной и миром, в котором таких стран много.]

(d) Каково влияние введения защиты права интеллектуальной собственности в южных странах на выпуск и уровень благосостояния в странах Севера?

***18.26.** В модели из подпараграфа 18.4.3 вместо многосекторной структуры экономики предположите, что выпуск задается следующей агрегированной производственной функцией из модели из параграфа 15.3 из главы 15:

$$Y(t)=\left[\gamma Y_L(t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}+(1-\gamma)Y_H(t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

где Y_L и Y_H производятся таким же образом, как и в модели в тексте главы. Предположите, как и в подпараграфе 18.4.3, что новые технологии разрабатываются только в странах Севера и только для северных рынков.

(a) Опишите стационарное равновесие (ТСР) в такой экономике. [Подсказка: используйте те же рассуждения, что и в подпараграфе 18.4.3.]

(b) Покажите, что если значение параметра $\sigma \equiv \varepsilon - (\varepsilon - 1)(1 - \beta)$ равно 2, то результаты совпадают с выводами в подпараграфе 18.4.3.

(c) Выведите утверждения, эквивалентные утверждениям 18.7 и 18.8.

(d) Как изменяется важность результатов о неподходящих технологиях при увеличении параметра σ?

18.27. Докажите утверждение 18.9.

18.28. Докажите утверждение 18.11.

18.29. Докажите утверждение 18.12.

***18.30.** Рассмотрите модель из параграфа 18.5. Предположите, что население экономики равно L. Предположите, что каждый индивид имеет возможность стать поставщиком одного из M товаров или быть занятым в фирме, осуществляющей внедрение новых технологий. Издержки внедрения технологии N задаются функцией $\Gamma(N) \equiv w\Gamma_0(N)$, где величина w обозначает заработную плату, доступную как альтернативная возможность получения дохода каждому поставщику.

(a) Эндогенизируйте переменную A при заданном количестве товаров M и опишите общее равновесие в экономике. В частности, покажите, что в равновесии выполняется условие равенства спроса и предложения на рынке труда вида $M(\Gamma_0(N^*) + N^*) = L$

(где величина N^* обозначает равновесное значение технологии и, таким образом, количество поставщиков в экономике).

(b) Каким образом увеличение параметра μ влияет на значение N^*? Объясните этот результат.

(c) Далее предположите, что M товаров различаются значением эластичности замещения. В частности, предположите, что эластичность замещения каждого товара является случайной величиной α с функцией распределения $G(\alpha)$ и носителем внутри отрезка [0, 1]. Обозначьте равновесное значение технологии (и количество поставщиков) для товара с эластичностью α как $N^*(\alpha)$. Покажите, что условие равенства спроса и предложения на рынке труда в этом случае принимает следующий вид:

$$M\int_0^1 \left[\Gamma_0(N^*(\alpha)) + N^*(\alpha)\right] dG(\alpha) = L.$$

(d) Как увеличение параметра μ влияет на равновесие в этом случае?

(e) Каким образом вы бы эндогенизировали переменную M? Какие новые выводы из модели это помогло бы получить?

18.31. Рассмотрите модель из параграфа 18.5. Какой тип структуры рыночной организации может возникнуть в экономике в случае несовершенных контрактных институтов (т. е. при очень низком значении параметра μ)? В частности, опишите, как вертикальная интеграция фирм и повторяющиеся взаимодействия между поставщиками и производителями могут изменить результаты, полученные в этом параграфе. Предложите пути моделирования таких рыночных организаций.

Глава 19
Международная торговля и экономический рост

Предыдущая глава посвящена анализу вопроса о том, как технологические связи между странами и решения фирм о внедрении новых технологий приводят к взаимозависимости темпов роста различных экономик. В этой главе мы допустим международную торговлю финансовыми активами и товарами и проведем анализ равновесия в мировой экономике. Сначала мы проанализируем экономический рост в стране, которая имеет возможность осуществлять кредитование и привлекать займы на мировом рынке капитала, и выясним, как это влияет на межстрановые различия в уровне дохода на душу населения и динамику экономического роста. Затем мы перейдем к анализу влияния международной торговли товарами на экономический рост.

Нашей первой задачей будет построение модели мирового равновесия, в которой присутствует международная торговля конечными или промежуточными товарами и экономический рост. То, как торговля влияет на рост, зависит от того, как организованы торговые связи страны с другими странами. Мы постараемся сделать обзор различных типов таких взаимодействий. Мы начнем с модели международной торговли типа Хекшера—Олина, в которой торговля между странами возникает из-за различий в относительных запасах факторов производства, а экономический рост вызван накоплением капитала. Затем мы перейдем к модели рикардианского типа, в которой торговля является следствием технологических сравнительных преимуществ. Основное различие между этими двумя подходами связано с вопросом о том, зависит ли цена товара, который страна поставляет на мировой рынок, от динамики производства и накопления капитала в этой стране. Эти модели позволяют по-новому взглянуть на структуру межстрановых связей, например мы убедимся, что динамика экономического роста в одной стране не может изучаться без анализа экономического роста в других странах мира.

Наша вторая цель состоит в анализе основного вопроса литературы по международной торговле и экономическому росту: ускоряет ли международная торговля экономический рост? Ответ на этот вопрос также зависит от того, как моделируется международная торговля и каковы источники экономического роста (в частности обучение в процессе производства или инновации). На протяжении всей главы мы делаем акцент на важности анализа мирового равновесия, а не равновесия в изолированной закрытой экономике.

19.1. Экономический рост и международная торговля финансовым капиталом

В случае если доходность капитала различается между странами, в глобальной экономике мы ожидаем переток капитала в регионы с большей доходностью. Из этого простого наблюдения вытекает ряд важных для теории экономического роста следствий. Во-первых, из него следует, что динамика экономического роста в финансово взаимосвязанных странах будет отличаться от его динамики в странах, не участвующих в международной торговле капиталом. Нашей первой целью в этом параграфе будет иллюстрация следствий международной торговли капиталом для экономического роста и демонстрация того, как торговля капиталом в значительной степени изменяет переходную динамику в базовой неоклассической модели экономического роста. Нашей второй задачей будет показать, какие новые уроки мы можем извлечь из анализа процесса экономического роста в мире с международной торговлей капиталом. Международная торговля капиталом приводит к нескольким научным парадоксам, самый важный из которых отмечен в статье [Lucas 1990]: «почему капитал не перетекает из богатых стран в бедные?». Этот простой вопрос поможет нам провести анализ ряда важных задач теории экономического роста и экономического развития. Несмотря на то что модель с совершенной мобильностью капитала является хорошей начальной точкой для анализа, эмпирические свидетельства не полностью поддерживают такой взгляд на международную торговлю капиталом. В частности, динамика экономического роста в модели со свободным перемещением капитала между странами не согласуется с эмпирическими данными. Более того, в большом количестве работ по международным финансам, начиная со статьи [Feldstein, Horioka 1980], показано, что потоки капитала из стран с большой нормой сбережений в страны с малой нормой сбережений в реальности оказываются значительно меньшими, чем предсказывает теория совершенного рынка капитала. В следующем параграфе мы кратко опишем, почему переток капитала между странами может происходить с затруднениями и как это отражается на динамике экономического роста в разных странах.

Рассмотрим мировую экономику, состоящую из J стран, и проиндексируем их как $j = 1, \ldots, J$. Каждая страна обладает доступом к технологии производства единственного конечного товара, описываемой следующей агрегированной производственной функцией:

$$Y_j(t) = F(K_j(t), A_j(t), L_j(t)),$$

где переменная $Y_j(t)$ обозначает выпуск единственного конечного товара в стране j в момент времени t, переменные $K_j(t)$ и $L_j(t)$ — запас капитала и рабочую силу соответственно, а переменная $A_j(t)$ — как и ранее, нейтральную по Харроду технологическую переменную, отличную для каждой страны. Допустим, что производственная функция F удовлетворяет предположениям 1 и 2 из главы 2. Как и в предыдущей главе, каждая страна «мала» и не может воздействовать на значения агрегированных переменных в мировой экономике. Технологический прогресс происходит во всех странах с одинаковым темпом, однако уровень технологии может различаться между странами:

$$A_j(t) = A_j \exp(gt),$$

где параметр g описывает единый для всех стран темп технологического прогресса.

Предположим, что экономика каждой страны допускает существование репрезентативного домохозяйства со стандартными предпочтениями, описываемыми в момент времени $t = 0$, следующей целевой функцией:

$$U_j = \int_0^\infty \exp(-(\rho - n)t) \frac{c_j(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt, \tag{19.1}$$

где переменная $c_j(t)$ обозначает потребление на душу населения в стране j в момент времени t, и мы предположили, что резиденты всех стран обладают одинаковой нормой дисконтирования ρ и темп роста населения n един во всех экономиках. Предположим, без ограничения общности, что население всех стран в момент времени $t = 0$ совпадет, и нормализуем его единицей. Таким образом, имеем равенства $L_j(0) = 1$ для всех $j = 1, ..., J$, и $L_j(t) = L(t) = \exp(nt)$ для любой страны j. В дополнение предположим, что если выполняется предположение 4 из главы 8, то неравенство $\rho - n > (1 - \theta)g$.

Важнейшей деталью экономики является возможность осуществлять кредитование и привлекать заимствования на мировом рынке капитала. В согласии с гипотезой перманентного дохода, определяющей потребительский выбор индивида, кредитование и заимствование позволяет домохозяйству (в частности репрезентативному домохозяйству) в каждой стране сглаживать траекторию потребления. Однако так как желание сгладить потребление в модели закрытой экономики было основной причиной, по которой капитал не достигал моментально значения в стационарном равновесии (на ТСР), возможность осуществления транзакций на мировом финансовом рынке ведет к изменению динамики накопления капитала и экономического роста.

Более точно, обозначим чистые заимствования страны j на мировом финансовом рынке и мировую процентную ставку в момент времени t как $B_j(t) \in \mathbb{R}$ и $r(t)$ соответственно. Если мировой рынок капитала совершенен, то процентная ставка во всех странах совпадает с мировой независимо от того, является ли страна чистым кредитором или должником. Более того, в соответствии с нашим предположением о малости экономики каждой страны, все страны рассматривают ее как заданную величину и имеют возможность привлекать неограниченный объем займов или размещать неограниченный объем кредитов. Следовательно, ресурсное ограничение для каждой страны j имеет следующий вид:

$$\dot{k}_j(t) = f(k_j(t)) - \tilde{c}_j(t) + b_j(t) - (n + g + \delta)k_j(t), \tag{19.2}$$

где, как и ранее, переменная $k_j(t) \equiv K_j(t)/(A_j(t)L_j(t))$ обозначает отношение капитала к эффективному труду в стране j в момент времени t, переменная $\tilde{c}_j(t) \equiv C_j(t)/(A_j(t)L_j(t))$ — потребление на единицу эффективного труда, переменная

$$y_j(t) \equiv \frac{Y_j(t)}{L_j(t)} \equiv A_j(t)f(k_j(t))$$

обозначает доход на душу населения и переменная

$$b_j(t) = \frac{B_j(t)}{A_j(t)L_j(t)}$$

обозначает чистые заимствования (приток капитала из-за рубежа) на единицу эффективного труда. Наиболее важным свойством уравнения (19.2) является то, что в отличие от всех остальных ресурсных ограничений, рассмотренных нами ранее в других моделях, оно не требует, чтобы сумма внутренних потребления и инвестиций совпадала с выпуском. Вместо этого экономика может привлекать ресурсы в количестве $B_j(t)$ или $b_j(t)$ из-за рубежа и использовать их для осуществления потребления или инвестиций. С другой стороны, страна может передавать ресурсы остальному миру и тогда выпуск превышает сумму потребления и инвестиций. Очевидно, что если мы допускаем международное кредитование и заимствование, то мы должны убедиться в выполнении международного бюджетного ограничения в каждой стране (и, таким образом, для каждого домохозяйства). Для этого рассмотрим международную инвестиционную позицию страны j в момент времени t и обозначим ее как $\mathcal{A}_j(t)$. Если значение $\mathcal{A}_j(t)$ положительно, то страна j является чистым кредитором и владеет положительным объемом требований на выпуск, производимый в других странах. Если значение $\mathcal{A}_j(t)$ отрицательно, то страна j является чистым должником. Потоковое бюджетное ограничение для страны j в момент времени t выглядит как

$$\dot{A}_j(t) = r(t)A_j(t) - B_j(t), \tag{19.3}$$

в котором утверждается, что страна получает процентный доход на имеющиеся активы $A_j(t)$ (или накапливает долг, если эта величина отрицательна) по процентной ставке $r(t)$ и дополнительно получает от остального мира трансферт $B_j(t)$ (или осуществляет трансферт остальному миру, если значение $B_j(t)$ отрицательно). Если трансферт от остального мира превышает процентный доход от иностранных активов, то международная инвестиционная позиция страны снижается, то есть $\dot{A}_j(t) < 0$. Поведение домохозяйств в каждой стране подчиняется условию отсутствия игр Понци (например, из главы 8) и поэтому неявным образом ограничивает динамику международной инвестиционной позиции каждой страны. Оно требует, чтобы для всех $j = 1, ..., J$ выполнялось следующее неравенство:

$$\lim_{t \to \infty}\left[A_j(t)\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)\right] = 0.$$

На интуитивном уровне это неравенство аналогично условию (8.16) из главы 8.

Как и с другими переменными, нам удобно будет рассматривать международную инвестиционную позицию на единицу эффективного труда. Для этого введем переменную:

$$\mathrm{a}_j(t) \equiv \frac{A_j(t)}{A_j(t)L_j(t)}.$$

Тогда уравнение (19.3) принимает следующий вид:

$$\dot{\mathrm{a}}_j(t) = (r(t) - g - n)\dot{\mathrm{a}}_j(t) - b_j(t), \tag{19.4}$$

а условие отсутствия игр Понци становится

$$\lim_{t \to \infty}\left[\mathrm{a}_j(t)\exp\left(-\int_0^t (r(s) - g - n)ds\right)\right] = 0. \tag{19.5}$$

Естественным образом объемы заимствований и кредитов в мировой экономике должны быть сбалансированы. Поэтому условие равенства спроса и предложения на мировом финансовом рынке

$$\sum_{j=1}^{J} B_j(t) = 0$$

должно выполняться в любой момент времени t. Далее, деля и умножая каждое слагаемое на $A_j(t)L_j(t)$ и используя равенства $A_j(t) = A_j\exp(gt)$ и $L_j(t) = L(t)$ для всех стран j, перепишем условие равенства спроса и предложения на мировом финансовом рынке в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{J} A_j(t)b_j(t) = 0 \qquad (19.6)$$

для всех $t \geq 0$.

При условии свободного доступа на мировой финансовый рынок задача репрезентативного домохозяйства в каждой стране состоит в максимизации целевой функции (19.1) при ограничениях (19.2), (19.4) и (19.5).

Определим *мировое равновесие* как набор траекторий нормализованного потребления, запаса капитала и международной инвестиционной позиции для каждой страны $\left\{[k_j(t),\ \tilde{c}_j(t),\ \mathrm{a}_j(t)]_{t\geq 0}\right\}_{j=1}^{J}$ и траекторию мировой процентной ставки $[r(t)]_{t\geq 0}$, такие, что при таком распределении ресурсов целевая функция каждого репрезентативного домохозяйства достигает максимума и мировой финансовый рынок находится в равновесии (то есть выполняется условие (19.6)). Определим стационарное мировое равновесие как мировое равновесие, в котором переменные $k_j(t)$ и $\tilde{c}_j(t)$ постоянны и выпуск в каждой стране растет с постоянным темпом. Как и в предыдущей главе, мы можем называть такое распределение ресурсов ТСР, а не стационарным равновесием.

Описать равновесие в мировой экономике в такой модели с совершенным финансовым рынком не составляет труда. Однако, чтобы проиллюстрировать несколько экономически важных идей, мы вначале представим ряд простых промежуточных результатов.

Утверждение 19.1. *В мировом равновесии в экономике со свободным перетоком капитала между странами для всех $j = 1, \ldots, J$ выполняется равенство:*

$$k_j(t) = k(t) = f'^{-1}(r(t) + \delta),$$

где функция $f'^{-1}(\cdot)$ является обратной функцией к $f'(\cdot)$, а переменная $r(t)$ обозначает мировую процентную ставку.

Доказательство. См. упражнение 19.1. ■

При совершенной мобильности капитала каждая фирма в каждой стране прекращает арендовать капитал, только когда его предельный продукт совпадает с альтернативными издержками, которые заданы мировой процентной ставкой (и составляют сумму мировой процентной ставки и нормы амортизации). Следовательно, отношение капитала к эффективному труду во всех странах одинаково. Однако заметим, что из этого не следует равенство отношений капитала к рабочей силе. Если производительность в двух странах j и j' различается ($A_j(t) \neq A_{j'}(t)$), то отношения капитала к труду в них не будут и *не должны* быть равны. Далее мы вернемся к этому важному наблюдению.

Следующее утверждение описывает стационарное мировое равновесие.

Утверждение 19.2. *Предположим, что выполняется предположение 4 из главы 2. Тогда в мировой экономике с совершенным мировым финансовым рынком существует единственное стационарное мировое равновесие, в котором выпуск, запас капитала и потребление на душу населения во всех странах растут с постоянным темпом g и отношение капитала к эффективному труду задается равенством*

$$k_j^* = k^* = f'^{-1}(\rho + \delta + \theta g) \text{ для всех } j = 1, \ldots, J.$$

Более того, в стационарном мировом равновесии

$$\lim_{t\to\infty} \dot{a}_j(t) = 0 \text{ для всех } j = 1, \ldots, J.$$

Доказательство. См. упражнение 19.1. ■

Этот результат понятен интуитивно: при совершенной мобильности капитала экономики всех стран *связаны* между собой в глобальную мировую экономику. Мировая экономика обладает единственным стационарным равновесием, схожим с равновесием в стандартной неоклассической модели экономического роста. Стационарное равновесие определяет не только значения отношения капитала к эффективному труду и темпа экономического роста во всех странах, но и распределение капитала в мировой экономике между различными странами. Несмотря на то что это утверждение интуитивно, его доказательство требует внимания: необходимо убедиться, что во всех странах выполняется условие отсутствия игр Понци. Для выполнения этого условия требуется, чтобы изменение нормализованной международной инвестиционной позиции каждой страны (и каждого домохозяйства) $\dot{a}_j(t)$ асимптотически стремилось к нулю для всех j. Это условие не выполняется в расширенной версии модели, где нормы дисконтирования в разных странах различаются между собой (см. упражнение 19.2).

Утверждение 19.3. *В мировом равновесии в экономике с совершенным мировым финансовым рынком существует единственная равновесная траектория* $\left\{[k_j(t), \tilde{c}_j(t), a_j(t)]_{t\geq 0}\right\}_{j=1}^{J}$, *которая сходится к стационарному мировому равновесию при $t \to \infty$. На этой траектории для всех пар стран j и j' выполняются равенства $k_j(t)/k_{j'}(t) = 1$ и $\tilde{c}_j(t)/\tilde{c}_{j'}(t) = \text{const}$.*

Доказательство. См. упражнение 19.3. ■

На интуитивном уровне, глобальная мировая экономика ведет себя так, как если бы она обладала единственной агрегированной производственной функцией, и поэтому динамическая равновесная траектория и переходная динамика в ней описываются так же, как и в неоклассической модели экономического роста из главы 8. Более того, из утверждения 19.1 следует, что отношение $k_j(t)/k_{j'}(t)$ постоянно, а из уравнения Эйлера для потребления следует, что отношение $\tilde{c}_j(t)/\tilde{c}_{j'}(t)$ также должно быть постоянным. Следовательно, выпуск и потребление в каждой экономике растут с одинаковым темпом. Однако заметим, что в утверждении 19.3 не утверждается равенство $\tilde{c}_j(t)=\tilde{c}_{j'}(t)$ (хотя $k_j(t) = k_{j'}(t)$). Это связано с тем, что несмотря на то, что ВВП и производство на душу населения во всех странах равны между собой, валовой национальный продукт (ВНП) различается, так как разные страны могут иметь различные международные инвестиционные позиции. Упражнение 19.2 посвящено более подробному анализу этого наблюдения.

Далее перейдем к важному следствию из утверждения 19.3.

Следствие 19.1. *Рассмотрим мировую экономику с совершенным мировым финансовым рынком. Предположим, что в момент времени t разрушается некоторая доля капитала в стране j λ. Тогда в эту страну моментально приходит новый капитал* ($\dot{a}_j(t) \to -\infty$) *и для всех* $t' \geq t$ *и всех* $j' \neq j$ *выполняется равенство* $k_j(t')/k_{j'}(t') = 1$.

Доказательство. Это утверждение напрямую следует из утверждений 19.1 и 19.3. Из первого следует существование глобально устойчивого мирового равновесия, а из второго следует равенство $k_j(t)/k_{j'}(t) = 1$ для всех t. Тогда моментальный приток капитала в страну j является единственной возможностью. ■

Из этого результата следует, что в мире с совершенным финансовым рынком переходная динамика наблюдается только для мировой экономики, но не для экономик отдельных стран (в частности имеет место равенство $k_j(t)/k_{j'}(t) = 1$ для всех j и j'). Это утверждение понятно интуитивно, так как международные потоки капитала гарантируют равенство отношений капитала к эффективному труду во всех странах. Поэтому в них не наблюдается динамика, соответствующая случаю постепенного накопления капитала. Таким образом, следствие 19.1 подразумевает, что в любой модели, объясняющей межстрановые различия в уровне дохода на душу населения с помощью переходной динамики, неявным образом должны вводиться ограничения на скорость или объем международных потоков капитала. Эмпирические наблюдения мирового финансового рынка не позволяют сделать однозначный вывод. Несмотря на то что валовой объем международных потоков капитала в мировой экономике достаточно велик, «парадокс Фельдштейна—Хориоки», описанный ниже, говорит о том, что страны, делающие больше сбережений, зачастую осуществляют больший объем инвестиций. Одной из причин этого может быть возможный риск суверенного дефолта стран, привлекающий значительное количество заимствований на мировом финансовом рынке. Этому вопросу посвящено упражнение 19.4.

Несмотря на то что объяснение межстранового расхождения доходов с помощью следствия 19.1 может быть оспорено, вывод из него, связанный с межрегиональной сходимостью, очевиден: динамика межрегиональной сходимости не может объясняться постепенным процессом накопления капитала, как в базовой неоклассической модели экономического роста (см. упражнение 19.5).

19.2. Почему капитал не перетекает из богатых стран в бедные

Модель, рассмотренная в предыдущем параграфе, предоставляет возможность для анализа вопроса, заданного в начале предыдущего параграфа и вынесенного в название этого. В базовой модели Солоу и неоклассической модели экономического роста основным источником межстрановых различий в уровне дохода на душу населения являются различия в отношении капитала к труду. Например, если мы рассмотрим мировую экономику, в которой все страны обладают доступом к единой технологии и отсутствуют различия в человеческом капитале работников, то единственной причиной, по которой одна страна будет богаче другой, является различие в отношении капитала к труду в них. Но если две страны с одинаковым множеством производственных возможностей обладают различными отношениями капитала к труду, то в богатой экономике доходность капитала будет ниже, что создает стимулы для перетока капитала из богатых стран в бедные. Далее мы остановимся на причинах, по которым капитал не перетекает из экономик с высоким отношением капитала к труду в страны с недостаточным запасом капитала.

19.2.1. Потоки капитала на совершенном международном финансовом рынке

Один из возможных ответов на вопрос, поставленный выше, следует из анализа в предыдущем параграфе. На совершенном международном финансовом рынке потоки капитала ведут к выравниванию отношений капитала к эффективному труду во всех странах. Однако отсюда не следует равенство отношений капитала к рабочей силе. Этот вывод, непосредственно следующий из анализа из предыдущего параграфа, описан в следующем утверждении. Заметим, что этот результат не дает полного ответа на наш вопрос, так как в нем межстрановые различия в производительности рассматриваются как заданные. Несмотря на это, он позволяет объяснить, почему при заданных различиях в производительности у нас отсутствуют убедительные причины ожидать перетока капитала из богатых стран в бедные.

Утверждение 19.4. *Рассмотрим модель мировой экономики с идентичными неоклассическими предпочтениями у резидентов всех стран и совершенным мировым финансовым рынком. Предположим, что страны различаются своей производительностью A_j. Тогда в ней существует единственное стационарное равновесие, в котором отношения капитала к труду различаются по странам (при этом отношения капитала к эффективному труду k_j совпадают).*

Доказательство. См. упражнение 19.7. ■

Следовательно, у нас нет причин ожидать переток капитала в бедные страны, если они обладают низкой производительностью. Страны с более высокой производительностью будут иметь больший запас капитала на одного работника. Если две страны j и j' имеют различную производительность $A_j(t)$ и $A_{j'}(t) > A_j(t)$, то отношения капитала к труду в них будут различаться, значение отношения капитала к труду в стране j' будет превышать его значение в стране j. Объяснение этого наблюдения схоже с объяснением из работы [Lucas 1990], однако в ней автор связывает различия в производительности также и с различиями в человеческом капитале работников (и в частности, с экстерналиями от человеческого капитала). Утверждение 19.4 говорит о том, что любые различия в производительности, независимо от их причин, ведут к такой структуре мирового равновесия.

Читатель может справедливо возразить, что мы идентифицировали лишь непосредственную причину, по которой капитал не перетекает в бедные страны, не объяснив причин межстрановых различий в производительности. Несмотря на это, утверждение 19.4 продолжает оставаться полезным, так как оно предлагает ряд объяснений отсутствия перетока капитала в бедные страны, основанных лишь на различиях в производительности между странами и не связанных с детальным устройством мировой финансовой системы. Мы уже выявили некоторые причины возможных межстрановых различий в производительности, и по мере того, как мы будем двигаться дальше в понимании этих причин, мы сможем найти лучший ответ на вопрос, почему капитал не перетекает из богатых стран в бедные (на самом деле в некоторых случаях он перетекает из бедных стран в богатые).

19.2.2. Потоки капитала на несовершенном международном финансовом рынке

Помимо утверждения 19.4, существуют и другие причины, по которым капитал может не перетекать из богатых стран в бедные. Несмотря на то что доходность капитала в бедных странах может быть выше, несовершенства финансового рынка и суверенный риск могут препятствовать мобильности капитала. Например, кредиторы могут беспокоиться о том, что страна с отрицательной международной инвестиционной позицией может объявить дефолт по иностранным обязательствам и перестать обслуживать внешний долг. Более того, проблемы на внутреннем финансовом рынке в развивающихся странах (которые мы обсудим в главе 21) также могут препятствовать или замедлять переток капитала из богатых стран в бедные. Если мировой финансовый рынок не является совершенным, то независимо от причин этого мы можем ожидать значительные различия в доходности капитала в разных странах[1].

Эмпирические свидетельства межстрановых различий в доходности капитала смешаны. Необходимо выделить три типа наблюдений. Во-первых, в нескольких работах, включая важную статью [Trefler 1993], упомянутую в главе 3, и более позднюю работу [Caselli, Feyrer 2007], показано, что различия в доходности капитала между странами относительно невелики. Оценки из этих работ напрямую связаны с вопросом существования значительных межстрановых различий в доходности капитала, однако они получены в предположениях, которые могут не всегда выполняться на практике (в статье Трефлера, например, они получены с помощью данных об интенсивности использования факторов в производстве экспортируемых товаров и основаны на ряде предположений о влиянии международной торговли на цены факторов производства; с другой стороны, в работе [Caselli, Feyrer 2007] для построения оценок требуются сравнимые между странами и точные данные о скорректированном на качество запасе капитала в разных странах и предполагается отсутствие издержек приспособления капитала).

Во-вторых, в отличие от взгляда на агрегированные данные, некоторые статьи посвящены анализу микроданных. Например, в работе [Banerjee, Duflo 2005] утверждается, что в некоторых фирмах в менее развитых странах доходность дополнительных инвестиций может достигать 100%. Однако из этих наблюдений нельзя сделать вывод о существовании значительных стимулов для перетока капитала из богатых стран в бедные, так как высокая доходность капитала может быть следствием несовершенств на рынке кредитов внутри страны. В частности, доходность капитала может быть очень высокой у ряда фирм с ограниченным доступом на рынок заимствований, однако различные несовершенства на финансовом рынке делают прибыльное кредитование таких фирм местными или иностранными финансовыми институтами невозможным. Если иностранный капитал начнет поступать в такие развивающиеся страны, то его доходность будет определяться доходностью инвестиций у фирм, не ограниченных в доступе

[1] Ограничения на потоки капитала также могут делать вклад в различия в производительности (например, за счет снижения улучшающих производительность инвестиций) и поэтому неявным образом вести к снижению потоков капитала в будущем.

к кредитам, которая может оказаться значительно ниже доходности у ограниченных фирм. Следовательно, как показано в утверждении 19.4, стимулы к перетоку капитала из богатых стран в бедные могут быть очень малы.

Наконец, парадокс Фельдштейна—Хориоки [Feldstein, Horioka 1980] состоит в том, что нормы сбережений и инвестиций в различных странах сильно коррелированы между собой. Фельдштейн и Хориока оценивают регрессию вида

$$\Delta\left(\frac{I_j(t)}{Y_j(t)}\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta\left(\frac{S_j(t)}{Y_j(t)}\right),$$

где переменная $\Delta(I_j(t)/Y_j(t))$ обозначает изменение доли инвестиций в ВВП в стране j между периодом t и предыдущим периодом, а переменная $\Delta\left(\frac{S_j(t)}{Y_j(t)}\right)$ — изменение доли сбережений в ВВП. Представим себе, что доля сбережений в ВВП различается между странами и во времени из-за случайных шоков нормы сбережений или по какой-либо другой причине. В мире с совершенной мобильностью капитала между странами это не оказывало бы воздействия на инвестиции, и поэтому оценка коэффициента α_1 была бы близка к нулю. Однако Фельдштейн и Хориока получили для экономик ОЭСР оценку, близкую к единице ($\alpha_1 \approx 0{,}9$). Схожие результаты были получены и для других выборок стран, однако в некоторых работах утверждается, что включение в регрессию дополнительных контрольных переменных позволяет разрешить парадокс. В работе [Feldstein, Horioka 1980] и в ряде последовавших за ней статей положительная корреляция между инвестициями и сбережениями интерпретируется как аргумент против совершенной мобильности капитала. Очевидно, что на практике, прежде чем сделать точный вывод, исследователь должен учесть ряд эконометрических и экономических задач. Например, в упражнении 19.6 показано, что корреляция между инвестициями и сбережениями может возникнуть и на совершенном международном финансовом рынке (вследствие значительных различий в инвестиционных возможностях в разных странах). Несмотря на это, парадокс Фельдштейна—Хориоки может свидетельствовать о том, что суверенный риск является важным элементом мирового финансового рынка и создавать барьеры, препятствующие свободному перетоку капитала между странами.

19.3. Экономический рост в модели Хекшера—Олина

Мы рассмотрели влияние на экономический рост международной торговли финансовыми активами, которая позволяет странам изменять межвременную структуру потребления. Однако международная торговля товарами, которая позволяет странам использовать свои сравнительные премущества (возникающие вследствие технологических различий или различий в факторах производства), возможно, является более важным фактором. Далее мы обратимся к простой модели экономического роста в мировой экономике с международной торговлей товарами. Наш анализ основан на работе [Ventura 1997], в которой построена математически простая модель мирового равновесия в мире *Хекшера—Олина*.

В модели Хекшера—Олина предполагается, что все страны обладают доступом к единой (или схожим) технологии и основной причиной международной торговли являются различия в отношении факторов производства, например некоторые страны могут обладать большим, чем другие, запасом физического или человеческого капитала на одного работника. Очевидно, что для анализа таких вопросов необходима модель с множеством товаров, используемых для конечного потребления или как промежуточные товары в производстве конечного товара. Развивая модели из глав 13 и 15, мы будем использовать второй подход, что не ограничивает общность рассуждений.

Предположим, что каждая страна обладает доступом к технологии, описываемой следующей агрегированной производственной функцией:

$$Y_j(t) = F(X_j^K(t),\ X_j^L(t)), \tag{19.7}$$

где переменная $Y_j(t)$ обозначает выпуск конечного товара в стране j в момент времени t, а переменные $X_j^K(t)$ и $X_j^L(t)$ — трудоинтенсивный и капиталоинтенсивный промежуточные товары соответственно. Мы используем здесь для обозначения промежуточных товаров символ «X», что соответствует количеству этих товаров, использованному в производстве, а не их общему выпуску в стране j. В случае международной торговли эти две переменные обычно различаются между собой. Производственная функция F в уравнении (19.7) обладает свойством постоянной отдачи от масштаба и, как и ранее, удовлетворяет предположениям 1 и 2 из главы 2 (с единственным отличием в том, что ее аргументами являются промежуточные товары, а не труд и капитал). Заметим, что предположение 2 также включает в себя условия Инада. Предположим, что конечный товар производится на рынке с совершенной конкуренцией.

Теория международной торговли является достаточно развитой частью экономической науки, в которой доказано значительное количество утверждений о структуре производства и торговли товарами. Наша задача состоит не в обзоре этих утверждений, а в демонстрации последствий международной торговли в мире Хекшера—Олина для экономического роста. Поэтому мы будем использовать наиболее простой подход и предположим, что каждый промежуточный товар выпускается с помощью единственного фактора производства. В частности, допустим следующие производственные функции:

$$Y_j^L(t) = A_j L_j(t) \tag{19.8}$$

и

$$Y_j^K(t) = K_j(t), \tag{19.9}$$

где для обозначения производства (а не использования) промежуточных товаров мы используем символ Y, а не символ X. Как и ранее, переменная $L_j(t)$ обозначает занятость в стране j в момент времени t, а переменная $K_j(t)$ — общий запас капитала в стране. Допустим, что предложение труда абсолютно неэластично. Необходимо отметить одно свойство производственных функций промежуточных товаров: производительность может различаться между странами в выпуске трудоинтенсивных товаров, но совпадает в выпуске капиталоинтенсивных товаров. В работе [Ventura 1997] автор делает аналогичное предположение. Последствия предположения о различиях в производительности в выпуске обоих типов промежуточных товаров описаны в упражнении 19.11. На данном этапе достаточно заметить, что производственные функции (19.8) и (19.9) ведут к существованию в модели простого мирового равновесия и что предположение об исключительно трудоинтенсивном технологическом прогрессе лежит в духе стандартной неоклассической модели экономического роста. Одним из обоснований такого предположения могут быть различия в человеческом капитале работников. Наконец, заметим, что в модели отсутствует технологический прогресс. Такое предположение сделано для упрощения анализа, расширение модели с трудоинтенсивным технологическим прогрессом описано в упражнении 19.13.

Далее во всей главе мы будем предполагать свободную международную торговлю всеми промежуточными товарами. Такое предположение выглядит экстремальным, так как торговля зачастую сопряжена с издержками и во многих моделях международной торговли явно вводятся транспортные издержки и торговые пошлины. Однако такое предположение позволяет упростить анализ и показать, каким образом международная торговля изменяет межстрановую динамику экономического роста. Наиболее важное следствие из него состоит в том, что цены всех торгуемых товаров — в данном случае всех промежуточных товаров — совпадают во всех странах и равны их ценам на мировом рынке, которые определяются совокупным мировым спросом и предложением этих товаров. Обозначим мировые цены трудоинтенсивного и капиталоинтенсивного товара в момент времени t как $p^L(t)$ и $p^K(t)$ соответственно. Выразим обе эти цены на мировом рынке в единицах конечного товара, который мы будем рассматривать как единицу измерения, нормализовав его цену единицей[2].

Из вида производственных функций (19.8) и (19.9) и предположения о совершенной конкуренции на рынках факторов производства следует, что заработная плата и арендная стоимость капитала в стране j в момент времени t задаются следующими равенствами:

$$w_j(t) = A_j p^L(t) \text{ и } R_j(t) = p^K(t).$$

Эти два уравнения показывают наиболее важное экономическое содержание данной модели. В моделях закрытой экономики цены факторов производства, которые задают стимулы к накоплению капитала, определяются отношением капитала к труду в экономике (см. главу 8). Здесь же цены факторов производства определяются мировыми ценами промежуточных товаров. В частности, так как капитал используется только в производстве капиталоинтенсивного промежуточного товара и в мире отсутствуют издержки международной торговли, арендная стоимость капитала в каждой стране равна мировой цене капиталоинтенсивного промежуточного товара. Аналогичные рассуждения применимы и к заработной плате, с единственным исключением, что ввиду межстрановых различий в производительности труда заработные платы в различных странах не совпадают, а равными оказываются значения эффективной заработной платы $w_j(t)/A_j$. Вслед за работой [Trefler 1993] мы будем называть такую динамику условным выравниванием цен факторов производства между странами, подразумевая под этим, что выравнивание (эффективных) цен факторов производства достигается после принятия во внимание различий в их производительности между странами. Понятие условного выравнивания цен факторов производства является более слабым, чем широко известное в теории международной торговли понятие выравнивания цен факторов производства, которое требует равенства заработных плат $w_j(t)$ во всех странах. В данном случае выравниваются значения $w_j(t)/A_j$.

В данной модели условное выравнивание цен факторов производства является следствием предположения о свободной международной торговле товарами, так как каждый фактор производства используется в выпуске единственного промежуточного товара. Несмотря на это, условное выравнивание цен факторов производства является результатом, справедливым для более широкого класса моделей. Говоря языком теории международной торговли, свободная торговля ведет к существованию *конуса диверсификации*, и если отношения факторов производства в различных

[2] Предположение о том, что цена конечного товара в каждой стране равна 1, не ограничивает общность в данной модели, даже если конечный товар не участвует в международной торговле. Это следует из того, что все промежуточные товары торгуются на мировом рынке и стоимость жизни во всех странах одинакова (выполняется паритет покупательной способности). Такое предположение не будет выполняться в модели из последующего параграфа.

странах лежат в этом конусе, то в мировой экономике достигается условное выравнивание цен факторов производства. Из предположений о том, что труд используется лишь в производстве трудоинтенсивного промежуточного товара, а капитал — лишь капиталоинтенсивного промежуточного товара (и в свободной международной торговле) следует, что конус диверсификации оказывается достаточно велик и включает в себя все возможные распределения капитала и труда по странам.

Условное выравнивание цен факторов производства является важным понятием, потому что из него следует, что цены факторов производства не зависят от запаса капитала и рабочей силы в стране (в предположении о том, что она является малой по сравнению с мировой экономикой, см. сноску 1 в предыдущей главе). Независимость цен факторов производства от решений агентов об их накоплении является отличительной чертой данной модели[3].

Предполагая, что износ капитала задается нормой амортизации δ, мы имеем следующее уравнение для процентной ставки в стране j в момент времени t:

$$r_j(t) = R_j(t) - \delta = p^K(t) - \delta. \tag{19.10}$$

Далее опишем ресурсное ограничение. Несмотря на то что в мировой экономике присутствует международная торговля, в ней не происходит межвременного замещения товаров. Поэтому в этой модели мы абстрагируемся от международного кредитования и заимствования, которые описаны в двух предыдущих параграфах. Это позволит нам изолировать влияние международной торговли наиболее простым способом. Отсутствие международного кредитования и заимствования ведет к тому, что каждая страна должна иметь нулевой торговый баланс в каждый момент времени. Поэтому для всех j и t имеет место следующее уравнение торгового баланса:

$$p^K(t)\left[X_j^K(t) - Y_j^K(t)\right] + p^L(t)\left[X_j^L(t) - Y_j^L(t)\right] = 0. \tag{19.11}$$

Это уравнение понятно интуитивно, оно требует, чтобы стоимость чистого экспорта капиталоинтенсивного товара совпадала со стоимостью чистого импорта трудоинтенсивного товара в каждой стране (в любой момент времени). Например, если значение $X_j^K(t) - Y_j^K(t)$ отрицательно, то есть страна является чистым экспортером капиталоинтенсивного товара (другими словами, она использует в производстве конечного товара меньший объем капиталоинтенсивного товара, чем производит), то она должна импортировать трудоинтенсивный промежуточный товар (то есть $X_j^L(t) - Y_j^L(t) > 0$).

[3] Это свойство присуще многим, но не всем моделям международной торговли типа Хекшера—Олина, тождества условного выравнивания цен факторов производства также выполняются и в других моделях торговли.

В дополнение к уравнению торгового баланса в каждой стране выполняется стандартное ресурсное ограничение в следующем виде:

$$\dot{K}_j(t) = F\left(X_j^K(t),\ X_j^L(t)\right) - C_j(t) - \delta K_j(t) \qquad (19.12)$$

для всех j и t. Более того, из равенства спроса и предложения промежуточных товаров на мировом рынке следуют уравнения:

$$\sum_{j=1}^{J} X_j^L(t) = \sum_{j=1}^{J} Y_j^L(t) \text{ и } \sum_{j=1}^{J} X_j^K(t) = \sum_{j=1}^{J} Y_j^K(t) \text{ для всех } t. \qquad (19.13)$$

Важным элементом модели является то, что потребительский и инвестиционный товар производятся с помощью единой технологии, единица конечного товара может быть преобразована в единицу потребления или в единицу инвестиционного товара (капитала). В следующем параграфе мы рассмотрим модель международной торговли и экономического роста с различными интенсивностями использования факторов производства в выпуске потребительского и инвестиционного товаров. Однако в текущих целях модель с равными интенсивностями факторов в производстве потребительского и инвестиционного товаров является достаточной.

Наконец, для описания предпочтений агентов мы, как и ранее, предположим, что каждая экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства со стандартной целевой функцией вида:

$$U_j = \int_0^{\infty} \exp(-(\rho - n)t) \frac{c_j(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt, \qquad (19.14)$$

где переменная $c_j(t) \equiv C_j(t)/L_j(t)$ обозначает потребление на душу населения в стране j в момент времени t, все страны обладают единой нормой дисконтирования и отсутствует рост населения. Без ограничения общности предположим, что все решения внутри страны принимаются репрезентативным домохозяйством этой страны и что выполняется неравенство $\rho > n$, из которого следует конечность значения целевой функции в равновесии (см. главу 8, в частности предположение 4′). Для упрощения дальнейшего анализа также предположим равенства $L_j(0) = L$ для всех j, из которых следует, что

$$L_j(t) = L(t) \text{ для всех } j = 1, \ldots, J. \qquad (19.15)$$

Упражнение 19.12 посвящено анализу модели с различным населением в разных странах.

Как и в главе 8, основной переменной в модели является отношение используемых в производстве капиталоинтенсивных промежуточных товаров к трудоинтенсивным промежуточным товарам. Поэтому введем переменную

$$x_j(t) \equiv \frac{X_j^K(t)}{X_j^L(t)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y_j(t) &= F(X_j^K(t), X_j^L(t)) = \\ &= X_j^L(t) F\left(\frac{X_j^K(t)}{X_j^L(t)}, 1\right) \equiv \\ &\equiv X_j^L(t) f(x_j(t)), \end{aligned} \tag{19.16}$$

где последнее равенство следует из определения производственной функции на душу населения (так как функция F обладает свойством постоянной отдачи от масштаба). Мы будем называть переменную $x_j(t)$ промежуточной интенсивностью использования капитала в стране j, а переменную $k_j(t) \equiv K_j(t)/L_j(t)$, как обычно, отношением капитала к труду.

Определим *мировое равновесие* как набор траекторий потребления, отношения капитала к труду, промежуточной интенсивности использования капитала во всех странах и мировых цен $[\{c_j(t), k_j(t), x_j(t)\}_{j=1}^J$, $p^K(t), p^L(t)]_{t\geq 0}$, такой, что полезность репрезентативного домохозяйства в стране j достигает максимума при ограничениях (19.11) и (19.12) и заданных мировых ценах $\left[p^K(t), p^L(t)\right]_{t\geq 0}$ на траекториях $\left[c_j(t), k_j(t), x_j(t)\right]_{t\geq 0}$, и при таких мировых ценах спрос и предложение на внешнеторговых рынках совпадают (выполняется уравнение (19.13)). Аналогичным образом определим *стационарное равновесие* как равновесие, в котором все эти переменные остаются постоянными.

В следующем утверждении описано мировое распределение производства.

Утверждение 19.5. *Рассмотрим модель, описанную выше. В любом мировом равновесии в ней для всех j и j' и для любого t выполняются следующие равенства:*

$$x_j(t) = x_{j'}(t) = \frac{\sum_{j=1}^J k_j(t)}{\sum_{j=1}^J A_j(t)}.$$

Доказательство. При заданных мировых ценах в момент времени t репрезентативное домохозяйство в каждой стране максимизирует значение $F(X_j^K(t), X_j^L(t))$ при ограничении (19.11). Обозначим частные производные производственной функции как F_K и F_L. Тогда из решения задачи максимизации следуют равенства:

$$\frac{F_K(X_j^K(t), X_j^L(t))}{F_L(X_j^K(t), X_j^L(t))} = \frac{p^K(t)}{p^L(t)} \text{ для всех } j \text{ и для всех } t.$$

Используя определение (19.16) и однородность степени 1 функции F, перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{f'(x_j(t))}{f(x_j(t)) - x_j(t)f'(x_j(t))} = \frac{p^K(t)}{p^L(t)} \text{ для всех } j \text{ и для всех } t,$$

где левая часть является строго убывающей по аргументу $x_j(t)$ функцией, и поэтому однозначно задает значение $x_j(t)$ при заданных мировых ценах. Так как значение $x_j(t)$ совпадают во всех странах, они должны быть равны значению отношения капиталоинтенсивных промежуточных товаров к трудоинтенсивным промежуточным товарам в мировой экономике. Поэтому для всех $j = 1, ..., J$ выполняется равенство:

$$x_j(t) = \frac{\sum_{j=1}^{J} K_j(t)}{\sum_{j=1}^{J} A_j L_j(t)}.$$

Переход к переменной $k_j(t) = K_j(t)/L_j(t) = K_j(t)/L(t)$ завершает доказательство утверждения. ■

Из этого утверждения следует, что независимо от значений отношения капитала к труду в различных странах отношение используемых в производстве капиталоинтенсивных к трудоинтенсивным промежуточным товарам выравнивается во всех странах. Выравнивание отношения используемых в производстве конечного товара капиталоинтенсивных к трудоинтенсивным промежуточным товарам позволяет агрегировать производство и накопление капитала по всем странам и описать динамику мировых переменных. В частности обозначим среднемировое потребление на душу населения и среднемировое отношение капитала к труду как $c(t)$ и $k(t)$ соответственно:

$$c(t) \equiv \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} c_j(t) \text{ и } k(t) \equiv \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} k_j(t).$$

В следующем утверждении показано, что динамика мировых переменных во многом схожа с динамикой стандартной неоклассической закрытой экономики.

Утверждение 19.6. *Рассмотрим модель, описанную выше. В любом мировом равновесии динамика мировых переменных описывается следующими дифференциальными уравнениями:*

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}\left(f'\left(\frac{k(t)}{A}\right) - \delta - \rho\right),$$

$$\dot{k}(t) = Af\left(\frac{k(t)}{A}\right) - c(t) - (n+\delta)k(t),$$

где переменная $r(t) = p^K(t)$ обозначает мировую процентную ставку, а переменная

$$A = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} A_j$$

обозначает среднемировую производительность труда.

Доказательство. Используем уравнения (19.11), (19.12) и утверждение 19.5 и запишем уравнение динамики капитала в стране j в следующем виде:

$$\dot{K}_j(t) = p^K(t)K_j(t) + p^L(t)A_jL(t) - C_j(t) - \delta K_j(t).$$

Далее определим переменную

$$K(t) \equiv \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} K_j(t).$$

Тогда просуммировав по всем $j = 1, ..., J$, используя определения $p^K(t)$ и $p^L(t)$, утверждение 19.5 и однородность степени 1 функции F (вместе с теоремой 2.1), получаем следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^{J} \dot{K}_j(t) = F\left(\sum_{j=1}^{J} K_j(t),\ \sum_{j=1}^{J} A_jL(t)\right) - \sum_{j=1}^{J} c_j(t) - \delta\sum_{j=1}^{J} K_j(t).$$

Разделив обе части этого уравнения на $JL(t)$ и используя еще раз теорему 2.1, приходим к уравнению:

$$\frac{\dot{K}(t)}{L(t)} = Af\left(\frac{K(t)}{AL(t)}\right) - c(t) - \delta\frac{K(t)}{L(t)}.$$

Далее, используя определение $k(t)$, получаем второе дифференциальное уравнение из утверждения.

Чтобы получить дифференциальное уравнение для потребления $c(t)$, просуммируем уравнения Эйлера для всех стран $\dot{c}_j(t)/c_j(t) = (r(t) - \rho)/\theta$. ■

Утверждение 19.6 логично. При условном выравнивании цен факторов производства мировая экономика становится глобальной и поэтому подчиняется двум основным уравнениям неоклассической модели экономического роста. Далее, используя два доказанных выше утверждения, опишем вид стационарного равновесия в мировой экономике.

Утверждение 19.7. *Рассмотрим модель, описанную выше. В ней существует единственное стационарное равновесие, в котором для всех стран j выполняются следующие равенства:*

$$f'(x_j^*) = f'\left(\frac{k^*}{A}\right) = \rho + \delta, \tag{19.17}$$

где

$$x_j^* = x^* = \frac{\sum_{j=1}^{J} K_j(t)}{L(t)\sum_{j=1}^{J} A_j} \text{ и } k^* = \frac{\sum_{j=1}^{J} K_j(t)}{JL(t)}. \tag{19.18}$$

Более того,

$$p^{K*} = \rho + \delta. \tag{19.19}$$

Доказательство. Доказательство следует из утверждения 19.6. Условия Инада из предположения 2 исключают устойчивый рост мировой экономики. Следовательно, среднемировое значение потребления в стационарном равновесии должно оставаться постоянным, а процентная ставка должна удовлетворять равенству $r^* = p^{K*} - \delta = \rho$. Тогда уравнения (19.17) и (19.18) следуют из утверждений 19.5 и 19.6. ■

В утверждении 19.7 показано, что стационарное мировое равновесие выглядит очень просто и отношение капиталоинтенсивных к трудоинтенсивным промежуточным товарам определяется исключительно видом агрегированной производственной функции F (или ее преобразования f) и отношением капитала к труду в мировой экономике. Причина, по которой производственная структура в стационарном равновесии определяется общемировым предложением капитала и труда, проста: при условном выравнивании цен факторов производства мировая экономика становится интегрированной. В двух предыдущих параграфах мы увидели, как международный финансовый рынок делает мировую экономику интегрированной. Рассуждения в этом параграфе говорят о том, что международная торговля типа Хекшера—Олина (вместе с условным выравниванием цен факторов производства) также приводят к аналогичному результату.

Несмотря на то что структура стационарного равновесия в модели выглядит довольно простой, переходная динамика в мировой экономике имеет более сложный вид. Действительно, динамика отдельных экономик может быть достаточно богатой и запутанной. Однако утверждение 19.7, в котором говорится, что мировая экономика подчиняется уравнениям неоклассической модели экономического роста, гарантирует, что стационарное мировое равновесие является глобально устойчивым.

Утверждение 19.8. *Рассмотрим модель, описанную выше. Стационарное равновесие, описанное в утверждении* 19.7, *является глобально устойчивым.*

Доказательство. Из доказательства утверждения 19.6 следует, что для любых траекторий мировых цен $\left[p^K(t), p^L(t)\right]_{t\geq 0}$ решение задачи оптимизации для репрезентативного домохозяйства в стране j в любой момент времени t удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\dot{c}_j(t)}{c_j(t)} = \frac{1}{\theta}\left(p^K(t) - \delta - \rho\right),$$

$$\dot{k}_j(t) = \left[p^K(t) - (n+\delta)\right]k_j(t) + p^L(t)A_j(t) - c_j(t).$$

Из стандартных рассуждений из главы 8, примененных к мировым переменным в утверждении 19.6, следует, что их значения сходятся к единственному стационарному равновесию при $t \to \infty$, а траектория $\left[p^K(t)\right]_{t\geq 0}$ сходится к $\rho + \delta$. Потребление на душу населения и отношение капитала к труду в каждой экономике также сходятся к своим значениям в стационарном равновесии. Сходимость к единственному стационарному мировому равновесию следует из уравнения $p^{K*}(t) = \delta + \rho$. ■

Из доказанных выше утверждений следует, что мировая экономика, состоящая из стран, участвующих в международной торговле товарами типа Хекшера—Олина (с условным выравниванием цен факторов производства), демонстрирует динамику экономического роста, схожую с динамикой в модели из главы 8, и экономика каждой страны сходится к единственному стационарному равновесию. При этом необходимо отметить одно важное отличие. Как и в модели с международным кредитованием и заимствованием из предыдущего параграфа, переходная динамика в этой модели значительно отличается от переходной динамики в закрытой экономике в неоклассической модели экономического роста. Здесь, несмотря на отсутствие международных потоков капитала, доходность капитала в различных странах выравнивается. Поэтому здесь переходная динамика отсутствует, так как страна с более высокой доходностью капитала будет накапливать капитал быстрее, чем остальные страны. Следовательно, эта модель демонстрирует возможные недостатки использования моделей экономического роста для закрытой экономики для анализа межстрановой и межрегиональной динамики выпуска и накопления капитала. Упражнение 19.10 посвящено сравнению равновесия в этой модели и равновесия в аналогичной модели для закрытой экономики.

Заметим, что утверждение о переходной динамике, возможно, является наименее интересным результатом модели. Основная цель этой главы состоит в демонстрации того, как международная торговля изменяет выводы из моделей экономического роста для закрытой экономики. Анализ, проведенный выше, уже показывает, как это может произойти. Отметим, что, несмотря на то что мировая экономика наделена стандартной неоклассической производственной технологией, удовлетворяющей предположениям 1 и 2, экономика каждой отдельной страны описывается *AK* технологией, так как она может накапливать любое количество капитала без снижения его предельного продукта (до тех пор пока страна остается «малой» экономикой). Более точно, в момент времени t страна получает на каждую дополнительную единицу капитала доход $p^K(t)$, значение которого не зависит от запаса капитала в этой стране. Почему тогда в таком мире не происходит эндогенного экономического роста? Ответ на этот вопрос состоит в том, что, хотя каждая страна описывается *AK* технологией и поэтому может накапливать капитал в периоды времени, когда цена капиталоинтенсивного промежуточного товара высока, процесс накопления капитала в мировой экономике ведет к снижению цены капиталоинтенсивного промежуточного товара до уровня, согласующегося со стационарным мировым равновесием. Другими словами, цена капиталоинтенсивного промежуточного товара подстраивается таким образом, чтобы гарантировать существование стационарного мирового равновесия, в котором капитал, выпуск и потребление на душу населения остаются постоянными (см. доказательство утверждения 19.8).

Этот процесс описывает не только долгосрочную динамику, но также открывает дверь для значительно отличающейся краткосрочной (или среднесрочной) динамики, особенно для экономик, в которых норма сбережений отличается от ее значения в других странах. Чтобы продемонстрировать эту возможность наиболее простым способом, рассмотрим следующий мысленный эксперимент. Допустим, что мировая экономика находится в стационарном равновесии, и предположим, что в одной из стран происходит снижение нормы дисконтирования с ρ до $\rho' < \rho$. Что произойдет в этом случае? Ответ на этот вопрос предоставлен в следующем утверждении.

Утверждение 19.9. *Рассмотрим модель, описанную выше. Допустим, что значение J велико, мировая экономика находится в стационарном равновесии в момент времени $t = 0$, и в этот момент происходит снижение нормы дисконтирования в стране 1 до $\rho' < \rho$. Тогда существует вещественное $T > 0$, такое, что при всех $t \in [0, T)$ экономика страны 1 растет с темпом*

$$g_1 = \frac{\dot{c}_1(t)}{c_1(t)} = \frac{1}{\theta}(\rho - \rho').$$

Доказательство. Из утверждения 19.8 и уравнения (19.19) следует, что в стационарном равновесии $p^{K^*} = \rho + \delta$. Если экономика страны 1 мала (что будет верно в течение некоторого промежутка времени $[0, T)$), то доходность капитала в ней составляет p^{K^*}. Поэтому ее динамика будет совпадать динамикой в модели *AK* из главы 11 (параграф 11.1) при $A = \rho > \rho'$. Тогда утверждение о постоянном темпе роста экономики следует из этой модели. ■

При условном выравнивании цен факторов производства экономика каждой страны описывается *AK* технологией и поэтому она имеет возможность накапливать капитал и расти без снижения предельной производительности капитала. Цена капиталоинтенсивного промежуточного товара и, следовательно, доходность капитала определяется нормой дисконтирования в других странах мира, поэтому экономика 1 с меньшим значением нормы дисконтирования получает стимулы к ускорению накопления капитала по сравнению с остальными странами, что ведет к положительному темпу роста дохода на душу населения (в то время как доход на душу населения в остальном мире остается постоянным).

Следовательно, модель экономического роста с международной торговлей типа Хекшера—Олина (и условным выравниванием цен факторов производства) может без труда объяснить быстрый рост («чудеса роста») экономик после изменения политики или нормы сбережений (или нормы дисконтирования). В работе [Ventura 1997] автор использует эту модель как возможное объяснение причин, по которым «восточноазиатские экономические тигры» начиная с 1970-х гг. демонстрировали быстрый рост своих экономик без снижения предельной производительности капитала. Так как в 1970-х и 1980-х гг. восточноазиатские экономики действительно были более открыты международной торговле, чем большинство развивающихся стран, и быстро накапливали капитал (см., например, работы [Young 1992, 1995; Vogel 2006], такое объяснение представляется достаточно правдоподобным. Оно показывает, как международная торговля может временно предотвратить снижение доходности капитала, происходящее вследствие его быстрого накопления, и создать возможность устойчивого роста с более высоким темпом.

Однако такая динамика не может продолжаться бесконечно. Это следует из предположения 2, которое ведет к тому, что выпуск в мировой экономике не может расти в долгосрочной перспективе. Как тогда утверждение 19.9 согласуется с предположением 2? Ответ на этот вопрос состоит в том, что это утверждение описывает среднесрочную динамику экономики. Именно поэтому оно верно для интервала $t \in [0, T)$. В некоторый момент времени страна 1 становится настолько большой по сравнению с остальным миром, что она по существу будет владеть всем капиталом в мировой экономике. Начиная с этого момента (на самом деле даже ранее) страна 1 уже не может рассматриваться как малая экономика: накопление капитала в ней будет иметь последствия для относительной цены капиталоинтенсивного промежуточного товара. Следовательно, доходность капитала со временем снизится, что приведет к завершению процесса накопления капитала в стране. Естественно, если в некоторый будущий момент времени норма дисконтирования в стране 1 возрастет назад до значения ρ, то схожая динамика приведет к тому, что мировая экономика вернется в стационарное равновесие.

Важным выводом из этого анализа является то, что несмотря на то, что эта модель способна объяснить чудеса роста, они могут происходить только в среднесрочной перспективе. Это свойство связано с утверждением о том, что в этой модели не существует стационарного равновесия (и даже строго определенного мирового распределения доходов) в случае, если нормы дисконтирования в различных странах отличаются друг от друга (см. упражнение 19.9). Другими словами, простое мировое равновесие в этой модели возможно лишь в исключительно редком случае, когда все страны обладают единой нормой дисконтирования (а также единой производственной технологией в секторе капиталоинтенсивных промежуточных товаров, см. упражнение 19.11). Этот результат является следствием того, что в такой модели международной торговли типа Хекшера—Олина экономика каждой страны мала и цены факторов производства не зависят от их отношения в стране. В следующем параграфе мы рассмотрим простую *рикардианскую* модель международной торговли, не обладающую таким свойством, что приведет к другим взаимосвязям между торговлей и экономическим ростом.

19.4. Международная торговля, специализация и мировое распределение доходов

В этом параграфе мы рассмотрим модель, в которой страны участвуют в рикардианской международной торговле промежуточными товарами, обусловленной различиями в производительности и технологии. В ней каждая страна влияет на цену товара, который она поставляет на мировой рынок. Такое предположение выглядит правдоподобным. Несмотря на то что страны в большинстве случаев рассматривают цены импортируемых товаров как заданные, часто они обладают возможностью влиять на мировые цены, по крайней мере части товаров, которые они экспортируют (например, медь для Чили, Майкрософт Виндоуз для США или автомобили «Ламборгини» для Италии). Основное следствие из такого предположения состоит в том, что *условия торговли* (отношение цен экспортируемых и импортируемых страной товаров) в каждой стране становятся эндогенной переменной, зависящей от скорости накопления страной капитала. Мы убедимся в том, что подобная модель является более гибкой по сравнению с моделью из предыдущего параграфа, так как она допускает межстрановые различия в нормах дисконтирования (и нормах сбережения) и позволяет проанализировать более широкое множество упражнений по сравнительной статике. Представленная в этом параграфе модель основана на работе [Acemoglu, Ventura 2002]. Вначале мы опишем упрощенную версию модели, в которой физический капитал является единственным фактором производства. Затем мы перейдем к полной версии модели, в которой в производстве потребительских и инвестиционных товаров используются физический капитал и труд.

Другим важным отличием этой модели от модели из предыдущего параграфа является то, что здесь, как и в модели из параграфа 18.3 из предыдущей главы, мировая экономика демонстрирует эндогенный экономический рост, и темп роста определяется инвестиционными решениями фирм во всех странах. При этом международная торговля (без каких-либо переливов технологий), несмотря на эндогенный экономический рост на мировом уровне, создает достаточное количество межстрановых связей, что гарантирует выравнивание долгосрочных темпов роста экономик всех стран. Следовательно, эта модель показывает, как международная торговля, подобно переливам технологии, способна создавать мощные силы, ограничивающие величину межстранового расхождения.

19.4.1. Предпочтения и технология

Рассмотрим мировую экономику, состоящую из большого количества стран J и, как и ранее проиндексируем их как $j = 1, ..., J$. Предположим существование континуума промежуточных товаров, которые проиндексируем как $\nu \in [0, N]$ и двух конечных товаров, которые используются для потребления и инвестиций. Допустим свободную международную торговлю промежуточными товарами и запретим торговлю конечными товарами и финансовыми активами. Предположение об отсутствии торговли потребительским и инвестиционным товарами позволит нам сфокусировать внимание на торговле промежуточными товарами. Предположение об отсутствии торговли финансовыми активами исключает международное кредитование и заимствования.

Страны различаются технологиями, сбережениями и проводимой в них экономической политикой. Например, определим страну j набором характеристик (μ_j, ρ_j, ζ_j), где переменная μ говорит о том, насколько хорошо развита технология в стране, переменная ρ обозначает норму дисконтирования, а переменная ζ является мерой влияния экономической политики и институтов на стимулы к осуществлению инвестиций. Все три характеристики могут различаться между странами с заданными функциями распределения, но не изменяются во времени. В дополнение предположим, что население каждой страны постоянно, и нормализуем его единицей.

Экономики всех стран допускают существование репрезентативного домохозяйства со следующей целевой функцией:

$$\int_0^\infty \exp(-\rho_j t)\log C_j(t)dt, \tag{19.20}$$

где переменная $C_j(t)$ обозначает потребление в стране j в момент времени t. Логарифмические предпочтения являются частным случаем более общего типа предпочтений вида CRRA, которые мы использовали ранее (они являются предельным случаем предпочтений (19.1) в случае $\theta \to 1$). Предположение о логарифмических предпочтениях позволяет нам упростить изложение модели без значительного ограничения общности. При этом заметим, что предпочтения (19.20) являются во многом более гибкими, чем предпочтения в модели из предыдущего параграфа, так как они позволяют норме дисконтирования ρ_j различаться между странами. Также предположим, что в момент времени $t = 0$ страна j обладает начальным запасом капитала $K_j(0) > 0$.

Бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства в стране j в момент времени t имеет следующий вид:

$$p_j^I(t)\dot{K}_j(t) + p_j^C(t)C_j(t) = Y_j(t) = r_j(t)K_j(t) + w_j(t), \tag{19.21}$$

где переменные $p_j^I(t)$ и $p_j^C(t)$ обозначают цены инвестиционного и потребительского товаров (в терминах единицы измерения, которой положим идеальный индекс цен всех торгуемых промежуточных товаров, см. далее). Несмотря на торговлю промежуточными товарами, цены потребительских и инвестиционных товаров могут различаться между странами, так как они не участвуют в международной торговле. Как и ранее, переменная $K_j(t)$ обозначает запас капитала в стране j в момент времени t, переменная $r_j(t)$ — арендную стоимость капитала (которая также может различаться между странами), а переменная $w_j(t)$ — заработную плату. Уравнение (19.21) требует, чтобы сумма потребительских и инвестиционных расходов совпадала с общим доходом. В нем неявно предполагается отсутствие амортизации капитала. Мы сделали такое предположение для упрощения дальнейших выкладок. Наиболее важным свойством этого уравнения является то, что инвестиции $\dot{K}_j(t)$ в нем умножаются на цену $p_j^I(t)$, а потребление $C_j(t)$ умножается на цену $p_j^C(t)$. Это связано с тем, что производственные технологии в секторах потребительских и инвестиционных товаров отличаются друг от друга и поэтому цены этих товаров оказываются различными. В этом смысле данная модель тесно связана с моделью из параграфа 11.3 из главы 11. Второе равенство в уравнении (19.21) говорит о том, что общий выпуск в экономике равен сумме доходов капитала и дохода труда, арендная стоимость капитала составляет $r_j(t)$, общий запас капитала в стране j составляет $K_j(t)$, общий доход труда составляет $w_j(t)$ (так как население страны нормализовано единицей).

Мы введем в модель рикардианскую специализацию, связанную с технологическими различиями, наиболее простым способом: разместим производство N промежуточных товаров в мировой экономике по J странам таким образом, что каждый из них будет производиться только в одной стране. Из этого предположения, которое в теории международной торговли часто называют предпочтениями (или технологией) Армингтона, следует, что, несмотря на то что каждая страна является малой экономикой на рынках импорта, она обладает возможностью изменять свои условия торговли с помощью изменения объема производства экспортируемого товара. Обозначим меру множества промежуточных товаров, производимых в стране j, как μ_j. Тогда из этого предположения следует равенство:

$$\sum_{j=1}^{J} \mu_j = N. \qquad (19.22)$$

Из уравнения (19.22) следует, что более высокое значение μ_j обозначает, что страна j обладает технологиями производства большего количества промежуточных товаров, поэтому мы можем интерпретировать параметр μ_j как индикатор уровня развития технологий в стране j. Предположим, что все фирмы внутри страны обладают доступом к технологиям производства всех промежуточных товаров. Отсюда следует, что все они производятся на рынке с совершенной конкуренцией.

Более того, предположим, что технология производства всех доступных промежуточных товаров в каждой стране такова, что для выпуска единицы любого промежуточного товара требуется единица капитала. Также допустим свободный выход на рынок производства промежуточных товаров. Из этих предположений следует, что производство происходит на рынке с совершенной конкуренцией и что цена всех промежуточных товаров, производимых в стране j в момент времени t, задается уравнением

$$p_j(t) = r_j(t), \qquad (19.23)$$

где, напомним, переменная $r_j(t)$ обозначает арендную стоимость капитала в стране j в момент времени t.

19.4.2. Модель AK

Прежде чем перейти к анализу полной модели, рассмотрим ее упрощенную версию, в которой капитал является единственным фактором производства. Следовательно, в уравнении (19.21) $w_j(t) = 0$ и оно превращается в уравнение

$$Y_j(t) = r_j(t)K_j(t).$$

Предположим, что для производства потребительских и инвестиционных товаров требуется отечественный капитал и все промежуточные товары выпускаются за рубежом и приобретаются на свободном рынке международной торговли. В частности, производственная функция потребительских товаров в стране j имеет следующий вид:

$$C_j(t) = \chi K_j^C(t)^{1-\tau}\left(\int_0^N x_j^C(t, v)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dv\right)^{\frac{\tau\varepsilon}{\varepsilon-1}}. \tag{19.24}$$

Необходимо отметить несколько свойств функции (19.24). Во-первых, переменная K_j^C, которая обозначает отечественный капитал, используемый в секторе производства потребительских товаров, входит в нее в степени $1 - \tau$. На интуитивном уровне этот множитель обозначает вклад местного капитала в производство потребительских товаров. Он представляет собой неторгуемую компоненту производственного процесса, которая зависит от услуг, предоставляемых неторгуемыми товарами посредством местного капитала. Так как мы отвергаем возможность международной торговли финансовыми активами, местный капитал должен использоваться в производстве таких неторгуемых услуг, и если страна обладает относительно малым запасом капитала, то относительная цена капитала в ней будет высока и в производстве потребительских товаров (и инвестиционных товаров, см. подпараграф 19.4.3) будет использоваться его меньшее количество. Во-вторых, множитель в скобках представляет собой множество промежуточных товаров, покупаемых на мировом рынке. В частности переменная $x_j^C(t, v)$ обозначает количество промежуточного товара v, приобретенного и использованного в производстве потребительских товаров в стране j в момент времени t. Этот интеграл обозначает, что промежуточные товары агрегируются с помощью функции ПЭЗ с эластичностью замещения, равной ε. Значение эластичности замещения определяет структура производства потребительских товаров. Мы предположим неравенство $\varepsilon > 1$ которое исключает возможность противоречащего эмпирическим фактам и интуиции «разоряющего экономического роста» (см. упражнение 19.25). Использование функции

ПЭЗ, уже знакомого читателю, позволяет получить математически несложную структуру модели. В интеграле явно используется тот факт, что в экономике существует континуум промежуточных товаров меры N (заданных уравнением (19.22)). Заметим, что функция ПЭЗ возводится в степень τ, что гарантирует, что производственная функция потребительских товаров обладает свойством постоянной отдачи от масштаба. Параметр τ задает эластичность производственной функции потребительских товаров по торгуемым промежуточным товарам и определяет долю объема международной торговли в ВВП страны (см. упражнение 19.16). Наконец, константа введена в уравнение (19.24) для нормализации (см. упражнение 19.14).

Производственная функция инвестиционных товаров имеет следующий вид:

$$I_j(t) = \zeta_j^{-1} \chi K_j^I(t)^{1-\tau} \left(\int_0^N x_j^I(t, v)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dv \right)^{\frac{\tau\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \tag{19.25}$$

который совпадает с видом производственной функции потребительских товаров с единственным отличием в множителе ζ_j^{-1}. Использование этого множителя позволяет ввести межстрановые различия в производительности в производстве инвестиционных товаров, обусловленные различиями в технологии или экономической политике. Предположение о том, что эти различия возникают в секторе производства инвестиционных товаров, а не в секторе производства потребительских товаров, согласуется с представленными выше наблюдениями об относительных ценах инвестиционных товаров, говорящими о том, что в бедных странах инвестиционные товары имеют более высокую относительную цену. В терминах производственной функции, описанной выше, мы можем мыслить о большом значении параметра ζ_j как о соответствующем высокому уровню искажений в экономике, в связи с тем что, как мы убедимся далее, рост параметра ζ_j ведет к сокращению выпуска и увеличению относительной цены инвестиционных товаров. В полной версии модели с капиталом и трудом относительная цена инвестиционных товаров является эндогенной переменной и определяется технологией и нормами дисконтирования.

Условие равновесия спроса и предложения на рынке капитала естественным образом требует выполнения неравенства

$$K_j^C(t) + K_j^I(t) + K_j^{\mu}(t) \le K_j(t), \tag{19.26}$$

где переменная $K_j^{\mu}(t)$ обозначает капитал, используемый в производстве промежуточных товаров, а переменная $K_j(t)$ — общий запас капитала в стране j в момент времени t.

Нетрудно понять, почему мы называем эту модель *AK* версией: в производстве потребительских и инвестиционных товаров используется капитал и промежуточные товары, которые производятся непосредственно с помощью капитала. Поэтому увеличение мирового запаса капитала в два раза ведет к удвоению выпуска всех промежуточных товаров, а также потребительских и инвестиционных товаров.

Мы можем вести анализ модели с помощью производственных функций (19.24) и (19.25). Однако, как и во многих других моделях международной торговли, он значительно упрощается переходом к *функциям единичных издержек*, которые описывают издержки производства единицы потребительского и инвестиционного товаров в терминах единицы измерения (которой мы положим идеальный индекс цен промежуточных товаров, см. уравнение (19.32)). В упражнении 19.14 показано, что производственные функции (19.24) и (19.25) эквивалентны следующим функциям единичных издержек производства потребительских и инвестиционных товаров:

$$B_j^C\left(r_j(t),\ [p(t,v)]_{v\in[0,N]}\right)=r_j(t)^{1-\tau}\left(\int_0^N p(t,v)^{1-\varepsilon}dv\right)^{\frac{\tau}{1-\varepsilon}}, \tag{19.27}$$

$$B_j^I\left(r_j(t),\ [p(t,v)]_{v\in[0,N]}\right)=\zeta_j r_j(t)^{1-\tau}\left(\int_0^N p(t,v)^{1-\varepsilon}dv\right)^{\frac{\tau}{1-\varepsilon}}, \tag{19.28}$$

где переменная $p(t, v)$ обозначает цену промежуточного товара v в момент времени t, и значение константы χ в производственных функциях (19.24) и (19.25) выбрано соответствующим образом (см. упражнение 19.14). Заметим, что в этих ценах отсутствует страновой индекс j, так как торговля ими ведется на свободном рынке, и все страны приобретают их по единой цене. Использование функций единичных издержек упрощает дальнейший анализ.

Определим *мировое равновесие* как набор траекторий цен, запаса капитала и уровня потребления во всех странах, такой, что спрос и предложение на всех рынках совпадают и целевая функция репрезентативных домохозяйств во всех странах достигает максимума при заданных траекториях цен. Оно может быть задано следующим образом:

$$\left[\left\{p_j^C(t),\ p_j^I(t),\ r_j(t),\ K_j(t),\ C_j(t)\right\}_{j=1}^J,\ [p(t,v)]_{v\in[0,N]}\right]_{t\geq 0}.$$

Заметим, что несмотря на то, что цены потребительских и инвестиционных товаров и доходность капитала различаются между странами, цены промежуточных товаров одинаковы везде. Определим стационарное равновесие аналогичным образом, в частности потребуем, чтобы все цены в нем были постоянными во времени (как и ранее, понятие «стационарного» равновесия здесь включает в себя сбалансированный рост экономики).

Технология AK и логарифмические предпочтения домохозяйств делают описание мирового равновесия в модели достаточно простым. В частности, из задачи максимизации для репрезентативного домохозяйства (то есть максимизации целевой функции (19.20) при ограничении (19.21) для всех j) вытекает следующее условие первого порядка:

$$\frac{r_j(t)+\dot{p}_j^I(t)}{p_j^I(t)}-\frac{\dot{p}_j^C(t)}{p_j^C(t)}=\rho_j+\frac{\dot{C}_j(t)}{C_j(t)} \tag{19.29}$$

для всех j и t и условие трансверсальности

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho_j t)\frac{p_j^I(t)K_j(t)}{p_j^C(t)C_j(t)}\right]=0 \tag{19.30}$$

для всех j (см. упражнение 19.15).

Уравнение (19.29) представляет собой уравнение Эйлера для потребления. На первый взгляд оно может показаться намного отличающимся от стандартного уравнения Эйлера, однако оно совпадает с уравнением Эйлера в двухсекторной модели из параграфа 11.3 из главы 11 (см. в частности уравнение (11.13)). Причина его отличия от стандартного уравнения Эйлера состоит в том, что в данной модели мы позволяем различия в технологии производства потребительских и инвестиционных товаров. Поэтому домохозяйства, делающие межвременное замещение потребления, должны принимать во внимание изменения относительной цены потребительских и инвестиционных товаров, что объясняет присутствие слагаемого $\frac{\dot{p}_j^I(t)}{p_j^I(t)}-\frac{\dot{p}_j^C(t)}{p_j^C(t)}$ в уравнении (19.29). Следовательно, нетрудно понять, что оно требует, чтобы чистая доходность капитала равнялась сумме нормы дисконтирования и равенства между чистой доходностью капитала и суммой нормы дисконтирования и тангенса угла наклона траектории потребления. Уравнение (19.30) представляет собой условие трансверсальности.

Интегрируя бюджетное ограничение и используя уравнение Эйлера и условие трансверсальности, получаем следующий простой вид функции потребления:

$$p_j^C(t)C_j(t)=\rho_j p_j^I(t)K_j(t). \tag{19.31}$$

Ее можно проинтерпретировать таким образом, что домохозяйства в каждый момент времени расходуют на потребление долю ρ_j своего совокупного богатства (напомним, что в этой простой версии модели отсутствует трудовой доход, и богатство домохозяйства в текущих ценах составляет $p_j^I(t)K_j(t)$).

Вышеприведенный анализ позволяет описать цены промежуточных товаров и динамику потребления и запаса капитала в каждой стране. Далее определим цены потребительских и инвестиционных товаров и относительные цены промежуточных товаров в мировой экономике. Вначале определим единицу измерения в мировой экономике как идеальный индекс цен корзины всех торгуемых промежуточных товаров. Так как промежуточные товары используются с помощью технологии ПЭЗ, такой идеальный индекс цен имеет следующий простой вид:

$$1=\left(\int_0^N p(t,\,v)^{1-\varepsilon}dv\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}=\sum_{j=1}^J \mu_j p_j(t)^{1-\varepsilon}. \tag{19.32}$$

В первом равенстве здесь определяется идеальный индекс цен, а во втором используется наблюдение о том, что страна j производит μ_j промежуточных товаров и цена каждого из них задается уравнением (19.23) как $p_j(t) = r_j(t)$.

Такой выбор единицы измерения ведет к еще одному упрощению модели. Из предположения о том, что все страны являются малыми экономиками, следует, что каждая из них экспортирует практически весь свой выпуск промежуточных товаров и импортирует идеальную корзину таких товаров. Поэтому переменная $p_j(t) = r_j(t)$ не только является ценой промежуточного товара, производимого в стране j, но также задает ее *условия торговли*, определенные как отношение цены экспорта страны к цене ее импорта.

Далее, из нормализации цены (19.32) и функций единичных издержек (19.27) и (19.28) следует, что цены потребительских и инвестиционных товаров в стране j в момент времени t задаются следующими уравнениями:

$$p_j^C(t)=r_j(t)^{1-\tau} \text{ и } p_j^I(t)=\zeta_j r_j(t)^{1-\tau}. \tag{19.33}$$

Уравнение (19.33) завершает описание всех цен как функций доходности капитала. Чтобы найти значение доходности капитала, используем условие равенства спроса и предложения на рынке капитала в каждой стране и уравнения торгового баланса для каждой страны. Напомним, что из закона Вальраса следует, что одно из этих уравнений является избыточным. Нам будет удобнее пользоваться уравнением торгового баланса, которое мы запишем в следующем виде:

$$Y_j(t) = \mu_j r_j(t)^{1-\varepsilon} Y(t), \tag{19.34}$$

где переменная $Y(t) \equiv \sum_{j=1}^{J} Y_j(t)$ обозначает совокупный доход в мировой экономике в момент времени t. Чтобы убедиться в том, что из этого уравнения следует сбалансированность внешней торговли страны, заметим, что каждая страна расходует долю τ своего дохода на промежуточные товары и, так как каждая страна является малой экономикой, из этого следует, что импорт составляет долю τ дохода. В то же время остальной мир расходует долю $\tau \mu_j p_j(t)^{1-\varepsilon}$ своего совокупного дохода на промежуточные товары, производимые в стране j (это следует из вида агрегатора ПЭЗ и из того, что относительная цена промежуточного товара страны j равна $p_j(t)$ и она экспортирует μ_j таких товаров). Заметив, что совокупный мировой доход составляет $Y(t)$, а цена промежуточного товара страны j определяется равенством $p_j(t) = r_j(t)$, мы имеем уравнение (19.34). В упражнении 19.16 читателю предоставлена возможность вывести это уравнение из условия равенства спроса и предложения на рынке капитала (19.26) и тем самым проверить закон Вальраса.

Выведенные выше уравнения (19.23), (19.31), (19.33) и (19.34) вместе с ресурсным ограничением (19.21) позволяют полностью описать мировое равновесие.

Начнем с описания состояния мировой экономики, которое может быть представлено распределением запаса капитала по J экономикам (это единственная эндогенная переменная состояния в модели). Динамика этих переменных может быть найдена с помощью объединения уравнений (19.21), (19.31) и (19.33) с одной стороны и уравнений (19.21) и (19.34) — с другой. В частности, для любых j и t закон накопления капитала описывается двумя следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{\dot{K}_j(t)}{K_j(t)} = \frac{r_j(t)^{\tau}}{\zeta_j} - \rho_j, \tag{19.35}$$

$$r_j(t) K_j(t) = \mu_j r_j(t)^{1-\varepsilon} \sum_{j=1}^{J} r_j(t) K_j(t). \tag{19.36}$$

Эти два уравнения полностью описывают мировое равновесие. При заданном распределении капитала по странам в момент времени t $\left\{K_j(t)\right\}_{j=1}^{J}$ уравнения (19.36) задают условия торговли и процентные ставки во всех странах $\left\{r_j(t)\right\}_{j=1}^{J}$. Уравнения (19.35) полностью описывают динамику капитала во всех странах при заданных значениях процентных ставок.

Необходимо отметить простой вид этого закона. Во-первых, уравнение (19.35) описывает динамику капитала в каждой стране как функцию лишь ее собственных параметров, искажений в производстве инвестиционных товаров ζ_j, нормы дисконтирования ρ_j и равновесной арендной стоимости капитала. Во-вторых, уравнения (19.36) задают арендную стоимость капитала в каждой стране как функцию арендных стоимостей капитала в других странах мира.

Из этих двух уравнений непосредственно вытекает следующее важное утверждение.

Утверждение 19.10. *В модели, описанной выше, существует единственное стационарное мировое равновесие, в котором для всех* $j = 1, \ldots, J$ *выполняется равенство*

$$\frac{\dot{K}_j(t)}{K_j(t)} = \frac{\dot{Y}_j(t)}{Y_j(t)} = g^*, \tag{19.37}$$

и значение стационарного темпа роста мировой экономики g^* *является единственным решением уравнения*

$$\sum_{j=1}^{J} \mu_j [\zeta_j(\rho_j + g^*)]^{(1-\varepsilon)/\tau} = 1. \tag{19.38}$$

Арендная стоимость капитала и условия торговли в стране j *в стационарном равновесии задаются уравнением*

$$r_j^* = p_j^* = [\zeta_j(\rho_j + g^*)]^{1/\tau}. \tag{19.39}$$

Это единственное стационарное мировое равновесие является глобально устойчивой седловой точкой.

Доказательство. По определению, цены, а следовательно и арендные стоимости капитала r_j^*, в стационарном мировом равновесии являются постоянными величинами. Таким образом, в любом стационарном равновесии капитал растет с некоторым постоянным темпом в любой стране, то есть $\dot{K}_j(t)/K_j(t) = g_j$. Предположим, что в двух странах j и j' эти темпы роста не совпадают. Тогда, формируя отношение уравнений (19.36) для этих двух стран, приходим к противоречию, откуда следует, что темп роста капитала $\dot{K}_j(t)/K_j(t)$ одинаков во всех странах. Тогда из уравнения (19.34) следует, что все экономики растут с одинаковым темпом g^*. Тогда если темпы роста всех экономик совпадают, то из уравнения (19.35) моментально следует уравнение (19.39). Подставляя его в уравнение (19.36), приходим к уравнению (19.38). Стационарное мировое равновесие единственно, так как все эти уравнения определены единственным образом и левая часть уравнения (19.38) строго убывает по g^*, то есть это уравнение имеет единственное решение.

Чтобы убедиться в глобальной устойчивости равновесия, достаточно заметить, что из уравнения (19.36) следует, что арендная стоимость капитала $r_j(t)$ является убывающей функцией от $K_j(t)$. Поэтому если страна владеет относительно большим запасом капитала, то доходность капитала в ней снижается, что, как следует из уравнения (19.35), ведет к замедлению процесса дальнейшего накопления капитала. Такая динамика гарантирует, что мировая экономика и экономики всех стран сходятся к единственному стационарному мировому равновесию. Упражнение 19.17 посвящено строгому доказательству устойчивости равновесия. ■

В этом утверждении сформулирован очень важный результат модели. Во-первых, несмотря на значительное количество взаимосвязей между экономиками различных стран, в мировой экономике существует единственное глобально устойчивое стационарное равновесие. Во-вторых, это равновесие имеет достаточно простую структуру. В-третьих, и наиболее важно, экономики всех стран растут с единым темпом g^*. Третье свойство может показаться неожиданным, так как каждая страна обладает доступом к AK технологии, и в отсутствие международной торговли (то есть при $\tau = 0$, см. упражнение 19.18) темпы роста экономик различных стран отличаются друг от друга (страны с меньшим значением параметров ζ_j или ρ_j будут иметь более высокий долгосрочный темп роста экономики). Международная торговля в модели действует как мощная сила, объединяющая экономики различных стран, что ведет к выравниванию их темпов роста. Другими словами, международная торговля вместе с эффектом условий торговли приводят к устойчивому мировому распределению дохода на душу населения.

Почему? Ответ на этот вопрос связан с эффектом условий торговли, показанным в уравнении (19.36). Чтобы понять следствия из этого уравнения, рассмотрим частный случай модели, где все страны обладают единым технологическим параметром, то есть $\mu_j = \mu$ для всех j. Предположим, что некоторая страна, допустим, страна j, характеризуется меньшими, чем в остальных странах, значениями параметров ζ_j и ρ_j. Тогда из уравнения (19.35) следует, что эта страна будет накапливать большее количество капитала, чем другие страны. Но из уравнения (19.36) очевидно следует, что такой процесс не может продолжаться бесконечно и страна j, имеющая более высокий, чем среднемировой, уровень дохода, также будет иметь более низкую доходность капитала. Меньшая доходность капитала в конечном счете полностью компенсирует дополнительные стимулы к накоплению капитала в стране j, и темп роста капитала в ней сойдется к темпу роста капитала в мировой экономике.

На интуитивном уровне каждая страна обладает монопольной силой на рынке экспортируемого ею товара: если она наращивает экспорт определенного товара, то цена этого товара снижается, что позволяет потребителям в других странах приобретать большее количество такого товара. Поэтому если накопление капитала в стране идет быстрее, чем в остальном мире, и, следовательно, предложение экспорта из этой страны растет по сравнению с предложением экспорта из других стран, то ее условия торговли ухудшаются. Отрицательный эффект условий торговли ведет к сокращению дохода и, следовательно, к сокращению доходности капитала (см. уравнение (19.23)) и замедлению процесса накопления капитала. Такой механизм приводит к тому, что в стационарном равновесии темпы накопления капитала во всех странах совпадают.

Следовательно, эта модель демонстрирует, каким образом исключительно торговые связи оказываются достаточными для того, чтобы страны, которые в противном случае имели бы различные темпы роста экономик, росли с единым темпом, что приводит к устойчивому мировому распределению уровня дохода на душу населения. Упражнение 19.18 посвящено сравнению равновесия в этой модели с равновесием в модели закрытой экономики, которое позволяет увидеть роль международной торговли наиболее простым способом.

Естественно, из равенства темпа роста экономик не следует, что страны с различными характеристиками будут иметь равные значения дохода на душу населения. Аналогично модели технологических взаимосвязей из предыдущей главы страны с лучшими характеристиками (более высокими значениями параметра μ_j и более низкими значениями параметров ζ_j и ρ_j) будут расти с тем же темпом, что и остальной мир, но будут богаче, чем другие страны. Следующее уравнение, которое описывает мировое распределение доходов, демонстрирует это наблюдение наиболее простым способом. Обозначим относительный уровень дохода в стране j в стационарном равновесии как $y_j^* \equiv Y_j(t)/Y(t)$. Тогда из уравнений (19.34) и (19.39) следует равенство:

$$y_j^* = \mu_j[\zeta_j(\rho_j + g^*)]^{(1-\varepsilon)/\tau}. \qquad (19.40)$$

Это уравнение говорит о том, что страны с более развитой технологией, с меньшим количеством искажений и с меньшей нормой дисконтирования будут относительно более богаты. Из уравнения (19.40) также нетрудно увидеть, что эластичность дохода по ζ_j и ρ_j зависит от эластичности замещения между промежуточными товарами ε и степени открытости экономики международной торговле (которая является функцией от параметра τ, см. упражнение 19.16). Если значение ε высоко, а значение τ относительно мало, то незначительные различия в параметрах ζ_j и ρ_j

могут приводить к значительным различиям в уровне дохода на душу населения в разных странах. Это наблюдение представляет интерес по еще одной причине: в главах 2 и 3 показано, что в модели экономического роста Солоу схожее уравнение связывает мировое распределение уровня дохода на душу населения с различиями в норме сбережений и технологии. В частности напомним, что в мире с агрегированной производственной функцией типа Кобба—Дугласа без различий в запасе человеческого капитала из модели Солоу следует уравнение:

$$y_j^* = A_j \left(\frac{s_j}{g^*} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}, \tag{19.41}$$

где переменная A_j обозначает относительную трудоинтенсивную производительность в стране j, переменная s_j — норму сбережений в ней, g^*, как и ранее — темп роста мировой экономики, а параметр α — показатель степени капитала в производственной функции Кобба—Дугласа (который равен доле дохода капитала в совокупном национальном доходе). Из уравнения (19.40) следует, что воздействие международной торговли на мировую экономику во многом схоже, за следующим исключением: (1) роль трудоинтенсивной технологии в данном случае играют технологические возможности страны, которые определяют набор товаров, в производстве которых она имеет конкурентное преимущество, (2) роль нормы сбережений играют норма дисконтирования ρ_j и параметры экономической политики, определяющие величину искажений в производстве инвестиционных товаров ζ_j, и (3) дисперсия мирового распределения доходов определяется не долей дохода капитала в национальном доходе, а эластичностью замещения между промежуточными товарами и степенью открытости экономики.

19.4.3. Общий вид модели

Модель, представленная в подпараграфе 19.4.2, обладает рядом важных следствий. Наиболее значительное из них состоит в том, что, несмотря на существование возможности эндогенного экономического роста на страновом уровне, мировые цены изменяются таким образом, что мировое распределение доходов остается устойчивым. Следовательно, различия в предпочтениях и технологии приводят к различиям в уровне дохода внутри устойчивого мирового распределения доходов, а не в перманентно отличающиеся темпы экономического роста. Однако читатель может заинтересоваться тем, насколько общим является этот результат. Мы его получили в контексте модели мировой экономики, представляющей собой набор *AK* экономик. Далее мы покажем, что этот результат может быть обобщен в модели с двумя факторами производства: капиталом и трудом. Чтобы сохранить математическую простоту модели (на самом деле уравнения будут почти совпадать с уравнениями из подпараграфа 19.4.2), мы будем использовать производственную структуру модели из статьи [Rebelo 1991], которая описана в параграфе 11.3 в главе 11. В производстве инвестиционных товаров используется лишь капитал, а в производстве потребительских товаров используются оба фактора производства. Заметим, что, несмотря на то что явный вид последующих формул зависит от такой спецификации модели, основные результаты остаются верными и в более общей модели.

Более точно, предположим, что предпочтения, демографическая структура экономики и производственные функции промежуточных и инвестиционных товаров совпадают с их видом в модели из подпараграфа 19.4.2. Основное отличие состоит в производственной функции потребительских товаров, которая приобретает следующий вид:

$$C_j(t) = \chi K_j^C(t)^{(1-\tau)\gamma} L_j(t)^{(1-\tau)(1-\gamma)} \left(\int_0^N x_j^C(t, v)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dv \right)^{\frac{\tau\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

при некотором $\gamma \in (0, 1)$, где переменная $L_j(t)$ обозначает труд, занятый в производстве потребительских товаров в стране j в момент времени t. Так как труд не используется в производстве промежуточных и инвестиционных товаров и общее население каждой экономики нормализовано единицей, мы имеем $L_j(t) = 1$ для всех j. Поэтому в уравнении (19.21) переменная $w_j(t)$ описывает как заработную плату одного работника, так и совокупный трудовой доход во всей экономике. Соответствующая функция единичных издержек имеет следующий вид:

$$B_j^C(t)\left(w_j(t),\ r_j(t),\ [p(t, v)]_{v\in[0,N]}\right) =$$
$$= w_j(t)^{(1-\tau)(1-\gamma)} r_j(t)^{(1-\tau)\gamma} \left(\int_0^N p(t, v)^{1-\varepsilon} dv \right)^{\frac{\tau}{\varepsilon-1}}.$$

Используя нормализацию цены из предыдущей модели, то есть уравнение (19.32), находим, что цены промежуточных товаров продолжают задаваться уравнением (19.23), а цена инвестиционного товара в стране j в момент времени t продолжает задаваться уравнением $p_j^I(t) = \zeta_j r_j(t)^{1-\tau}$. Рассуждая аналогично, приходим к следующему уравнению для цены потребительского товара:

$$p_j^C(t) = w_j(t)^{(1-\tau)(1-\gamma)} r_j(t)^{(1-\tau)\gamma}. \qquad (19.42)$$

Задача максимизации для репрезентативного домохозяйства в стране j остается по существу неизменной с отличием в том, что здесь в ней присутствует поток трудовых доходов, которые получает это домохозяйство. Как и ранее, из задачи максимизации следуют необходимые и достаточные условия (19.29) и (19.30). Объединяя эти два уравнения, находим, что, как и в предыдущей модели, потребительские расходы составляют фиксированную долю совокупного богатства домохозяйства, которое теперь состоит из стоимости капитала и дисконтированной стоимости будущих трудовых доходов (см. упражнение 19.20):

$$p_j^C(t)C_j(t)=\rho_j\left(p_j^I(t)K_j(t)+\int_t^{\infty}\exp\left(-\int_t^z\frac{r_j(s)+\dot{p}_j^I(s)}{p_j^I(s)}ds\right)w(z)dz\right). \quad (19.43)$$

Нетрудно убедиться, что из уравнения (19.34) следует необходимое уравнение торгового баланса для каждой страны.

Последним условием, которое необходимо наложить, является условие равенства спроса и предложения на рынке труда. Напомним, что спрос на труд формируется только в секторе производства потребительских товаров и определяется из вида функции Кобба—Дугласа как отношение доли $(1-\tau)(1-\gamma)$ потребительских расходов $p_j^C(t)C_j(t)$ и заработной платы $w_j(t)$. Поэтому условие равенства спроса и предложения для страны j в момент времени t имеет следующий вид:

$$1=(1-\tau)(1-\gamma)\frac{p_j^C(t)C_j(t)}{w_j(t)}. \quad (19.44)$$

Так как из уравнения (19.44) следует, что трудовой доход $w_j(t)$ всегда пропорционален потребительским расходам $p_j^C(t)C_j(t)$, мы можем упростить оптимальное правило потребления (19.43) следующим образом:

$$p_j^C(t)C_j(t)=\frac{\rho_j}{1-(1-\gamma)(1-\tau)}p_j^I(t)K_j(t). \quad (19.45)$$

Как и ранее, домохозяйства расходуют на потребление постоянную долю стоимости своего капитала, однако теперь эта доля зависит не только от их нормы дисконтирования ρ_j, но и от технологических параметров τ и γ. В свете этого наблюдения следующие два утверждения описывают мировое равновесие в модели.

Утверждение 19.11. *В общей модели с трудом мировое равновесие описывается уравнением* (19.35) *для всех j и t, а также двумя следующими дополнительными уравнениями:*

$$r_j(t)K_j(t)+w_j(t)=\mu_j r_j(t)^{1-\varepsilon}\sum_{j=1}^{J}[r_j(t)K_j(t)+w_j(t)], \qquad (19.46)$$

$$\frac{w_j(t)}{r_j(t)K_j(t)+w_j(t)}=\frac{(1-\gamma)(1-\tau)\rho_j}{[\gamma+(1-\gamma)\tau]\zeta_j^{-1}r_j(t)+(1-\gamma)(1-\tau)\rho_j}. \qquad (19.47)$$

Доказательство. См. упражнение19.21. ■

Вывод этого утверждения и его интуитивное объяснение следуют из анализа в подпараграфе 19.4.2. При заданном мировом распределении запаса капитала уравнения (19.46) и (19.47) определяют мировое распределение арендной стоимости капитала и заработной платы, а уравнение (19.35) при заданном распределении арендной стоимости капитала определяет дальнейшую динамику распределения капитала в мировой экономике.

В следующем утверждении показано, что структура мирового равновесия по существу не отличается от его структуры в модели из подпараграфа 19.4.2.

Утверждение 19.12. *В общей модели с трудом существует единственное стационарное мировое равновесие. В этом равновесии капитал и выпуск в каждой стране растут с темпом g^* из уравнения* (19.37) *и стационарный темп роста мировой экономики g^* является единственным решением уравнения* (19.38). *Это единственное стационарное мировое равновесие является глобально устойчивым.*

Доказательство. См. упражнение 19.22. ■

Из этого утверждения следует, что вывод об устойчивости мирового распределения уровня дохода на душу населения продолжает иметь место и в более общей модели. Более того, уравнение (19.40) продолжает задавать распределение доходов в стационарном мировом равновесии.

Однако необходимо отметить, что эта более общая модель не просто повторяет результаты простой модели *AK*. Один важный вывод из нее связан с мировым распределением относительной цены инвестиционных и потребительских товаров. Как показано выше, эмпирические свидетельства говорят о том, что относительная цена инвестиционных товаров в бедных странах превышает ее значение в богатых странах. Многие модели объясняют это эмпирическое наблюдение несовершенствами и искажениями на рынке капитала в развивающихся странах. Но чтобы найти удовлетворительное объяснение причин межстрановых различий в относительной цене инвестиционных товаров, нам необходима модель международной торговли с различными производственными функциями в потребительском и инвестиционном секторах. Данная модель, которая включает в себя эти элементы, действительно генерирует такую структуру относительных цен. Из уравнений, описывающих равновесие, следует, что

$$\frac{p_i^I(t)}{p_i^C(t)} = \zeta_j \left(\frac{r_j(t)}{w_j(t)}\right)^{(1-\gamma)(1-\tau)},$$

то есть относительная цена инвестиционных товаров будет более высокой в странах высоким значением параметра ζ_j и низкой заработной платой. Первая часть этого наблюдения, говорящая о том, что страны с высоким значением параметра ζ_j (значительными искажениями в секторе производства инвестиционных товаров) имеют более высокую относительную цену инвестиционных товаров, выглядит естественно и согласуется с большинством источников. Однако из уравнения (19.47) следует, что страны с худшей технологией (низким μ_j) и более высокой нормой дисконтирования (высоким ρ_j) также будут иметь меньшую заработную плату и поэтому более высокую относительную цену инвестиционных товаров. Следовательно, эта модель задает мировое распределение относительной цены инвестиционных и потребительских товаров, согласующееся с его структурой, которую мы наблюдаем в эмпирических данных. Из нее следует, что относительная цена инвестиционных товаров может различаться между странами по причинам, отличным от искажений в инвестиционном секторе экономики, и поэтому использование наблюдаемой дисперсии относительных цен в контексте односекторной модели и/или модели закрытой экономики, что делалось в ранней литературе, требует значительной предосторожности.

В завершение этого параграфа вернемся к сравнению экономических механизмов, представленных в этой модели, с механизмами в модели из параграфа 19.3. Напомним, что в параграфе 19.3 каждая страна обладает возможностью накапливать капитал без снижения его предельной производительности. С другой стороны, в модели из этого параграфа подчеркивается, каким образом накопление капитала страной ведет к увеличению мирового предложения товаров, на производстве которых она специализируется, которое, в свою очередь, приводит к значительному эффекту условий торговли. Этот эффект условий торговли ведет к тому, что экономический рост переносится из быстрорастущих экономик в остальные страны и является причиной устойчивости долгосрочного мирового распределения доходов. Возможно ли согласовать подходы из двух последних параграфов? Мы считаем, что ответ на этот вопрос утвердительный. Один из способов такого согласования состоит в применении этих подходов к различным этапам экономического развития и к различным типам товаров. Например, представим себе мировую экономику, в которой некоторые товары стандартизованы и могут производиться в любой стране. Тогда эффект условий торговли не действует в стране, производящей такие товары, и она получает возможность накапливать капитал без сокращения его предельной производительности. Как показано в параграфе 19.3, такая динамика может быть хорошей аппроксимацией развития «восточноазиатских тигров» в 1970–1980-х гг., когда они специализировались в производстве не самых высокотехнологичных товаров (см., например, работу [Volgel 2006]). Однако по мере того как такая страна становится богаче, она начинает специализироваться в производстве более дифференцированных товаров и в ней начинает действовать эффект условий торговли. Следовательно, если страна находится на стадии развития, в которой она производит большое количество дифференцированных товаров, дальнейшее накопление капитала ведет к убыванию отдачи от него в результате действия эффекта условий торговли. Построение модели, включающей в себя оба описанных эффекта, является одной из целей дальнейших исследований в этой области.

19.5. Международная торговля, распространение технологий и цикл производства

В предыдущей главе мы показали важность динамики распространения технологий в контексте понимания межстрановых различий в уровне дохода на душу населения. Однако анализ в ней ведется в рамках модели мировой экономики, состоящей из набора закрытых экономик. Международная торговля расширяет процесс распространения технологий, так как она ведет к возможности возникновения международных циклов производства, когда распространение технологий сопровождается переносом производства определенных товаров, ранее выпускаемых только в наиболее развитых странах, в менее развитые страны. Идея международного цикла производства впервые была предложена в работе [Vernon 1966]. В этом параграфе мы опишем модель, представленную в статье [Krugman 1979]. Основное преимущество этой статьи в том, что благодаря своей простоте она применима в различных областях макроэкономики, теории международной торговли и экономического развития.

19.5.1. Международное разделение труда

Рассмотрим мировую экономику, состоящую из двух множеств стран, северных и южных. Количество стран в каждом из регионов не будет иметь значения в анализе в этом параграфе. Предположим свободную международную торговлю с нулевыми издержками перемещения товаров.

Предпочтения всех домохозяйств во всех странах описываются функцией ПЭЗ с предпочтениями к разнообразию и определены на корзине потребительских товаров (индексе потребления). Индекс потребления для страны $j \in \{n, s\}$ в момент времени t имеет следующий вид:

$$C_j(t) = \left(\int_0^{N(t)} c_j(t, \nu)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dz \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \tag{19.48}$$

где переменная $c_j(t, \nu)$ обозначает потребление товара z в стране $j \in \{n, s\}$ в момент времени t, переменная $N(t)$ — общее количество свободно торгуемых товаров в мировой экономике в момент времени t, которое определяется эндогенно, а параметр $\varepsilon > 1$ — эластичность замещения между этими товарами. Очевидно, что в отсутствие свободной международной торговли, множество товаров, которые потребляет домохозяйство в стране j, будет отличаться от $N(t)$ и составлять лишь его подмножество, состоящее из товаров, доступом к производству которых оно обладает.

Экономика каждой страны допускает существование репрезентативного домохозяйства с динамическими предпочтениями, определенными на потоке потребления $C_j(t)$. Явный вид предпочтений не имеет значения для дальнейшего анализа, однако для конкретики читатель может предположить, что они имеют вид предпочтений CRRA (19.1).

Основное предположение модели состоит в том, что товары в мировой экономике разделены на две категории: новые товары, которые разрабатываются и могут производиться только в странах Севера, и старые товары, которые были разработаны в прошлом и их производственная технология может быть скопирована странами Юга, то есть они могут производиться в обоих регионах.

Производственная технология выглядит просто: один работник производит единицу любого товара, к производству которого страна имеет доступ. Работники в странах Севера имеют доступ к производству всех товаров, работники в странах Юга — лишь к производству старых товаров. Важно подчеркнуть, что у работников северных стран нет преимуществ в производстве старых товаров. Их единственное преимущество (и единственное различие в технологии) в том, что они имеют доступ к производству большего количества товаров.

Допустим, что совокупное предложение труда абсолютно неэластично в обоих регионах, постоянно во времени и составляет L^n на Севере и L^s на Юге. Определим равновесие стандартным образом как набор траекторий цен всех товаров и распределения труда в производстве товаров.

Из такой формулировки модели следует существование двух типов равновесия в мировой экономике:

1. *Выравненное равновесие:* в таком равновесии количество новых товаров невелико, и производство старых товаров происходит как в странах Севера, так и в странах Юга. Мы увидим, что в таком равновесии

цены старых и новых товаров совпадают и доход на душу населения в южных странах равен доходу в северных странах. Поэтому мы будем называть такое равновесие выравненным равновесием.

2. *Равновесие со специализацией:* в таком равновесии страны Юга специализируются в производстве старых товаров, а страны Севера специализируются в производстве новых товаров.

Мы начнем анализ международного разделения труда в предположении о том, что множества новых и старых товаров $N^n(t)$ и $N^o(t)$ заданы. Определим общее количество товаров в мировой экономике как $N(t) = N^n(t) + N^o(t)$. Так как страны Севера обладают доступом к производству всех товаров, а страны Юга — только к производству старых товаров, мы можем интерпретировать отношение $N^n(t)/N^o(t)$ (или $N(t)/N^o(t)$) как меру технологического отставания Юга от Севера.

Начнем анализ с предположения о том, что мировая экономика находится в равновесии со специализацией. Очевидно, что цены всех новых товаров, как и цены всех старых товаров, равны между собой. Обозначим две эти цены как $p^n(t)$ и $p^o(t)$. Также обозначим заработные платы в странах Севера и в странах Юга как $w^n(t)$ и $w^s(t)$ соответственно. Так как для производства единицы любого товара требуется единица труда и все рынки являются конкурентными, в равновесии со специализацией имеем равенства:

$$p^n(t) = w^n(t), p^o(t) = w^s(t). \tag{19.49}$$

Заметим, что должно выполняться неравенство $w^n(t) \geq w^s(t)$, в противном случае северные работники предпочли бы производить старые товары. Поэтому равновесие со специализацией возможно лишь в том случае, когда все старые товары производятся в странах Юга, и равновесная заработная плата в этих странах ниже ее значения в странах Севера. Условия существования такого равновесия найти нетрудно. Из вида предпочтений ПЭЗ (19.48) следует, что максимизация полезности достигается в случае, когда отношение потребления новых и старых товаров удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{c^n(t)}{c^o(t)} = \left(\frac{p^n(t)}{p^o(t)}\right)^{-\varepsilon}. \tag{19.50}$$

В равновесии со специализацией весь труд в южных странах занят в производстве старых товаров, а весь труд в северных странах занят в производстве новых товаров. Тогда имеем следующие равенства:

$$c^n(t) = \frac{L^n}{N^n(t)} \text{ и } c^o(t) = \frac{L^s}{N^s(t)}. \tag{19.51}$$

Объединяя уравнения (19.49), (19.50) и (19.51), находим следующее простое соотношение между отношением заработных плат и отношениями предложения труда и технологий в двух регионах:

$$\frac{w^n(t)}{w^s(t)} \equiv \omega(t) = \left(\frac{N^n(t)L^s}{N^o(t)L^n}\right)^{1/\varepsilon}. \tag{19.52}$$

Заметим, что правая часть уравнения (19.52) содержит предопределенные (или постоянные) в момент времени t величины. Поэтому они задают единственное значение отношения заработных плат в северных и южных странах. Равновесие со специализацией существует, только если это отношение больше или равно единице. Если его значение меньше единицы, то равновесия со специализацией не существует, единственным возможным равновесием становится выравненное равновесие. В таком равновесии заработные платы в странах Севера и Юга равны между собой, и некоторые старые товары производятся в северных странах. В частности допустим, что значение переменной $\omega(t)$, определенной в уравнении (19.52), строго меньше единицы. Тогда в модели существует единственное равновесие, принимающее вид выравненного равновесия, в котором цены и потребление всех старых и новых товаров равны между собой. Следовательно, имеют место следующие равенства:

$$c^n(t) = \frac{\phi L^n}{N^n(t)} \text{ и } c^o(t) = \frac{L^s + (1-\phi)L^n}{N^o(t)},$$

где значение $\phi \in (0, 1)$ выбрано таким образом, что $c^n(t) = c^o(t)$. Такое $\phi \in (0, 1)$ существует, так как из неравенства $\omega(t) < 1$ следует, что при $\phi = 1$ $c^n(t) > c^o(t)$.

Описание равновесия представлено на рис. 19.1. На нем показан график убывающей зависимости между относительным предложением труда на Севере L^n/L^s и отношением заработных плат в регионах $\omega \equiv w^n/w^s$. На нем также показано, что если $L^n/L^s = N^n(t)/N^o(t)$, то этот график становится горизонтальной линией $w^n/w^s = 1$, так как в этом случает относительное предложение труда на Севере оказывается достаточно велико для существования выравненного равновесия.

Интересным следствием из такого равновесия является наблюдение о том, что даже если страны Юга отстают от стран Севера в технологическом развитии, то доходы в обоих регионах могут быть равны. Разрыв в доходах между регионами будет наблюдаться только если технологический разрыв между ними достаточно велик или если предложение труда в южных странах достаточно велико. Последнее наблюдение представляет особенный интерес в контексте современной глобализации заработных плат, которая повлекла включение Индии и Китая в мировую эконо-

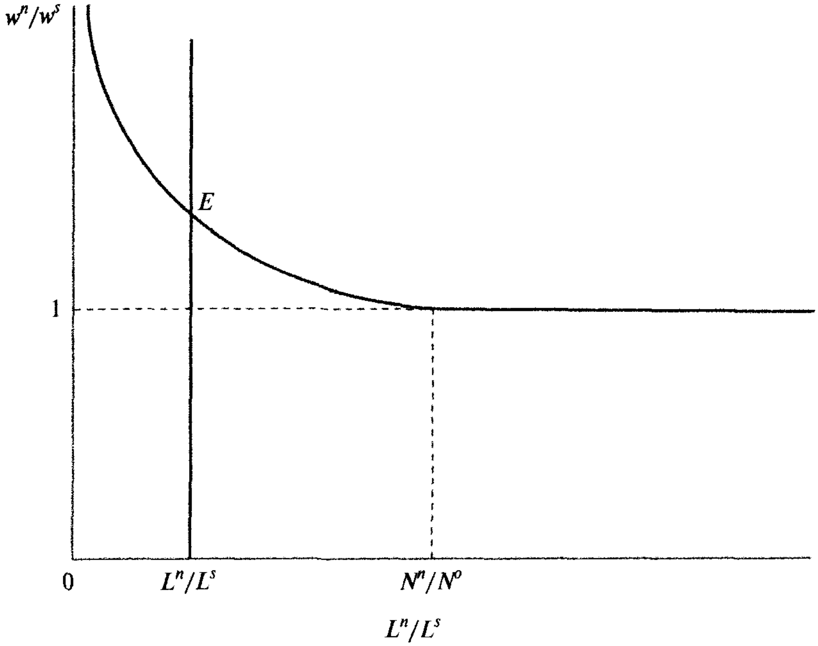

Рис. 19.1. Определение отношения заработных плат в странах Севера и Юга в модели международного цикла производства

мику как потенциальных производителей старых товаров с низкими издержками производства[4].

Мы можем представить себе, что случай значительного технологического отрыва или большого значения L^s (который приводит к положительной разнице доходов в странах Севера и Юга) является более реалистичным, а вероятность того, что разницы доходов может не существовать, представляет исключительно теоретический интерес и помогает нам понять влияние международного разделения труда на межстрановые различия в уровне дохода на душу населения. Случай равенства доходов в северных и южных странах на первый взгляд может показаться неожиданным, однако на интуитивном уровне оно объясняется просто. Международная торговля ведет к тому, что домохозяйства в странах Юга получают доступ к товарам, технология производства которых недоступна этим странам. Следовательно, даже когда страны Юга отстают в технологическом развитии от северных стран, они могут достигнуть такого же набора потребления и уровня дохода, как и в странах Севера. Из этих рассуждений следует, что международная торговля является мощной

[4] Здесь необходимо отметить, что Индия и Китай в дополнение к старым товарам также экспортируют некоторые высокотехнологичные электронные товары и программное обеспечение и предоставляют европейским и американским компаниям возможность для аутсорсинга производственной деятельности.

силой, ограничивающей величину межстранового неравенства доходов (возникающего, например, из-за технологических различий между странами). Такой результат типичен, однако, что возможно выглядит удивительно, он не всегда верен. Влияние международной торговли на межстрановые различия в уровне дохода более подробно анализируется в упражнении 19.30, в котором показано, что даже в контексте этой модели торговля иногда может вести к увеличению разрыва в доходах между богатыми и бедными странами.

19.5.2. Циклы производства и трансферты технологий

В описании равновесия в подпараграфе 19.5.1 мы предполагали, что количество новых и старых товаров задано. Эта модель представляет дополнительный интерес, так как в ней относительно нетрудно сделать эти переменные эндогенными величинами и, таким образом, обобщить межстрановую динамику циклов производства. Мы последуем работе [Krugman 1979], в которой количество новых и старых товаров в мировой экономике создается эндогенными величинами в рамках модели с экзогенным технологическим прогрессом. В упражнении 19.29 рассмотрен вариант модели с эндогенным созданием новых товаров.

В частности допустим, что динамика создания новых товаров в странах Севера описывается следующим простым дифференциальным уравнением:

$$\dot{N}(t) = \eta N(t)$$

с некоторым начальным условием $N(0) > 0$ и параметром инноваций $\eta > 0$. Товары, созданные на Севере, могут имитироваться странами Юга. Как и в модели распространения технологий из предыдущей главы, допустим, что этот процесс протекает медленно и его динамика описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{N}^o(t) = \iota N^n(t),$$

где константа ι обозначает параметр имитации. Это дифференциальное уравнение схоже с уравнением распространения технологий из предыдущей главы и описывает мысль о том, что южные страны могут копировать лишь тот набор товаров, которые не были скопированы ранее (общее количество которых в момент времени t составляет $N^n(t)$). Объединяя эти уравнения с равенством $N(t) = N^n(t) + N^o(t)$, находим единственное глобально устойчивое значение отношения количества новых и старых товаров:

$$\frac{N^n(t)}{N^o(t)} = \frac{\eta}{\iota}. \tag{19.53}$$

Это уравнение интуитивно: отношение количества новых и старых товаров велико, если скорость инноваций на Севере η велика по сравнению с темпом осуществления имитаций на Юге ι. Объединяя уравнения (19.53) и (19.52), находим следующее уравнение для равновесного отношения заработных плат в странах Севера и Юга:

$$\frac{w^n(t)}{w^s(t)} = \max\left\{\left(\frac{\eta L^s}{\iota L^n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}, 1\right\}. \tag{19.54}$$

Если значение максимума в этом выражении равно единице, то мировая экономика находится в выравненном равновесии. В противном случае в ней достигается равновесие со специализацией. Так как отношение $w^n(t)/w^s(t)$ всегда соответствует отношению доходов в северных и южных странах, из этого уравнения также следует, что высокий темп осуществления инноваций на Севере делает южные страны относительно бедными (однако не бедными в абсолютном выражении), в то время как высокий темп осуществления имитаций на Юге делает эти страны относительно более богатыми, а страны Севера — относительно более бедными (см. упражнение 19.28). В свете выводов из предыдущей главы эти результаты не являются неожиданными.

Важным приложением модели цикла производства являются ее следствия для международной защиты права интеллектуальной собственности (ПИС). Мы можем рассматривать темп осуществления имитаций ι как величину, обратную к мере степени международной защиты ПИС. Тогда, как показано в упражнении 19.28, в этой базовой модели улучшение международной защиты ПИС всегда ведет к увеличению разрыва в доходах между странами Севера и Юга. Интересным наблюдением является то, что, как показано в этом упражнении, такое улучшение не всегда ведет к росту благосостояния в северных странах.

19.6. Международная торговля и эндогенный экономический рост

Влияние международной торговли на экономический рост привлекает большое внимание, как в академической среде, так и среди политиков. Большинство экономистов считают, что международная торговля способствует экономическому росту и что существует большое количество микро- и макроэмпирических свидетельств в пользу этого утверждения. В некоторых статьях (например: [Dollar 1992; Sachs, Warner 1995]) также демонстрируется положительная корреляция между степенью открытости экономики международной торговли и ее темпом роста. Несмотря на то что из-за типичных трудностей нахождения причинно-следственных связей в регрессиях роста такие работы не выглядят полностью убедительными (см. обсуждение в главе 3), в других работах ученые пытались преодолеть эти трудности с помощью метода инструментальных переменных. В широко известной в этом контексте статье [Frankel, Romer 1999] авторы используют различия в торговых возможностях стран (заданных гравитационным уравнением торговли) как источник вариации для оценки влияния международной торговли на долгосрочные различия в уровне доходов. Гравитационное уравнение, которое широко используется в эмпирической литературе по международной торговле, связывает внешнеторговый оборот двух стран с их географическими и экономическими показателями и их комбинациями (например, размеры стран, их ВВП, расстояние между ними). В статье [Frankel, Romer 1999] авторы рассматривают географические элементы таких гравитационных уравнений для построения предсказанных оборотов торговли между двумя странами и используют их как инструмент для фактической меры открытости международной торговле. Используя этот метод, они показали, что страны, более вовлеченные в международную торговлю, имеют больший уровень дохода на душу населения (и, следовательно, более высокий темп экономического роста). Более того, микроэкономические свидетельства из ряда недавних статей: [Bernard et. al. 2003; Bernard, Jensen 2004] и других говорят о том, что фирмы, ориентированные на экспорт своей продукции, обычно более производительны, что отчасти может объясняться «обучением в процессе экспортирования», хотя по меньшей мере некоторая часть этой корреляции связана со смещением при формировании выборки [Melitz 2003]. Аналогичным образом в развивающихся странах фирмы, импортирующие оборудование из более развитых экономик, также оказываются более производительными и либерализация внешней торговли ведет к увеличению производительности, как за счет ее роста на присутствовавших на рынке фирм, так и за счет переноса производства (см, например, работу [Pavcnic 2002]). Несмотря на это, некоторые экономисты скептически относятся к влиянию международной торговли на экономический рост. Критика эмпирических свидетельств положительного влияния международной торговли на экономический рост приведена в работе [Rodriguez, Rodrik 2000]. С теоретической точки зрения в некоторых статьях (см., например: [Matsuyama 1992; Young 1991]) представлены модели, в которых участие в международной торговле ведет к замедлению экономического роста в некоторых странах.

В этом и следующем параграфах мы рассмотрим некоторые наиболее простые модели, связывающие международную торговлю и экономический рост, с целью проанализировать возможное влияние торговли на рост экономики. Мы начнем с модели, демонстрирующей, каким образом открытие рынка международной торговли может привести к изменению скорости эндогенного технологического прогресса. Эта модель основана на работе [Grossman, Helpman 1991b], в которой авторы анализируют большое количество различных взаимосвязей между международной торговлей и эндогенным технологическим прогрессом. Вкратце, модель состоит из двух независимых экономик, которые могут быть аппроксимированы базовой моделью эндогенного технологического прогресса с расширяющимся разнообразием факторов производства из главы 13. Более точно, такая модель идентична модели лабораторного оборудования из параграфа 13.1. Преимуществом этой модели является отсутствие в ней перелива знаний, и поэтому у нас не возникает необходимости вводить предположения о том, как переливы знаний воздействуют на открытость экономик международной торговле[5]. Мы сравним инновационную деятельность и экономический рост в двух экономиках в равновесии без международной торговли и в равновесии со свободной международной торговлей. Очевидно, что на практике более реалистичным выглядит плавный процесс вовлечения в международную торговлю (когда издержки торговли снижаются непрерывно), однако такой мысленный эксперимент по переходу из автаркического равновесия к полной интеграции в мировую торговлю достаточен для того, чтобы увидеть основные каналы воздействия международной торговли на технологический прогресс.

Мы используем анализ из параграфа 13.1 из главы 13 и не будем еще раз повторять все рассуждения здесь. Нам достаточно рассмотреть две страны, которые мы назовем экономиками 1 и 2, с идентичными технологиями, предпочтениями и равным не изменяющимся во времени населением, которое мы нормализуем единицей. Предположим, что предпочтения и технологии совпадают с использованными в модели из параграфа 13.1. Тогда из несколько измененного утверждения 13.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Утверждение 19.13. *Предположим, что выполняются следующие неравенства:*

$$\eta\beta > \rho \text{ и } 2(1-\theta)\eta\beta < \rho. \tag{19.55}$$

Тогда существует единственное автаркическое равновесие, в котором, начиная с любого уровня технологии, темпы технологического

[5] Если вместо модели лабораторного оборудования мы бы рассматривали модель с переливом знаний, в которой две страны производят различные промежуточные товары, нам было бы необходимо предположить, ведет ли (и в какой мере) производство промежуточного товара за рубежом к росту производительности в исследовательском секторе в отечественной экономике до и после открытия международной торговле. В упражнении 19.33 показано, что различные предположения о том, как переливы знаний изменяются после открытия международной торговле, ведут к различным выводам о воздействии торговли на экономический рост.

прогресса и экономического роста в обеих странах совпадают и равны

$$g^A = \frac{1}{\theta}(\eta\beta - \rho). \tag{19.56}$$

Доказательство. См. упражнение 19.31. ■

Далее выясним, что происходит после того, когда страны начинают торговать друг с другом. Точный вид воздействия открытия международной торговле зависит от того, производили ли страны некоторые одинаковые промежуточные товары до открытия рынков (напомним, что в мировой экономике существует континуум промежуточных товаров). Размер статической выгоды от торговли ограничен количеством одинаковых промежуточных товаров, которые они производили. С другой стороны, если две страны производили разные товары, то размер статической выгоды от торговли будет больше. Однако нас больше интересует динамический эффект открытия международной торговле, то есть его воздействие на экономический рост. Снова используя рассуждения из главы 13, имеем следующее утверждение.

Утверждение 19.14. *Предположим, что выполняются условия* (19.55). *Тогда после вступления в международную торговлю темпы технологического прогресса и экономического роста в мировой экономике и экономиках обеих стран равны*

$$g^T = \frac{1}{\theta}(2\eta\beta - \rho) > g^A,$$

где константа g^A обозначает темп роста мировой экономики в автаркическом равновесии, заданный уравнением (19.56).

Доказательство. См. упражнение 19.32. ■

В этом утверждении показано, что вступление в международную торговлю стимулирует технологический прогресс и ведет к увеличению темпа роста мировой экономики. Причина этого проста: международная торговля позволяет производителю каждого промежуточного товара расширить рынок сбыта, что делает изобретение новых товаров более прибыльным. Рост прибыльности, в свою очередь, ведет к росту темпа осуществления инноваций и более быстрому экономическому росту.

Основной эффект, действующий в этой модели, является достаточно устойчивым. В работе [Grossman, Helpman 1991b] рассмотрен ряд расширений этой модели и несколько более богатых моделей международной торговли (например, модель с несколькими факторами производства). Экономический механизм, который ведет к воздействию международной торговли на инновационную деятельность (некоторый вариант эффекта размера рынка), также достаточно устойчив. Несмотря на это, необходимо сделать несколько предостережений. Во-первых, как показано в упражнении 19.33, если сектор НИОКР конкурирует с производственным сектором, то в экономике возникает мощный компенсирующий эффект, так как торговля также ведет к росту спроса на рабочую силу в производственном секторе. В этом случае утверждение этого параграфа о том, что международная торговля стимулирует ускорение технологического прогресса, справедлив в общем случае, однако в некоторых версиях базовой модели компенсирующий эффект полностью вытесняет эффект торговли. В упражнении 19.33 построен пример модели с полным вытеснением, который является полезным предостережением. Во-вторых, как показано в упражнении 19.34, если мы отвлечемся от эффекта масштаба и рассмотрим модель полуэндогенного роста (например, модель, представленную в параграфе 13.3 в главе 13), то вступление в международную торговлю ведет лишь к временному, но не долгосрочному увеличению инноваций в экономике.

19.7. Обучение в процессе производства, международная торговля и экономический рост

В предыдущем параграфе мы показали, каким образом международная торговля может привести к увеличению темпа экономического роста всех экономик мира за счет стимулирования более быстрого технологического прогресса. В дополнение к этому эффекту воздействия международной торговли на экономический рост, действующему через технологический прогресс, необходимо отметить детально описанные в литературе статические выгоды от международной торговли. Они связаны с улучшением распределения ресурсов в мировой экономике и также могут за счет этого стимулировать ее рост. Несмотря на это, как мы отметили в параграфе 19.6, многие аналитики и некоторые экономисты остаются скептичными в вопросе положительного влияния международной торговли на экономический рост. Популярное возражение, часто используемое для оправдания защиты молодых отраслей и других протекционистких мер торговой политики, состоит в том, что статические выгоды от торговли компенсируются динамическими потерями, так как международная торговля ведет к тому, что некоторые страны специализируются в отраслях с относительно низким потенциалом роста. В этом параграфе мы в общих чертах опишем модель, обладающую таким свойством. В ряде статей, среди которых работы: [Young 1991; Matsuyama 1992; Galor, Mountford 2008], представлены более богатые модели, ведущие к схожим выводам. Другие аргументы в пользу отрицательного воздействия международной торговли на экономический рост основываются на межстрановых институциональных различиях. Мы кратко остановимся на них в завершении этой главы.

Основной целью этого параграфа является построение простой модели, демонстрирующей возможные отрицательные воздействия международной торговли. Как и в моделях в работах [Matsuyama 1992; Young 1991], основной причиной возможных динамических потерь от торговли в ней является присутствие в некоторых секторах экономики экстерналии от обучения на собственном опыте (или обучения в процессе производства).

Рассмотрим мировую экономику, состоящую из двух множеств стран, стран Севера и стран Юга, и предположим, что каждый регион состоит из множества идентичных экономик. Проведем мысленный эксперимент перехода от автаркического равновесия к свободной международной торговле между двумя регионами. Для упрощения дальнейших выкладок и концентрации на основных выводах предположим, что все экономики почти полностью одинаковы. В частности рабочая сила в каждой стране постоянна во времени и равна 1. Работники могут быть заняты в производстве любого из двух промежуточных товаров с производственной функцией следующего вида:

$$Y_j^1(t)=A_j(t)L_j^1(t) \text{ и } Y_j^2(t)=L_j^2(t)$$

и условием равенства спроса и предложения на рынке труда:

$$L_j^1(t)+L_j^2(t)\le 1,$$

где индекс $j\in\{n, s\}$ обозначает северную или южную страну. Более того, предположим, что количества северных и южных стран равны между собой и обозначим общее количество стран в мировой экономике как $2J$.

Производственная функция конечного товара является ПЭЗ агрегатом двух промежуточных товаров. Еще раз разделяя производство промежуточных товаров и их использование в секторе конечного товара, запишем эту функцию в следующем виде:

$$Y_j(t)=\left[\gamma X_j^1(t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}+(1-\gamma)X_j^2(t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

где параметр ε обозначает эластичность замещения между двумя промежуточными товарами, и предположим неравенство $\varepsilon > 1$. Случай $\varepsilon = 1$ (когда производственная функция становится функцией Кобба—Дугласа) также представляет интерес, и мы рассмотрим его отдельно. Для упрощения дальнейших выкладок положим $\gamma = 1/2$.

Мы будем моделировать обучение в процессе производства следующим образом:

$$\frac{\dot{A}_j(t)}{A_j(t)}=\eta L_j^1(t), \tag{19.57}$$

то есть увеличение занятости в секторе 1 ведет к ускорению развития технологии в этом секторе. Предположим, что в секторе 2 обучения в процессе производства не происходит. Таким образом, мы можем интерпретировать сектор 1 как промышленный сектор или некоторый высокотехнологичный сектор экономики, а сектор 2 — как сельское хозяйство или относительно низкотехнологичный сектор (отметим, однако, что существование в промышленности большего количества возможностей обучения в процессе производства, чем в сельском хозяйстве, является спорным вопросом). Как и в модели эндогенного экономического роста Ромера ([Romer 1986a], см. главу 11), каждый производитель не принимает во внимание создаваемую им своими производственными решениями в настоящем положительную экстерналию для будущей производительности в секторе 1.

Единственным различием между странами Севера и Юга является незначительное конкурентное преимущество северных стран в секторе 1. В частности, предположим, что в начальный момент времени технологии заданы следующим образом:

$$A_n(0) = 1 \text{ и } A_s(0) = 1 - \delta, \tag{19.58}$$

где $\delta > 0$ является малым положительным числом.

В такой формулировке модели, как автаркическое равновесие, так и равновесие с международной торговлей, допускают достаточно простое описание. Основное условие равновесия в обоих случаях состоит в равенстве предельных продуктов труда (заработных плат) в обоих секторах. В противном случае производство ведется только в одном секторе. Начнем анализ с закрытой экономики и предположим, что в момент времени t производство ведется в обоих секторах экономики. Тогда предельные продукты труда в них совпадают, поэтому имеем равенство:

$$p_j^1(t)A_j(t) = p_j^2(t), \tag{19.59}$$

где переменные $p_j^1(t)$ и $p_j^2(t)$ обозначают цены двух промежуточных товаров в стране j в момент времени t в единицах конечного товара, а переменная $A_j(t)$ — уровень производительности в секторе 1 в стране j в момент времени t. Заметим, что цены обладают индексом j, так как в закрытых экономиках они могут различаться. Из условия максимизации прибыли производителем конечного товара непосредственно следуют равенства:

$$\frac{p_j^1(t)}{p_j^2(t)} = \left(\frac{X_j^1(t)}{X_j^2(t)}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \left(\frac{A_j(t)L_j^1(t)}{1-L_j^1(t)}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}},$$

где переменная $L_j^1(t)$ обозначает занятость в секторе 1 в стране j в момент времени t, и естественным образом занятость в секторе 2 составляет

$L_j^2(t) = 1 - L_j^1(t)$. Объединяя это уравнение с уравнением (19.59), получаем следующее равенство:

$$L_j^1(t) = \frac{A_j(t)^{\varepsilon-1}}{1 + A_j(t)^{\varepsilon-1}}. \tag{19.60}$$

Тогда динамика производительности в секторе 1 задается уравнением (19.57).

Утверждение 19.15. *Рассмотрим модель, описанную выше, и предположим, что $\varepsilon > 1$ и $\delta \to 0$. Тогда в отсутствие международной торговли распределение труда между секторами для всех j и t задается уравнением* (19.60). *В частности, $L_j^1(t = 0) = 1/2$ и $L_j^1(t)$ монотонно сходится к* 1 *при $t \to \infty$. Темп роста экономики каждой страны сходится к $g^* = \eta$ при $t \to \infty$.*

С другой стороны, если $\varepsilon = 1$, то $L_j^1(t) = 1/2$ для всех j и t и темп роста экономики каждой страны составляет $g^* = \eta/2$.

Доказательство. См. упражнение 19.35. ■

Далее рассмотрим мировую экономику со свободной международной торговлей начиная с момента времени $t = 0$. В таком случае для каждого промежуточного товара существует единственная мировая цена, $p^1(t)$ для товара 1 и $p^2(t)$ для товара 2. Из стандартных рассуждений следует, что эти цены удовлетворяют следующему уравнению:

$$\frac{p^1(t)}{p^2(t)} = \left(\frac{X_n^1(t) + X_s^1(t)}{X_n^2(t) + X_s^2(t)}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \left(\frac{A_n(t)L_n^1(t) + A_s(t)L_s^1(t)}{2 - L_n^1(t) - L_s^1(t)}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}},$$

где индексы n и s обозначают северные и южные страны соответственно.

Нетрудно убедиться, что вследствие небольшого конкурентного преимущества Севера (уравнение (19.58)) предельный продукт северных работников в секторе 1 в момент времени $t = 0$ оказывается выше, и вся рабочая сила в северных странах занята в секторе 1, в то время как вся рабочая сила в южных странах занята в секторе 2. Более того, все мировое производство товара 1 сосредоточено в странах Севера, а все мировое производство товара 2 — в странах Юга. В последующее время производительность северных работников в секторе 1 становится еще выше, а производительность южных работников в этом секторе остается неизменной. Этот результат резюмируется в следующем утверждении.

Утверждение 19.16. *Рассмотрим модель, описанную выше. Тогда при свободной международной торговле распределение труда в равновесии выгля-*

дит следующим образом: $L_n^1(t)=1$ и $L_s^1(t)=0$ для всех t. В таком равновесии выполняются равенства:

$$\frac{\dot{A}_n(t)}{A_n(t)}=\eta \text{ и } \frac{\dot{A}_s(t)}{A_s(t)}=0.$$

В долгосрочной перспективе мировая экономика сходится к темпу роста $g^*=\eta$. Отношение доходов в странах Севера и Юга задается равенством

$$\frac{Y_n(t)}{Y_s(t)}=A_n(t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

для всех t. Следовательно, если $\varepsilon>1$, то страны Севера постепенно становятся все более богатыми по сравнению со странами Юга и $\lim_{t\to\infty} Y_n(t)/Y_s(t)=\infty$. С другой стороны, если $\varepsilon=1$, то отношение доходов в странах Севера и Юга остается постоянным во времени, то есть $Y_n(t)/Y_s(t)=\text{const}$ для всех t.

Доказательство. См. упражнение 19.36. ■

В этом утверждении содержится основной результат о том, каким образом международная торговля может нанести ущерб некоторым странам в случае существования в некоторых отраслях экстерналии от обучения в процессе производства. Южные страны имеют незначительный сравнительный недостаток в секторе 1. При этом в автаркическом равновесии они размещают в этом секторе достаточное количество ресурсов и достигают такого же темпа роста экономики, как и страны Севера. Однако при свободной международной торговле южные страны специализируются в производстве товара 2 (вследствие их незначительного конкурентного недостатка в секторе 1) и оказываются не в состоянии получать выгоду от обучения в процессе производства в секторе 1. В результате этого страны Юга становятся все более бедными по сравнению с северными странами. Таким образом, в этом утверждении описаны аргументы против свободной международной торговли, восходящие к модели из работы [Young 1991] и поддерживаемые сторонниками подхода защиты молодых отраслей.

Однако это утверждение также показывает некоторые недостатки такого подхода. Например, если $\varepsilon=1$ (или достаточно близко к 1), то специализация в секторе 2 не будет наносить ущерб странам Юга. Причина этого тесно связана с эффектом, описанным в параграфе 19.4: увеличение производительности в секторе 1 в странах Севера создает отрицательный эффект условий торговли. Этот эффект действует всегда, но при $\varepsilon=1$ он становится достаточно мощным для предотвращения относительного обеднения южных стран даже в случае, если они специализируются в отрасли с низким потенциалом роста. Другое предостережение приведено в упражнении 19.36: в мировой экономике, описываемой такой моделью, защита молодой отрасли не всегда будет выгодна для южных стран. Даже если страна не участвует в международной торговле в течение времени $T > 0$ с целью защиты молодой отрасли, то долгосрочное равновесие совпадает с равновесием в утверждении 19.16.

Какой вывод мы можем сделать о влиянии международной торговли на экономический рост из результатов этого и предыдущего параграфов? Непосредственный ответ на этот вопрос состоит в том, что сопоставление моделей из этих параграфов показывает, что эффект воздействия торговли на экономический рост является эмпирическим вопросом. Так как в теории существуют модели, демонстрирующие как положительное, так и отрицательное влияние международной торговли на экономический рост, этот спор может быть решен только с помощью эмпирических исследований.

Несмотря на это, теоретические модели остаются полезными. Несколько наблюдений заслуживают особого внимания. Во-первых, воздействие международной торговли на темп эндогенного технологического прогресса может быть ограничено в силу факторов, описанных в окончании параграфа 19.6. Например, значительный эффект возможен только в том случае, когда вступление в международную торговлю не ведет к росту заработных плат в секторе конечного товара, конкурирующем за работников с исследовательским сектором (что происходит, когда исследовательский сектор не конкурирует за работников с сектором конечного товара). Более того, если мы отвлечемся от значительного эффекта масштаба, то вступление в международную торговлю создает лишь временные стимулы для ускорения инноваций, но не изменяет долгосрочного темпа роста экономики. Несмотря на это, выгода от увеличения размера рынка для фирм, вовлеченных в инновационную деятельность, должна в некоторой степени присутствовать в любой модели эндогенного технологического прогресса. Поэтому, принимая во внимание все эти факторы, разумно ожидать, что вступление в международную торговлю будет стимулировать инновации. Намного сложнее ответить на вопрос, будет ли этот эффект соразмерен или даже будет превышать статические выгоды от международной торговли. Вполне может оказаться, что статические выгоды от международной торговли окажутся более важными, чем последующие выгоды от ускорения инновационной деятельности.

С другой стороны необходимо отметить возможные издержки от международной торговли в связи с неверным выбором отрасли для специализации. Такая возможность присутствует в модели из этого параграфа. Несмотря на это, мы считаем, что не стоит придавать большого значения возможному отрицательному влиянию международной торговли на экономический рост вследствие такой «неверной» специализации. Во-первых, мы не обладаем явными эмпирическими свидетельствами того, что международная торговля на практике ведет к «неверной» специализации. Во-вторых, международный обмен информацией, объем которого часто возрастает с вступлением в международную торговлю, ведет к тому, что увеличение производительности в одних странах воздействует на производительность в других странах, которые изначально не специализировались в той же отрасли (например, Южная Корея вначале была импортером автомобилей, а сейчас является их чистым экспортером, ее производительность в автомобильной промышленности возросла вследствие импорта технологий). Наконец, основной результат этого параграфа говорит о том, что эффект условий торговли смягчает отрицательный эффект от специализации.

19.8. Основные выводы

Эта глава преследует три основные цели. Первая состоит в том, чтобы показать недостатки использования моделей закрытой экономики для сравнительного анализа межстрановой и межрегиональной динамики экономического роста. Мы убедились в том, что международная торговля финансовыми активами и товарами изменяет ее характеристики и возможно долгосрочные выводы из неоклассической модели для закрытой экономики. Например, международная торговля капиталом приводит к исчезновению переходной динамики, потому что страны, обладающие недостаточным запасом капитала, в этом случае вместо медленного накопления получают возможность привлечь его на международном рынке. Естественно, на практике существуют ограничения на размер привлекаемых заимствований. Государства являются суверенными субъектами права, и поэтому достаточно просто могут инициировать процедуру собственного банкротства после осуществления значительных заимствований. Поэтому суверенный риск накладывает ограничения на возможность страны использовать международный финансовый рынок для сглаживания потребления или быстрого прироста инвестиций. Однако и в этом случае переток капитала через границы продолжается и сильно влияет на равновесную динамику выпуска и капитала. Здесь необходимо отметить, что имеющиеся эмпирические свидетельства подтверждают парадокс Фельдштейна—Хориоки, который состоит в том, что изменения инвестиций коррелированы с изменениями сбережений. Анализ вопроса о том, почему, несмотря на значительный объем валовых потоков капитала между странами, чистые потоки капитала не играют значительной роли в сглаживании потребления и инвестиций на мировом уровне и какие это имеет последствия для экономического роста, является интересной темой для будущих исследований.

Мы также увидели, что международная торговля товарами ведет к изменению выводов из неоклассической модели экономического роста. Например, в модели экономического роста из параграфа 19.3 международная торговля товарами играет ту же роль, что и международная торговля капиталом и значительно изменяет межстрановую динамику выпуска. Поэтому даже в отсутствие международного кредитования и заимствования выводы из моделей глобального мирового равновесия значительно отличаются от выводов из моделей, описывающих динамику закрытой экономики. Модель рикардианской международной торговли с эффектами условий торговли также демонстрирует возможное значительное влияние международной торговли на экономический рост. Если страны не участвуют в международной торговле, то в этой модели их траектории расходятся, однако эффект условий торговли, возникающий после открытия страны, создает мощную силу, связывающую доходы в мире. Поэтому в случае торговли долгосрочное равновесие характеризуется устойчивым мировым распределением уровня дохода на душу населения, и краткосрочная динамика модели отличается от динамики в моделях закрытой экономики.

Вторая цель этой главы состоит в том, чтобы показать, каким образом структура международной торговли связана с процессом экономического роста. Этому вопросу посвящены параграфы 19.3 и 19.4. В модели экономического роста с торговлей типа Хекшера—Олина показано, каким образом экономический рост ведет к увеличению эффективной эластичности выпуска по капиталу в каждой стране вследствие условного выравнивания цен факторов производства. Эта модель позволяет объяснить, почему некоторые экономики, например «восточноазиатские тигры», смогли в течение длительного периода времени демонстрировать быстрый экономический рост, основанный на накоплении капитала без сокращения его предельной производительности. Однако из нашего анализа также следует, что условное выравнивание цен факторов производства может вести к экстремальным выводам. С другой стороны, в модели из параграфа 19.4 показано, как рикардианская международная торговля, основанная на технологических сравнительных преимуществах, посредством эффекта условий торговли создает новые источники убывающей отдачи от накопления капитала для каждой страны. По мере накопления страной большего количества капитала она начинает экспортировать большее количество товаров, в производстве которых она специализируется. Это ведет к ухудшению ее условий торговли и сокращению доходности капитала в ней. Мы увидели, что этот эффект также ведет к устойчивому мировому распределению уровня дохода на душу населения, когда экономический рост в быстрорастущих экономиках переносится на отстающие и они начинают расти с таким же темпом. Можем ли мы согласовать модели из параграфов 19.3 и 19.4 между собой? Одна из возможностей состоит в том, чтобы представить мир как некоторое объединение моделей из двух этих параграфов. Может случиться так, что некоторые товары являются стандартизованными и могут выпускаться в любой стране мира. Тогда в производстве этих товаров не будет наблюдаться эффект условий торговли. Поэтому если экономика страны растет только за счет производства таких товаров, то она может избежать стандартной убывающей отдачи от накопления капитала посредством участия в международной торговле. Такая картина может служить хорошей аппроксимацией развития «восточноазиатских тигров» в 1970-е и 1980-е гг., когда они специализировались на производстве не самых высокотехнологичных товаров. Однако по мере того как эти страны становились богаче, они начали специализироваться на производстве большего количества дифференцированных товаров и столкнулись с эффектом условий торговли. Следовательно, если страна находится на той стадии развития, когда она производит большое количество дифференцированных товаров, дальнейшее накопление капитала ведет к убыванию отдачи от него посредством механизма, описанного в параграфе 19.4. Вне зависимости от того, как мы объединяем два этих подхода, они оба указывают на важность моделирования равновесия в глобальной мировой экономике и детального описания изменений доходности капитала в контексте международных торговых связей.

Третья цель этой главы состоит в анализе влияния международной торговли на экономический рост. В параграфах 19.6 и 19.7 описаны два различных подхода к этому вопросу. В одном из них показано положительное влияние торговли на экономический рост, в то время как другой описывает возможные отрицательные эффекты. Оба типа этих моделей являются важными для анализа мирового равновесия и динамики роста мировой экономики. Однако, несмотря на важность моделей, окончательный ответ на вопрос о влиянии международной торговли на экономический рост должен быть основан на эмпирических исследованиях, хотя теоретический анализ высветил ряд важных механизмов и продемонстрировал, что отрицательное воздействие международной торговли на экономический рост вряд ли является эмпирически значимым. Количественная значимость положительного влияния международной торговли на технологический прогресс остается открытым вопросом. Вполне может оказаться, что статические выгоды от международной торговли более важны, чем динамические выгоды. Несмотря на это, любой анализ влияния международной торговли должен принимать во внимание ее влияние на динамику экономического роста и технологического прогресса.

19.9. Литература

В этой главе представлено большое количество моделей. Параграф 19.1 посвящен анализу влияния международной торговли финансовыми активами на экономический рост. Этот вопрос подробно обсуждается в учебнике [Barro, Sala-i-Martin 2004, chapter 3] как в рамках моделей совершенного рынка капитала, так и моделей с ограничениями на потоки финансовых активов. Более подробный анализ международного кредитования и заимствований представлен в книге [Obstfeld, Rogoff 1996, chapters 1, 2; Обстфельд, Рогофф 2015, гл. 1, 2]. Введение в модели несовершенного международного рынка капитала читатель может найти в главе 6 учебника [Obstfeld, Rogoff 1996; Обстфельд, Рогофф 2015, гл. 1, 2]. Статьи, в которых моделируются такие несовершенства и их последствия: [Bulow, Rogoff 1989 a,b; Atkeson 1991; Kehoe, Perri 2002; Matsuyama 2004]. Парадокс Фельдштейна—Хориоки, описанный в параграфе 19.1, остается активной областью исследований. Обзор современных работ на эту тему представлен в статье [Obstfeld, Taylor 2002]. Возможные разрешения парадокса Фельдштейна—Хориоки предложены в работах: [Taylor 1994; Baxter, Crucini 1993; Kraai, Ventura 2007].

Параграф 19.2 основан на классической статье [Lucas 1990]. Вопросу о том, почему капитал не перетекает из богатых стран в бедные, посвящено большое количество исследований. Обзор работ на эту тему содержится в статье [Obstfeld, Taylor 1994]. В работе [Caselli, Feyrer 2007], описанной выше, предложен метод оценки межстрановых различий в предельной производительности капитала. Авторы статьи делают вывод о том, что различия в производительности капитала между странами относительно невелики. Эта работа свидетельствует в пользу моделей, объясняющих незначительный объем потоков капитала из-за различий в производительности, например модели, представленной в параграфе 19.2. В работе [Chirinko, Mallick 2007] утверждается, что метод из статьи [Caselli, Feyrer 2007] может давать неверные результаты, так как в нем в расчетах не учитываются издержки приспособления капитала, а включение этих издержек ведет к значительным межстрановым различиям в доходности капитала. Также отметим недавние работы [Gourinchas, Jeanne 2006] о незначительном влиянии финансовой глобализации на количество важных инвестиционных проектов и на экономический рост и [Alfaro, Kalemli-Ozcan, Volosovych 2005] о связи между институциональным развитием и потоками капитала.

Материал оставшейся части главы подразумевает знакомство читателя с некоторыми базовыми моделями международной торговли. Ограничение на объем книги не позволяет нам сделать подробный обзор всех моделей. Для этого порекомендуем читателю обратиться к стандартным учебникам, например к книге [Dixit, Norman 1980]. В параграфе 19.3 представлено некоторое обобщение модели из статьи [Ventura 1997] (мы рассматриваем общий вид производственной функции с постоянной отдачей от масштаба, в то время как в статье используется производственная функция вида ПЭЗ). Схожая, но менее богатая модель впервые была описана в работе [Stiglitz 1971]. В ней автор не рассматривает различия в трудоинтенсивной производительности между странами и предполагает, что нормы сбережений заданы экзогенно. Среди других работ, в которых международная торговля типа Хекшера—Олина объединяется с моделями экономического роста, отметим статьи [Atkeson, Kehoe 2000; Cunat, Maffezoli 2001]. Материал параграфа 19.4 основан на работе [Acemoglu, Ventura 2002]. В этой статье используется структура предпочтений домохозяйств, впервые введенная в работе [Armington 1969], однако в ней она используется для описания производства в секторе конечных товаров, а не предпочтений (см. также работу [Ventura 2005]).

Модель из параграфа 19.5 базируется на важной статье [Krugman 1979] о производственных циклах. Более богатая модель производственных циклов с эндогенными технологиями, схожая с моделью, рассмотренной в упражнении 19.5, представлена в статье [Grossman, Helpman 1991b]. Новый взгляд на международные производственные циклы, основанный на теории неполных контрактов, представлен в работе [Antras 2005]. В этой статье трудности заключения контрактов между производителями в странах Севера и их дочерними предприятиями в странах Юга составляют барьер, замедляющий транспортировку товаров на Юг. Трудности заключения контрактов смягчаются только после того, как товары становятся в достаточной степени стандартизованы и начинают свободно перемещаться в южные страны.

Влиянию международной торговли на экономический рост посвящено значительное количество эмпирических работ. Многие из широко известных в литературе статей упомянуты в начале параграфа 19.6. Материал оставшейся части параграфа 19.6 основан на работах: [Rivera-Batiz, Romer 1991; Grossman, Helpman 1991b], однако в нем используется формулировка из параграфа 13.1 из главы 13. В статье [Grossman, Helpman 1991b] предполагается, что исследовательская деятельность требует занятости рабочей силы и моделируется конкуренция между сектором НИОКР и сектором производства конечных товаров. В этом случае влияние международной торговли на скорость эндогенного технологического прогресса во многом определяется структурой перелива знаний. В статье [Rivera-Batiz, Romer 1991] также проведен анализ того, как влияние международной торговли на экономический рост зависит от вида границы инновационных возможностей. Этот вопрос, также поднятый в упражнении 19.33, подробно исследуется в работе [Atkeson, Burstein 2007]. В статье [Grossman, Helpman 1991b] также представлена мультисекторная модель с межстрановыми различиями в относительных запасах факторов производства. Другой канал воздействия международной торговли на технологическое развитие работает через влияние торговли на направление технологического прогресса. Этот канал подробно исследуется в статье [Acemoglu 2003b], где автор показывает, что открытие международной торговли при несовершенной защите ПИС может привести к тому, что новые технологии будут становиться более смещенными в сторону квалификации, чем до открытия экономики. Схожие модели также представлены в работах: [Thoenig, Verdier 2003; Epifani, Gancia 2006].

В параграфе 19.7 представлена модель, основанная на статьях: [Young 1991; Matsuyama 1992]. Схожие модели, основанные на специализации и обучении в процессе производства, представлены в работах: [Lucas 1988; Galor, Mountfold 2008]. Другие модели, в которых для некоторых стран участие в международной торговле сопряжено с издержками, основаны на различиях в объеме ренты, генерируемой в различных секторах, которые возникают из-за несовершенств на рынке труда или институциональных проблем в экономике. В статьях: [Nunn 2006; Levchenko 2007] представлены модели, в которых несовершенство рынка труда и институциональные проблемы ведут к переносу ренты из стран со слабыми институтами в страны с лучшими институтами, и поэтому международная торговля может быть невыгодной для стран со слабыми институтами.

19.10. Упражнения

19.1. Докажите утверждения 19.1 и 19.2 [Подсказка: для доказательства утверждения 19.2 используйте уравнение (19.5) вместе с наблюдением о том, что потребление и выпуск растут в каждой стране с одинаковым темпом, и покажите, что в стационарном равновесии оптимальный выбор для каждой страны (или для каждого домохозяйства) описывается условием $\dot{a}_j(t) \to 0$ при $t \to \infty$.]

19.2. Рассмотрите мировую экономику с совершенным финансовым рынком, однако предположите, что каждая страна обладает отличающейся нормой дисконтирования ρ_j.

(a) Докажите, что утверждение 19.1 верно и в этой модели.

(b) Покажите, что в этой модели не существует стационарного равновесия с $\dot{a}_j(t) = 0$ для всех j. Приведите интуитивное объяснение этого результата.

(c) Опишите асимптотику равновесия (динамику равновесной траектории при $t \to \infty$. Предположите, что $\rho_{j'} < \rho_j$ для $j \neq j'$. Покажите, что доля мирового чистого выпуска, приходящегося на потребление, в стране j' стремится к единице при $t \to \infty$.

Какой вы можете из этого сделать вывод о связи между ВВП и ВНП в других странах?

(d) Как вы изменили бы модель для того, чтобы сделать асимптотику равновесия в ней более реалистичной?

19.3. В этом упражнении вам предстоит доказать утверждение 19.3.

(a) Покажите, что отношение $\tilde{c}_j(t)/\tilde{c}_{j'}(t)$ постоянно для всех j и j'.

(b) Покажите, что из утверждения 19.1 следует, что мировое равновесие может быть описано единственной агрегированной производственной функцией. [Подсказка: используйте рассуждения, схожие с рассуждениями, предваряющими утверждение 19.6.]

(c) Опишите связь между утверждением 19.6 и теоремой 5.4 из главы 5. Объясните, почему эти результаты неверны в случае отсутствия свободного перемещения капитала.

***19.4.** Рассмотрите мировую экономику с международным рынком капитала, однако предположите, что ввиду наличия суверенного риска дефолта страна не имеет возможности привлекать на мировом рынке заимствования больше, чем доля $\phi > 0$ капитала в ней. Следовательно, в параграфе 19.1 имеем ограничение $\dot{a}_j(t) \leq \phi k_j(t)$.

(a) Опишите стационарное равновесие в мировой экономике и покажите, что стационарное состояние не изменяется после введения такого ограничения. Приведите подробное интуитивное объяснение этого результата.

(b) Опишите переходную динамику мировой экономики при таком ограничении. Покажите, что следствие 19.1 не выполняется в этой модели.

19.5. В работах [Barro, Sala-i-Martin 1991, 2004] авторы используют регрессии роста для описания динамики сходимости между регионами и штатами США. Они показывают, что между ними наблюдается медленная сходимость и интерпретируют этот результат в рамках неоклассической модели экономического роста. Объясните, почему следствие 19.1 говорит о том, что такое объяснение не является подходящим. Предложите альтернативное объяснение того, почему сходимость между регионами и штатами США может протекать медленно. [Подсказка: выясните, будут ли технологии или капитал перетекать между регионами быстрее.]

19.6. Рассмотрите базовую модель AK, описанную в главе 11, и предположите, что страны обладают доступом к единой производственной технологии, но различными нормами дисконтирования ρ_j. Покажите, что в этом случае между ними будут наблюдаться долгосрочные различия между нормами сбережений и инвестиций, которые коррелируют друг с другом, даже при совершенном мировом финансовом рынке. Приведите подробное интуитивное объяснение этого результата. Объясните, почему эта модель не может разрешить парадокс Фельдштейна—Хориоки (см. подпараграф 19.2.2), который связан с корреляций уровней сбережений и инвестиций, а не их разностей. Можете ли вы предложить расширение этой модели, которое способно разрешить парадокс Фельдштейна—Хориоки?

19.7. Докажите утверждение 19.4.

19.8. Покажите, что в модели из параграфа 19.3 свободное перемещение капитала между странами не изменяет равновесного распределения ресурсов в мировой экономике.

19.9. Рассмотрите модель из параграфа 19.3 с различными по странам нормами дисконтирования. Докажите, что в ней не существует стационарного равновесия.

19.10. Опишите равновесие в закрытой экономике в модели из параграфа 19.3 и сравните его с равновесием в международной торговле, описанным в тексте главы.

***19.11.** Рассмотрите модель из параграфа 19.3, однако предположите, что уравнение (19.9) выглядит как $Y_j^K = B_j K_j(t)$, где значения переменной B_j, возможно, различаются между странами. Опишите мировое равновесие в этой модели. Что в этом случае произойдет при наличии в мировой экономике совершенного финансового рынка?

19.12. **(a)** Переформулируйте и докажите основной результат параграфа 19.3 для случая, когда население разных стран различно. [Подсказка: в этом случае цены в мировой экономике зависят не от отношения $k(t)/A$, а от значения $\sum_{j=1}^{J} K_j(t) \Big/ \sum_{j=1}^{J} AL_j(t)$.]

(b) Опишите динамику мировой экономики в случае, когда темпы роста населения n_j различаются между странами.

***19.13.** **(a)** Покажите, что описание стационарного равновесия в параграфе 19.3 продолжает иметь место, если предпочтения типа CRRA в уравнении (19.14) заменить любой другой строго возрастающей и строго вогнутой функцией полезности $u(c)$. Как бы вы подошли к вопросу анализа переходной динамики в этом случае?

(b) Вернитесь к предпочтениям (19.14), однако предположите, что производительность труда в каждой стране задается равенством $A_j(t) = A_j \exp(gt)$. Покажите, что все результаты из текста главы продолжают иметь место, и, в частности, выведите эквивалент утверждения 19.6.

(c) Наконец, предположите, что производственная функция F в уравнении (19.7) не удовлетворяет предположению 2. Как такое предположение изменяет анализ модели и ее результаты?

19.14. Выведите из производственных функций (19.24) и (19.25) функции единичных издержек (19.27) и (19.28). Найдите значение константы χ.

19.15. Выведите уравнения (19.29) и (19.30).

19.16. Рассмотрите модели из параграфа 19.4.

(a) Выведите из условия равенства спроса и предложения на рынке капитала (19.26) уравнение торгового баланса (19.34).

(b) Найдите значение отношения импорта к ВВП как функцию от параметра τ.

19.17. Приведите строгое доказательство глобальной (седловой) устойчивости стационарного мирового равновесия в утверждении 19.10.

19.18. Опишите равновесие в закрытой экономике в модели из параграфа 19.4, когда каждая страна использует только те промежуточные товары, которые производятся в ней. Сравните его с равновесием в международной торговле, описанным в тексте главы. Покажите, что в равновесии в закрытой экономике темпы роста выпуска в странах различны. Может ли домохозяйство в более быстро растущей экономике достигать более высокого значения полезности в равновесии без международной торговли?

19.19. **(a)** Выведите уравнения (19.40) и (19.41).

(b) Объясните роль различных параметров модели в определении межстрановой дисперсии доходов. Выберите разумные значения параметров и объясните, способна ли модель с международной торговлей генерировать бóльшие межстрановые различия в уровне дохода на душу населения, чем неоклассическая модель экономического роста.

19.20. Выведите уравнение (19.43).

19.21. Докажите утверждение 19.11.

19.22. Докажите утверждение 19.12.

19.23. Рассмотрите стационарное мировое равновесие в модели из параграфа 19.4.

(a) Покажите, что увеличение параметра τ не всегда ведет к увеличению темпа роста мировой экономики в стационарном равновесии g^*, заданного уравнением (19.38). Приведите интуитивное объяснение этого результата.

(b) Покажите, что даже если рост параметра τ не ведет к увеличению темпа роста мировой экономики, уровень благосостояния в мире возрастает. [Подсказка: чтобы упростить ответ на этот вопрос, остановитесь на анализе благосостояния в стационарном равновесии.]

(c) Проинтерпретируйте ваш ответ в части (b) в свете дискуссии о влиянии международной торговли на экономический рост.

(d) Найдите достаточные условия, при которых увеличение параметра τ ведет к увеличению темпа роста мировой экономики, и проинтерпретируйте эти условия.

19.24. Рассмотрите модель из параграфа 19.4, однако вместо максимизации полезности репрезентативным домохозяйством предположите, что норма сбережений в каждой стране j постоянна во времени и равна s_j. Опишите мировое равновесие в этом случае и покажите что, как и в исходной модели, эффект условий торговли ведет к устойчивому мировому распределению доходов.

***19.25.** Рассмотрите модель из параграфа 19.4, однако предположите неравенство $\varepsilon < 1$. Опишите мировое равновесие. Покажите, что в этом случае страны с более низким значением нормы дисконтирования будут относительно более бедными. Приведите подробное интуитивное объяснение этого результата. Объясните, почему предположение $\varepsilon < 1$ может быть неправдоподобным.

***19.26.** Рассмотрите базовую модель AK из параграфа 19.4. Предположите, что решения о производстве и распределении ресурсов в каждой стране принимаются отдельным общественным планировщиком (задача которого состоит в максимизации полезности репрезентативного домохозяйства в своей стране).

(a) Покажите, что распределение ресурсов, описанное в тексте главы, не будет равновесием в такой модели.

(b) Опишите равновесие в модели и покажите, что все качественные результаты, представленные в тексте главы, продолжают иметь место.

(c) Покажите, что в этом случае уровень благосостояния в мире ниже, чем в равновесии в тексте главы.

(d) Какое из двух равновесий вы находите более правдоподобным? Объясните ваш ответ.

***19.27.** Рассмотрите модель с трудом из параграфа 19.4. Предположите, что страны имеют возможность осуществлять инвестиции в создание новых типов товаров. Предположите, что если некоторая фирма создает новый тип товара, она становится монополистом и ее цена для всех потребителей в мировой экономике определяется наценкой монополиста до тех пор, пока этот тип товара не выбывает с рынка эндогенно по экспоненциальному закону с темпом $\delta > 0$.

(a) Покажите, что оптимальная цена фирмы-монополиста в стране j в момент времени t задается равенством $p_j(t) = \varepsilon r_j(t)/(\varepsilon - 1)$. Проинтерпретируйте это уравнение.

(b) Предположите, что новый тип товара может быть создан с помощью $1/\eta$ единиц труда. Покажите, что это предположение изменяет условие равенства спроса и предложения на рынке труда и опишите условие свободного выхода на рынок.

(c) Определите мировую ТСР как равновесие, в котором экономики всех стран растут с одинаковым темпом. Покажите, что такое равновесие существует и определено единственным образом. Объясните экономические механизмы, которые приводят к существованию такого «устойчивого» равновесия. [Подсказка: покажите, что на такой ТСР количество типов товаров, производимых в каждой стране, постоянно во времени.]

(d) Как изменяется количество типов товаров, производимых в стране, при увеличении нормы дисконтирования ρ? Проинтерпретируйте ваш ответ.

(e) Объясните (неформально), как изменятся ваши анализ и выводы, если для производства новых товаров необходима комбинация труда и капитала?

19.28. Покажите, что в модели из параграфа 19.5 увеличение параметра ι всегда ведет (в слабом смысле) к сокращению разрыва в уровне доходов между странами Севера и Юга. Опишите условия, при которых увеличение параметра ι ведет к ухудшению благосостояния в странах Севера (то есть к сокращению реального дохода в них).

19.29. В этом упражнении вам предстоит сделать инновационные решения в модели из параграфа 19.5 эндогенными. Предположите, как и в модели из параграфа 13.4 из главы 13, что новые товары создаются технологическими фирмами в странах Севера и эти фирмы являются монополистами до тех пор, пока изобретенные ими товары не копируются в странах Юга. Предположите, что производственная технология не изменяется и производственная функция новых товаров конечного товара выглядит как $\dot{N}(t) = \eta Z(t)$, где переменная $Z(t)$ обозначает количество использованных конечных товаров. Копирование товаров на Юге проходит экзогенно с темпом ι. Начиная с момента имитации производство товара на Юге ведется на конкурентном рынке.

(a) Покажите, что цена товара, еще не скопированного на Юге, задается следующим равенством:

$$p(t, v) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} w^n(t).$$

(b) Опишите статическое равновесие в модели при заданных значениях $N^n(t)$ и $N^o(t)$.

(c) Вычислите чистую приведенную стоимость нового товара для северной фирмы. Почему эта величина отличается от значения уравнения (13.8) в параграфе 13.4?

(d) Наложите условие свободного выхода на рынок и выведите равновесный темп технологического прогресса в мировой экономике. Найдите темп роста мировой экономики.

(e) Как увеличение параметра ι изменяет мировое равновесие? Может ли оно привести к ухудшению благосостояния в странах Юга? Приведите интуитивное объяснение вашего вывода.

19.30. Рассмотрите следующий вариант модели производственного цикла из параграфа 19.5. Предположите, что международная торговля отсутствует и количества товаров, потребляемых в разных странах, различаются между собой.

(a) Покажите, что заработная плата и уровень дохода в странах Севера и Юга в момент времени t задаются следующими равенствами:

$$w^n(t) = N(t)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \text{ и } w^s(t) = N^o(t)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

(b) Выведите условия, при которых относительные различия в уровне дохода в этой модели будут ниже, чем в модели с международной торговлей. Подробно объясните, почему международная торговля может привести к увеличению относительных различий в уровне дохода.

(c) Следует ли из того, что международная торговля ведет к увеличению относительных различий в уровне дохода, то, что она ведет и к снижению уровня благосостояния в странах Юга? [Подсказка: при ответе на этот вопрос вы можете остановиться лишь на стационарном равновесии.]

19.31. Докажите утверждение 19.13.

19.32. Докажите утверждение 19.14.

19.33. Рассмотрите модель из параграфа 19.6, однако предположите, что новые товары создаются на границе инновационных возможностей из параграфа 13.2 из главы 13. Предположите, что до вступления экономики в международную торговлю переливы знаний создаются полным множеством доступных в мировой экономике промежуточных товаров, то есть граница инновационных возможностей в стране j имеет следующий вид:

$$\dot{N}^j(t) = \eta N(t) L_R^j(t),$$

где $N(t) = N^1(t) + N^2(t)$ и переменная $L_R^j(t)$ обозначает количество работников, занятых в исследовательском секторе в стране j. Вступление экономики в международную торговлю не изменяет структуру переливов знаний.

(a) Покажите, что в этой модели вступление в международную торговлю не изменяет равновесный темп роста экономики. Приведите подробное интуитивное объяснение вашего результата.

(b) Предположите, что перед вступлением в международную торговлю граница инновационных возможностей выглядит как $\dot{N}^j(t) = \eta N^j(t) L_R^j(t)$. Покажите, что в этом случае, как и в утверждении 19.4, вступление в международную торговлю ведет к увеличению равновесного темпа роста экономики. Объясните, почему в этом случае результат отличается.

(c) Какая из спецификаций модели (из части (a) или из части (b)) выглядит более правдоподобной? В свете вашего ответа на этот вопрос, какой вывод вы можете сделать о влиянии международной торговли на экономический рост?

19.34. Рассмотрите модель из параграфа 19.6 с двумя различиями. Во-первых, предположите, что население обеих стран растет с темпом n. Во-вторых, граница инновационных возможностей в стране j выглядит как

$$\dot{N}^j(t) = \eta N(t)^{-\phi} Z^j(t),$$

где $N(t) = N^1(t) + N^2(t)$. Покажите, что вступление в международную торговлю вначале ведет к увеличению количества инноваций, но долгосрочный темп роста экономики остается неизменным.

19.35. Докажите утверждение 19.15.

19.36. (a) Докажите утверждение 19.16.

(b) Объясните, почему в случае $\varepsilon = 1$ специализация в секторе, в котором не происходит обучения в процессе производства, не ведет к снижению относительного уровня дохода в странах Юга.

(c) Каковы последствия вступления в международную торговлю для относительного уровня доходов в случае $\varepsilon < 1$?

(d) Опишите равновесие в случае, когда все экономики остаются закрытыми до момента времени $t = T$ и открываются для международной торговли в момент T. Какие последствия ваш результат несет для политики защиты молодых отраслей?

19.37. Рассмотрите модель экономики их параграфа 19.7, однако предположите, что страны Юга крупнее, чем страны Севера. В частности предположите неравенства

$$(1-\delta)^{-\varepsilon} < \frac{L^S}{L^N} < \varepsilon^{-1} + (1-\delta)^{-\varepsilon}. \tag{19.61}$$

(a) Покажите, что в этом случае не все южные рабочие будут заняты в секторе 2 и в странах Юга происходит обучение в процессе производства. Почему условие (19.61) является необходимым для этого?

(b) Каким образом это изменяет долгосрочное равновесие в мировой экономике? [Подсказка: покажите, что предельное значение переменной L_S^1 равно 0.] Почему условие (19.61) является необходимым для этого?

Часть VII

ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАЗВИТИЕ И ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ

В этой части книги мы остановимся на взаимосвязях между экономическим развитием и экономическим ростом. Первый вопрос, который может возникнуть у читателя: в чем различие (и есть ли оно вообще) между экономическим развитием и экономическим ростом? Этот вопрос в особенности уместен ввиду наблюдения из главы 1 о том, что страны, богатые и развитые в настоящее время, — это те страны, чьи экономики устойчиво росли в течение последних двухсот лет, а бедные (или менее развитые) страны — это страны, которые не смогли достичь устойчивого экономического роста. Из этого наблюдения следует, что экономическое развитие и экономический рост по существу являются одним и тем же понятием и должны изучаться вместе. Однако мы можем выделить две причины, одну хорошую и одну плохую, по которым между экономическим развитием и экономическим ростом существуют различия. Хорошая причина: несмотря на то что экономическое развитие и экономический рост являются частями единого процесса, модели экономического развития и экономического роста описывают различные аспекты этого процесса. В частности, модели, представленные в предыдущих главах, сосредоточены на характеристике траектории сбалансированного роста или переходной динамики, ведущей к этой траектории. Даже в том случае, когда мы подробно описываем переходную динамику, основным является вопрос, ведет ли эта переходная динамика к ТСР. Динамика экономики на ТСР или в ее окрестности в неоклассической модели экономического роста или в моделях эндогенного экономического роста является хорошей аппроксимацией динамики относительно развитых экономик. Однако регулярная динамика на ТСР не в состоянии описать большое количество важных особенностей экономического роста на ранних этапах развития. Более того, как отметили С. Кузнец и ряд других экономистов, даже в более развитых экономиках многие характеристики процесса экономического роста отличаются от характеристик, следующих из свойств ТСР в неоклассической модели экономического роста.

Исходя из этих наблюдений С. Кузнец в своей классической книге *Modern Economic Growth* [Kuznets, 1966, p. 1] определяет экономический рост следующим образом:

Мы идентифицируем экономический рост общества как устойчивый рост производства на душу населения и на одного работника, часто происходящий на фоне роста населения и обычно вместе со значительными структурными изменениями в экономике. В современном мире они состоят в изменениях структуры производства и распределения товаров и занятости факторов производства: сдвиге от аграрного сектора к промышленности, индустриализации; в распределении населения между городами и сельской местностью: урбанизации; в относительном уровне благосостояния различных по типу занятости групп общества; в распределении товаров по их использованию: в конечном потреблении домохозяйств, в инвестициях и в государственном потреблении, и в каждой из этих основных групп в более мелких группах; в распределении товаров по их происхождению: производстве внутри страны или за рубежом и так далее.

Несмотря на то что критик может усомниться в том, что такое определение является наиболее функциональным определением экономического роста, оно охватывает основные важные изменения, сопровождавшие экономический рост в большинстве стран. При этом большинство моделей экономического роста, изученных нами ранее, не в состоянии адекватно описать сложный процесс, отмеченный С. Кузнецом. Эти модели предоставляют аппарат для описания устойчивого роста дохода на душу населения и выпуска на одного работника, но не объясняют процесс значительных структурных изменений в экономике, отмеченный С. Кузнецом.

Дополняющий наблюдения С. Кузнеца взгляд на экономический рост читатель может найти в ранних работах по экономике развития, например А. Хиршман, Р. Нурксе и П. Розенштейн-Родан подчеркивают важность провалов рынка и ловушки бедности в процессе экономического развития. Если провалы рынка и ловушка бедности являются важными факторами, препятствующими экономическому развитию, то мы можем ожидать их большее количество в менее развитых, бедных экономиках[1]. Тогда структурные изменения, отмеченные С. Кузнецом, должны сопровождаться переходом к более эффективной организации производства и переходом от внутренней точки множества производственных возможностей к его границе. В дальнейшем мы будем использовать выражение «структурные изменения» для обозначения изменений в организации и эффективности производственной деятельности, сопровождающих процесс экономического развития.

С теоретической точки зрения полезно будет рассматривать ранние стадии экономического развития как происходящие во время, или даже посредством, структурных изменений и трансформации экономики. Мы можем ожидать, что в конечном счете такие изменения приведут эконо-

[1] Такой взгляд может быть обоснованием для характеристики более бедных стран как «неразвитые», а не «развивающиеся». В дальнейшем изложении материала мы, в случае отсутствия особых причин для использования этих терминов, будем использовать более мягкие прилагательные как «менее развитые» или «относительно бедные».

мику в окрестность траектории сбалансированного роста, которая описана в большинстве моделей, рассмотренных нами ранее. Если такой подход действительно является полезным, то нам необходимы модели, которые могут объяснить структурные изменения и трансформацию экономики на ранних этапах экономического развития и устойчивую динамику сбалансированного роста на более поздних этапах. Другой важной задачей является понимание того, почему некоторые общества прошли путь таких изменений, в то время как другие не сделали этого.

В некоторых моделях, рассмотренных нами ранее, уже сделаны первые шаги в этом направлении. Например, модель «взлета» из параграфа 17.6 описывает частный случай трансформации от волатильной траектории роста с низкой производительностью к устойчивому экономическому росту. Кроме того, во множестве моделей из главы 18 подчеркивается различие между экономиками, находящимися на границе технологических возможностей и технологически отстающими экономиками. Несмотря на это, пока у нас нет модели, описывающей взгляд С. Кузнеца и других экономистов, стоявших у истоков экономики развития. В основном это связано с тем, что современная литература по теории экономического роста не предоставляет удовлетворительный механизм для достижения этой цели. В таком свете различие между экономическим ростом и экономическим развитием может быть обосновано утверждением о том, что в отсутствие единого аппарата (или возможно именно для построения такого аппарата) мы вынуждены изучать различные аспекты процесса долгосрочного экономического роста отдельно друг от друга. Теория экономического роста согласно такому подходу изучает сбалансированный рост, траекторию экономического роста мировой экономики и другие аспекты роста относительно развитых экономик. С другой стороны, теория экономического развития посвящена изучению структурных изменений и трансформации экономики (и влияние этой трансформации на эффективность процесса производства) на ранних этапах экономического развития. Тогда модели экономического развития сосредоточены на описании структурных изменений в производстве и потреблении, урбанизации, размера и структуры населения, структуры занятости в экономике и изменений в общественном укладе общества. Таким образом, теория экономического развития старается понять, когда, почему и как происходили эти процессы и помогли ли они менее развитым экономикам переместиться на границу множества производственных возможностей. В связи с тем что, как показал С. Кузнец, экономический рост в относительно развитых экономиках также включает в себя важные элементы структурных изменений, некоторые модели экономического развития позволяют пролить свет на структуру экономического роста в более развитых странах, например помогая нам понять, почему и как сбалансированный экономический рост зачастую может происходить на фоне значительных изменений в отраслевой структуре выпуска и занятости в экономике.

Вторая, не настолько удовлетворительная, причина различия между экономическим ростом и экономическим развитием состоит в том, что в работах в двух этих областях зачастую уделяется внимание различным задачам и ставятся различные вопросы. Литература в теории экономического роста посвящена теоретическим и эмпирическим вопросам, на которые мы пытались ответить в предыдущих главах. С другой стороны, литература по экономическому развитию посвящена анализу вопросов образования, бедности, дискриминации, экономического и общественного статуса женщин, рождаемости, здравоохранения, механизмов кредитования и сельского хозяйства в менее развитых экономиках. Большая часть этой литературы является эмпирической. В ней описывается структура экономических механизмов в менее развитых странах и идентифицируются различные провалы рынка. Работы по экономическому развитию предоставляют большое количество наблюдений, помогающих понять структуру экономик менее развитых стран, и в некоторых случаях послужили обоснованием микроэкономических реформ, которые позволили улучшить уровень жизни населения в некоторых странах. Однако в этих работах не ставится вопрос о структуре процесса экономического развития, который мы поставили выше: почему некоторые страны оказались менее производительными и бедными и каким образом менее развитые экономики могут пройти через структурные изменения и трансформацию экономики, связанные с современным экономическим ростом и необходимые для него. Поэтому, несмотря на то что причиной разделения теории экономического роста и теории экономического развития может служить структура работ по этим темам, это разделение может быть полезным. Более того, основываясь на этом различии, экономисты могут попытаться сблизить литературу по экономическому росту и по экономическому развитию, объединяя теоретические модели, представленные в этой книге, и эмпирические свидетельства, описанные в литературе по экономическому развитию. Такой подход в конечном счете может привести к более удовлетворительному механизму, объясняющему процесс экономического развития (однако, к сожалению, ограничение на объем книги не позволяет нам более подробно исследовать этот вопрос).

Исходя из этих двух причин мы последуем стандартной практике и будем различать экономическое развитие и экономический рост. Однако, несмотря на то что мы последуем литературе, во всех частях книги мы будем подчеркивать, что для понимания процесса экономического развития — структурных изменений и трансформации экономики, как описывали его С. Кузнец, А. Хиршман, Р. Нурксе и П. Розенштейн-Родан, и более упорядоченного процесса экономического роста используется один и тот же набор моделей и инструментов. Надеемся, что такой подход позволит сконцентрироваться на построении единой теоретической модели описания процесса экономического развития и теоретических подходов, способных объяснить значительное количество свидетельств, описанных в эмпирической литературе по экономическому развитию.

Эта часть книги состоит из двух глав. Глава 20 посвящена моделям, которые лишь незначительно отклоняются от подхода сбалансированного роста, использованного нами в предыдущих главах, но при этом способным пролить свет на структурные изменения в экономике, отмеченные С. Кузнецом. Поэтому читатель вправе рассматривать модели из этой главы как расширения неоклассических моделей экономического роста из глав 8 и 11, построенные с целью объяснения важных эмпирических наблюдений, ярко описывающих процесс экономического развития. Однако эти модели не в состоянии ни полностью описать значительные структурные изменения в экономике, отмеченные С. Кузнецом, ни охватить сложные детали перехода экономики из внутренности множества производственных возможностей на его границу. В главе 21 представлен ряд моделей, в которых исследуются различные аспекты этого процесса, включая финансовое развитие, демографические изменения, урбанизацию и другие общественные изменения. Более того, они придают большое значение важности возможных провалов рынка как причины попадания экономики в ловушку развития. Эти модели позволяют поставить ряд важных вопросов и использовать различные средства моделирования, однако они отличаются друг от друга. Каждая модель основана на различном множестве предположений, и на данный момент экономисты находятся далеко от построения единого подхода к анализу основных структурных изменений, сопровождающих процесс экономического развития. Построение такого единого подхода не является целью главы 21. Ее основная задача состоит в демонстрации читателю ряда интересных и важных вопросов теории экономического развития. Необходимо отметить, что разделение моделей по главам не является совершенным. Читатель легко заметит тесную связь между некоторыми моделями структурной трансформации экономики из главы 21 и моделями структурных изменений из главы 20. Более того, некоторые события, такие как, например, начало индустриализации, могут рассматриваться одновременно и как структурные изменения, и как результат решения обществом задачи провала некоторого рынка. Поэтому отнесение определенной темы к главе 20 или главе 21 в некоторой степени является нашим выбором.

Глава 20
Структурные изменения и экономический рост

Параграфы 20.1 и 20.2 посвящены описанию процесса перемещения занятости и производства из аграрного сектора в промышленность, а затем из промышленности в сферу услуг. Этот вопрос является удобной начальной точкой анализа, так как изменения в структуре занятости и производства являются важной частью процесса экономического развития и, как показали С. Кузнец и другие ученые, схожие изменения происходят и в экономиках, находящихся в окрестности траектории сбалансированного роста. Поэтому в двух этих параграфах мы остановимся на причинах (связанных как с предпочтениями агентов — «спросом», так и с технологиями — «предложением»), по которым мы вправе ожидать структурные изменения по мере того как экономика становится богаче. Более того, эти причины позволяют объяснить, как мы можем согласовать такие структурные изменения со сбалансированным ростом экономики. В параграфе 20.3 мы обратимся к связанной теме и покажем, почему производительность в сельском хозяйстве в предындустриальном обществе была ключевым детерминантом начала индустриализации и «взлет» экономик на траекторию роста.

20.1. Несбалансированный экономический рост: анализ с точки зрения совокупного спроса

На рис. 20.1 показаны некоторые основные изменения в структуре производства ВВП в экономике США за последние сто пятьдесят лет. Из него нетрудно увидеть, что в начале XIX в. доля работников, занятых в сельском хозяйстве, составляла около 90% рабочей силы, в то время как в промышленности и сфере услуг была занята незначительная часть работников. Во второй половине XIX в. доли работников, занятых в промышленности и сфере услуг, возросли до более 20% рабочей силы, а доля занятых в сельском хозяйстве значительно сократилась. Доля занятых в сельском хозяйстве непрерывно сокращалась в течение всех последних ста пятидесяти лет и в настоящее время составляет около 5% рабочей силы, в то время как в сфере услуг в экономике США сейчас занято более 70% всех работников. Доля работников, занятых в промышленности, вначале возрастала по мере сокращения занятости в сельском хозяйстве, однако в течение последних сорока лет она снижается и в настоящее время находится на уровне немногим более 20%. Схожие тенденции прослеживаются и в наблюдении за долями различных секторов в потреблении, однако доля потребительских расходов на сельскохозяйственную продукцию остается значительной из-за изменений в относительных ценах товаров и относительной производительности в различных отраслях экономики (а также отчасти в результате импорта сельскохозяйственной продукции). Изменения в структуре занятости в экономике Великобритании в конце XVIII в. также согласуются с динамикой, представленной на рис. 20.1 (см., например, работу [Mokyr, 1993]). Схожая динамика характеризует развитие всех экономик ОЭСР. Некоторые менее развитые страны остаются во многом аграрными и в настоящее время, однако и в них доля сельского хозяйства в экономике неумолимо сокращается со временем.

Рис. 20.1 показывает картину секторальных изменений в занятости, включающую в себя значительный элемент несбалансированности. В работе [Kongsamut, Rebelo, Xie 2001] авторы называют такие изменения в структуре занятости и производства фактами Кузнеца. Они строят математически простую модель, позволяющую согласовать такой тип структурных изменений с фактами Калдора, которые мы описали ранее, а именно

Рис. 20.1. Доли занятости в сельском хозяйстве, промышленности и сфере услуг в США, 1800–2000

с относительным постоянством процентных ставок и долей факторов производства в национальном доходе. Несмотря на то что модель построена с целью согласования со стилизованными фактами Калдора вне зависимости от того, на какой стадии экономического развития находится экономика, ее простота делает ее удобным первым шагом анализа.

Подход авторов статьи основан на так называемом законе Энгеля, в котором утверждается, что по мере увеличения дохода домохозяйства его доля, которую он тратит на продукты питания (сельскохозяйственную продукцию), сокращается. Несмотря на то что название такого наблюдения законом может показаться преувеличением, это наблюдение, впервые сделанное немецким статистиком Эрнстом Энгелем в XIX в., очень хорошо описывает эмпирические данные по расходам домохозяйств. П. Конгсамут, С. Ребело и А. Ксай расширяют закон Энгеля и утверждают, что по мере роста дохода домохозяйства не только снижается доля расходов на продукты питания, но и увеличивается доля расходов на услуги. В частности рассмотрим следующую экономику с бесконечным горизонтом планирования. Предположим, что население растет экспоненциально с экзогенно заданным темпом n, то есть предложение труда составляет $L(t) = \exp(nt)L(0)$. Экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства, которое абсолютно неэластично поставляет занятость на рынок труда и наделено стандартными предпочтениями следующего вида:

$$\int_0^\infty \exp(-(\rho - n)t)\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt, \qquad (20.1)$$

где $\theta \geq 0$ и переменная $c(t)$ обозначает потребление агрегата *Стоуна—Гири*, состоящего из сельскохозяйственных и промышленных товаров и услуг, на душу населения (см. упражнение 8.31 из главы 8):

$$c(t) = (c^A(t) - \gamma^A)^{\eta^A} c^M(t)^{\eta^M} (c^S(t) + \gamma^S)^{\eta^S}, \qquad (20.2)$$

где переменная $c^A(t) \in [\gamma^A, \infty)$ обозначает потребление сельскохозяйственных товаров в момент времени t, переменная $c^M(t) \in \mathbb{R}_+$ — потребление промышленных товаров и переменная $c^S(t) \in \mathbb{R}_+$ — потребление услуг, параметры γ^A, γ^S, η^A, η^M и η^S положительны и $\eta^A + \eta^M + \eta^S = 1$. Агрегат Стоуна—Гири является простым способом введения в модель отличных от единицы эластичностей по доходу для различных элементов потребительской корзины и приводит к закону Энгеля. В частности, из его вида следует, что существует минимальный необходимый для поддержания жизнедеятельности уровень потребления сельскохозяйственной продукции (продуктов питания), который составляет γ^A. Поэтому домохозяйство вынуждено потреблять не меньшее количество продуктов питания, и на самом деле функция полезности не определена на значениях сельскохозяйственного потребления, меньших γ^A.

После достижения этого уровня потребления продуктов питания домохозяйство начинает формировать спрос на другие товары, в частности промышленные (например, текстиль и товары длительного пользования) и услуги (например, услуги здравоохранения, развлечения, оптовой и розничной торговли). Однако, как мы убедимся далее, присутствие в функции (20.2) слагаемого γ^S ведет к тому, что положительный спрос на услуги начинает формироваться только после достижения домохозяйством определенного уровня потребления сельскохозяйственных и промышленных товаров.

Предположим, что экономика закрыта, то есть потребление сельскохозяйственных и промышленных товаров и услуг совпадает с их производством внутри страны. Последуем работе [Kongsamut, Rebelo, Xie 2001] и предположим следующий вид производственных функций в трех секторах экономики:

$$
\begin{aligned}
Y^A(t) &= B^A F(K^A(t), X(t)L^A(t)),\\
Y^M(t) &= B^M F(K^M(t), X(t)L^M(t)), \qquad (20.3)\\
Y^S(t) &= B^S F(K^S(t), X(t)L^S(t)),
\end{aligned}
$$

где переменные $Y^j(t)$ при $j \in \{A, M, S\}$ обозначают выпуск сельскохозяйственной и промышленной продукции и услуг в момент времени t, переменные $K^j(t)$ и $L^j(t)$ $j \in \{A, M, S\}$ — запас капитала и труд в сельском хозяйстве, промышленности и сфере услуг в периоде t соответственно, переменные B^j при $j \in \{A, M, S\}$ — нейтральный по Хиксу параметр производительности в трех секторах, переменная $X(t)$ — единый для всех отраслей параметр трудоинтенсивной (нейтральной по Харроду) производительности (мы будем использовать обозначение X вместо стандартного A, так как символ A занят для обозначения сельскохозяйственной продукции). Функция F удовлетворяет всем стандартным неоклассическим предположениям (предположения 1 и 2 из главы 2). Необходимо отметить еще два свойства уравнений (20.3). Во-первых, производственные функции во всех трех секторах совпадают. Во-вторых, трудоинтенсивный технологический прогресс протекает во всех трех секторах одинаково. Очевидно, что оба этих свойства нереалистичны, однако они позволяют отделить причины структурных изменений, возникающие со стороны спроса, от причин, возникающих со стороны предложения, анализу которых посвящен следующий параграф. Более того, в упражнении 20.7 показано, что эти предположения могут быть в некоторой степени ослаблены. Предположим, что размер населения и запас капитала в начальный момент времени $L(0) > 0$ и $K(0) > 0$ заданы и что трудоинтенсивный технологический прогресс протекает с постоянным экзогенно заданным темпом g, то есть

$$\frac{\dot{X}(t)}{X(t)} = g \qquad (20.4)$$

для всех t при начальном условии $X(0) > 0$. Чтобы гарантировать выполнение условия трансверсальности в задаче репрезентативного домохозяйства, наложим такие же ограничения, как и в неоклассической модели экономического роста из главы 8 (предположение 4, из которого следует неравенство $\rho - n > (1-\theta)g$).

Условия равенства спроса и предложения на рынках труда и капитала выглядят следующим образом:

$$K^A(t) + K^M(t) + K^S(t) = K(t), \tag{20.5}$$

$$L^A(t) + L^M(t) + L^S(t) = L(t), \tag{20.6}$$

где переменные $K(t)$ и $L(t)$ обозначают общий запас капитала и труда в момент времени t соответственно.

Другое важное предположение в модели Конгсамута, Ребело и Ксай заимствовано из работы [Rebelo 1991] и состоит в том, что в производстве инвестиционных товаров используются только промышленные товары. Следовательно, условие равенства спроса и предложения в промышленном секторе имеет вид:

$$\dot{K}(t) + c^M(t)L(t) = Y^M(t), \tag{20.7}$$

где для упрощения выкладок мы игнорируем амортизацию капитала (в противном случае в левой части уравнения (20.7) необходимо слагаемое $-\delta K(t)$). В уравнении (20.7) утверждается, что совокупный выпуск промышленных товаров распределяется между их потреблением и накоплением нового капитала, который затем используется в производстве сельскохозяйственных и промышленных товаров и услуг в будущем. Так как экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства, уравнения (20.3)–(20.7) могут рассматриваться как бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства.

Условия равенства спроса и предложения на рынках сельскохозяйственных товаров и услуг выглядят как:

$$c^A(t)L(t) = Y^A(t) \text{ и } c^S(t)L(t) = Y^S(t), \tag{20.8}$$

где в левой части обоих уравнений присутствует множитель $L(t)$, переводящий потребление на душу населения в агрегированный показатель.

Допустим совершенную конкуренцию на всех рынках. В качестве единицы измерения в каждый момент времени выберем цену промышленных товаров, что ведет к 4 неизвестным ценам: цене сельскохозяйственных товаров $p^A(t)$, цене услуг $p^S(t)$ и ценам факторов производства $w(t)$ и $r(t)$. Из вида агрегата потребления (20.2) непосредственно следует, что цены сельскохозяйственных товаров и услуг удовлетворяют следующим равенствам:

$$\frac{p^A(t)(c^A(t) - \gamma^A)}{\eta^A} = \frac{c^M(t)}{\eta^M}, \tag{20.9}$$

$$\frac{p^S(t)(c^S(t)+\gamma^S)}{\eta^S}=\frac{c^M(t)}{\eta^M}. \tag{20.10}$$

Из совершенной конкуренции на рынках факторов производства следуют равенства:

$$w(t)=\frac{\partial B^M F(K^M(t),X(t)L^M(t))}{\partial L^M}, \tag{20.11}$$

$$r(t)=\frac{\partial B^M F(K^M(t),X(t)L^M(t))}{\partial K^M}, \tag{20.12}$$

где для нахождения цен факторов производства мы могли эквивалентно использовать их предельные продукты в других секторах.

Определим конкурентное равновесие стандартным способом как набор траекторий спроса на факторы производства во всех секторах $\left[K^A(t),\ K^M(t),\ K^S(t),\ L^A(t),\ L^M(t),\ L^S(t)\right]_{t=0}^{\infty}$, на котором прибыль достигает максимума при заданных значениях совокупного предложения капитала и труда $[K(t),\ L(t)]_{t=0}^{\infty}$, траекторий цен $\left[p^A(t),\ p^M(t),\ w(t),\ r(t)\right]_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям (20.9)–(20.12) при заданных значениях $\left[K^A(t),\ K^M(t),\ K^S(t),\ L^A(t),\ L^M(t),\ L^S(t)\right]_{t=0}^{\infty}$, и траекторий потребления и запаса капитала $\left[c^A(t),\ c^M(t),\ c^S(t),\ K(t)\right]_{t=0}^{\infty}$, на которых целевая функция (20.1) достигает максимума при ограничениях (20.3)–(20.7). В дополнение, предположим выполнение неравенства

$$B^A F(K^A(0),X(0)L^A(0))>\gamma^A L(0), \tag{20.13}$$

которое означает, что запас капитала и технологических знаний в начальный момент времени достаточен для производства необходимого минимума сельскохозяйственной продукции.

Описание равновесия в модели не составляет труда. Из идентичности производственных функций во всех секторах экономики моментально вытекает следующее утверждение.

Утверждение 20.1. *Предположим, что выполняется неравенство* (20.13). *Тогда в любом равновесии в любой момент времени t имеет место следующее уравнение:*

$$\frac{K^A(t)}{X(t)L^A(t)}=\frac{K^M(t)}{X(t)L^M(t)}=\frac{K^S(t)}{X(t)L^S(t)}=\frac{K(t)}{X(t)L(t)}\equiv k(t), \tag{20.14}$$

где последнее равенство определяет переменную $k(t)$ как отношение капитала к эффективному труду в экономике. Также в любой момент времени t выполняются равенства:

$$p^A(t) = \frac{B^M}{B^A} \text{ и } p^S(t) = \frac{B^M}{B^S}. \tag{20.15}$$

Доказательство. См. упражнение 20.2. ■

Результат этого утверждения понятен интуитивно. Во-первых, из идентичности производственных функций следует равенство отношений капитала к труду во всех трех секторах экономики. Во-вторых, из уравнения (20.14) следует условие равновесия для цен (20.15), так как предельные продукты капитала и труда должны быть равны между собой во всех трех секторах.

В утверждении 20.1 не используется вид предпочтений домохозяйств. Добавляя максимизацию полезности репрезентативным домохозяйством (в частности используя стандартное уравнение Эйлера для потребления для репрезентативного домохозяйства) и используя затем уравнения (20.9) и (20.10), приходим к следующим дополнительным условиям равновесия.

Утверждение 20.2. *Предположим, что выполняется неравенство* (20.13). *Тогда в любом равновесии в любой момент времени t имеет место уравнение*

$$\frac{\dot{c}^M(t)}{c^M(t)} = \frac{1}{\theta}(r(t) - \rho). \tag{20.16}$$

Более того, если выполняется предположение 4, то значение функции полезности репрезентативного домохозяйства конечно и выполняется условие трансверсальности. В дополнение в любой момент времени t имеют место равенства:

$$\frac{B^M(c^A(t) - \gamma^A)}{B^A \eta^A} = \frac{c^M(t)}{\eta^M} \text{ и } \frac{B^M(c^s(t) + \gamma^S)}{B^S \eta^S} = \frac{c^M(t)}{\eta^M}. \tag{20.17}$$

Доказательство. См. упражнение 20.3. ■

Утверждение 20.3. *Предположим, что выполняется неравенство $\gamma^A > 0$ и/или неравенство $\gamma^S > 0$. Тогда в модели не существует равновесия, в котором все секторы экономики растут с одинаковым темпом.*

Доказательство. См. упражнение 20.4. ■

Этот результат неудивителен. Так как предпочтения репрезентативного домохозяйства подчиняются закону Энгеля, домохозяйство всегда будет стремиться изменить структуру своего потребления и это ведет к изменению структуры производства в экономике. Несмотря на это, «ТСР», на которой потребление (асимптотически) растет с постоянным темпом, существует. Мы будем называть такую траекторию траекторией постоянного роста (ТПР), чтобы подчеркнуть, что постоянный темп роста допускает несбалансированный рост экономики. Агрегат потребления растет с постоянным темпом на ТПР, а выпуск и занятость в трех секторах экономики растут с различными темпами. Из вида функции полезности (20.1) вытекает, что из постоянного темпа роста потребления следует, что процентная ставка также является в равновесии постоянной величиной.

Утверждение 20.4. *Предположим, что выполняется неравенство* (20.13). *Тогда в экономике, описанной выше, (единственная) ТПР существует, если и только если выполняется условие*

$$\frac{\gamma^A}{B^A}=\frac{\gamma^S}{B^S}. \tag{20.18}$$

На ТПР в любой момент времени t *выполняются равенство* $k(t)=k^*$ *и равенства*:

$$\frac{\dot c^A(t)}{c^A(t)}=g\frac{c^A(t)-\gamma^A}{c^A(t)},\quad \frac{\dot c^M(t)}{c^M(t)}=g,\quad \frac{\dot c^S(t)}{c^S(t)}=g\frac{c^S(t)+\gamma^S}{c^S(t)}, \tag{20.19}$$

$$\frac{\dot L^A(t)}{L^A(t)}=n-g\frac{\gamma^A L(t)/L^A(t)}{B^A X(t)F(k^*,\,1)},\quad \frac{\dot L^M(t)}{L^M(t)}=n$$

и

$$\frac{\dot L^S(t)}{L^S(t)}=n+g\frac{\gamma^S L(t)/L^S(t)}{B^S X(t)F(k^*,\,1)}.$$

Более того, доля дохода капитала в национальном доходе на ТПР постоянна.

Доказательство. См. упражнение 20.5. ■

Следовательно, такая модель предоставляет математически простой способ анализа структурных изменений, которые, возможно, были важны на ранних этапах развития экономики и для понимания структуры экономического роста в более развитых экономиках. Закон Энгеля (скорректированный высокоэластичным по доходу спросом на услуги) является причиной несбалансированного роста экономики со стороны спроса. В частности, по мере роста дохода домохозяйств они стремятся увеличить долю услуг в своем потреблении и снизить долю продуктов питания (сельскохозяйственных товаров). Такое поведение потребителей делает полностью сбалансированный рост экономики невозможным. Вместо этого различные секторы растут с различными темпами и в экономике происходит перераспределение капитала и занятости между секторами производства. Несмотря на это, из утверждения 20.4 следует, что если выполняется неравенство (20.18), то в экономике существует ТПР и в равновесии структурные изменения происходят при постоянных процентной ставке и доле дохода капитала в национальном доходе. Поэтому модель позволяет объяснить многие свойства процесса долгосрочного экономического развития: существование равновесной траектории, согласующейся с фактами Калдора и непрерывный процесс структурных изменений, в котором доля сельского хозяйства в производстве и занятости сокращается по мере развития экономики, а доля сферы услуг возрастает.

С другой стороны, необходимо отметить несколько недостатков этой модели. Во-первых, критик может заметить, что процесс структурных изменений в модели не настолько масштабен, как значительные структурные изменения, отмеченные С. Кузнецом. Несмотря на то что мы остановились на ТПР, нетрудно ввести в модель и переходную динамику. В упражнении 20.6 показано, что если отношение капитала к эффективному труду в начальный момент времени меньше его значения на ТПР k^* из утверждения 20.4, то в модели присутствует переходная динамика, дополняющая процесс структурных изменений. Однако даже такая переходная динамика оказывается недостаточной для описания значительных структурных изменений, отмеченных С. Кузнецом.

Во-вторых, предположение о том, что производственная функция во всех трех секторах выглядит одинаково, представляется нереалистичным. Такое предположение может быть несколько ослаблено. В упражнении 20.7 показано, каким образом это может быть сделано. Возможно, более важным является предположение о том, что в инвестициях во всех трех секторах используются исключительно промышленные товары. Это предположение схоже по своей структуре с предположением в модели из статьи [Rebelo 1991] (см. главу 11) о том, что в производстве инвестиционных товаров используется только капитал. В упражнении 20.20 показано, что ослабление этого условия ведет к невозможности согласования стилизованных фактов Кузнеца и Калдора в рамках этой модели.

В-третьих, рассмотренная выше модель построена с целью получить постоянную долю занятости в промышленности. Хотя подобная динамика в целом согласуется с историческим опытом экономики США в последние пятьдесят лет, на более ранних этапах развития подавляющая часть работников была занята в сельском хозяйстве. Поэтому ранние стадии структурных изменений в экономике могли сопровождаться ростом доли занятости в промышленности. Такая динамика достигается в некоторых моделях экономического развития с помощью введения земли как дополнительного фактора производства. Пример такой модели приведен в упражнении 20.8, а в параграфе 21.2 представлена модель, посвященная анализу динамики населения и включающая в себя землю как основной фактор производства.

Наконец, и наиболее важно, условие существования ТПР — уравнение (20.18) является достаточно ограничивающим. Почему параметры предпочтений и технологии должны быть связаны именно таким равенством? Мы не обладаем убедительными доказательствами того, что это условие выполняется (см. упражнение 20.9).

20.2. Несбалансированный экономический рост: анализ с точки зрения предложения

В предыдущем параграфе мы показали, каким образом процесс структурных изменений в экономике может быть вызван обобщенной формой закона Энгеля, то есть желанием домохозяйств изменять структуру своей потребительской корзины по мере роста дохода. Альтернативный подход к объяснению причин, по которым экономический рост может быть несбалансированным, впервые был предложен в важной работе [Baumol 1967]. В ней автор предположил, что неравномерный рост (то, что мы в книге называем несбалансированным ростом) может быть общей характеристикой процесса экономического роста, так как различие темпов роста между секторами экономики может быть следствием различий в темпе технологического прогресса в этих секторах (например, в промышленности технологический прогресс может протекать быстрее, чем в сельском хозяйстве). Несмотря на то что в исходной статье этот результат выводится из ряда специфических предположений, наблюдение о том, что в экономике могут присутствовать технологические (связанные с предложением) каналы, ведущие ее к несбалансированному росту, является намного более общим. Дальнейшее изложение материала основано на работе [Acemoglu, Guerrieri 2008], в которой описаны технологические причины несбалансированного экономического роста. В конечном счете для описания значительных структурных изменений на ранних этапах экономического развития и динамики более развитых экономик в настоящее время необходимы модели, объединяющие в себе технологический фактор и фактор предпочтений. Несмотря на это, разделение этих факторов между различными моделями упрощает их структуру и делает их более прозрачными с концептуальной точки зрения. Поэтому в этом параграфе мы на время абстрагируемся от закона Энгеля, остановимся на технологических причинах несбалансированного экономического роста и вернемся к объединению факторов технологии и предпочтений в упражнении 20.17.

20.2.1. Общие наблюдения

Теория несбалансированного экономического роста Баумоля на некотором уровне выглядит не требующей доказательств: если в некоторых секторах технологический прогресс протекает быстрее, то в равновесии в экономике должен присутствовать элемент несбалансированности. Первая цель этого параграфа состоит в демонстрации существования более тонких и убедительных причин несбалансированного экономического роста со стороны предложения, чем описанных в работе [Baumol 1967]. В частности в большинстве моделей экономического роста, например в модели Конгсамута, Ребело и Ксай, представленной в параграфе 20.1, предполагается, что производственные функции во всех секторах экономики идентичны. Однако на практике отрасли различаются по интенсивности использования капитала и других факторов производства (сравните, например, розничную торговлю с производством товаров длительного пользования и транспортом). Другими словами, отношение факторов производства различается по отраслям. Основная экономическая идея, которой посвящен этот параграф, состоит в том, что межотраслевые различия в отношении факторов производства вместе с процессом углубления капитала ведут к несбалансированному экономическому росту.

Вначале мы продемонстрируем эту идею в рамках простой, но достаточно общей модели экономики. Экономика состоит из двух секторов, каждый из которых наделен производственной функцией, обладающей свойством постоянной отдачи от масштаба, и произвольными предпочтениями на множестве товаров, производимых в этих двух секторах. В обоих секторах в производстве используются капитал K и труд L. Точная динамика процесса накопления капитала не представляет важности для выводов и поэтому мы предположим, что траектории предложения капитала и труда $[K(t),\ L(t)]_{t=0}^{\infty}$ заданы и что функции $K(t)$ и $L(t)$ дифференцируемы по времени. Предположим, что предложение труда абсолютно неэластично.

Предпочтения домохозяйств определены на конечном выпуске или на агрегате потребления, как в уравнении (20.2) в параграфе 20.1. Использование версий с агрегатом потребления или с множеством промежуточных товаров, используемых в производстве конечного товара на рынке с совершенной конкуренцией, не изменяет результатов модели. Поэтому обозначим конечный товар как Y и предположим, что он является агрегатом выпуска в двух секторах Y_1 и Y_2,

$$Y(t) = F(Y_1(t),\ Y_2(t)),$$

и, как и ранее, допустим, что функция F удовлетворяет предположениям 1 и 2 (см. главу 2). Производство в секторах задается следующими производственными функциями:

$$Y_1(t) = A_1(t)G_1(K_1(t),\ L_1(t)) \tag{20.20}$$

и

$$Y_2(t) = A_2(t)G_2(K_2(t),\ L_2(t)), \tag{20.21}$$

где переменные $L_1(t)$, $L_2(t)$, $K_1(t)$ и $K_2(t)$ обозначают количество труда и капитала, занятое в двух секторах, и функции G_1 и G_2 удовлетворяют аналогам предположений 1 и 2. Переменные $A_1(t)$ и $A_2(t)$ задают нейтральные по Хиксу технологические параметры.

Условия равенства спроса и предложения на рынках труда и капитала имеют следующий вид:

$$K_1(t) + K_2(t) = K(t) \text{ и } L_1(t) + L_2(t) = L(t) \tag{20.22}$$

в любой момент времени t. Без ограничения общности предположим, что амортизация капитала отсутствует.

Положим в каждый момент единицей измерения конечный товар и обозначим цены товаров Y_1 и Y_2 как p_1 и p_2, а заработную плату и арендную стоимость капитала (процентную ставку) как w и r соответственно. Из совершенной конкуренции на рынках товаров и факторов производства следует, что цены товаров и факторов удовлетворяют равенствам:

$$\frac{p_1(t)}{p_2(t)} = \frac{\partial F(Y_1(t),\ Y_2(t))/\partial Y_1}{\partial F(Y_1(t),\ Y_2(t))/\partial Y_2} \tag{20.23}$$

и

$$w(t) = p_1(t)\frac{\partial A_1(t)G_1(K_1(t),\ L_1(t))}{\partial L_1} = p_2(t)\frac{\partial A_2(t)G_2(K_2(t),\ L_2(t))}{\partial L_2},$$

$$r(t) = p_1(t)\frac{\partial A_1(t)G_1(K_1(t),\ L_1(t))}{\partial K_1} = p_2(t)\frac{\partial A_2(t)G_2(K_2(t),\ L_2(t))}{\partial K_2}. \tag{20.24}$$

Определим равновесие при заданном совокупном предложении факторов производства $[K(t),\ L(t)]_{t=0}^{\infty}$ как набор траекторий цен товаров и факторов производства $[p_1(t),\ p_2(t),\ w(t),\ r(t)]_{t=0}^{\infty}$ и распределения факторов по секторам экономики $[K_1(t),\ K_2(t),\ L_1(t),\ L_2(t)]_{t=0}^{\infty}$, такой, что выполняются условия (20.22), (20.23) и (20.24).

Определим доли дохода капитала в двух секторах следующим образом:

$$\sigma_1(t) \equiv \frac{r(t)K_1(t)}{p_1(t)Y_1(t)} \text{ и } \sigma_2(t) \equiv \frac{r(t)K_2(t)}{p_2(t)Y_2(t)}. \tag{20.25}$$

Мы будем говорить, что в момент времени t происходит *углубление капитала*, если выполняется неравенство $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} > \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$, и что в момент времени t наблюдается *различие в отношении факторов*, если выполняется неравенство $\sigma_1(t) \neq \sigma_2(t)$. Наконец, мы будем говорить, что технологический прогресс *сбалансирован* в момент времени t, если выполняется равенство $\dot{A}_1(t)/A_1(t) = \dot{A}_2(t)/A_2(t)$. Заметим, что различие в отношениях факторов производства говорит о различии равновесных отношений факторов в двух секторах в момент времени t. Из него не следует, что в некоторый момент времени в будущем они не могут сравняться. В следующем утверждении демонстрируются причины структурных изменений в экономике, возникающие на стороне предложения.

Утверждение 20.5. *Предположим, что в описанной выше модели в момент времени t наблюдается различие в отношении факторов производства в двух секторах экономики, технологический прогресс сбалансирован и происходит углубление капитала. Тогда рост экономики будет несбалансированным, то есть* $\dot{Y}_1(t)/Y_1(t) \neq \dot{Y}_2(t)/Y_2(t)$.

Доказательство. Во-первых, определим отношения капитала к труду и производственные функции на душу населения (без нейтрального по Хиксу технологического прогресса) в двух секторах следующим образом:

$$k_1(t) \equiv \frac{K_1(t)}{L_1(t)} \text{ и } k_2(t) \equiv \frac{K_2(t)}{L_2(t)},$$

$$g_1(k_1(t)) \equiv \frac{G_1(K_1(t),\, L_1(t))}{L_1(t)} \text{ и } g_2(k_2(t)) \equiv \frac{G_2(K_2(t),\, L_2(t))}{L_2(t)}. \quad (20.26)$$

Так как функции G_1 и G_2 дважды дифференцируемы по предположению, этим же свойством обладают и функции g_1 и g_2. Обозначим их первые и вторые производные как g'_1, g'_2, g''_1 и g''_2.

Дифференцируя производственные функции для двух секторов, мы получаем следующие равенства:

$$\frac{\dot{Y}_1(t)}{Y_1(t)} = \frac{\dot{A}_1(t)}{A_1(t)} + \sigma_1(t)\frac{\dot{K}_1(t)}{K_1(t)} + (1-\sigma_1(t))\frac{\dot{L}_1(t)}{L_1(t)},$$

$$\frac{\dot{Y}_2(t)}{Y_2(t)} = \frac{\dot{A}_2(t)}{A_2(t)} + \sigma_2(t)\frac{\dot{K}_2(t)}{K_2(t)} + (1-\sigma_2(t))\frac{\dot{L}_2(t)}{L_2(t)}.$$

Для упрощения формул опустим временной индекс в дальнейших выкладках.

Проведем доказательство методом от противного. Чтобы получить противоречие, допустим, что $\dot{Y}_1/Y_1 = \dot{Y}_2/Y_2$. Так как функция F обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, из условия $\dot{Y}_1/Y_1 = \dot{Y}_2/Y_2$ и уравнения (20.23) следует равенство

$$\frac{\dot{p}_1}{p_1} = \frac{\dot{p}_2}{p_2} = 0. \qquad (20.27)$$

Используя определение (20.26), находим из уравнений (20.24) следующие условия, описывающие равновесные значения заработной платы и процентной ставки:

$$r = p_1 A_1 g_1'(k_1) = p_2 A_2 g_2'(k_2), \qquad (20.28)$$

$$w = p_1 A_1 (g_1(k_1) - g_1'(k_1)k_1) = p_2 A_2 (g_2(k_2) - g_2'(k_2)k_2). \qquad (20.29)$$

Дифференцируя выражение для процентной ставки (20.28) по времени и используя уравнение (20.27), получаем следующее равенство:

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1} + \varepsilon_{g_1'} \frac{\dot{k}_1}{k_1} = \frac{\dot{A}_2}{A_2} + \varepsilon_{g_2'} \frac{\dot{k}_2}{k_2},$$

где

$$\varepsilon_{g_1'} \equiv \frac{g_1''(k_1)k_1}{g_1'(k_1)} \text{ и } \varepsilon_{g_2'} \equiv \frac{g_2''(k_2)k_2}{g_2'(k_2)}.$$

Из предположения $\dot{A}_1/A_1 = \dot{A}_2/A_2$ следует равенство:

$$\varepsilon_{g_1'} \frac{\dot{k}_1}{k_1} = \varepsilon_{g_2'} \frac{\dot{k}_2}{k_2}. \qquad (20.30)$$

Дифференцируя уравнение для заработной платы (20.29) по времени и используя уравнение (20.27), после некоторых преобразований получаем равенство:

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1} - \frac{\sigma_1}{1-\sigma_1} \varepsilon_{g_1'} \frac{\dot{k}_1}{k_1} = \frac{\dot{A}_2}{A_2} - \frac{\sigma_2}{1-\sigma_2} \varepsilon_{g_2'} \frac{\dot{k}_2}{k_2}.$$

Так как $\dot{A}_1/A_1 = \dot{A}_2/A_2$ и $\sigma_1 \neq \sigma_2$, это уравнение несовместно с уравнением (20.30). Таким образом, получаем противоречие, что завершает доказательство утверждения. ■

Это утверждение интуитивно очевидно. Предположим, что в экономике происходит углубление капитала и, например, сектор 2 является более капиталоинтенсивным, чем сектор 1 ($\sigma_1 < \sigma_2$). Если капитал и труд распределяются по секторам в постоянных во времени долях, то сектор 2, как более капиталоинтенсивный, растет быстрее, чем сектор 1. В равновесии более быстрый рост сектора 2 повлечет изменение равновесных цен, и снижение относительной цены в секторе 2 вызовет переток труда и капитала в сектор 1. Однако это перераспределение факторов производства не сможет полностью компенсировать больший прирост выпуска в секторе 2, так как если бы это случилось, то изменения относительных цен, вызвавшего переток факторов производства не произошло бы. Следовательно, рост экономики в равновесии будет несбалансированным.

Утверждение 20.5 связано с хорошо известной в теории международной торговли теоремой Рыбчинского. В теореме Рыбчинского утверждается, что в открытой экономике, находящейся внутри конуса диверсификации (когда цены факторов производства не зависят от их запаса внутри экономики), изменения в количестве факторов производства абсорбируются изменениями в отраслевой структуре выпуска. Утверждение 20.5 в некоторой степени является аналогом и обобщением теоремы Рыбчинского для закрытой экономики, в нем утверждается, что изменения в запасе факторов производства (углубление капитала) абсорбируются более быстрым ростом в одном из секторов экономики, даже если относительные цены товаров и факторов производства изменяются в ответ на изменение в количестве факторов.

20.2.2. Сбалансированный экономический рост и стилизованные факты Кузнеца

В подпараграфе 20.2.1 представлены общие наблюдения о том, каким образом технологические факторы могут привести к несбалансированному росту экономики. Общий результат о влиянии углубления капитала и межотраслевых различий в отношении факторов производства, представленный в утверждении 20.5, доказан в предположении о том, что траектории предложения капитала и труда $[K(t),\ L(t)]_{t=0}^{\infty}$ заданы некоторым произвольным образом. Однако, чтобы ответить на вопрос, в состоянии ли модель, основанная на технологических факторах, стать удобным инструментом для анализа стилизованных фактов Кузнеца без значительного отклонения от траектории сбалансированного роста (траектории большинства относительно развитых экономик), нам необходимо сделать процесс накопления капитала эндогенным (а также специфицировать динамику роста населения).

Для этого мы уточним структуру экономики в предыдущей модели и предположим, что предпочтения домохозяйств и производственные функции имеют некоторый специальный вид, и затем полностью опишем равновесие в такой упрощенной экономике. Как и ранее, положим, что горизонт планирования бесконечен и население растет экспоненциально с постоянным темпом $n > 0$. Предположим, что экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства со стандартными предпочтениями вида (20.1) и что предложение труда абсолютно неэластично. Углубление капитала, важность которого подчеркивается в утверждении 20.5, происходит за счет экзогенного технологического прогресса.

Вместо общего вида производственной функции в секторе конечного товара предположим, что единственный конечный товар производится с помощью агрегатора ПЭЗ следующего вида:

$$Y(t)=\left[\gamma Y_1(t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}+(1-\gamma)Y_2(t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \tag{20.31}$$

где параметр $\varepsilon \in [0, \infty)$ обозначает эластичность замещения между двумя промежуточными товарами, а параметр $\gamma \in (0, 1)$ определяет относительную важность каждого из двух товаров в производстве. Как и ранее, предположим, что амортизация капитала отсутствует и что конечный товар используется в потреблении и инвестициях, то есть имеет место ограничение

$$\dot{K}(t)+L(t)c(t)\le Y(t), \tag{20.32}$$

где переменная $c(t)$ обозначает потребление на душу населения.

Производство обоих промежуточных товаров Y_1 и Y_2 происходит на рынках с совершенной конкуренцией с помощью производственных функций следующего вида:

$$Y_1(t)=A_1(t)K_1(t)^{\alpha_1}L_1(t)^{1-\alpha_1} \text{ и } Y_2(t)=A_2(t)K_2(t)^{\alpha_2}L_2(t)^{1-\alpha_2}. \tag{20.33}$$

Далее мы будем предполагать неравенство

$$\alpha_1<\alpha_2, \tag{20.34}$$

из которого следует, что сектор 1 является менее капиталоинтенсивным, чем сектор 2. Такое предположение не ограничивает общность анализа, так как если $\alpha_1 = \alpha_2$, то в экономике отсутствуют эффекты со стороны предложения, и вопрос, рассматриваемый в этом параграфе, теряет актуальность.

Переменные A_1 и A_2 в уравнении (20.33) описывают нейтральный по Хиксу технологический прогресс, протекающий с возможно различающимися темпами:

$$\frac{\dot{A}_1(t)}{A_1(t)}=a_1>0 \text{ и } \frac{\dot{A}_2(t)}{A_2(t)}=a_2>0. \tag{20.35}$$

Условия равенства спроса и предложения на рынках труда и капитала выглядят как

$$L_1(t) + L_2(t) = L(t) \tag{20.36}$$

и

$$K_1(t) + K_2(t) = K(t). \tag{20.37}$$

Также обозначим заработную плату и процентную ставку (арендную стоимость капитала) как $w(t)$ и $r(t)$ соответственно и цены двух промежуточных товаров как $p_1(t)$ и $p_2(t)$. Как и ранее, нормализуем цену конечного товара в каждый момент времени единицей. Определим равновесие стандартным образом как набор траекторий занятости и капитала в обоих секторах и цен, таких, что при заданных ценах $\left[w(t),\ r(t),\ p_1(t),\ p_2(t)\right]_{t=0}^{\infty}$ и совокупном предложении капитала и труда $\left[K(t),\ L(t)\right]_{t=0}^{\infty}$ прибыль в промежуточных секторах достигает максимума на траекториях $\left[K_1(t),\ K_2(t),\ L_1(t),\ L_2(t)\right]_{t=0}^{\infty}$, спрос на рынках промежуточных товаров и факторов производства равен предложению при ценах $\left[w(t),\ r(t),\ p_1(t),\ p_2(t)\right]_{t=0}^{\infty}$ и полезность репрезентативного домохозяйства при ценах $\left[w(t),\ r(t),\ p_1(t),\ p_2(t)\right]_{t=0}^{\infty}$ достигает максимума на траекториях $\left[K(t),\ L(t)\right]_{t=0}^{\infty}$.

Разделим описание равновесия на две части: *статическую* и *динамическую*. В статической части рассмотрим переменные состояния экономики: запас капитала, предложение труда и уровень технологии (K, L, и A_1 и A_2) — как заданные и найдем распределение капитала и труда по секторам и равновесные цены факторов производства и промежуточных товаров. В динамической части опишем равновесную динамику эндогенной переменной состояния K.

Из выбора конечного товара в качестве единицы измерения следует равенство

$$1 = \left[\gamma^{\varepsilon} p_1(t)^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon} p_2(t)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

для всех t, а из максимизации прибыли в секторе производства конечного товара следуют равенства:

$$p_1(t) = \gamma\left(\frac{Y_1(t)}{Y(t)}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \text{ и } p_2(t) = (1-\gamma)\left(\frac{Y_2(t)}{Y(t)}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{20.38}$$

При заданной структуре экономики (и отсутствии амортизации капитала) в равновесном распределении ресурсов предельные продукты капитала и труда в обоих секторах равны между собой. Следующие уравнения описывают эти равновесные условия и цены факторов производства:

$$\gamma(1-\alpha_1)\left(\frac{Y(t)}{Y_1(t)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{Y_1(t)}{L_1(t)}=(1-\gamma)(1-\alpha_2)\left(\frac{Y(t)}{Y_2(t)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{Y_2(t)}{L_2(t)} \tag{20.39}$$

и

$$\gamma\alpha_1\left(\frac{Y(t)}{Y_1(t)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{Y_1(t)}{K_1(t)}=(1-\gamma)\alpha_2\left(\frac{Y(t)}{Y_2(t)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{Y_2(t)}{K_2(t)}, \tag{20.40}$$

а значения цен факторов производства задаются равенствами:

$$w(t)=\gamma(1-\alpha_1)\left(\frac{Y(t)}{Y_1(t)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{Y_1(t)}{L_1(t)} \tag{20.41}$$

и

$$r(t)=\gamma\alpha_1\left(\frac{Y(t)}{Y_1(t)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{Y_1(t)}{K_1(t)}. \tag{20.42}$$

Основной частью описания статического равновесия является нахождение долей капитала и труда, занятых в двух промежуточных секторах. Введем переменные $\kappa(t)\equiv K_1(t)/K(t)$ и $\lambda(t)\equiv L_1(t)/L(t)$. Объединяя уравнения (20.36), (20.37), (20.39) и (20.40), получаем следующие равенства:

$$\kappa(t)=\left[1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\left(\frac{Y_1(t)}{Y_2(t)}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\right]^{-1} \tag{20.43}$$

и

$$\lambda(t)=\left[1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}\right)\left(\frac{1-\kappa(t)}{\kappa(t)}\right)\right]^{-1}. \tag{20.44}$$

Из уравнения (20.44) нетрудно увидеть, что доля труда в секторе 1 λ является монотонно возрастающей функцией от доли капитала в секторе 1 κ. Поэтому в равновесии происходит перемещение капитала и труда в один сектор. Важным элементом структуры равновесия является зависимость распределения капитала и труда по секторам от совокупного запаса факторов производства в экономике. Эта зависимость описана в следующем утверждении.

Утверждение 20.6. *В экономике, описанной выше, в равновесии выполняются следующие условия:*

$$\frac{d\log\kappa(t)}{d\log K(t)}=-\frac{d\log\kappa(t)}{d\log L(t)}=\frac{(1-\varepsilon)(\alpha_2-\alpha_1)(1-\kappa(t))}{1+(1-\varepsilon)(\alpha_2-\alpha_1)(\kappa(t)-\lambda(t))}>0, \quad (20.45)$$

если и только если $(\alpha_2-\alpha_1)(1-\varepsilon)>0$, *и*

$$\frac{d\log\kappa(t)}{d\log A_2(t)}=-\frac{d\log\kappa(t)}{d\log A_1(t)}=\frac{(1-\varepsilon)(1-\kappa(t))}{1+(1-\varepsilon)(\alpha_2-\alpha_1)(\kappa(t)-\lambda(t))}>0, \quad (20.46)$$

если и только если $\varepsilon<1$.

Доказательство. См. упражнение 20.13. ■

В уравнении (20.45) утверждается, что если эластичность замещения между промежуточными товарами ε меньше 1, то доля капитала в капиталоинтенсивном секторе убывает по общему запасу капитала (и наоборот если $\varepsilon>1$, то эта доля возрастает по общему запасу капитала). Интуитивно, если K возрастает и κ остается неизменной, то капиталоинтенсивный сектор (сектор 2) будет расти быстрее, чем сектор 1. Тогда из уравнения для равновесных цен (20.38) следует, что если $\varepsilon<1$, то относительная цена продукции капиталоинтенсивного сектора упадет более чем пропорционально, что приведет к увеличению доли капитала в менее капиталоинтенсивном секторе 1. Интуитивное объяснение обратного утверждения (если $\varepsilon>1$) аналогично.

Более того, из уравнения (20.46) следует, что если эластичность замещения ε меньше 1, то улучшение технологии в определенном секторе ведет к снижению доли капитала, занятого в этом секторе. Интуитивное объяснение этого результата схоже: если $\varepsilon<1$, то рост выпуска в секторе влечет более чем пропорциональное падение относительной цены, что ведет к перемещению капитала из этого сектора в другие отрасли (противоположный результат и схожая интуиция имеют место в случае $\varepsilon>1$).

Объединяя уравнения (20.41) и (20.42), имеем следующие уравнения для относительной цены факторов производства и для доли дохода капитала в национальном доходе:

$$\frac{w(t)}{r(t)}=\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\left(\frac{\kappa(t)K(t)}{\lambda(t)L(t)}\right), \quad (20.47)$$

$$\sigma_K(t)\equiv\frac{r(t)K(t)}{Y(t)}=\gamma\alpha_1\left(\frac{Y_1(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\kappa(t)^{-1}. \quad (20.48)$$

Утверждение 20.7. *В модели, описанной выше, в равновесии выполняются следующие условия:*

$$\frac{d\log(w(t)/r(t))}{d\log K(t)}=-\frac{d\log(w(t)/r(t))}{d\log L(t)}=$$
$$=\frac{1}{1+(1-\varepsilon)(\alpha_2-\alpha_1)(\kappa(t)-\lambda(t))}>0, \qquad (20.49)$$

$$\frac{d\log(w(t)/r(t))}{d\log A_2(t)}=-\frac{d\log(w(t)/r(t))}{d\log A_1(t)}=$$
$$=-\frac{(1-\varepsilon)(\kappa(t)-\lambda(T))}{1+(1-\varepsilon)(\alpha_2-\alpha_1)(\kappa(t)-\lambda(t))}<0, \qquad (20.50)$$

если и только если $(\alpha_2-\alpha_1)(1-\varepsilon)>0$,

$$\frac{d\log\sigma_K(t)}{d\log K(t)}<0, \qquad (20.51)$$

если и только если $\varepsilon<1$, *и*

$$\frac{d\log\sigma_K(t)}{d\log A_2(t)}=-\frac{d\log\sigma_K(t)}{d\log A_1(t)}<0, \qquad (20.52)$$

если и только если $(\alpha_2-\alpha_1)(1-\varepsilon)>0$.

Доказательство. Уравнения (20.49) и (20.51) следуют из дифференцирования уравнения (20.47) и утверждения 20.6. Для доказательства оставшейся части утверждения опустим временной индекс и запишем равенство:

$$\left(\frac{Y_1}{Y}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}=\left[\gamma+(1-\gamma)\left(\frac{Y_1}{Y_2}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\right]^{-1}=\gamma^{-1}\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{\kappa}-1\right)\right)^{-1}.$$

Воспользовавшись утверждением 20.6 и определением σ_K, получаем уравнения

$$\frac{d\log\sigma_K}{d\log K}=-\Omega\frac{1-\sigma_K}{\sigma_K}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{(1-\varepsilon)(\alpha_2-\alpha_1)(1-\kappa)/\kappa}{1+(1-\varepsilon)(\alpha_2-\alpha_1)(\kappa-\lambda)} \qquad (20.53)$$

и

$$\frac{d\log\sigma_K}{d\log A_2}=-\frac{d\log\sigma_K}{d\log A_1}=\Omega\frac{1-\sigma_K}{\sigma_K}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{(1-\varepsilon)(1-\kappa)/\kappa}{1+(1-\varepsilon)(\alpha_2-\alpha_1)(\kappa-\lambda)}, \qquad (20.54)$$

где

$$\Omega\equiv\left[\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{\kappa}-1\right)\right)^{-1}-\left(\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{\kappa}-1\right)\right)^{-1}\right].$$

Очевидно, что $\Omega > 0$, если и только если $\alpha_1 < \alpha_2$, что соответствует предположению (20.34). Тогда из уравнений (20.53) и (20.54) следуют уравнения (20.51) и (20.52). ■

Наиболее важным результатом утверждения 20.7 является неравенство (20.51), которое связывает равновесную зависимость между долей дохода капитала в национальном доходе и общим запасом капитала с эластичностью замещения промежуточных товаров. Так как убывающая зависимость между долей дохода капитала в национальном доходе и общим запасом капитала эквивалентна тому, что капитал и труд являются валовыми дополняющими товарами в производстве, из этого утверждения следует, что эластичность замещения между капиталом и трудом будет меньше 1, если и только если ε меньше 1. Напомним наблюдения из параграфа 15.6 о том, что из многих эмпирических свидетельств следует, что эластичность замещения между трудом и капиталом меньше 1. Отсюда следует, что предположение $\varepsilon < 1$ выглядит более реалистичным.

Интуитивное объяснение утверждения 20.7 позволяет лучше понять механику модели. Аналогично рассуждениям после утверждения 20.5, если $\varepsilon < 1$, то увеличение совокупного предложения капитала в экономике ведет к росту выпуска в более капиталоинтенсивном секторе 2 по сравнению с выпуском в менее капиталоинтенсивном секторе 1 (несмотря на то что доля капитала, занятого в менее капиталоинтенсивном секторе, увеличивается, что следует из неравенства (20.45)). Далее это ведет к увеличению выпуска в более капиталоинтенсивном секторе и снижению доходности капитала (и доли дохода капитала в национальном доходе). В случае $\varepsilon > 1$ имеет место обратный результат.

Напомним из параграфа 15.2 из главы 15, что если $\varepsilon < 1$, то из неравенства (20.52) в утверждении 20.7 следует, что улучшение технологии A_1 является смещенным в сторону капитала, а улучшение технологии A_2 — смещенным в сторону труда. Интуититивное объяснение утверждения о том, что улучшение технологии в более капиталоинтенсивном секторе является смещенным в сторону труда (и наоборот), схоже с предыдущим. Если эластичность замещения между двумя секторами ε меньше единицы, то увеличение выпуска в одном секторе (в этом случае вызванное улучшением технологии) ведет к более чем пропорциональному снижению цены продукции этого сектора и, соответственно, к снижению относительного вознаграждения фактора, используемого в этом секторе более интенсивно. Если $\varepsilon > 1$, то наблюдается обратный результат и увеличение A_2 является смещенным в сторону капитала, а увеличение A_1 — смещенным в сторону труда.

Далее перейдем к описанию динамической части равновесия в модели. Уравнение Эйлера для потребления, следующее из решения задачи максимизации (20.1), выглядит как:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{1}{\theta}(r(t)-\rho). \tag{20.55}$$

Единственным финансовым активом, доступным репрезентативному домохозяйству, является капитал, поэтому условие трансверсальности принимает стандартный вид:

$$\left[\lim_{t\to\infty} K(t)\exp\left(-\int_0^t r(\tau)d\tau\right)\right]=0. \tag{20.56}$$

Это условие трансверсальности, вместе с уравнением Эйлера (20.55) и ресурсным ограничением (20.32), определяет динамику потребления на душу населения $c(t)$ и запаса капитала $K(t)$.

Определим динамическое равновесие как набор траекторий заработной платы, процентной ставки и распределения занятости и капитала по секторам $\left[w(t),\ r(t),\ \lambda(t),\ \kappa(t)\right]_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям (20.41), (20.39), (20.42), (20.40), (20.43) и (20.44) и траекторий потребления на душу населения и общего запаса капитала $\left[c(t),\ K(t)\right]_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям (20.55) и (20.56).

Введем следующие переменные для обозначения темпов роста основных переменных в модели:

$$\frac{\dot{L}_s(t)}{L_s(t)}\equiv n_s(t),\ \frac{\dot{K}_s(t)}{K_s(t)}\equiv z_s(t),\ \frac{\dot{Y}_s(t)}{Y_s(t)}\equiv g_s(t)$$

при $s=1,2$ и

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}\equiv z(t),\ \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}\equiv g(t).$$

В случае когда они существуют, введем также асимптотические (предельные) темпы роста:

$$n_s^*=\lim_{t\to\infty} n_s(t),\ z_s^*=\lim_{t\to\infty} z_s(t),\ g_s^*=\lim_{t\to\infty} g_s(t)$$

при $s=1,2$. Аналогичным образом обозначим асимптотическое распределение труда и капитала между секторами звездочкой (*):

$$\kappa^*=\lim_{t\to\infty}\kappa(t),\ \lambda^*=\lim_{t\to\infty}\lambda(t).$$

Используя эти обозначения, сформулируем следующее полезное утверждение.

Утверждение 20.8.

1. *Если* $\varepsilon < 1$, *то* $n_1(t) \gtreqless n_2(t) \Leftrightarrow z_1(t) \gtreqless z_2(t) \Leftrightarrow g_1(t) \lesseqgtr g_2(t)$.
2. *Если* $\varepsilon > 1$, *то* $n_1(t) \gtreqless n_2(t) \Leftrightarrow z_1(t) \gtreqless z_2(t) \Leftrightarrow g_1(t) \gtreqless g_2(t)$.

Доказательство. Дифференцируя уравнение (20.39) по времени и опуская временной индекс, получаем равенство:

$$\frac{1}{\varepsilon}g + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}g_1 - n_1 = \frac{1}{\varepsilon}g + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}g_2 - n_2, \tag{20.57}$$

из которого следует, что $n_1 - n_2 = (\varepsilon - 1)(g_1 - g_2)/\varepsilon$, что доказывает первую часть утверждения. Аналогичным образом, дифференцируя уравнение (20.40), получаем равенство:

$$\frac{1}{\varepsilon}g + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}g_1 - z_1 = \frac{1}{\varepsilon}g + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}g_2 - z_2, \tag{20.58}$$

из которого следует вторая часть утверждения. ■

Из этого утверждения следует простой, но на первый взгляд противоречащий интуиции результат о том, что если эластичность замещения между промежуточными товарами меньше единицы, то равновесные темпы роста капитала и занятости в секторе, растущем быстрее, оказываются ниже, чем их темпы роста в другом секторе. Если эластичность замещения больше единицы, то имеет место противоположный результат. Чтобы привести интуитивное объяснение этого утверждения, заметим, что изменения условий торговли (относительных цен) благоприятствуют сектору, растущему медленнее. Если эластичность замещения ε меньше единицы, то такое изменение относительных цен оказывается более чем пропорциональным по сравнению с изменениями объемов, и это стимулирует перемещение факторов производства в медленнее растущий сектор экономики.

Утверждение 20.9. *Предположим, что асимптотические темпы роста* g_1^* *и* g_2^* *существуют. Тогда если* $\varepsilon < 1$, *то* $g^* = \min\{g_1^*, g_2^*\}$, *а если* $\varepsilon > 1$, *то* $g^* = \max\{g_1^*, g_2^*\}$.

Доказательство. Дифференцируя производственную функцию конечного товара (20.31), получаем следующее равенство:

$$g(t) = \frac{\gamma Y_1(t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} g_1(t) + (1-\gamma) Y_2(t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} g_2(t)}{\gamma Y_1(t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) Y_2(t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}. \tag{20.59}$$

Из этого уравнения следует, что при $\varepsilon < 1$ $g^* = \min\{g_1^*, g_2^*\}$ при $t \to \infty$. Аналогичным образом, при $\varepsilon > 1$ $g^* = \max\{g_1^*, g_2^*\}$ при $t \to \infty$. ■

Следовательно, если эластичность замещения между промежуточными товарами меньше единицы, то асимптотический темп роста совокупного выпуска в экономике определяется сектором, растущим медленнее. В случае $\varepsilon > 1$ наблюдается противоположный результат.

Как и в предыдущем параграфе, остановимся на ТПР — равновесной траектории, на которой асимптотический темп роста потребления на душу населения определен и составляет постоянную величину, то есть $\lim_{t\to\infty} \dot{c}(t)/c(t) = g_c^*$. Далее нам будет более удобно работать с темпом роста совокупного потребления, а не потребления на душу населения, поэтому определим темп роста совокупного потребления как $\lim_{t\to\infty} \dot{C}(t)/C(t) \equiv g_C^* = g_c^* + n$. Из уравнения Эйлера для потребления (20.55) следует, что если совокупное потребление или потребление на душу населения растут с асимптотически постоянным темпом, то процентная ставка также будет асимптотически постоянной, то есть $\lim_{t\to\infty} \dot{r}(t) = 0$.

Чтобы гарантировать существование ТПР в экономике, наложим следующее ограничение на параметры модели:

$$\rho - n \geq (1-\theta)\max\left\{\frac{a_1}{1-\alpha_1},\ \frac{a_2}{1-\alpha_2}\right\}, \tag{20.60}$$

из которого следует, что полезность репрезентативного домохозяйства конечна и выполняется условие трансверсальности (20.56). В равновесии естественным образом возникают выражения вида $a_1/(1-\alpha_1)$ или $a_2/(1-\alpha_2)$, так как они описывают скорректированный темп технологического прогресса. В частности заметим, что в каждом секторе происходит процесс углубления капитала, связанный с технологическим прогрессом. Суммарный эффект на производительность труда (и темп роста выпуска) зависит от темпа технологического прогресса, скорректированного темпом углубления капитала. Выражения $a_1/(1-\alpha_1)$ или $a_2/(1-\alpha_2)$ описывают такой скорректированный эффект, так как более высокое значение параметра α_s соответствует большей доле капитала в секторе $s = 1, 2$ и поэтому более высокому темпу скорректированного технологического прогресса при заданном темпе нейтральных по Хиксу технологических изменений. В свете этого наблюдения условие (20.60) может быть проинтерпретировано как утверждение о том, что для выполнения условия трансверсальности (20.56) скорректированный темп технологического прогресса должен быть достаточно низким.

Следующее утверждение характеризует ТПР. Вместо того чтобы описывать общий случай модели, остановимся на частном случае, когда параметры модели удовлетворяют одному из следующих неравенств:

$$a_1/(1-\alpha_1) < a_2/(1-\alpha_2) \text{ и } \varepsilon < 1 \tag{20.61}$$

или

$$a_1/(1-\alpha 1) > a_2/(1-\alpha_2) \text{ и } \varepsilon > 1.$$

Это условие позволит получить простое описание ТПР. В частности из него следует, что сектор 1 является асимптотически доминантным сектором экономики, так как в нем технологический прогресс протекает медленнее в случае $\varepsilon < 1$ и быстрее в случае $\varepsilon > 1$. Заметим также, что по отмеченным выше причинам подходящим сравнением является сравнение $a_1/(1-\alpha_1)$ с $a_2/(1-\alpha_2)$, а не сравнение a_1 с a_2 Результат этого утверждения для случая выполнения обратного к неравенству (20.61) условия обобщается в упражнении 20.14.

Утверждение 20.10. *Предположим, что выполняются условия* (20.34), (20.60) *и* (20.61). *Тогда в описанной выше модели существует ТПР, такая, что*

$$g^* = g_C^* = g_1^* = z_1^* = n + g_c^* = n + \frac{1}{1-\alpha_1}a_1, \tag{20.62}$$

$$z_2^* = n - (1-\varepsilon)a_2 + (1+(1-\varepsilon)(1-\alpha_2))\frac{a_1}{1-\alpha_1} > g^*, \tag{20.63}$$

$$g_2^* = n + \varepsilon a_2 + (1-\varepsilon(1-\alpha))\frac{a_1}{1-\alpha_1} > g^*, \tag{20.64}$$

$$n_1^* = n \text{ и } n_2^* = n - (1-\varepsilon)(1-\alpha_2)\left(\frac{a_2}{1-\alpha_2} - \frac{a_1}{1-\alpha_1}\right) < n_1^*. \tag{20.65}$$

Доказательство. Во-первых, предположим, что $g_2^* \geq g_1^* > 0$ и $\varepsilon > 1$. Тогда из уравнений (20.43) и (20.44) следует, что $\lambda^* = \kappa^* = 1$. Тогда из утверждения 20.9 следует равенство $g^* = g_1^*$. Из этого уравнения и условий (20.33), (20.57) и (20.58) находим единственные значения переменных n_1^*, n_2^*, z_1^*, z_2^*, g_1^* и g_2^*, которые заданы уравнениями (20.62), (20.63), (20.64) и (20.65).Заметим, что это решение не противоречит условию $g_2^* > g_1^* > 0$, так как из условий (20.34) и (20.60) следуют неравенства $g_2^* > g_1^*$ и $g_1^* > 0$. Наконец, $C(t) = c(t)L(t) \leq Y(t)$, и из ограничений (20.32) и (20.56) следует, что темп роста совокупного потребления g_C^* равен темпу роста выпуска g^*. Чтобы убедиться в этом, допустим, что это не так. Тогда из предела $C(t)/Y(t) \to 0$ при

$t \to \infty$ и ресурсного ограничения (20.32) следует, что $\dot{K}(t) = Y(t)$ асимптотически при $t \to \infty$. Интегрируя это равенство, получаем предел $K(t) \to \int_0^t Y(s)ds$ при $t \to \infty$, и, так как выпуск растет экспоненциально, капитал растет быстрее, чем экспоненциально, что противоречит условию трансверсальности (20.56).

Далее покажем, что в равновесии с z_1^*, z_2^*, m_1^*, m_2^*, g_1^* и g_2^* выполняется условие трансверсальности (20.56). В частности условие (20.56) выполняется, если имеет место неравенство

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = r^*, \tag{20.66}$$

где параметр r^* обозначает постоянную асимптотическую процентную ставку. Так как из уравнения Эйлера (20.55) следует равенство $r^* = \theta g^* + \rho$, неравенство (20.66) выполняется, если $g^*(1 - \theta) < \rho$. Из условия (20.66) следует, что оно выполняется, если $g^* = n + a_1/(1 - \alpha_1)$. Рассуждения в случае $g_1^* \geq g_2^* > 0$ и $\varepsilon > 1$ аналогичны и оставлены читателю в качестве упражнения 20.14.

Для завершения доказательства необходимо показать, что при $\varepsilon < 1$ на всех ТПР выполняется неравенство $g_2^* \geq g_1^* > 0$ (случай $g_1^* \geq g_2^* > 0$ и $\varepsilon > 1$ рассмотрен в упражнении 20.14). Проведем доказательство методом от противного. Для этого найдем два противоречия в предположениях (1) $g_1^* \geq g_2^*$ и (2) $g_2^* \geq g_1^*$, но $g_1^* \leq 0$.

1. Допустим, что $g_1^* \geq g_2^*$ и $\varepsilon < 1$. Тогда из рассуждений выше следует, что единственное решение системы уравнений (20.33), (20.57) и (20.58), описывающей равновесие при $\varepsilon < 1$, выглядит следующим образом:

$$g^* = g_C^* = g_2^* = z_2^* = n + \frac{a_2}{1-\alpha_2},$$

$$z_1^* = n - (1-\varepsilon)a_1 + (1 + (1-\varepsilon)(1-\alpha_1))\frac{a_1}{1-\alpha_1},$$

$$g_1^* = n + \varepsilon a_1 + (1 - \varepsilon(1-\alpha_1))\frac{a_1}{1-\alpha_1}. \tag{20.67}$$

и схожие уравнения для n_1^* и n_2^*. Из этих уравнений следует неравенство $g_1^* < g_2^*$, которое противоречит предположению $g_1^* \geq g_2^* > 0$. Доказательство для случая $\varepsilon > 1$ аналогично.

2. Предположим, что $g_2^* \geq g_1^*$ и $\varepsilon < 1$. Тогда, рассуждая как в части (1), находим единственное решение равновесной системы уравнений (20.33), (20.57) и (20.58), которое задается условиями (20.62)–(20.65). В этом случае уравнение (20.62) напрямую противоречит предположению $g_1^* \leq 0$. Наконец, предположим, что $g_2^* \geq g_1^*$ и $\varepsilon > 1$. Тогда единственное решение равновесной системы задается условиями в части (1). Однако в этом случае уравнение (20.67) противоречит предположению $g_1^* \leq 0$, что завершает доказательство утверждения. ■

Необходимо отметить несколько следствий из этого утверждения. Во-первых, если выполняется неравенство $a_1/(1-\alpha_1) \neq a_2/(1-\alpha_2)$, то рост экономики не сбалансирован. Интуитивное объяснение этого результата аналогично объяснению утверждения 20.5. Предположим, для конкретики, что $\varepsilon < 1$ и $a_1/(1-\alpha_1) < a_2/(1-\alpha_2)$ (эти неравенства будут иметь место в случае, если, например, $a_1 \approx a_2$). Тогда из различий в интенсивности использования капитала в двух секторах и углубления капитала в экономике (которое является следствием технологического прогресса) следует, что более капиталоинтенсивный сектор 2 будет расти быстрее. Интуитивно, если капитал распределен между секторами пропорционально, то сектор 2 растет быстрее. Вследствие изменений цен капитал и труд будут перемещаться в менее капиталоинтенсивный сектор и относительная занятость в секторе 1 возрастет. Однако важный момент состоит в том, что такого перемещения факторов производства будет недостаточно для того, чтобы полностью компенсировать более быстрый рост реального выпуска в более капиталоинтенсивном секторе. Это наблюдение показывает, что предположение о сбалансированном технологическом прогрессе в утверждении 20.5 (которое в данном случае соответствует равенству $a_1 = a_2$) не является необходимым, а используется лишь для того, чтобы исключить частный случай, когда относительные темпы технологического прогресса *в двух секторах находятся в точности в соотношении*, ведущем к сбалансированному экономическому росту (в данном случае $a_1/(1-\alpha_1) = a_2/(1-\alpha_2)$).

Во-вторых, выражения для темпов роста на ТПР достаточно просты. Это связано с тем, что мы ограничили внимание множеством параметров, на котором сектор 1 является асимптотически доминантным сектором экономики (см. неравенства (20.61)). Если, в дополнение, $\varepsilon < 1$, то модель обладает более богатой динамикой, когда долгосрочный рост экономики определяется наиболее медленно растущим сектором, а капитал и труд перемещаются из наиболее быстро растущего сектора, но с таким темпом, что он продолжает расти быстрее, чем другие сектора.

В-третьих, на ТПР доли труда и капитала, занятых в одном из секторов, сходятся к единице (например, если сектор 1 является асимптотически доминирующим сектором, то $\lambda^* = \kappa^* = 1$). Несмотря на это, в любой момент времени выпуск в обоих секторах положителен, то есть этот предел не достигается за конечное время. На самом деле темпы роста обоих секторов в любой момент времени превышают темп роста населения. Более того, если $\varepsilon < 1$, то сектор, в котором доли труда и капитала сокращаются, в любой момент времени растет быстрее, чем другие сектора экономики, даже асимптотически. Следовательно, темп, с которым капитал и труд утекают из этого сектора, в равновесии определяется таким образом, чтобы этот сектор продолжал оставаться наиболее быстро растущим сектором экономики. В этом смысле несбалансированный рост не является тривиальным равновесием (когда один из секторов перестает существовать). Темпы роста выпуска в обоих секторах остаются положительными, но различными в любой момент времени.

Наконец, нетрудно убедиться, что на ТПР доля дохода капитала в национальном доходе и процентная ставка постоянны (см. упражнение 20.15). Например, если выполняются неравенства (20.61), то $\sigma_K^* = \alpha_1$. С другой стороны, если они не выполняются, то $\sigma_K^* = \alpha_2$. Таким образом, асимптотическая доля дохода капитала в национальном доходе всегда отражает долю дохода капитала в асимптотически доминантном секторе экономики. Следовательно, модель, основанная на технологических причинах несбалансированного роста, в целом согласуется с фактами Калдора и фактами Кузнеца (хотя эта модель также демонстрирует значительные отклонения от упорядоченной динамики, описываемой фактами Калдора, если экономика находится вне ТПР). Мы до сих пор не доказали асимптотическую устойчивость ТПР. Этому посвящено упражнение 20.16, в котором также приведено альтернативное доказательство утверждения 20.10. Следовательно, модель, основанная на технологических факторах, также может использоваться для адекватного описания структурных изменений в экономике. Очевидно, что для описания значительных долгосрочных изменений в структуре выпуска и занятости необходимо объединить факторы предпочтений и технологические факторы, описанные в двух последних параграфах. Первый шаг в этом направлении сделан в упражнении 20.17.

20.3. Производительность в аграрном секторе и индустриализация

Несмотря на то что модели, представленные в параграфах 20.1 и 20.2, показывают, как факторы предпочтений и технологические факторы могут привести к структурным изменениям в экономике (и как структурные изменения могут быть согласованы с постоянной ТСР и фактами Калдора), они не объясняют процесс индустриализации. Эмпирические свидетельства, представленные в главе 1, показывают, что этот процесс, начавшийся в Европе в конце XVIII в., является основной причиной современного экономического роста и межстрановых различий в уровне дохода на душу населения. Поэтому естественным образом возникает вопрос о том, почему в некоторых странах индустриализация началась и затем проходила быстрыми темпами, а в других странах этого не произошло. Из наблюдений в главе 1 также следует, что ответ на этот вопрос может помочь найти причины сегодняшних межстрановых различий в уровне дохода на душу населения.

Следовательно, полезно будет развить несколько подходов к ответу на этот вопрос и затем оценить все их хорошие и плохие свойства. Несмотря на то что это является одной из задач книги, мы не станем описывать все модели в данной главе. Первый подход, основанный на работе [Acemoglu, Zilibotti 1997], уже представлен как приложение стохастических моделей экономического роста в параграфе 17.6. Несмотря на то что эта теория описывает общий процесс «взлета» экономики, большинство случаев «взлета» в истории связано именно с процессом индустриализации. Поэтому модель из параграфа 17.6 может потенциально использоваться для объяснения причин индустриализации, основанного на успешности инвестиций в различные отрасли экономики, осуществляемых в различных странах. В частности, общества, которые использовали значительную долю своих ресурсов на инвестиции в секторы, которые оказались неуспешными или ex post низкопроизводительными, были менее успешными, чем общества, которые осуществляли инвестиции в секторы и проекты, которые ex post оказались более производительными. В следующей главе мы рассмотрим еще один подход к причинам индустриализации, основанный на теории о провале координации и «большом толчке», предложенной П. Розенштейном-Роданом.

Прежде чем перейти к моделям провалов рынка в экономическом развитии, остановимся на другом подходе, который может пролить свет на факторы, способствующие процессу индустриализации, и, возможно, даже ускоряющие его. Общепринятый вывод из литературы по экономической истории состоит в том, что Англия в XVIII в. была наиболее подходящим местом для начала процесса индустриализации по причине высокой производительности в сельском хозяйстве (см., например, работы: [Nurske 1958; Rostow 1960; Mokyr 1993; Overton 1996]). Основная идея, стоящая за этим утверждением, заключается в том, что страны с высокой производительностью в сельском хозяйстве могут позволить перемещение значительной части рабочей силы в промышленный сектор экономики. В этом случае из предположения о некоторой степени возрастающей отдачи от масштаба (вследствие технологической структуры или вида функций спроса) следует, что возможность перемещения некоторой критической доли рабочей силы в промышленный сектор экономики является важным элементом, характеризующим ранний этап промышленного развития.

В этом параграфе мы опишем модель, основанную на статье [Matsuyama 1992], в которой формализуется вышеизложенная интуиция. Эта модель естественным образом дополняет модели, изложенные выше в этой главе, так как она также является моделью структурных изменений в экономике. В ней объединяются закон Энгеля и экстерналии от обучения в процессе производства в промышленном секторе. Она не только предоставляет математически простой инструментарий для анализа взаимосвязей между производительностью в сельском хозяйстве и индустриализацией, но также позволяет провести анализ влияния международной торговли на процесс индустриализации (аналогично модели из параграфа 19.7 из предыдущей главы).

Модель построена в непрерывном времени. Население постоянно и нормализовано единицей. Предположим, что экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства, целевая функция которого имеет следующий вид:

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t)(c^A(t)-\gamma^A)^\eta c^M(t)^{1-\eta}dt. \tag{20.68}$$

Такие предпочтения схожи с предпочтениями (20.1), переменная $c^A(t)$, как и ранее, обозначает потребление сельскохозяйственных товаров, переменная $c^M(t)$ — потребление промышленных товаров в момент времени t, а параметр γ^A — минимально необходимое для поддержания жизнедеятельности потребление продуктов питания. В дополнение параметр ρ является нормой дисконтирования, а параметр $\eta \in (0, 1)$ описывает важность в функции полезности сельскохозяйственных товаров по сравнению с промышленными товарами. Репрезентативное домохозяйство абсолютно неэластично поставляет занятость на рынок труда. В тексте главы мы опишем модель для закрытой экономики, а расширение модели для случая открытой экономики оставим читателю в качестве упражнения 20.20.

Предположим, что производственные функции в двух секторах имеют следующий вид:

$$Y^M(t) = X(t)F(L^M(t)) \text{ и } Y^A(t) = B^A G(L^A(t)), \tag{20.69}$$

где, как и ранее, переменные Y^M и Y^A обозначают совокупный выпуск сельскохозяйственных и промышленных товаров соответственно, а переменные L^M и L^A — занятость в двух секторах экономики. Производственные функции F и G обладают свойством убывающей предельной производительности труда. Более формально — положим, что функции F и G дифференцируемы и строго вогнуты. То есть $F(0) = 0$, $F'(\cdot) > 0$, $F''(\cdot) < 0$, $G(0) = 0$, $G'(\cdot) > 0$, $G''(\cdot) < 0$. Убывающая предельная производительность труда может быть следствием того, что в производстве в дополнение к труду используется земля или какой-либо другой фактор производства. Из убывающей производительности следует, что если цена труда определяется на рынке совершенной конкуренции, то в равновесии фирмы получают положительную прибыль, которая распределяется между домохозяйствами.

Основным свойством модели индустриализации является отсутствие технологического прогресса в аграрном секторе. С другой стороны производственная функция промышленных товаров в уравнениях (20.69) включает в себя множитель $X(t)$, который описывает технологический прогресс в промышленности. Несмотря на отсутствие технологического прогресса в сельском хозяйстве, значения параметра производительности B^A могут различаться между странами, отражая либо динамику исторического технологического прогресса, приведшего к новым методам ведения сельского хозяйства, либо различия в качестве земли в разных странах (для простоты мы опишем равновесие в одной стране). Эмпирические свидетельства говорят о значительных межстрановых различиях в производительности труда и СФП в сельском хозяйстве в настоящее время, поэтому предположение о возможных различиях в значении параметра B^A выглядит разумным. Из современных исследований также следует, что представление о сельском хозяйстве как о квазизастойном секторе, не испытывающем технологический прогресс, не совсем аккуратно. В действительности в этом секторе происходят как масштабное замещение труда капиталом, так и значительные технологические изменения. Несмотря на это, данная модель может рассматриваться как хорошая начальная точка в исследовании причин индустриализации.

Условие равенства спроса и предложения на рынке труда имеет вид:

$$L^M(t) + L^A(t) \le 1.$$

Обозначим долю труда, занятого в промышленности в момент времени t, как $n(t)$. Так как предложение труда в экономике неэластично, $L^M(\mathrm{t}) = n(t)$ и $L^A(t) = 1 - n(t)$.

Основное предположение модели касается динамики производительности в промышленности $X(t)$, которая определяется экстерналией от обучения в процессе производства, как в модели в статье [Romer 1086a] из главы 11. В частности, предположим, что изменение производительности в промышленности пропорционально объему текущего выпуска в отрасли:

$$\dot{X}(t) = \kappa Y^M(t), \tag{20.70}$$

где параметр $\kappa > 0$ описывает величину эффекта обучения в процессе производства и начальное значение производительности $X(0) > 0$ в момент времени $t = 0$ рассматривается как заданное. Как и в модели Ромера, отдельная фирма не имеет возможности воспользоваться эффектом обучения в процессе производства. Такой тип внешнего для фирмы обучения в процессе производства является сокращенной формой общего подхода к моделированию увеличения производительности в промышленном секторе. При этом из анализа в предыдущих главах следует, что выбор технологии нетрудно сделать эндогенным, например включив в модель монополистическую конкуренцию, и при стандартных предположениях из части IV в такой более богатой модели эндогенного технологического прогресса будет присутствовать эффект размера рынка, из которого следует уравнение, схожее с уравнением (20.70). Такая модель рассмотрена в упражнении 20.19.

Спрос на труд каждой фирмы в равновесии определяется равенством предельного продукта труда и заработной платы $w(t)$. В качестве единицы измерения выберем сельскохозяйственные товары (то есть нормализуем их цену единицей), а также предположим, что равновесие не является вырожденным и в нем выпуск в обоих секторах положителен. Тогда равновесие на рынке труда определяется следующими равенствами:

$$w(t) = B^A G'(1 - n(t)) \text{ и } w(t) = p(t)X(t)F'(n(t)),$$

где переменная $p(t)$ обозначает относительную цену промышленного товара (по сравнению с ценами сельскохозяйственных товаров). Следовательно, в равновесии имеет место равенство:

$$B^A G'(1 - n(t)) = p(t)X(t)F'(n(t)). \tag{20.71}$$

Присутствие в целевой функции (20.68) параметра $\gamma^A > 0$ означает, что предпочтения домохозяйства не являются гомотетичными, и эластичность спроса на сельскохозяйственные товары по доходу меньше единицы (в то время как для спроса на промышленные товары она превышает единицу). Как мы отметили ранее, это является наиболее простым способом введения в модель закона Энгеля.

Предположим, что производительность в сельском хозяйстве достаточно высока для того, чтобы удовлетворить минимальные потребности всего населения экономики (которое мы нормализовали единицей):

$$B^A G(1) > \gamma^A > 0. \tag{20.72}$$

Если неравенство (20.72) не выполняется, то сельскохозяйственный сектор экономики не в состоянии произвести количество продуктов питания, достаточное для выживания всех домохозяйств.

Наконец, бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства выполняется в каждый момент времени t и имеет вид:

$$c^A(t) + p(t)c^M(t) \leq w(t) + \pi(t),$$

где переменная $\pi(t)$ обозначает размер прибыли на одно репрезентативное домохозяйство, возникающей ввиду убывающей предельной производительности в производственных технологиях.

Определим равновесие в экономике стандартным образом как набор траекторий потребления обоих товаров и распределения труда между секторами в каждый момент времени, таких, что полезность репрезентативного домохозяйства и прибыль фирм достигают максимума при заданных ценах, а цены товаров и факторов производства определяются условиями равенства спроса и предложения на всех рынках.

Из максимизации целевой функции (20.68) следует условие:

$$c^A(t) = \gamma^A + \eta p(t)c^M(t)/(1-\eta). \tag{20.73}$$

Так как экономика закрыта, производство должно совпадать с потреблением, поэтому

$$c^A(t) = Y^A(t) = B^A G(1 - n(t)) \text{ и } c^M(t) = Y^M(t) = X(t)F(n(t)).$$

Далее, объединяя эти равенства с уравнениями (20.71) и (20.73), получаем следующее условие:

$$\phi(n(t)) = \frac{\gamma^A}{B^A}, \tag{20.74}$$

где функция $\phi(\cdot)$ выглядит как

$$\phi(n) \equiv G(1-n) - \frac{\eta G'(1-n)F(n)}{(1-\eta)F'(n)}$$

и является строго убывающей. Более того, $\phi(0) = G(1)$ и $\phi(1) < 0$. Функция $\phi(\cdot)$ может быть проинтерпретирована как функция совокупного относительного спроса на промышленные товары по сравнению с сельскохозяйственными товарами. Равновесие в экономике должно удовлетворять уравнению (20.74). Из предположения (20.72) и свойств функции ϕ следует, что условие равновесия (20.74) обладает единственным внутренним решением, в котором

$$n(t) = n^* \in (0, 1).$$

Отметим одно важное следствие. Хотя эта модель, как и модели из параграфов 20.1 и 20.2, является моделью структурных изменений, в ней происходит лишь изменение структуры выпуска, а доля рабочей силы, занятой в сельском хозяйстве, остается постоянной и равной $1 - n^*$. Поэтому несмотря на то что такая модель может использоваться для описания начала процесса индустриализации, она не в состоянии объяснить изменения в межотраслевой структуре занятости в мировой экономике в течение последних ста пятидесяти — двухсот лет.

Далее, из уравнения (20.74) следует, что единственное равновесное распределение рабочей силы по секторам экономики удовлетворяет условию:

$$n^* = \phi^{-1}\left(\frac{\gamma^A}{B^A}\right). \tag{20.75}$$

Из строгой монотонности функции ϕ следует, что функция ϕ^{-1} также строго убывает и поэтому доля рабочей силы, занятой в промышленности n^*, строго возрастает по производительности в сельском хозяйстве B^A. Следовательно, наиболее важным результатом этой модели является утверждение о том, что доля занятости в промышленности увеличивается при росте производительности в сельском хозяйстве. Этот результат интуитивен: если функция полезности имеет вид функции Кобба—Дугласа и предпочтения гомотетичны, то распределение рабочей силы между секторами постоянно и не зависит от производительности в них. Однако в этой модели предпочтения не являются гомотетичными, и производство продуктов питания должно превышать некоторый необходимый минимум. Если производительность труда в сельском хозяйстве B^A достаточно высока, то для производства такого минимального количества товаров достаточна небольшая доля рабочей силы и поэтому большая доля работников может быть занята в промышленности.

Этот результат, вместе с обучением в процессе производства (см. уравнение (20.70)), является ключевым в описании связи между производительностью в сельском хозяйстве и индустриализацией экономики. В частности из уравнения (20.70) следует, что выпуск в промышленном секторе растет с постоянным темпом $\kappa F(n^*)$, который, как нетрудно заметить из уравнения (20.75), также возрастает по B^A. Следовательно, данная модель является простой формализацией часто выдвигаемой гипотезы о связи между производительностью в сельском хозяйстве и начале процесса индустриализации.

Заметим также, что в равновесии в модели выпуск в сельском хозяйстве остается постоянным во времени, так как доли занятости в промышленности и в сельском хозяйстве не изменяются, и в сельском хозяйстве не происходит технологического прогресса. Весь рост экономики происходит за счет промышленного сектора. Однако, так как промышленные и сельскохозяйственные товары не являются совершенными заменителями, относительные цены изменяются и расходы домохозяйств на сельскохозяйственные товары возрастают во времени (см. упражнение 20.18). Вышеприведенные рассуждения резюмируются в следующем утверждении.

Утверждение 20.11. *В модели, описанной выше, обучение в процессе производства и закон Энгеля ведут к существованию единственного равновесия, в котором доля рабочей силы, занятой в промышленном секторе, постоянна и равна* $n^* \equiv \phi^{-1}(\gamma^A/B^A)$, *а выпуск и потребление промышленных товаров растут с постоянным темпом* $\kappa F(n^*)$, *который является возрастающей функцией от производительности в сельском хозяйстве* B^A.

Выше мы описали равновесие в модели закрытой экономики. Основной результат состоит в том, что более высокое значение производительности в сельском хозяйстве ведет к увеличению темпа роста промышленного сектора и, следовательно, темпа роста всей экономики, так как более высокое значение производительности в сельском хозяйстве позволяет ей занять бóльшую долю рабочей силы в секторе, производящем знания (в данном случае в промышленном секторе).

Важным преимуществом этой модели является ее математическая простота. Она позволяет использовать модель для анализа связанных вопросов, таких как влияние вступления экономики в международную торговлю на процесс индустриализации. Этому посвящено упражнение 20.20, в котором показано, что роли производительности в сельском хозяйстве в закрытой и открытой экономиках могут существенно различаться. Например, рост производительности в сельском хозяйстве в открытой экономике может замедлить или даже не допустить начала индустриализации, а не стимулировать ее, как это происходит в закрытой экономике. Причина этого связана с экономическими механизмами, описанными в параграфе 19.7 главы 19: специализация в соответствии со сравнительными преимуществами может привести к отрицательным долгосрочным последствиям в случае присутствия экстерналий в определенном секторе экономики. Однако, как мы отметили ранее, эмпирические свидетельства существования экстерналий такого типа не выглядят убедительными. Следовательно, роль международной торговли в динамике процесса индустриализации, скорее всего, более сложна, чем следует из упражнения 20.20. Несмотря на это, данное упражнение демонстрирует, что предположение об открытости экономики позволяет расширить анализ структурных изменений.

20.4. Основные выводы

Эта глава является первым шагом в анализе структурных изменений, происходящих в процессе экономического развития. Этот шаг был достаточно скромным. Мы остановились на структурных изменениях, связанных с (1) сдвигом структуры выпуска и занятости в экономике от сельского хозяйства к промышленности и сфере услуг и (2) изменениями в секторах с различной интенсивностью использования капитала. Параграф 20.1

посвящен причинам несбалансированности экономического роста со стороны совокупного спроса, связанным со структурой предпочтений домохозяйств. Мы ввели в базовую неоклассическую модель экономического роста закон Энгеля, говорящий о том, что доля расходов домохозяйств на сельскохозяйственные товары снижается по мере роста их доходов. Такая модель хорошо подходит для анализа структурных изменений на уровне основных секторов экономики, таких как сельское хозяйство, промышленность и сфера услуг. С другой стороны, параграф 20.2 посвящен причинам несбалансированности экономического роста со стороны совокупного предложения, связанным с технологиями, которые впервые были описаны в классической статье [Baumol 1967]. Однако вместо предположения об экзогенно заданных различиях в темпах технологического прогресса между секторами мы показали, как межотраслевые различия в интенсивности использования капитала могут привести к несбалансированности роста экономики. Мы убедились, что капиталоинтенсивные секторы экономики растут быстрее вследствие пропорционального увеличения отношения капитала к труду в них. Это свойство модели, вместе с предположением об углублении капитала в экономике, естественным образом приводит к несбалансированному экономическому росту. Такой несбалансированный рост экономики может осуществлять вклад в структурные изменения в сельском хозяйстве, промышленности и сфере услуг, но становится более важным в анализе динамики секторов с различной интенсивностью использования капитала. Важной задачей параграфов 20.1 и 20.2 является согласование несбалансированности роста на уровне отдельных секторов экономики с относительно сбалансированным ростом на агрегированном уровне. Как мы отметили в главе 2, не стоит воспринимать сбалансированность экономического роста буквально. В лучшем случае такой взгляд на динамику экономики является аппроксимацией. Однако он является хорошей аппроксимацией многих элементов процесса экономического роста в развитых экономиках, в которых процентные ставки и доля дохода капитала в ВВП остаются относительно неизменными в течение последних ста лет. Поэтому понимание того, как значительные изменения в распределении ресурсов между секторами происходят на фоне сбалансированной динамики агрегированной экономики, является важной задачей. Модели из параграфов 20.1 и 20.2 позволяют увидеть некоторые причины такой динамики, однако выводы из них, скорее всего, являются предварительными, а не окончательными.

Мы также описали простую модель процесса индустриализации. В ней показано, каким образом производительность в сельском хозяйстве может быть определяющим фактором начала индустриализации. Исследование процесса индустриализации является важной частью теории экономического роста, отчасти потому, что, как показано в главе 1, время начала и структура индустриализации могут иметь важные последствия для межстрановых различий в уровне дохода на душу населения в настоящее время. Поэтому изучение причин, по которым в некоторых странах индустриализация началась достаточно рано, а в других позднее или вообще не началась, является важной частью теории экономического развития.

Понимание причин структурных изменений и того, как они могут быть согласованы со сбалансированным ростом на агрегированном уровне, позволяет пролить свет на динамику процессов экономического роста и экономического развития. Поэтому модели из этой главы значительно обогащают наше понимание экономического роста. Однако они являются лишь первым шагом на пути исследования значительных структурных изменений, описанных С. Кузнецом, так как они основаны на неоклассическом подходе к экономическому росту. В частности, в моделях из параграфов 20.1 и 20.2 используется обобщение базовой неоклассической модели экономического роста из главы 8, а в модели из параграфа 20.3 — вариант модели Ромера [Romer, 1986a] из главы 11.

Необходимо отметить, что, несмотря на то что вопросы, затронутые в этой главе, тесно связаны с базовой неоклассической моделью экономического роста, они находятся на переднем крае современных исследований. На данный момент экономисты далеки от построения удовлетворительной модели, описывающей процесс перемещения капитала и труда между секторами, его динамику на различных этапах экономического развития и причины, по которым он остается согласованным со сбалансированным ростом агрегированной экономики и фактами Калдора. Поэтому в этой главе мы не пытались построить общую модель перехода от аграрной экономики к индустриализации, основанную на негомотетичных предпочтениях (ввиду закона Энгеля) и технологических факторах как причинах несбалансированности роста экономики. Построение такой модели и более богатых моделей несбалансированного экономического роста является задачей будущих исследований.

20.5. Литература

В ранней литературе по теории экономического развития представлено много работ, описывающих основные структурные изменения, происходящие в процессе развития экономики. Наилучшие обзоры эмпирических свидетельств и литературы содержатся в работах: [Kuznets 1957, 1973; Chenery 1960]. Схожие вопросы рассмотрены и в еще более ранних работах, см., например: [Rosenstein-Rodan 1943; Nurske 1958; Rostow 1960]. Рис. 20.1, основанный на данных из книги *Historical Statistics of the United Sates* [Carter et. al., 2006], кратко иллюстрирует эти структурные изменения.

Модель несбалансированного экономического роста, основанная на законе Энгеля, описана в статье [Kongsamut, Rebelo, Xie 2001]. Предыдущие работы, описывающие схожие модели: [Murphy, Shleifer, Vishny 1989; Echevarria 1997; Laitner 2000]. Среди более современных статей, основанных на работе [Kongsamut, Rebelo, Xie 2001], выделим статьи: [Caselli, Coleman 2001b; Gollin, Parente, Rogerson 2002]. Некоторые из моделей в этих работах включают в себя землю как дополнительный фактор производства в сельскохозяйственном секторе. Пример такой модели представлен в упражнении 20.8. В современных работах значительное внимание уделяется причинам межстрановых различий в производительности в сельском хозяйстве и подчеркивается, что эти различия во многих случаях оказываются не меньшими, а зачастую и большими, чем различия в производительности в других секторах. Работа [Gollin, Parente, Rogerson 2002] является одной из первых статей на эту тему.

Работы, упомянутые в предыдущем абзаце, как и модель из параграфа 20.1, основаны на законе Энгеля и формализуют негомотетичные предпочтения с помощью агрегата Стоуна—Гири, как в уравнении (20.2). Более гибким и более подробным подходом является предположение об «иерархии потребностей» в потреблении, когда домохозяйство осуществляет потребление различных товаров в определенной последовательности (например, потребление текстиля следует за потреблением продуктов питания, а потребление электроники следует за потреблением текстиля и т. д). Этот и связанные с ним подходы используются в статьях: [Stokey 1988; Foellmi, Zweimuller 2002; Matsuyama 2002; Buera, Kabosli 2006], в которых авторы строят более подробные модели структурных изменений. Ограничение на объем книги не позволяет нам остановиться на моделях иерархии потребностей, однако отметим, что они являются интересной и элегантной альтернативой стандартному подходу, основанному на использовании агрегата Стоуна—Гири.

Материал параграфа 20.2 основан на статье [Acemoglu, Guerrieri 2008], в которой развиваются идеи из работы [Baumol 1967] о влиянии межотраслевых различий в производительности на несбалансированность экономического роста. Однако в работе [Baumol 1967] явно не выводится динамика экономики и распределения капитала и труда по секторам, а темпы технологического прогресса в отраслях экономики предполагаются заданными экзогенно. Современная версия гипотезы Баумоля представлена в работах: [Ngai, Pissaridis 2006; Zuleta, Young 2006]. С другой стороны, подход, использованный в параграфе 20.2, позволяет увидеть, как различия в интенсивности использования капитала в разных секторах и углубление капитала в агрегированной экономике могут эндогенно привести к несбалансированному экономическому росту.

Модель из параграфа 20.3 основана на работе [Matsuyama 1992] и тесно связана с моделью, представленной в параграфе 19.7. Роли сельского хозяйства в процессе индустриализации посвящены статьи: [Mokyr 1993; Overton 1996; Mundlak 2000].

20.6. Упражнения

20.1. Покажите, что из вида агрегата потребления (20.2) следует закон Энгеля. Предложите альтернативный агрегат потребления, ведущий к схожей структуре предпочтений.

20.2. Докажите утверждение 20.1.

20.3. **(a)** Сформулируйте задачу оптимального управления для репрезентативного агента в модели из параграфа 20.1.

(b) Выведите уравнение (20.16) в утверждении 20.2 из уравнения Эйлера для потребления и условия трансверсальности.

(c) Выведите уравнения (20.17) в этом утверждении из уравнений (20.9) и (20.10).

20.4. Докажите утверждение 20.3. Докажите, что равновесная траектория всегда существует (и при этом разные секторы на ней всегда растут с различными темпами).

20.5. **(a)** Докажите утверждение 20.4. В частности покажите, что если условие (20.18) не выполняется, то ТПР не существует и что это условие является достаточным для существования единственной ТПР.

(b) Найдите отношение капитала к эффективному труду на ТПР k^*.

20.6. В модели из параграфа 20.1 покажите, что если при выполнении условия (20.18) в начальный момент времени значение отношения капитала к эффективному труду $K(0)/(X(0)L(0))$ отличается от k^*, то ТПР является глобально устойчивой и отношение капитала к эффективному труду монотонно сходится к k^* при $t \to \infty$.

***20.7.** Рассмотрите обобщение модели из параграфа (20.1), в котором производственные функции во всех секторах экономики имеют вид функций Кобба—Дугласа:

$$Y^A(t) = K^A(t)^{\alpha^A} (B^A(t)L^A(t))^{1-\alpha^A},$$

$$Y^M(t) = K^M(t)^{\alpha^M} (B^M(t)L^M(t))^{1-\alpha^M},$$

$$Y^S(t) = K^S(t)^{\alpha^S} (B^S(t)L^S(t))^{1-\alpha^S},$$

и предположите, что переменные $B^A(t)$, $B^M(t)$ и $B^S(t)$ растут с постоянными темпами g^A, g^M и g^S соответственно.

(a) Сформулируйте и докажите утверждения, эквивалентные утверждениям 20.1 и 20.2.

(b) Покажите, что существует обобщение условия (20.18), такое, что при его выполнении в этой модели существует ТПР, определенная в параграфе 20.1. [Подсказка: это обобщение включает в себя два отдельных условия на темп технологического прогресса и предпочтения.]

20.8. Рассмотрите вариант модели из параграфа 20.1 только с сельскохозяйственными и промышленными товарами. Предположите, что агрегат потребления имеет вид: $c(t) = (c^A(t) - \gamma^A)^{\eta^A} c^M(t)^{\eta^M}$, где $\gamma^A > 0$. Предположите, что производственные функции в сельском хозяйстве и промышленности имеют вид: $Y^A(t) = X(t)(L^A(t))^{\zeta}(Z)^{1-\zeta}$ и $Y^M(t) = X(t)L^M(t)$ соответственно, где переменная Z обозначает землю. В модели отсутствуют сбережения и капитал.

(a) Опишите конкурентное равновесие в такой экономике.

(b) Покажите, что в такой экономике всегда будут происходить структурные изменения, в частности покажите, что доля промышленного сектора в ВВП растет во времени.

(c) Опишите динамику арендной стоимости земли на равновесной траектории.

***20.9.** В модели из параграфа 20.1 предположите, что условие (20.18) не выполняется. Предположите, что производственная функция F имеет вид функции Кобба—Дугласа. Опишите асимптотическую траекторию роста экономики (траекторию роста при $t \to \infty$).

20.10. Рассмотрите модель из параграфа 20.1, однако предположите, что в экономике существует сектор производства конечного товара с производственной функцией вида

$$Y(t) = (Y^A(t) - \gamma^A)^{\eta^A} Y^M(t)^{\eta^M} (Y^s(t) + \gamma^s)^{\eta^s}.$$

(a) Покажите, что если, как в уравнении (20.7), в производстве капитала используются только промежуточные промышленные товары Y^M, то все результаты параграфа 20.1 остаются и в этой модели.

(b) Далее предположите, что капитал производится из конечного товара, то есть ресурсное ограничение имеет вид: $\dot{K}(t) + c(t)L(t) = Y(t)$, где переменная $c(t)$ обозначает потребление конечного товара на душу населения. Покажите, что в такой модели не существует ТПР.

20.11. В модели из подпараграфа 20.2.1 предположите, что совокупный выпуск задается производственной функцией $Y = F(Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_N(t))$, обладающей свойством постоянной отдачи от масштаба.

Определите доли дохода капитала в каждом из секторов $j = 1, ..., N$ $\sigma_j(t)$ как в уравнении (20.25) и покажите, что если в момент времени t отношения факторов производства в N секторах различаются в том смысле, что существуют $i \le N$ и $j \le N$, такие, что $\sigma_i(t) \neq \sigma_j(t)$, технологический прогресс в секторах i и j сбалансирован, то есть $\dot{A}_i(t)/A_i(t) = \dot{A}_j(t)/A_j(t)$, и в экономике происходит углубление капитала, то есть $\dot{K}(t)/K(t) > \dot{L}(t)/L(t)$, то рост экономики не сбалансирован и $\dot{Y}_i(t)/Y_i(t) \neq \dot{Y}_j(t)/Y_j(t)$.

20.12. Выведите уравнения (20.39), (20.40), (20.41) и (20.42).

20.13. Докажите утверждение 20.6.

20.14. **(a)** Завершите доказательство утверждения 20.10, рассмотрев случай $\varepsilon > 1$ и $g_1^* \ge g_2^* > 0$.

(b) Сформулируйте и докажите эквивалент утверждения 20.10 для случая, когда выполняется условие, обратное к условию (20.61).

20.15. Покажите, что в распределении ресурсов в утверждении 20.10 процентная ставка является асимптотически постоянной величиной и выведите выражение для процентной ставки в явном виде.

***20.16.** В этом упражнении вам предстоит провести альтернативное доказательство утверждения 20.10 и затем описать локальную переходную динамику экономики в окрестности ТПР. Далее предположите, что выполняется одно из условий: $\varepsilon < 1$ и $a_1/(1-\alpha_1) < a_2/(1-\alpha_2)$ или $\varepsilon > 1$ и $a_1/(1-\alpha_1) > a_2/(1-\alpha_2)$.

(a) Перепишите условия равновесия в следующих переменных: $\varphi(t) \equiv c(t)/\left(L(t)A_1(t)^{1/(1-\alpha_1)}\right)$, $\chi(t) \equiv K(t)/\left(L(t)A_1(t)^{1/(1-\alpha_1)}\right)$ и $\kappa(t)$. В частности покажите, что динамика равновесия описывается тремя следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha_1\gamma\eta(t)^{1/\varepsilon}\lambda(t)^{1-\alpha_1}\kappa(t)^{-(1-\alpha_1)}\chi(t)^{-(1-\alpha_1)} - \rho\right] - n - \frac{a_1}{1-\alpha_1},$$

$$\frac{\dot{\chi}(t)}{\chi(t)} = \lambda(t)^{1-\alpha_1}\kappa(t)^{\alpha_1}\chi(t)^{-(1-\alpha_1)}\eta(t) - \chi(t)^{-1}\varphi(t) - n - \frac{a_1}{1-\alpha_1}, \quad (20.76)$$

$$\frac{\dot{\kappa}(t)}{\kappa(t)} = \frac{(1-\kappa(t))\left[(\alpha_2-\alpha_1)\dfrac{\dot{\chi}(t)}{\chi(t)} + a_2 - \dfrac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}a_1\right]}{(1-\varepsilon)^{-1} + (\alpha_2-\alpha_1)(\kappa(t)-\lambda(t))},$$

где переменные $\kappa(t)$ и $\lambda(t)$ задаются уравнениями (20.43) и (20.44) соответственно и

$$\eta(t) \equiv \gamma^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}\left[1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{1-\kappa(t)}{\kappa(t)}\right)\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}. \quad (20.77)$$

[Подсказка: используйте уравнение Эйлера для потребления репрезентативного домохозяйства, а затем ресурсное ограничение в экономике, преобразуйте их и выразите законы изменения переменных $\varphi(t)$ и $\chi(t)$ через переменные $\kappa(t)$, $\lambda(t)$ и $\eta(t)$, определенной в уравнении (20.77), а затем продифференцируйте уравнение (20.43).]

(b) Сформулируйте подходящее условие трансверсальности.

(c) Покажите, что если распределение ресурсов в экономике удовлетворяет трем дифференциальным уравнениям (20.76) и подходящим условиям трансверсальности, то оно является равновесной траекторией.

(d) Покажите, что на равновесной ТПР переменная $\varphi(t)$ является постоянной величиной. Используя это условие, покажите, что на ТПР выполняется условие $\kappa(t) \to 1$ при $t \to \infty$ и поэтому переменная $\chi(t)$ также является постоянной величиной. Используя эти наблюдения, проведите альтернативное доказательство утверждения 20.10.

(e) Далее линеаризуйте дифференциальные уравнения (20.76) вокруг ТПР из утверждения 20.10 и покажите, что линеаризованная система уравнений обладает двумя отрицательными и одним положительным собственными значениями. Используя этот факт, убедитесь в локальной устойчивости ТПР. [Подсказка: начните рассуждения с объяснения, почему переменная $\kappa(t)$ должна рассматриваться как переменная состояния при заданном начальном значении $\kappa(0)$.]

20.17. Рассмотрите модель, в которой объединяются факторы спроса и предложения, описанные в параграфах 20.1 и 20.2. Предположите, что агрегат потребления имеет следующий вид:

$$c(t) = (c^s(t) + \gamma^s)^{\eta^s} c^M(t)^{\eta^M},$$

где переменная c^s обозначает потребление услуг, а переменная c^M — потребление промышленных товаров. Предположите, что экономика закрыта и что услуги и промышленные товары производятся с помощью технологий вида Кобба—Дугласа с равными темпами нейтрального по Хиксу экзогенного технологического прогресса, но промышленный сектор является более капиталоинтенсивным. Предположите, что, как и в модели из параграфа 20.1, инвестиционные товары производятся из промышленных товаров. Опишите равновесие в этой экономике. Покажите, что относительная цена и доля рабочей силы, занятой в секторе услуг, увеличиваются во времени. Может ли совокупное потребление промышленных товаров расти быстрее, чем потребление услуг?

20.18. Рассмотрите модель из параграфа 20.3.

1. Покажите, что потребление и производство сельскохозяйственных товаров не изменяется во времени и равно

$$B^A G(1-\phi^{-1}(\gamma^A/B^A)) =$$
$$= \gamma^A + B^A \frac{\eta}{1-\eta} G'(1-\phi^{-1}(\gamma^A/B^A)) \frac{F(\phi^{-1}(\gamma^A/B^A))}{F'(\phi^{-1}(\gamma^A/B^A))}.$$

2. Покажите, что это выражение возрастает по B^A и объясните ваши рассуждения.
3. Покажите, что расходы домохозяйств на сельскохозяйственные продукты растут с тем же темпом, что и совокупный выпуск. [Подсказка: вначале опишите динамику цены $p(t)$ на равновесной траектории.]

***20.19.** Рассмотрите модель из параграфа 20.3 и предположите, что производственная функция в промышленном секторе имеет следующий вид:

$$Y^M(t) = \frac{1}{1-\beta}\left[\int_0^{N(t)} x(v,\, t)^{1-\beta} dv\right] L^M(t)^{\beta},$$

который схож с видом производственных функций в части IV книги, где переменная $N(t)$ обозначает количество типов машин, а переменная $x(v, t)$ — количество машин типа v, используемое в промышленном секторе. Предположите, как и в части IV, что эти машины поставляются на рынок фирмами — технологическими монополистами, владеющими бессрочными патентами и производятся из промышленных товаров с постоянными предельными издержками $(1-\beta)$ единиц промышленных товаров. Также предположите, что разработка новых машин происходит в рамках модели лабораторного оборудования из параграфа 15.7. Опишите равновесие в такой экономике и покажите, что оно качественно совпадает с равновесием в модели из параграфа 20.3.

20.20. Рассмотрите вариант модели из параграфа 20.3 для открытой экономики. В частности предположите, что резиденты экономики участвуют в международной торговле товарами с остальным миром и рассматривают мировые цены как заданные величины. Технологии в домашней экономике и за рубежом совпадают, однако за рубежом начальное значение производительности в промышленности равно $X^F(0)$, а в сельском хозяйстве — B^F. Предположите, что переливов во время обучения в процессе производства не происходит и в домашней экономике выполняется уравнение (20.70), а динамика производительности в промышленности за рубежом задается уравнением $\dot{X}^F(t) = \kappa Y^{M,F}(t)$, где переменная $Y^{M,F}(t)$ обозначает совокупный промышленный выпуск за рубежом в момент времени t.

(a) Покажите, что сравнительные преимущества в этой экономике определяются из сравнения $X(0)/B^A$ и $X^F(0)/B^F$. Проинтерпретируйте этот результат.

(b) Предположите, что выполняется неравенство $X(0)/B^A < X^F(0)/B^F$, то есть домашняя экономика обладает сравнительным преимуществом в сельском хозяйстве. Покажите, что доля рабочей силы, занятой в промышленном секторе в домашней экономике в начальный момент времени $n^*(0)$, удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{X(0)F'(n^*(0))}{B^A G'(1-n^*(0))} = \frac{X^F(0)F'(n^{F*}(0))}{B^F G'(1-n^{F*}(0))}. \tag{20.78}$$

(c) Опишите динамику занятости в промышленном секторе в домашней экономике с момента времени $t = 0$ при начальном значении из части (b) упражнения. [Подсказка: дифференцируя по времени, выведите эквивалент уравнения (20.78) для любого момента времени t, а затем используйте уравнения для динамики X и X^F.]

(d) Объясните, почему рост производительности в сельском хозяйстве, которая способствует началу индустриализации в закрытой экономике, может вести к задержке индустриализации и даже к деиндустриализации в открытой экономике.

(e) Рассмотрите экономику, специализирующуюся в сельском хозяйстве, как в части (b) упражнения. Всегда ли благосостояние в открытой экономике в момент времени $t = 0$ будет ниже, чем в такой экономике, не участвующей в международной торговле? Свяжите ваш ответ с анализом в параграфе 19.7 в главе 19.

Глава 21
Структурная трансформация и провалы рынка в экономическом развитии

В процессе экономического развития в экономике происходят более сложные изменения, чем изменения в структуре выпуска, описанные в предыдущей главе. Среди прочих такие изменения включают в себя значительные изменения в общественном устройстве, которые приводят к лучшей координации экономической деятельности. Условно говоря, мы можем назвать экономику развитой, если она находится на границе своего множества производственных возможностей или очень близко к ней, в то время как менее развитые страны находятся внутри своего «гипотетического» множества производственных возможностей. Причина этого может состоять в том, что некоторые соглашения, необходимые для того, чтобы экономика достигла границы множества производственных возможностей, требуют значительного количества капитала или некоторых определенных технологических прорывов (в этом случае, несмотря на то что мы мыслим об экономике как о находящейся внутри своего множества производственных возможностей, причиной этого являются не провалы рынка, поэтому мы используем термин «гипотетическое» в предыдущем предложении). С другой стороны, менее развитые экономики могут находиться внутри своих множеств производственных возможностей из-за значительных провалов рынка. В этой главе мы опишем такие подходы в теории экономического развития.

Вначале мы остановимся на различных элементах структурных изменений и на том, как они могут ограничиваться объемом капитала и технологиями, доступными обществу. Затем мы опишем ряд подходов, говорящих о том, что менее развитые экономики могут непропорционально страдать от провалов рынка и даже оказаться в «ловушке развития». В этом контексте мы также опишем различия между моделями с множественными равновесиями и моделями с множественными стационарными состояниями.

Темы, затронутые в этой главе, являются частью значительной и разнообразной литературы. Наша цель состоит не в обзоре этой литературы, а в демонстрации того, что определенные важные структурные изменения являются частью процесса экономического развития, а также в иллюстрации роли провалов рынка в этом процессе. Принимая во внимание эту цель и большое количество различных моделей, мы ограничим выбор моделей и сделаем изложение материала менее строгим, чем в других главах книги. Более того, для упрощения выкладок мы часто будем делать различные дополнительные предположения.

21.1. Развитие финансового сектора

Важным элементом структурных изменений, происходящих на фоне экономического развития общества, является изменение финансовых отношений в экономике и расширение финансового рынка. В параграфе 17.6 из главы 17 изложена модель, в которой экономический рост сопровождается развитием финансового рынка. Однако модель из параграфа 17.6 описывает лишь один аспект роли финансовых институтов. Однако финансовое развитие ведет к ряду дополнительных изменений в экономике. Во-первых, финансовые рынки становятся более глубокими, что, как показывает модель из параграфа 17.6, позволяет лучшую диверсификацию агрегированных рисков. Во-вторых, одна из важнейших ролей финансового рынка состоит в способствовании разделению рисков и сглаживанию потребления домохозяйствами. Поэтому финансовое развитие также позволяет лучшую диверсификацию индивидуальных рисков. В параграфе 17.6 показано, что лучшая диверсификация агрегированных рисков ведет к лучшему распределению средств между отраслями и проектами. Аналогично, лучшее разделение индивидуальных рисков ведет к лучшему распределению средств между индивидами. В-третьих, финансовое развитие также может смягчать кредитные ограничения для инвесторов и поэтому напрямую способствовать переносу средств индивидам, имеющим лучшие инвестиционные возможности. Второй и третий канал не только влияют на распределение ресурсов в обществе, но и изменяют распределение доходов, так как диверсификация индивидуальных рисков и смягчение ограничений на кредитном рынке могут привести к улучшению разделения доходов и рисков в экономике. С другой стороны, так как возможность разделения рисков ведет к снижению волатильности потребления, индивиды могут начать совершать более рискованные действия, что также может воздействовать на распределение доходов в обществе.

В качестве краткого введения в эту тему далее рассмотрим простую модель финансового развития, основанную на диверсификации индивидуальных рисков и дополняющую модель из параграфа 17.6. Модель основана на работах: [Townsend 1979; Greenwood, Jovanovic 1990]. Она показывает, каким образом финансовое развитие может протекать эндогенно и взаимодействовать с процессом экономического роста. Из нее также следует ряд простых результатов о влиянии финансового развития на распределение доходов в обществе. Так как модель во многом схожа с моделью из параграфа 17.6, ее изложение будет несколько неформальным.

Рассмотрим экономику ПП, в которой каждый индивид живет в течение двух периодов времени и наделен предпочтениями вида

$$\mathbb{E}_t U_t(c(t), c(t+1)) = \log c(t) + \beta \mathbb{E}_t \log c(t+1), \tag{21.1}$$

где переменная $c(t)$ обозначает потребление единственного в экономике конечного товара, а символ $\mathbb{E}_t$ — оператор условного математического ожидания в момент времени t.

Население в экономике постоянно и размер каждого поколения нормализован единицей. Предположим, что каждый индивид наделен запасом труда l. Распределение запаса труда между агентами задается функцией распределения $G(l)$, заданной на носителе $[\underline{l}, \bar{l}]$. Это распределение не меняется во времени и имеет среднее значение $L = 1$. Предположим, что занятость поставляется всеми агентами абсолютно неэластично в первый период жизни. Во втором периоде жизни агенты потребляют доход от владения капиталом.

Агрегированная производственная функция имеет вид:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha} = K(t)^{\alpha},$$

где $\alpha \in (0, 1)$, и второе равенство следует из того, что совокупное предложение труда в экономике равно 1 в любом периоде времени. Как и в модели из параграфа 17.6, единственный риск в экономике состоит в преобразовании сбережений в инвестиции, поэтому жизненный цикл индивида показан на рис. 17.3. Более того, предположим, что агент имеет возможность сберегать весь трудовой доход, который он получает в первом периоде своей жизни, пользуясь безрисковой технологией с доходностью q (в единицах капитала в следующем периоде), либо инвестировать весь свой трудовой доход в рискованную технологию с доходностью $Q + \varepsilon$, где случайные величины ε являются независимыми одинаково распределенными стохастическими шоками с нулевым средним. Как и в модели из параграфа 17.6, предположим, что имеет место неравенство $Q > q$. Таким образом, рискованная технология является более производительной. Предположение о том, что индивид должен выбрать одну из двух технологий и не имеет возможности разделить свои сбережения между ними, позволяет упростить анализ модели (см. упражнение 21.1).

Несмотря на то что модель выглядит очень похожей на модель из параграфа 17.6, в ней есть одно существенное отличие. Так как случайные шоки ε независимы и одинаково распределены между индивидами, они обладают возможностью полностью диверсифицировать индивидуальные риски, объединив свои ресурсы. В частности, если большое количество (континуум) индивидов объединяют свои ресурсы, то они получают гарантированную доходность Q. Предположим, что такие действия невозможны ввиду стандартной *информационной проблемы*: фактическая доходность сбережений индивида является ненаблюдаемой величиной до тех пор, пока не произведен некоторый финансовый мониторинг. Допустим, что издержки финансового мониторинга для каждого индивида составляют $\xi > 0$. Тогда, неся издержки ξ, каждый индивид получает возможность войти на финансовый рынок (или, в терминологии Таунсенда, стать частью «финансовой коалиции»). В этом случае фактическая доходность его сбережений становится полностью наблюдаемой величиной. На интуитивном уровне, эти издержки включают в себя фиксированные издержки, которые несет индивид при входе на финансовый рынок, а также фиксированные издержки осуществления мониторинга и предоставления информации. Из такой спецификации модели непосредственно следует, что выход на финансовый рынок является более предпочтительным для богатых индивидов, так как для них фиксированные издержки не так важны, как для бедных агентов. Такое свойство выглядит правдоподобным и ведет к предсказаниям модели, согласующимся с микроданными, которые говорят о том, что индивиды с высоким доходом используют в инвестициях достаточно сложные финансовые инструменты.

Если индивид не выходит на финансовый рынок, то ни один другой агент не имеет возможности наблюдать фактическую реализацию доходности его сбережений. В этом случае заключение финансового контракта, позволяющего делить индивидуальные риски, становится невозможным, так как такой контракт требует, чтобы агенты с высоким (реализовавшимся) значением ε осуществляли трансферт ресурсов агентам с низким реализовавшимся значением ε. Однако в отсутствие мониторинга каждый агент будет утверждать, что для него реализовалось низкое значение ε, и поэтому получать ex post выплаты. Ожидание агентами такого типа оппортунистского поведения не допускает какое-либо деление рисков в отсутствие мониторинга.

Также допустим, что шоки ε распределены так, что вероятность события $\varepsilon = -Q$ строго положительна, то есть, если индивид принимает решение осуществлять рисковые инвестиции, с некоторой вероятностью он теряет все свои сбережения. Тогда в отсутствие какого-либо деления рисков агенты будут выбирать безрисковые проекты. Это наблюдение упрощает анализ модели. Предположим, что экономика в начальный период времени наделена запасом капитала $K(0) > 0$, то есть индивид, рожденный с запасом труда l_i, получает трудовой доход $W_i(0) = w(0)l_i$, где конкурентная заработная плата в периоде времени t равна

$$w(t) = (1 - \alpha)K(t)^{\alpha}. \tag{21.2}$$

После реализации трудового дохода индивид, во-первых, принимает решение о размере сбережений, а затем выбирает актив, в который он осуществляет инвестиции. Из вида предпочтений (21.1) следует, что индивид сберегает постоянную долю своего дохода $\beta/(1 + \beta)$ независимо от уровня своего дохода и величины процентной ставки (в частности независимо от того, инвестирует ли он в рисковые или безрисковые проекты). Из этого наблюдения следует, что стоимость неучастия в финансовом рынке для агента i в периоде времени t определяется следующим выражением:

$$V_i^N\left(W_i(t),\ R(t+1)\right) = \log\left(\frac{1}{1+\beta}W_i(t)\right) + \beta\log\left(\frac{\beta R(t+1)q}{1+\beta}W_i(t)\right),$$

которое следует из того, что доходность капитала во втором периоде жизни индивида составляет $R(t + 1)$ и того, что индивид получает валовую доходность q на свои сбережения $\beta W_i(t)/(1 + \beta)$. Далее предположим, что в экономике существует достаточное количество (множество с положительной мерой) других индивидов, принимающих участие в финансовом рынке. Если индивид принимает решение выйти на финансовый рынок, то его стоимость становится равной

$$V_i^F(W_i(t),\ R(t+1)) = \log\left(\frac{1}{1+\beta}(W_i(t)-\xi)\right) + \beta\log\left(\frac{\beta R(t+1)Q}{1+\beta}(W_i(t)-\xi)\right),$$

что следует из того, что индивид несет издержки ξ при выходе на финансовый рынок и его доход становится равным $W_i(t) - \xi$. Затем он сберегает долю $\beta/(1 + \beta)$ своего дохода и при этом получает гарантированную более высокую валовую доходность Q. Причина, по которой доходность равна Q, а не является случайной величиной, состоит в том, что, участвуя в финансовом рынке, каждый индивид получает возможность полностью диверсифицировать свой индивидуальный риск. Сравнивая два этих выражения, находим пороговое значение:

$$W^* = \frac{\xi}{1-(q/Q)^{\beta/(1+\beta)}} > 0, \tag{21.3}$$

такое, что индивиды с доходом в первом периоде, превышающем W^*, будут участвовать в финансовом рынке, а индивиды с доходом, меньшим W^*, — не будут. Важным свойством порогового значения является то, что оно не зависит от доходности капитала во втором периоде жизни индивида R. Этот результат является следствием логарифмических предпочтений (21.1).

Используем решение индивидов о выходе на финансовый рынок и опишем динамику агрегированной экономики с помощью анализа динамики доходов агентов. Доход каждого индивида определяется двумя факторами: запасом рабочей силы и значением капитала в периоде времени t, из которых следует значение заработной платы $w(t)$ в уравнении (21.2). При заданном значении $w(t)$ доля индивидов, участвующих в финансовом рынке в периоде времени $t\, g^F(t)$, равна доле индивидов с запасом рабочей силы $l_i > W^*/w(t)$. Тогда из того, что запас рабочей силы определяется функцией распределения $G(\cdot)$, следует, что доля индивидов, осуществляющих инвестиции в финансовый рынок, задается следующим выражением:

$$g^F(t) \equiv 1 - G\left(\frac{W^*}{w(t)}\right) = 1 - G\left(\frac{W^*}{(1-\alpha)K(t)^\alpha}\right). \tag{21.4}$$

Используя уравнение (21.4) и определение $\chi(t) \equiv W^*/((1-\alpha)K(t)^\alpha)$, запишем значение капитала в периоде времени $t + 1$ следующим образом:

$$K(t+1) = \frac{\beta}{1+\beta}\left[q\int_{\underline{l}}^{\chi(t)} l dG(l) + Q\int_{\chi(t)}^{\bar{l}} l dG(l)\right](1-\alpha)K(t)^\alpha -$$
$$-\frac{\beta}{1+\beta}Q[1 - G(\chi(t))]\xi. \tag{21.5}$$

Это уравнение следует из того, что все индивиды с запасом рабочей силы, меньшим $\chi(t)$, инвестируют в безрисковые проекты и получают на свои сбережения валовую доходность q, в то время как индивиды с запасом рабочей силы, превышающим пороговое значение, несут издержки ξ на осуществление мониторинга и получают более высокую валовую доходность Q (в последнем слагаемом в уравнении (21.5) издержки мониторинга вычитаются из значения капитала в следующем периоде времени). Нетрудно убедиться, что $K(t + 1)$ является возрастающей функцией от $K(t)$ и поэтому в случае, если значение $K(t)$ не превышает значения капитала в стационарном равновесии (см. упражнение 21.2), в экономике происходит накопление капитала (и рост выпуска).

Анализ уравнения накопления капитала (21.5) и порогового правила для выхода на финансовый рынок ведет к ряду интересных наблюдений.

1. Из уравнения (21.4) следует, что по мере того как запас капитала $K(t)$ возрастает, то есть происходит развитие экономики, количество индивидов, принимающих участие в финансовом рынке, растет. Следовательно, накопление капитала ведет к росту принятия риска, однако этот риск лучше распределяется между агентами. Более важным является то, что экономическое развитие стимулирует улучшение структуры инвестиций, когда большая доля индивидов начинает использовать свои сбережения более эффективно. Такой механизм, схожий с механизмом в модели из параграфа 17.6, приводит к тому, что в процессе экономиче-

ского развития происходит улучшение в распределении средств в экономике и рост производительности. Следовательно, из этой модели, как и из модели в параграфе 17.6, следует, что экономическое развитие и развитие финансового рынка протекают параллельно.

2. Однако необходимо отметить важное свойство модели, которое допускает существование возможной причинно-следственной связи между финансовым развитием и экономическим ростом. Представим себе, что экономики различаются значением параметра ξ, который можно интерпретировать как меру величины издержек мониторинга (или некоторых других издержек, связанных с финансовыми транзакциями, которые могут зависеть от степени защиты прав инвесторов), определяемую институциональным и технологическим устройством экономики. Экономики с низким значением ξ характеризуются большим участием в финансовом рынке, что ведет к эндогенному росту производительности. Поэтому, несмотря на то что динамика финансового и экономического развития определяется в модели совместно, различия в траекториях финансового развития, вызываемые экзогенными институциональными факторами, связанными с параметром ξ, могут иметь причинную связь с экономическим ростом.
3. Как показано выше, в каждом периоде времени на финансовый рынок прежде всего выходят богатые индивиды, обладающие большим запасом рабочей силы. Следовательно, на ранних этапах экономического развития финансовый рынок способствует увеличению доходности состоятельных индивидов. Таким образом, развитие финансового рынка ведет к росту неравенства в экономике.
4. Из того что доля населения, ведущего операции на финансовом рынке, растет вместе с $K(t)$, также следует, что уровень неравенства, вызываемый финансовым посредничеством, растет вместе с ростом экономики, по крайней мере на ранних этапах экономического развития. Следовательно, если в начальный момент в экономике присутствует относительно немного богатых индивидов, то раннее развитие финансового рынка ведет к росту уровня неравенства в экономике по мере того как большая доля населения начинает получать более высокую доходность сбережений.
5. По мере дальнейшего накопления капитала $K(t)$ в экономике со временем начинает действовать выравнивающий эффект финансового рынка. С этого момента доля населения, ведущего операции на финансовом рынке и получающего большую доходность сбережений, начинает устойчиво расти. Если значение капитала в стационарном равновесии K^* таково, что выполняется неравенство $\underline{l} \geq W^*/((1-\alpha)(K^*)^{\alpha})$, то в итоге все агенты выходят на финансовый рынок и доходность сбережений выравнивается.

Два последних наблюдения представляют интерес, отчасти потому, что связь между экономическим ростом и неравенством является важным вопросом теории экономического развития (мы вернемся к нему далее в этой главе). Одним из наиболее важных результатов в этом контексте является *кривая Кузнеца,* которая говорит о том, что экономический рост вначале ведет к повышению, а затем к снижению уровня неравенства доходов в обществе. На данном этапе среди экономистов нет консенсуса о том, является ли кривая Кузнеца хорошим описанием связи между экономическим ростом и неравенством. Хотя в течение XIX в. многие европейские экономики прошли фазы роста, а затем снижения уровня неравенства, эмпирические свидетельства для XX в. не позволяют сделать однозначный вывод. Два последних наблюдения показывают, что модель эндогенного финансового развития, основанная на разделении рисков между индивидами, способна воспроизводить динамику, согласующуюся с кривой Кузнеца. Эмпирические подтверждения существования кривой Кузнеца и анализ роли механизма, описанного в этой модели, в зависимости между экономическим ростом и неравенством в случае ее существования является предметом дальнейших теоретических и эмпирических исследований.

21.2. Рождаемость, смертность и демографические изменения

В главе 1 поставлены основные вопросы, связанные с динамикой роста дохода на душу населения во времени и межстрановых различий в его уровне в настоящее время. До сих пор мы уделяли основное внимание анализу различий в уровне дохода на душу населения. Однако настолько же значительные, как межстрановые, так и межвременные, различия наблюдаются в размере населения разных экономик. На рис. 21.1, основанном на данных из книги [Maddison 2002], представлены величина и динамика населения различных регионов мира в течение последних двух тысяч лет. В рисунке используется логарифмическая шкала, и поэтому прямая линия соответствует экспоненциальному росту населения с постоянным темпом. Из рисунка нетрудно заметить, что примерно 250 лет назад начался значительный рост населения во многих регионах мира. Более быстрый рост населения продолжается в большинстве регионов и в настоящее время, однако важно отметить, что темп роста населения в Западной Европе сократился в XIX в. При этом аналогичное замедление темпа роста населения не наблюдается в менее развитых странах. Наоборот, во многих менее развитых странах рост населения в последние пятьдесят лет ускорился. Одна из возможных причин такой динамики уже описана нами в главе 4: появление антибиотиков, улучшение санитарных

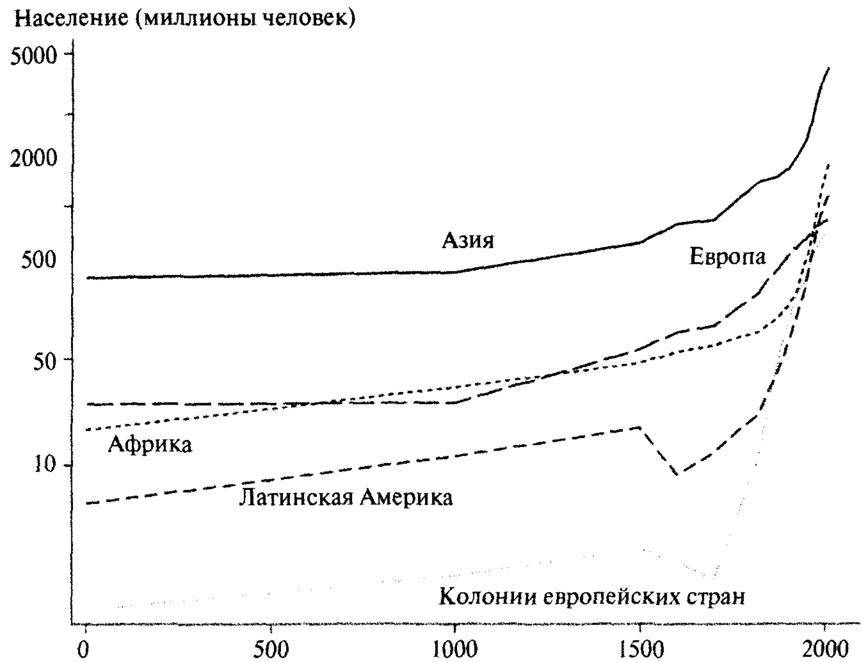

Рис. 21.1. Динамика населения различных регионов мира в течение последних 2000 лет

условий и другие меры по развитию здравоохранения в мире привели к снижению до этого высоких показателей смертности населения во многих странах. Однако настолько же значительными были *демографические изменения*, приведшие к снижению уровня рождаемости в Западной Европе в течение XIX в. Важные вопросы теории экономического развития состоят в том, почему население росло медленно, а затем темп его роста ускорился и достиг головокружительной величины в течение последних ста пятидесяти лет и почему темпы роста населения различаются между странами.

В этом параграфе мы опишем наиболее простые подходы к анализу динамики роста населения и рождаемости. Вначале мы остановимся на простой версии знаменитой мальтузианской модели, а затем применим вариант этой модели для анализа возможных причин демографических изменений. Томас Мальтус был одним из наиболее выдающихся и влиятельных экономистов XIX в., и с его именем связано появление одной из первых моделей общего равновесия в теории экономического роста. Вариант этой модели представлен в подпараграфе 21.2.1. Благодаря предсказаниям мальтузианской модели о том, что население мировой экономики будет расти или сокращаться (за счет рождения и смерти людей) до тех пор, пока потребление всех индивидов не сравняется с минимальным прожиточным минимумом, экономическая теория получила имя «мрачная наука». Несмотря на это, страшные предсказания мальтузианской модели не являются ее наиболее важным элементом. В основе модели лежит убывающая зависимость между уровнем дохода на душу населения и размером населения, который определяется эндогенным образом. В этом смысле она тесно связана с моделью роста Солоу и неоклассической моделью экономического роста, однако отличается существованием поведенческого правила, описывающего динамику темпа роста населения. Именно такая менее пессимистичная версия мальтузианской модели представлена далее. Мы расширим модель важной идеей Гари Беккера о существовании выбора между количеством и «качеством» детей, и о том, что структура этого выбора изменяется в процессе экономического развития общества. Мы покажем, что простая модель может продемонстрировать, что в процессе экономического развития рынки и люди начинают ценить качество (человеческий капитал) своих наследников больше и как такие изменения в оценке качества наследников могут привести к динамике населения, напоминающей фактические демографические изменения.

21.2.1. Простая мальтузианская модель

Рассмотрим следующую модель, не являющуюся моделью перекрывающихся поколений, в которой в начальный период времени $t = 0$ население составляет $L(0) > 0$. Репрезентативный индивид, живущий в периоде времени t, абсолютно неэластично поставляет на рынок труда единицу занятости и наделен предпочтениями следующего вида:

$$c(t)^{\beta}\left[y(t+1)n(t+1)-\frac{1}{2}\eta_0 n(t+1)^2\right], \qquad (21.6)$$

где переменная $c(t)$ обозначает потребление единственного в экономике конечного товара индивидом, переменная $n(t+1)$ — количество потомков у индивида, переменная $y(t+1)$ — доход каждого потомка, $\beta > 0$ и $\eta_0 > 0$. Последнее слагаемое в квадратных скобках представляет собой издержки воспитания ребенка, которые предполагаются выпуклой функцией, что отражает более чем пропорциональный рост издержек при увеличении количества детей (например, ввиду существования у родителей временных ограничений, хотя можно представить ситуацию, когда процесс воспитания детей на некотором промежутке обладает свойством возрастающей отдачи от масштаба). Очевидно, что за таким видом предпочтений стоит ряд упрощающих предположений. Во-первых, мы позволяем каждому индивиду иметь любое количество потомков, которое он пожелает, что является нереалистичным предположением, потому количество потомков должно быть натуральным числом. Технология также не включает в себя возможную специализацию в воспитании детей. Во-вторых, эти предпочтения включают в себя разумно-эгоистический альтруизм, который мы встретили главе 9, когда родители получают полезность не от полезности своих потомков, а от их некоторых характеристик. В данном случае полезность родителей зависит от некоторой функции совокупного дохода всех их потомков. В-третьих, мы выражаем издержки воспитания детей в терминах единиц полезности, а не потраченного в этих целях дохода и текущее потребление умножается как на выгоды, так и на издержки, связанные с рождением еще одного потомка. Из этого свойства, которое мы вводим для существования в модели траектории сбалансированного роста, следует, что спрос на детей не зависит от текущего дохода индивида (в противном случае *экономический рост автоматически* вел бы к росту спроса на детей). Мы сохраняем все три этих предположения для упрощения модели. Мы также обозначаем количество потомков у каждого индивида как $n(t+1)$, так как эта величина определяет размер населения в периоде времени $t+1$.

Предположим, что в модели отсутствуют сбережения и что каждый индивид наделен единицей рабочей силы. Производственная функция единственного конечного товара имеет следующий вид:

$$Y(t) = Z^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}, \tag{21.7}$$

где константа Z обозначает агрегированное количество земли, используемой в производстве, а переменная $L(t)$ — совокупное предложение труда. В экономике отсутствует капитал, и мы используем землю для того, чтобы ввести убывающую предельную производительность труда, которая является важным элементом мальтузианской модели. Без ограничения общности нормализуем общее количество земли в экономике единицей, то есть положим $Z = 1$. Важным вопросом в моделях такого типа является динамика доходности земли. Наиболее удовлетворительный способ решения этой проблемы состоит в разделении права собственности на землю между всеми индивидами и позволении им передавать землю по наследству своим потомкам. Однако это привносит в модель сложности другого типа, и, так как нашей задачей является лишь иллюстрация базовых идей, мы используем часто встречаемое в литературе неудовлетворительное предположение о том, что земля принадлежит другому множеству агентов, чье поведение не анализируется в модели.

По определению, население экономики в периоде времени $t+1$ задается следующим уравнением:

$$L(t+1) = n(t+1)L(t), \tag{21.8}$$

в котором учтены как рождение потомков, так и смерть их родителей.

Рынок труда является рынком с совершенной конкуренцией, и поэтому заработная плата в периоде времени $t + 1$ задается как

$$w(t+1) = (1-\alpha)L(t+1)^{-\alpha}. \qquad (21.9)$$

Так как индивиды не имеют других источников доходов, правая часть уравнения (21.9) также равна доходу каждого индивида, живущего в периоде времени $t + 1$, $y(t + 1)$. Поэтому задача оптимизации для индивида с доходом $w(t)$ в периоде времени t состоит в максимизации выражения (21.6) при ограничениях $c(t) \le w(t)$ и $y(t + 1) = (1 - \alpha)L(t + 1)^{-\alpha}$. Очевидно, что в равновесии значение переменной $n(t + 1)$ должно быть согласовано со $L(t + 1)$ в уравнении (21.8). Из решения задачи максимизации для индивида следует уравнение:

$$n(t+1) = (1-\alpha)\eta_0^{-1}L(t+1)^{-\alpha}.$$

Далее, подставляя это выражение в уравнение (21.8) и делая преобразования, получаем уравнение:

$$L(t+1) = (1-\alpha)^{\frac{1}{1+\alpha}}\eta_0^{-\frac{1}{1+\alpha}}L(t)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \qquad (21.10)$$

Из этого уравнения следует, что переменная $L(t + 1)$ является возрастающей вогнутой функцией от $L(t)$. На самом деле динамика населения в уравнении (21.10) напоминает динамику отношения капитала к труду в модели экономического роста Солоу (или в модели ПП). Она представлена на рис. 21.2. Из рисунка нетрудно увидеть, что при любом начальном значении населения $L(0)$ в экономике существует единственное глобально устойчивое стационарное равновесие L^*, заданное уравнением:

$$L^* \equiv (1-\alpha)^{1/\alpha}\eta_0^{-1/\alpha}. \qquad (21.11)$$

Если в начальном периоде времени выполняется неравенство $L(0) < L^*$, то население экономики медленно (и монотонно) достигает своего значения в стационарном равновесии. Более того, из уравнения (21.9) следует, что по мере роста населения происходит сокращение заработной платы. С другой стороны, если в начальном периоде времени $L(0) > L^*$, то население экономики сокращается, а заработная плата растет. В модель нетрудно ввести шоки в динамике населения и показать, что в этом случае экономика колеблется вокруг значения населения в стационарном равновесии L^* (с инвариантным распределением, зависящим от функции распределения шоков) и динамика населения проходит через циклы, напоминающие мальтузианские циклы, с периодами роста населения и сокращающейся заработной платы, следующими за периодами сокращения населения и роста заработной платы (см. упражнение 21.3).

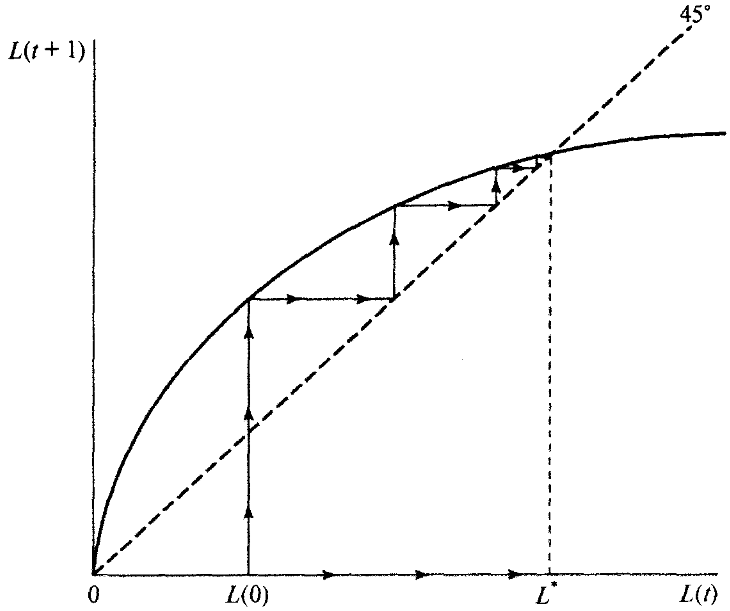

Рис. 21.2. Динамика населения в простой мальтузианской модели

Основное различие между этой моделью и наиболее простой (и самой жестокой) версией мальтузианской модели состоит в том, что в ней отсутствует определяемый биологическими особенностями минимально необходимый уровень потребления. Вместо этого потребление в стационарном равновесии определяется технологией и предпочтениями индивидов и задается следующим уравнением:

$$c^* = (1 - \alpha)(L^*)^{-\alpha} = \eta_0.$$

21.2.2. Демографические изменения

Для анализа демографических изменений введем в модель квазиколичественный выбор в рамках идеи, предложенной Г. Беккером. Каждый родитель обладает выбором сделать своих потомков квалифицированными или неквалифицированными работниками. Чтобы сделать их квалифицированными, родитель должен приложить дополнительное усилие в воспитании детей, которое обозначим как $e(t) \in \{0, 1\}$. Если он выбирает не прилагать такое усилие, то его потомки становятся неквалифицированными работниками.

Обозначим общее количество неквалифицированных индивидов в периоде времени t как $U(t)$, а общее количество квалифицированных индивидов как $S(t)$. Тогда, очевидно, имеет место равенство:

$$L(t) = U(t) + S(t).$$

Второе изменение модели состоит в том, что мы предположим существование двух технологий для производства конечного товара. Традиционная (мальтузианская) технология продолжает описываться уравнением (21.7) и в таком производстве может быть занят любой работник в экономике. Современная технология задается производственной функцией вида

$$Y^M(t) = X(t)S(t). \tag{21.12}$$

Из уравнения (21.12) следует, что производительность современной технологии потенциально меняется во времени и что в этом секторе экономики могут быть заняты только квалифицированные работники. Оно также требует, чтобы все квалифицированные работники были заняты в этом секторе[1].

Для моделирования выбора между количеством и качеством потомков изменим предпочтения индивидов (21.6) следующим образом:

$$c(t)^{\beta}\left[y(t+1)n(t+1)-\frac{1}{2}\big(\eta_0(1-e(t))+\eta_1 X(t+1)e(t)\big)n(t+1)^2\right]. \tag{21.13}$$

В такой формулировке предпочтений предполагается, что если индивид решает осуществлять инвестиции в квалификацию своих потомков, то вместо фиксированных издержек η_0, должен нести издержки, пропорциональные запасу знаний $X(t + 1)$, которым его наследники должны овладеть для того чтобы использовать современную технологию. Мы предположим, что значение константы η_1 значительно превышает значение η_0 и что в частности выполняется неравенство $X(0)\eta_1 > \eta_0$, то есть что даже при начальном уровне современной технологии воспитание квалифицированного потомка стоит дороже, чем воспитание неквалифицированного потомка.

Наконец, предположим, как в модели из статьи [Romer 1986a], существование в экономике обучения в процессе производства, то есть что динамика технологии в современном секторе имеет вид:

$$X(t+1) - X(t) = \kappa S(t). \tag{21.14}$$

Из уравнения (21.4) следует, что улучшение технологии в современном секторе является функцией от числа квалифицированных работников, занятых в этом секторе. Очевидно, что такое моделирование в сокращен-

[1] В общем случае это утверждение может не выполняться, так как заработная плата в традиционном секторе может оказаться выше. Однако в равновесии такая ситуация невозможна, так как в этом случае родители не стали бы прикладывать дополнительные усилия для воспитания квалифицированных потомков, если бы затем они предпочли работу в традиционном секторе. Для упрощения дальнейших выкладок (и несколько злоупотребляя обозначениями) мы уже используем тот факт, что в равновесии все квалифицированные работники будут заняты в современном секторе.

ной форме является неудовлетворительным, однако, как показано в главе 20 (в частности см. упражнение 20.19), мы можем получить схожую динамику производительности в моделях эндогенного технологического прогресса с эффектом размера рынка. Другое важное свойство такой производственной функции состоит в том, что в ней отсутствует земля. Это предположение согласуется с эмпирическими наблюдениями о том, что в большинстве современных производственных процессов базируются на использовании технологии, физического капитала и человеческого капитала, а использование земли в них ограниченно.

Товары традиционного и современного секторов являются совершенными заменителями: в обоих секторах производится единственный в экономике конечный товар. Из наблюдения о том, что весь неквалифицированный труд занят в традиционном секторе, а весь квалифицированный труд — в современном секторе, следует, что заработная плата квалифицированных и неквалифицированных работников в периоде времени t определяется следующими уравнениями:

$$w^U(t) = (1-\alpha)U(t)^{-\alpha} \qquad (21.15)$$

и

$$w^S(t) = X(t) \qquad (21.16)$$

соответственно, где уравнение (21.15) совпадает с уравнением (21.9), однако в нем присутствует только неквалифицированный труд, а не вся рабочая сила.

Далее обратимся к воспроизводству потомков и выбору индивидов между их количеством и качеством. Как и ранее, текущий доход не влияет на решения о рождении и выборе между количеством и качеством. Поэтому у нас нет необходимости отдельно моделировать поведение высококвалифицированных и низкоквалифицированных родителей. Используя это наблюдение, рассмотрим задачу выбора оптимального количества наследников в том случае, когда индивид решает приложить усилие $e(t) = 0$. Решение такой задачи оптимизации имеет следующий вид:

$$n^U(t+1) = w^U(t+1)\eta_0^{-1} = (1-\alpha)\eta_0^{-1}U(t+1)^{-\alpha}, \qquad (21.17)$$

где во втором равенстве используется уравнение (21.15). Если же родитель решает приложить усилие $e(t) = 1$ и осуществить инвестиции в квалификацию своих потомков, то он выбирает их количество, равное

$$n^S(t+1) = \eta_1^{-1}w^S(t+1)X(t+1)^{-1} = \eta_1^{-1}. \qquad (21.18)$$

Из сравнения уравнений (21.17) и (21.18) следует, что если заработная плата неквалифицированных работников не слишком низка, то индивид, который решает инвестировать в дополнительные навыки своих потомков, будет выбирать меньшее число детей. Это связано с тем, что воспитание квалифицированных потомков сопряжено с большими издержками (например, потому что значение η_1 намного превышает значение η_0). Таким образом, сравнение двух этих уравнений описывает суть выбора между количеством и качеством потомков.

Подставляя эти уравнения в функцию полезности (21.12), вычислим полезности от двух стратегий поведения родителя (нормализованные потреблением, то есть отношение полезностей к значению $c(t)^{\beta}$) следующим образом:

$$V^U(t) = \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 \eta_0^{-1} U(t+1)^{-2\alpha} \text{ и } V^S(t) = \frac{1}{2}\eta_1^{-1} X(t+1).$$

Из этих уравнений следует, что в равновесии некоторые работники будут неквалифицированными, так как в противном случае значение полезности $V^U(t)$ достигает бесконечности. Следовательно, в равновесии в любом периоде времени t выполняется неравенство:

$$V^U(t) \geq V^S(t). \tag{21.19}$$

Из этого равновесного условия следует существование двух возможных конфигураций экономики. Во-первых, начальное значение $X(0)$ может оказаться настолько низким, что неравенство (21.19) выполняется как строгое в любом периоде времени t и все индивиды всегда остаются неквалифицированными. Условие для строгого выполнения неравенства (21.19) в периоде времени $t = 0$ выглядит следующим образом:

$$\eta_1^{-1} X(0) < (1-\alpha)^2 \eta_0^{-1} L(1)^{-2\alpha}.$$

Оно следует из того, что если в экономике отсутствуют квалифицированные работники, то выпуск современного сектора равен нулю, и поэтому $X(1) = X(0)$. Если это неравенство выполняется, то в периоде времени $t = 0$ все дети будут неквалифицированными. Однако если $L(1) < L^*$, заданного уравнением (21.11), то население экономики растет. Следовательно, в будущем неравенство (21.19) будет выполняться как равенство. Условие, которое гарантирует, что неравенство (21.19) остается строгим всегда, имеет следующий вид:

$$\eta_1^{-1} X(0) < (1-\alpha)^2 \eta_0^{-1} L^{*-2\alpha}. \tag{21.20}$$

В этом случае неравенство (21.19) остается строгим в любом периоде времени, инвестиции в квалификацию потомков не осуществляются никогда и динамика населения совпадает с его динамикой в модели из подпараграфа 21.2.1. Мы можем рассматривать этот случай как полностью мальтузианскую экономику.

С другой стороны, если неравенство (21.20) не выполняется, то в некоторый период времени индивиды начинают осуществлять инвестиции в квалификацию своих потомков. С этого момента неравенство (21.19) выполняется как равенство. Обозначим долю родителей с неквалифицированными потомками в периоде времени t как $u(t+1)$. Тогда по определению получаем следующие равенства:

$$U(t+1) = u(t+1)n^U(t+1)L(t) = \\ = (1-\alpha)^{2/(1+\alpha)}\eta_0^{-1/(1+\alpha)}u(t+1)^{1/(1+\alpha)}L(t)^{1/(1+\alpha)} \qquad (21.21)$$

и

$$S(t+1) = (1-u(t+1))n^S(t+1)L(\mathrm{t}) = \eta_1^{-1}(1-u(t+1))L(t). \qquad (21.22)$$

Более того, чтобы неравенство (21.19) выполнялось как равенство, необходимо, чтобы

$$(1-\alpha)^2\eta_0^{-1}U(t+1)^{-2\alpha} = \eta_1^{-1}X(t+1).$$

После преобразования этого равенства приходим к уравнению:

$$X(t+1) = (1-\alpha)^{2/(1+\alpha)}\eta_0^{-(1-\alpha)/(1+\alpha)}\eta_1 u(t+1)^{-2\alpha/(1+\alpha)}L(t)^{-2\alpha/(1+\alpha)} \qquad (21.23)$$

Равновесная динамика экономики описывается уравнениями (21.21)–(21.23) вместе с уравнением (21.16). Несмотря на то что динамика равновесной системы несколько сложна, несложно описать общее поведение экономики. Наиболее интересным наблюдением является то, что если в начальный момент времени экономика стартует с низкими значениями переменных $X(0)$ и $L(0)$, но не удовлетворяет условию (21.20), то на раннем этапе развития она ведет себя как мальтузианская экономика, в которой используется только традиционная технология и не осуществляются инвестиции в квалификацию потомков. Затем по мере роста населения заработная плата снижается и родители начинают осознавать выгоду осуществления инвестиций в квалификацию своих детей, а фирмы начинают использовать современную технологию. Родители, инвестирующие в квалификацию своих детей, в большинстве случаев будут иметь меньше детей, чем родители, не осуществляющие таких инвестиций (так как η_1 значительно превышает η_0, значение уравнения (21.17) больше значения уравнения (21.18)). Агрегированный темп роста населения и рождаемость вначале остаются высокими, но по мере улучшения современной технологии и роста спроса на квалифицированную рабочую силу большая доля родителей начинает осуществлять инвестиции в квалификацию своих детей, и темп роста населения замедляется. В конечном итоге темп роста населения достигает значения η_1^{-1}. Таким образом, эта модель стилизованно описывает динамику демографических изменений, основанную на выборе между количеством и качеством потомков.

В литературе по экономическому развитию представлены более подробные модели демографических изменений. Например, существует множество способов введения в модель выбора между количеством и качеством и причинами, которые вызывают изменения в этом выборе, могут быть различные факторы, такие как увеличение интенсивности использования капитала в производстве товаров, изменения заработной платы работников или изменения заработной платы женщин, по-разному влияющие на их желание заниматься рыночной или домашней деятельностью. Несмотря на это, основные качественные выводы из этих моделей схожи с результатами модели, представленной выше, и в большинстве из них выбор между количеством и качеством потомков является основной причиной демографических изменений. Другие возможные причины этих изменений, предложенные учеными, включают в себя изменения общественных норм, значительное снижение смертности, начавшееся в XIX в., снижение необходимости использования детского труда. В настоящее время экономисты не достигли консенсуса о причинах демографических изменений и роли выбора между количеством и качеством потомков в изменении динамики населения мировой экономики. Анализ динамики роста населения и демографических изменений является важной и интересной частью теории экономического развития, и теоретические и эмпирические исследования факторов, влияющих на решения о рождении детей, и то, как эти факторы связаны с перемещением работников между секторами экономики, остаются важными и интересными вопросами в дисциплине.

21.3. Миграция, урбанизация и дуальная экономика

Другие важные структурные изменения, происходящие в процессе экономического развития, связаны с изменениями общественного уклада. Например, в процессе развития экономики увеличивается количество людей, переезжающих из сельской местности в города. Жизненный уклад таких людей изменяется, так как они покидают малочисленные сообщества и становятся частью значительно большего и более анонимного окружения. Большое значение также могут иметь и другие общественные изменения. К примеру, многие ученые рассматривают замену «системы коллективной ответственности» «системой индивидуальной ответственности» как важное общественное изменение. Эта замена, очевидно, является следствием изменений уклада жизни индивидов (например, жизнь в сельской местности или в городе, жизнь нескольких поколений семьи в одном доме или раннее отделение детей от родителей). Она также связана с различными типами контрактов, навязываемых общественными нормами или укладом жизни сообщества, а также с тем, регулируются ли эти контракты правовыми институтами. Схожие изменения могут происходить и с ролью рынка в жизни людей, так как по мере развития экономики больший объем экономической деятельности начинает регулироваться ценами, а не осуществляться внутри дома или внутри расширенной семьи или более широкого сообщества. Анализ таких общественных изменений одновременно сложен и интересен, однако подробное обсуждение литературы и возможных методов анализа лежит за рамками этой книги.

Несмотря на это, краткий обзор некоторых из этих общественных изменений полезен для описания других, более разнообразных аспектов структурных изменений, связанных с экономическим развитием. Мы проиллюстрируем основную идею, основываясь на процессах миграции населения из сельской местности в города и урбанизации. Другая причина исследования миграции и урбанизации состоит в том, что перемещение рабочей силы из сельской местности в города часто связывают с популярным понятием *дуальной экономики*, которое является важным элементом ранних работ по экономическому развитию. Согласно этому понятию менее развитые экономики состоят из современного и традиционного секторов, однако взаимодействие между этими секторами несовершенно. Модели индустриализации из предыдущей главы (см. параграф 20.3) содержат традиционный и современный секторы, но в них эти секторы торгуют между собой и нанимают работников на конкурентном рынке. С другой стороны, модели дуальной экономики описывают ситуации, в которых традиционный и современный сектор функционируют независимо друг от друга лишь с небольшим количеством взаимосвязей. Более того, в них традиционный сектор часто предполагается менее эффективным, чем современный сектор, поэтому недостаток взаимосвязей может быть способом защиты традиционной экономики от более эффективных конкурентов. Естественным следствием из этого подхода тогда является рассмотрение экономического развития как процесса, в котором менее эффективный традиционный сектор вытесняется более эффективным современным сектором. Тогда задержка в экономическом развитии, в свою очередь, является следствием неспособности общества организовать такое замещение.

Вначале мы опишем модель миграции населения, основанную на работе [Lewis 1954]. В ней менее развитая экономика моделируется как дуальная экономика, традиционный сектор которой располагается в сельской местности, а современный сектор — в городах. Затем мы рассмотрим модель, основанную на статьях [Banerjee, Newman 1998; Acemoglu, Zilibotti 1999], в которых традиционный сектор и сельская экономика обладают конкурентным преимуществом в проведении в жизнь общественных норм, несмотря на то что, как и в других моделях дуальной экономики, в современном секторе (в городской экономике) используются более эффективные технологии. В этой модели показано, как определенные характеристики традиционного сектора помогают защитить менее производительные фирмы от их более производительных конкурентов и замедлить процесс экономического развития общества. Наконец, мы покажем, как импорт технологий из более развитых экономик в рамках моделей, представленных в параграфе 18.4, может привести к возникновению дуальной экономики как побочный продукт внедрения в менее развитых экономиках современных технологий, более интенсивно использующих квалифицированную рабочую силу.

21.3.1. Избыток рабочей силы и дуальная экономика

В работе [Lewis 1954] утверждается, что в менее развитых экономиках зачастую наблюдается *избыток рабочей силы*, то есть незанятых или не полностью занятых работников, обычно проживающих в сельской местности. Тогда дуальная экономика может рассматриваться как сопоставление современного сектора, в котором работники эффективно заняты, и традиционного сектора, в котором они заняты не полностью. Общее свойство всех менее развитых экономик иметь низкое значение отношения занятости к населению послужило основной мотивацией работы Льюиса. Основным свойством модели является наличие в экономике некоторых барьеров, препятствующих перемещению рабочей силы из традиционного сектора в города и в современный сектор, или замедляющих этот процесс. Далее мы представим сокращенную версию этой модели, в которой эта идея представлена в строгом изложении.

Рассмотрим экономику с бесконечным горизонтом планирования в непрерывном времени. Предположим, что она состоит из двух секторов или регионов, которые мы будем называть городским и сельским. Нормализуем население экономики единицей. Предположим, что в момент времени $t = 0$ в городском секторе занято $L^U(0)$ индивидов, а в сельском секторе — $L^R(0) = 1 - L^U(0)$ индивидов. Единственной экономической активностью в сельской местности является сельское хозяйство, и для простоты предположим, что производственная функция в сельском хозяйстве является линейной. Тогда совокупный сельскохозяйственный выпуск задается следующим уравнением:

$$Y^A(t) = B^A L^R(t),$$

где $B^A > 0$. Основной экономической активностью в городах является обрабатывающее производство. В обрабатывающей промышленности могут быть заняты только работники, проживающие в городах. Предположим, что все городские работники заняты в производственной деятельности. Тогда производственная функция в городском секторе приобретает следующий вид:

$$Y^M(t) = F(K(t), L^U(t)),$$

где переменная $K(t)$ обозначает капитал и его начальный запас равен $K(0)$. Функция F является стандартной неоклассической производственной функцией и удовлетворяет предположениям 1 и 2 (см. главу 2). Также для простоты предположим, что сельскохозяйственные и промышленные товары являются совершенными заменителями. Рынки труда в сельской местности и в городах являются рынками с совершенной конкуренцией. Ни в одном из секторов не наблюдается технологического прогресса.

Основное предположение модели состоит в том, что в результате действия барьеров, препятствующих мобильности рабочей силы, миграция работников из сельской местности в города протекает медленно, даже в том случае, если заработная плата в обрабатывающей промышленности превышает заработную плату в сельском хозяйстве. В частности, чтобы описать динамику модели в сокращенной форме, предположим, что накопление капитала происходит лишь за счет сбережений работников, проживающих в городах, то есть

$$\dot{K}(t) = sF(K(t),\ L^U(t)) - \delta K(t), \tag{21.24}$$

где параметр s обозначает экзогенно заданную норму сбережений, а параметр δ — норму амортизации капитала. Важным следствием из уравнения (21.24) является то, что увеличение выпуска в современном секторе ведет к дальнейшему накоплению капитала в этом секторе. Альтернативный подход, рассмотренный нами в параграфе 20.3 и который используется в модели из подпараграфа 21.3.2, состоит в предположении о том, что размер современного сектора напрямую влияет на динамику производительности (например, в результате обучения в процессе производства, как в статье [Romer 1986a], или вследствие эндогенного технологического прогресса, темп которого зависит от размера рынка товара, производимого в данной отрасли, см. упражнение 20.19). В рамках анализа данной модели выбор любой из этих альтернатив не меняет ее результатов.

Из совершенной конкуренции на рынке труда следует, что заработная плата в сельской местности и в городах задается следующими уравнениями:

$$w^U(t) = \frac{\partial F(K(t),\ L^U(t))}{\partial L} \text{ и } w^R(t) = B^A.$$

Предположим, что выполняется неравенство

$$\frac{\partial F(K(0),\ 1)}{\partial L} > B^A, \tag{21.25}$$

то есть даже если все работники в экономике заняты в обрабатывающей отрасли при начальном значении капитала, они обладают более высокой предельной производительностью, чем работая в сельском хозяйстве.

Предположим, что динамика миграции населения описывается следующим простым уравнением:

$$\dot{L}^R(t)\begin{cases} = -\mu L^R(t) & \text{если } \; w^U(t) > w^R(t), \\ \in \left[-\mu L^R(t),\ 0\right] & \text{если } \; w^U(t) = w^R(t), \\ = 0 & \text{если } \; w^U(t) < w^R(t). \end{cases} \tag{21.26}$$

Из уравнения (21.26) следует, что до тех пор, пока заработная плата в городском секторе превышает заработную плату в сельской местности, работники перемещаются в города с постоянным темпом. Скорость миграции не зависит от величины разрыва заработных плат. Это предположение сделано исключительно для упрощения дальнейших выкладок. Мы предположим, что значение параметра μ мало, то есть что в результате существования барьеров, препятствующих миграции населения, она проходит медленно даже когда переезд в город приносит значительную выгоду. В случае когда заработная плата в сельской местности превышает заработную плату в городах, миграция не происходит.

Из уравнения (21.25) также следует, что в начальный момент времени $t = 0$ происходит миграция работников из сельской местности в города. Более того, если значение $K(0)/L^U(0)$ меньше значения отношения капитала к труду в стационарном равновесии, то заработная плата остается высокой и продолжает стимулировать миграцию других работников. Для более подробного анализа этого процесса введем переменную

$$k(t) \equiv \frac{K(t)}{L^U(t)}$$

как отношение капитала к труду в обрабатывающей отрасли (современном секторе) в момент времени t. Как обычно, введем производственную функцию на душу населения $f(k(t))$. Тогда $w^U(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t))$. Объединяя уравнения (21.24) и (21.26), получаем, что если $f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) > B^A$, то динамика отношения капитала к труду задается следующим уравнением:

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\delta + \mu\nu(t))k(t), \tag{21.27}$$

где переменная $\nu(t) \equiv L^R(t)/L^U(t)$ обозначает отношение сельского и городского населения экономики. Заметим, что если заработная плата в городах превышает заработную плату в сельской местности, то произведение темпа миграции μ и отношения $\nu(t)$ играет роль параметра, описывающего темп роста населения в базовой модели экономического роста

Солоу. С другой стороны, если $f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) \leq B^A$, то миграция не происходит и динамика отношения капитала к труду описывается следующим уравнением:

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - \delta k(t). \tag{21.28}$$

Остановимся на первом случае. Обозначим уровень отношения капитала к труду, при котором заработные платы в городах и в сельской местности равны, как $\bar{k}$. Его значение определяется уравнением:

$$f(\bar{k}) - \bar{k}f'(\bar{k}) = B^A. \tag{21.29}$$

В момент достижения этого значения отношения капитала к труду миграция прекращается, и отношение $v(t)$ далее остается постоянной величиной. Начиная с этого момента времени равновесная динамика модели описывается уравнением (21.28). Следовательно, в стационарном равновесии выполняется условие:

$$\frac{sf(\hat{k})}{\hat{k}} = \delta. \tag{21.30}$$

Для полного анализа переходной динамики, которая представляет основной интерес в этой модели, необходимо разобрать несколько случаев. Мы остановимся на одном из них, который представляется наиболее близким к фактическому опыту большинства менее развитых экономик (анализу остальных случаев посвящено упражнение 21.4). В частности предположим, что выполняются следующие условия:

1. $k(0) < \hat{k}$, то есть в начальный момент времени значение отношения капитала к труду (в городском секторе экономики) меньше его значения в стационарном равновесии. Из этого предположения следует, что имеет место неравенство $sf(k(0)) - \delta k(0) > 0$.
2. $k(0) < \bar{k}$, откуда следует, что $f(k(0)) - k(0)f'(k(0)) > B^A$, то есть в начальный момент времени заработная плата в городском секторе превышает заработную плату в сельской местности.
3. $sf(k(0)) - (\delta + \mu v(0))k(0) < 0$, то есть при заданном распределении населения экономики между городами и сельской местностью в начальный момент времени миграция ведет к снижению отношения капитала к труду.

В этом случае в начальный момент времени $t = 0$ происходит миграция населения из сельской местности в города. Так как вначале значение отношения $v(0)$ велико, эта миграция ведет к снижению отношения капитала к труду в городах (его динамика описывается дифференциальным уравнением (21.27)). Далее возможно два случая. В первом из них значение отношения капитала к труду никогда не падает ниже $\bar{k}$, то есть миграция рабочей силы из сельской местности в города всегда протекает с темпом μ. Несмотря на это, влияние такой миграции на динамику отношения капитала к труду в городах снижается со временем, так как значение отношения $v(t)$ сокращается по мере перетока работников в города. Так как $sf(k(0)) - \delta k(0) > 0$, начиная с некоторого момента времени отношение капитала к труду в городах начинает возрастать и в конечном счете сходится к единственному стационарному значению $\hat{k}$. Однако эта сходимость может занять довольно длительное время, и заметим, что она не обязательно происходит монотонно: значения отношения капитала к труду и заработной платы в городском секторе вначале сокращаются, а затем возрастают. Второй случай описывает ситуацию, когда миграция рабочей силы из сельской местности в города ведет к снижению отношения капитала к труду до $\bar{k}$ в некоторый момент времени t'. С этого момента заработная плата в обоих секторах равна B^A и темп миграции $\dot{L}^R(t)/L^R(t)$ изменяется таким образом, чтобы отношение капитала к труду оставалось равным $\bar{k}$ в течение некоторого времени (напомним, что если заработные платы в городах и сельской местности равны, то уравнение (21.26) допускает любое значение темпа миграции между нулем и его максимальным уровнем μ). На самом деле значение отношения капитала к труду может оставаться на этом уровне, а заработные платы в обоих секторах оставаться неизменными в течение длительного времени. Однако, как и в предыдущем случае, в конечном счете значение отношения $v(0)$ упадет до такого уровня, что отношение капитала к труду в городском секторе начнет возрастать. По достижении этого уровня отношения капитала к труду заработная плата в городах также начнет расти, миграция будет протекать с максимальным темпом μ, и, как и ранее, отношение капитала к труду в городском секторе начнет медленно сходиться к стационарному значению $\hat{k}$.

Следовательно, такой анализ показывает, как простая модель миграции способна описать сложную динамику населения в городах и сельской местности, а также динамику различия в заработной плате в современном и традиционном секторах.

Описанная выше динамика, особенно в первом случае, позволяет понять особенность дуальной экономики. Заработная плата и предельный продукт труда в городах превышают их значения в сельской местности. Кроме того, если значение параметра μ мало, то миграция рабочей силы из сельской местности в города протекает медленно, даже в случае значительной разницы заработных плат. Поэтому дуальная структура экономики может оказаться ярко выраженной в течение длительного времени. Заметим также, что миграция рабочей силы из сельской местности в города ведет к росту агрегированного выпуска в экономике, так как она позволяет занять работников в производстве, где их предельный продукт более высок. Однако так как миграция населения протекает медленно, такой процесс роста выпуска также протекает медленно.

Из анализа, проведенного выше, следует, что при значениях параметров модели, которые мы предположили, дуальная структура экономики не только влияет на ее общественное устройство, когда экономика остается аграрной в течение длительного периода времени (особенно если значение параметра μ мало), но и ведет к меньшему значению выпуска по сравнению со случаем, когда миграция работников в города протекает более быстро. Однако, так как мы не описали причин, по которым миграция протекает медленно, мы можем называть такую ситуацию провалом рынка лишь с изрядной долей предосторожности.

21.3.2. Общественные нормы, миграция населения и экономическое развитие

В этом подпараграфе мы опишем модель, основанную на работах [Banerjee, Newman 1998; Acemoglu, Zilibotti 1999]. В работе [Banerjee, Newman 1998] рассматривается экономика, где традиционный сектор обладает меньшей производительностью, но при этом в нем в меньшей степени присутствует асимметричная информация. Другими словами, этот сектор обладает меньшими издержками мониторинга на финансовом рынке. С другой стороны, современный сектор является более производительным, но асимметрия информации в нем создает значительные сложности на кредитном рынке. В работе [Banerjee, Newman 1998] показано, как процесс экономического развития связан с перемещением экономической активности из традиционного в современный сектор и почему информационное преимущество в традиционном секторе ведет к замедлению такого перемещения. В статье [Acemoglu, Zilibotti 1999] процесс экономического развития рассматривается как процесс накопления информации и утверждается, что владение большей информацией позволяет индивидам заключать более сложные контракты и участвовать в более сложных производственных отношениях. Тогда этот процесс ведет к изменениям в технологии, в финансовых отношениях и к общественной трансформации, так как владение большим количеством информации и способность заключать более сложные контракты позволяют индивидам отказаться от менее эффективных и менее информационно зависимых общественных и производственных отношений.

Модель, изложенная в этом подпараграфе, проще, чем модели из обеих вышеперечисленных статей, однако в ней присутствует схожий экономический механизм. Жизнь агентов в сельской местности регулируется системой общественных норм, и поэтому они могут входить в общественные и экономические отношения друг с другом, не подвергая себя при этом риску недобросовестности. После переезда в город индивид получает возможность вести более производительную экономическую деятельность, однако в городах для соблюдения общественных правил, контрактов и норм необходимо существование других систем принуждения. В большинстве случаев создание таких систем сопряжено с некоторыми издержками. Как и в модели индустриализации из параграфа 20.3, мы предположим, что в современном секторе присутствует экстерналия от обучения в процессе производства. Другими словами, технологическое преимущество современного сектора увеличивается по мере того как большее число индивидов мигрирует в города и начинает работать там. Однако преимущество системы общественных норм в традиционном секторе ведет к замедлению этого процесса.

Предположим совершенную конкуренцию на рынках труда в обоих секторах и нормализуем население экономики единицей. Выделим три отличия этой модели от модели из подпараграфа 21.3.1. Во-первых, предположим, что издержки миграции из сельской местности в города отсутствуют. Другими словами, индивид обладает возможностью перейти из одного сектора в другой в любой момент времени. Во-вторых, допустим, что вместо накопления капитала в экономике присутствует экстерналия и выпуск в современном секторе задается следующим уравнением:

$$Y^M(t) = X(t)F(L^U(t), Z),$$

где переменная $X(t)$ обозначает производительность в современном секторе, значение которой определяется эндогенно экстерналией от обучения в процессе производства. Кроме того, параметр Z обозначает еще один фактор производства, предложение которого задано и не изменяется во времени, и производственная функция F удовлетворяет предположениям 1 и 2 (тогда труд обладает убывающей предельной производительностью). Более того, предположим, что динамика технологии в современном секторе описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{X}(t) = \eta L^U(t)X(t)^{\zeta},$$

где $\zeta \in (0, 1)$. Это уравнение описывает экстерналию от обучения в процессе производства способом, схожим с использованным в статье [Romer 1986a]. Из предположения $\zeta < 1$ следует, что величина экстерналии недостаточна для устойчивого долгосрочного роста экономики.

Наконец, также предположим, что традиционный сектор обладает конкурентным преимуществом в системе общественных норм. В частности, индивиды в нем имеют возможность вести множество общественных и экономических действий, от участия в финансовом рынке и занятости до заключения браков и других общественных отношений. Многие из таких отношений в городах являются анонимными, и для их осуществления требуется мониторинг на уровне правоохранительной деятельности, который основан на довольно сложной системе институтов. В большинстве экономик, и в частности в менее развитых экономиках, такие институты зачастую являются несовершенными. С другой стороны, размер населения в сельской местности невелик и большинство индивидов в ней связано друг с другом долгосрочными отношениями. Эти долгосрочные отношения позволяют использовать общественные нормы для регулирования большинства видов экономической деятельности. Например, долгосрочные отношения позволяют индивидам использовать свою репутацию для привлечения займов, поиска информации о наиболее подходящих для той или иной деятельности работниках и обеспечения кооперации в другой общественной и экономической деятельности. Мы будем моделировать эти конкурентные преимущества в сокращенной форме и предположим, что индивиды, проживающие в городах, несут потоковые издержки $\xi > 0$, связанные с несовершенным мониторингом и отсутствием общественных норм.

Все индивиды в экономике решают задачу максимизации чистой приведенной дисконтированной стоимости своего дохода в течение всей жизни. Так как перемещение между сельской местностью и городом не сопряжено с издержками, в каждый момент времени индивид выбирает работу в секторе с большим значением чистой заработной платы. Поэтому во внутреннем равновесии (с действующими традиционным и современным секторами) имеет место уравнение:

$$w^M(t) - \xi = w^A(t).$$

Из совершенной конкуренции на рынке труда следует равенство:

$$w^M(t) = X(t)\frac{\partial F(L^U(t), Z)}{\partial L} \equiv X(t)\tilde{\phi}(L^U(t)),$$

где второе равенство определяет функцию $\tilde{\phi}(\cdot)$, которая является строго убывающей (что следует из предположения 1 для производственной функции F). Подставляя предыдущее равенство, находим, что равновесие на рынке труда описывается уравнением $X(t)\tilde{\phi}(L^U(t)) = B^A + \xi$ или

$$L^U(t) = \tilde{\phi}^{-1}\left(\frac{B^A+\xi}{X(t)}\right) \equiv \phi\left(\frac{X(t)}{B^A+\xi}\right),$$

где второе равенство определяет функцию ϕ, которая является строго возрастающей, так как функция $\tilde{\phi}$ (и поэтому функция $\tilde{\phi}^{-1}$) строго убывает.

Следовательно, динамика экономики описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{X}(t) = \eta\phi\left(\frac{X(t)}{B^A + \xi}\right)X(t)^{\zeta}.$$

Отметим несколько свойств уравнения, описывающего эту динамику. Во-первых, общий вид динамики переменной $X(t)$, показанной на рис. 21.3, выглядит как буква S. Это следует из того, что при невысоком начальном значении технологии $X(0)$ равновесная занятость в городах $\phi(X(t)/B^A + \xi)$ также невелика на ранних этапах экономического развития. Поэтому обучение в процессе производства ограничено и технологический прогресс в современном секторе протекает медленно. Однако по мере того, как технология $X(t)$ улучшается, значение $\phi(X(t)/B^A + \xi)$ также возрастает, что ведет к ускорению технологического прогресса в современном секторе. Однако значение $L^U(t)$ не может превысить единицу, и поэтому величина $\phi(X(t)/B^A + \xi)$ сходится к некоторой константе и темп роста переменной $X(t)$ снижается. Таким образом, такая модель в сокращенной форме ведет к S-типу динамики технологических изменений в современном секторе и связанной с ней миграцией работников из сельской местности в города.

Во-вторых, и более важно, конкурентное преимущество традиционного сектора в общественных нормах ведет к замедлению процесса технологических изменений в современном секторе и миграции населения в города. В частности, увеличение параметра ξ замедляет технологический

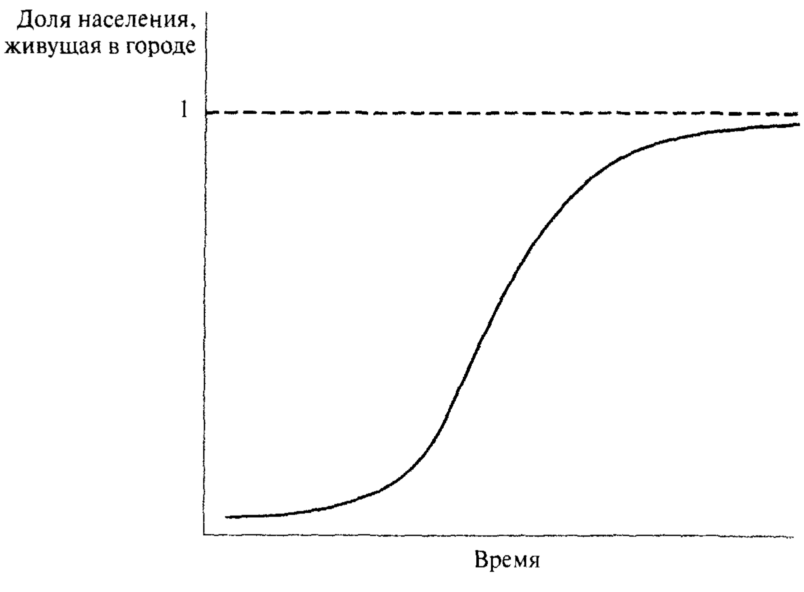

Рис. 21.3. Динамика населения в сельской местности и в городах

прогресс и темп миграции в города. Так как занятость в городах создает положительную экстерналию, система общественных норм в сельской местности замедляет процесс экономического развития на уровне агрегированной экономики. Поэтому мы можем предположить, что увеличение параметра ξ, соответствующее большему преимуществу традиционного сектора в общественных нормах, в общем случае ведет к снижению темпа роста экономики и уровня благосостояния агентов. Однако с другой стороны, улучшение общественных норм в сельской местности создает статические выгоды. Увеличение параметра ξ ведет к росту потребления в экономике в начальный момент времени. Следовательно, в модели присутствует выбор между динамическими и статическими последствиями для уровня благосостояния от различных значений параметра ξ. Упражнение 21.5 посвящено формальному анализу этого выбора.

Необходимо отметить, что, в отличие от модели из подпараграфа 21.3.1, в этой модели отсутствуют барьеры, препятствующие миграции населения: работники в сельской местности и в городах получают равную заработную плату. Однако функционирование экономики и структура общественных отношений в двух секторах различны. Экономические отношения в сельской местности основаны на общественных нормах, а в городах для поддержки различных общественных и экономических механизмов используются современная технология и анонимный институциональный мониторинг. Следовательно, в этой модели дуальная экономика является не только экономическим, но и общественным феноменом.

21.3.3. Неподходящие технологии и дуальная экономика

Далее мы покажем, как идеи, связанные с подходящими и неподходящими технологиями, описанные в главе 18, могут быть использованы для анализа других важных аспектов устройства дуальной экономики. Напомним из параграфа 18.4, что менее развитые страны часто импортируют технологии из более продвинутых экономик и что в большинстве случаев эти технологии предназначены для использования при отношении факторов производства, отличающемся *от его значения в менее развитой* стране. Например, в параграфе 18.4 мы подчеркнули важность последствий возможного несоответствия между квалификацией рабочей силы в менее развитой экономике и требований современных технологий к ее квалификации. Однако при этом в равновесии в этой модели все работники в менее развитой экономике используют современную технологию.

Предположим, что каждая технология является леонтьевской, то есть для ее использования требуется определенное число квалифицированных и неквалифицированных работников. Например, технология A_h позволяет произвести A_hL единиц конечного товара, где переменная L обозначает количество занятых неквалифицированных работников, но при этом эта технология требует, чтобы отношение занятых квалифицированных и неквалифицированных работников в точности равнялось h (например, квалифицированные работники могут быть менеджерами неквалифицированных работников). Предположим, что значение A_h возрастает по h, то есть более продвинутые технологии являются более производительными.

Далее рассмотрим менее развитую экономику, которая обладает доступом ко всем технологиям A_h, где $h \in [0, \bar{h}]$ при некотором вещественном $\bar{h} < \infty$. Предположим, что население экономики состоит из H квалифицированных и L неквалифицированных работников, так что выполняется неравенство $H/L < \bar{h}$. Из него следует, что не все работники могут быть заняты в производстве с технологией с наибольшей интенсивностью использования квалифицированных работников. Как выглядит равновесие в такой экономике?

Для ответа на этот вопрос предположим совершенную конкуренцию на всех рынках. Тогда равновесное распределение работников по технологиям максимизирует выпуск в экономике (это следует из второй теоремы экономики благосостояния, см. теорему 5.7). Тогда задача поиска равновесия имеет следующий вид:

$$\max_{[L(h)]_{h\in[0,\bar{h}]}} \int_0^{\bar{h}} A_h L(h)dh \tag{21.31}$$

при ограничениях

$$\int_0^{\bar{h}} L(h)dh = L \text{ и } \int_0^{\bar{h}} hL(h)dh = H,$$

где переменная $L(h)$ обозначает число квалифицированных работников, использующих в работе технологию A_h. Условие первого порядка для этой задачи максимизации выглядит как

$$A_h \le \lambda_L + h\lambda_H \text{ для всех } h \in \left[0, \bar{h}\right], \tag{21.32}$$

где переменная λ_L является множителем перед первым ограничением, а переменная λ_H — множителем перед вторым ограничением. Условие первого порядка имеет вид неравенства, так как в равновесии используются не все технологии $h \in [0, \bar{h}]$, и для технологий, которые не используются, это условие выполняется как строгое неравенство.

Из данного условия первого порядка следует, что если значение A_h достаточно велико и $A_0 > 0$, то решение задачи имеет очень простую структуру. Все квалифицированные работники вместе с $L(\bar{h}) = H/\bar{h}$ неквалифицированными работниками будут заняты в производстве с технологией $\bar{h}$. Оставшиеся $L - L(\bar{h})$ неквалифицированные работники будут заняты в производстве с технологией $h = 0$ (см. упражнение 21.6). Другими словами, равновесие имеет структуру дуальной экономики. В производстве используются две очень разные технологии, одна из них является продвинутой (современной), а другая представляет собой наименее передовую из всех доступных технологий. Дуальная структура равновесия является следствием нарушения условия выпуклости: для достижения максимума выпуска необходимо использование наиболее передовой технологии, но при этом все квалифицированные работники используют эту технологию и поэтому оставшиеся неквалифицированные работники могут быть заняты лишь в производстве, не требующем участия квалифицированного труда. Тогда из этого наблюдения следует, что структура дуальной экономики может возникнуть вследствие импорта технологий, в которых требования к факторам производства не соответствуют предложению квалифицированной рабочей силы в экономике.

Модели дуальной экономики, основанные на рассуждениях такого типа о подходящих технологиях, не получили достаточного развития, хотя из работ о подходящих технологиях, описанных в главе 18, следует, что они могут оказаться важны в практическом смысле. Несмотря на то что эти модели описывают производственную структуру дуальной экономики, они могут быть легко обобщены предположением о том, что более современные технологии используются в городах, где контракты регулируются современными институтами, в то время как менее современные технологии используются в сельской местности. Тогда модели, основанные на подходящих (или неподходящих) технологиях, могут оказаться в состоянии описать основные характеристики дуальной экономики, включая миграцию населения из сельской местности в города и изменения общественных отношений.

21.4. Расстояние до границы технологических возможностей и изменения в организации производства

В этом параграфе мы остановимся на изменениях в структуре производства, происходящих в процессе экономического развития, и покажем, как они могут быть связаны с изменениями в определенных аспектах внутренней организации фирмы и со структурой роста экономики, в данном случае с тем, является ли источником роста инновационная деятельность или имитационная активность. Мы опишем этот подход в рамках простой модели, основанной на статье [Acemoglu, Aghoin, Zilibotti 2006]. Ограничение на объем книги не позволяет провести подробный анализ модели, и мы представим лишь краткое ее описание, в основном сконцентрировавшись на производственной структуре экономики.

Рассмотрим экономику, находящуюся позади мировой технологической границы. Так как мы остановимся на анализе единственной экономики и будем рассматривать динамику мировой технологической границы как заданную, мы не будем использовать страновой индекс. Предположим, что время дискретно и экономика населена перекрывающимися поколениями индивидов, живущих в течение двух периодов времени. Нормализуем общее население единицей. В экономике производится единственный конечный товар, который мы положим единицей измерения. Конечный товар производится на рынке с совершенной конкуренцией с помощью континуума машин с производственной функцией, схожей с производственной функцией в шумпетерианской модели экономического роста из главы 14:

$$Y(t)=\int_0^1 A(v,\ t)^{\beta} x(v,\ t)^{1-\beta} dv, \tag{21.33}$$

где переменная $A(v,\ t)$ обозначает производительность машины типа v в периоде времени t, переменная $x(v,\ t)$ — количество машин такого типа, используемое в производстве конечного товара в периоде времени t и $\beta \in (0,\ 1)$.

Каждый тип машин производится фирмой-монополистом v с единичными предельными издержками в единицах единственного конечного товара. Помимо фирмы-монополиста в экономике присутствует конкурентный пул фирм-имитаторов, которые могут копировать ее технологию и производить идентичные машины с производительностью $A(v,\ t)$, но с издержками производства $\chi > 1$ единиц конечного товара. Существование конкурентного пула фирм-имитаторов вынуждает фирму-монополиста вести *предельное ценообразование* и устанавливать цену машины на уровне

$$p(v,t)=\chi > 1. \tag{21.34}$$

Равновесие с предельным ценообразованием существует, если значение χ не настолько велико, что фирма-монополист имеет возможность устанавливать цену, при которой ее прибыль достигает глобального максимума. Необходимым условием для этого является неравенство:

$$\chi \leq 1/(1-\beta),$$

и мы далее предположим, что оно выполняется. Параметр χ описывает как технологические факторы, так и государственную политику в области антимонопольного законодательства. Высокое значение χ соответствует менее конкурентному рынку. При заданных функциях спроса, следующих из технологии производства конечного товара (21.33), и предельной цене (21.34) прибыль фирмы-монополиста в равновесии задается следующим уравнением:

$$\pi(v, t) = \delta A(v, t), \qquad (21.35)$$

где параметр

$$\delta \equiv (\chi - 1)\chi^{-1/\beta}(1 - \beta)^{1/\beta}$$

является мерой величины монопольной силы фирмы-монополиста. В частности нетрудно убедиться, что δ является возрастающей функцией от χ при всех $\chi \leq 1/(1 - \beta)$.

В этой модели экономическое развитие общества происходит не в результате накопления капитала, которое было основным фактором в некоторых ранних моделях, а вследствие технологического прогресса, то есть увеличения значения переменной $A(v, t)$. Предположим, что каждая фирма-монополист $v \in [0, 1]$ обладает возможностью увеличить свое значение $A(v, t)$ с помощью двух дополняющих друг друга процессов: (1) имитация (внедрение существующих технологий) и (2) инновации (открытие новых технологий). Основной экономический выбор в модели является следствием того, что различные экономические структуры (как в организации фирм, так и в выборе экономикой стратегии роста) приводят к различным комбинациям имитационной и инновационной деятельности.

Для иллюстрации этой мысли определим среднюю производительность в рассматриваемой экономике в периоде времени t следующим образом:

$$A(t) \equiv \int_0^1 A(v, t)dv.$$

Обозначим производительность на мировой технологической границе как $\bar{A}(t)$. Из предположения о том, что экономика находится позади мировой технологической границы, следует неравенство $A(t) < \bar{A}(t)$ для всех t. Допустим, что динамика производительности на мировой технологической границе описывается следующим разностным уравнением:

$$\bar{A}(t) = (1+g)\bar{A}(t-1), \qquad (21.36)$$

где темп роста производительности задан как

$$g \equiv \underline{\eta} + \bar{\gamma} - 1 \qquad (21.37)$$

и параметры $\underline{\eta}$ и $\bar{\gamma}$ определены далее.

Предположим, что процесс осуществления имитаций и инноваций ведет к следующей динамике производительности каждой фирмы-монополиста:

$$A(v,\ t) = \eta \bar{A}(t-1) + \gamma A(t-1) + \varepsilon(v,\ t), \tag{21.38}$$

где $\eta > 0$, $\gamma > 0$ и $\varepsilon(v, t)$ является случайной величиной с нулевым средним, которая описывает различия в инновационной деятельности на уровне фирм и отраслей экономики.

В уравнении (21.38) слагаемое $\eta \bar{A}(t-1)$ описывает увеличение производительности за счет внедрения технологий с мировой технологической границы (и поэтому зависит от значения производительности на границе $\bar{A}(t-1)$), а слагаемое $\gamma A(t-1)$ описывает компоненту прироста производительности, происходящую за счет инновационной деятельности (которая основывается на запасе знаний в рассматриваемой экономике в периоде времени $t-1$, $A(t-1)$). Также определим переменную

$$a(t) \equiv \frac{A(t)}{\bar{A}(t)}$$

как меру *расстояния* экономики *до технологической границы* (обратную к ней величину) в периоде времени t.

Интегрируя уравнение (21.38) по $v \in [0, 1]$, используя то, что случайные величины $\varepsilon(v, t)$ имеют нулевое среднее, деля обе части уравнения на $\bar{A}(t)$ и используя уравнение (21.36), получаем простое линейное соотношение между расстоянием страны до мировой технологической границы в периоде времени t $a(t)$ и ее расстоянием до мировой границы в периоде времени $t-1$ $a(t-1)$:

$$a(t) = \frac{1}{1+g}(\eta + \gamma a(t-1)). \tag{21.39}$$

Это уравнение схоже с уравнением технологического наверстывания (18.4) из параграфа 18.2. Оно показывает, как процесс имитаций и инноваций может привести к сходимости. В частности, если $\gamma < 1 + g$, то из уравнения (21.39) следует, что переменная $a(t)$ сходится на бесконечности к единице. Это уравнение также показывает, что относительная важность инновационной и имитационной деятельности зависит от расстояния рассматриваемой экономики до мировой технологической границы. В частности, если величина $a(t)$ велика (это значит, что экономика находится вблизи границы), то инновации γ имеют большее влияние на экономический рост. С другой стороны, если значение $a(t)$ мало (то есть экономика находится далеко от границы), то имитации η оказываются относительно более важными.

Для получения дальнейших выводов сделаем параметры η и γ эндогенными в рамках модели в сокращенной форме. Следуя анализу в работе [Acemoglu, Aghion, Zilibotti 2006], мы будем моделировать параметры η и γ как функции от инвестиций, осуществляемых предпринимателями, и механизма заключения контрактов между фирмами и предпринимателями. Основная идея подхода состоит в предположении о существовании двух типов предпринимателей: высококвалифицированных и низкоквалифицированных. Уровень квалификации предпринимателя неизвестен в момент, когда он начинает бизнес, и выявляется лишь со временем в зависимости от его производительности. В таком случае возможны два типа «стратегий экономического роста». Первая состоит в выборе высококвалифицированных предпринимателей и замещении ими предпринимателей с низким уровнем квалификации. Такая стратегия роста сопровождается большим количеством созидательного разрушения при значительном числе молодых предпринимателей (так как старые неудачливые предприниматели вытесняются новыми молодыми предпринимателями). Во второй стратегии опытные предприниматели остаются в экономике даже в случае, когда они обладают низкой квалификацией. Следовательно, в этой стратегии организация фирм основывается на долгосрочных взаимоотношениях (в данном случае между предпринимателями и финансовым рынком), опыте и долгосрочной прибыли и в меньшей степени на созидательном разрушении. Даже если низкоквалифицированные предприниматели менее производительны, чем высококвалифицированные, существует ряд потенциальных причин, по которым предпочтение будет отдаваться опытному низкоквалифицированному предпринимателю. Например, опыт может увеличивать производительность в некоторых определенных областях. Более того, в работе [Acemoglu, Aghion, Zilibotti 2006] показано, что при наличии несовершенств на кредитном рынке нераспределенная прибыль опытного предпринимателя может давать ему преимущества на этом рынке (так как он имеет возможность заложить эти средства для привлечения новых кредитов для осуществления большего количества улучшающих производительность инвестиций). Мы будем обозначать стратегию, основанную на вытеснении низкоквалифицированных предпринимателей как $R = 0$, а стратегию, в которой опытные предприниматели продолжают оставаться на рынке, как $R = 1$.

Основное предположение модели в сокращенной форме состоит в том, что опытные предприниматели (пользуясь своим опытом или нераспределенной прибылью) способны увеличить производительность своей фирмы в большей степени, если это улучшение основано на имитации технологий с мировой технологической границы, которая может рассматриваться как относительно стандартное действие. С другой стороны, высококвалифицированные предприниматели более склонны к инновациям и достигают более высокого роста за счет инновационной деятельности. Таким образом, выбор между стратегиями $R = 0$ и $R = 1$ и связанный с ним выбор между организационными формами сводится к выбору между имитацией технологий с мировой технологической границы и инновациями. Поэтому мы будем называть первую стратегию «стратегией роста, основанного на имитации», а вторую стратегию — «стратегией роста, основанного на инновациях». Основываясь на этих рассуждениях, предположим, что уравнение, описывающее динамику расстояния экономики от мировой технологической границы (21.39), имеет следующий вид:

$$a(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+g}(\bar{\eta} + \underline{\gamma} a(t-1)) & \text{если } R(t) = 1, \\ \dfrac{1}{1+g}(\underline{\eta} + \bar{\gamma} a(t-1)) & \text{если } R(t) = 0. \end{cases} \tag{21.40}$$

Наложим также следующие ограничения:

$$\bar{\eta} > \underline{\eta} \text{ и } \underline{\gamma} < \bar{\gamma} < 1 + g. \tag{21.41}$$

Первая часть этого предположения непосредственно следует из преимущества высококвалифицированных предпринимателей в осуществлении инноваций, а вторая часть (в частности неравенство $\underline{\gamma} < \bar{\gamma}$) основана на преимуществе опытных предпринимателей в имитационной активности. Если экономика выбирает стратегию роста, основанного на имитации, то опытные предприниматели не вытесняются с рынка и, следовательно, в ней происходит внедрение большего числа технологий с мировой технологической границы. Последнее ограничение, неравенство $\bar{\gamma} < 1 + g$, гарантирует, что стратегия роста, основанного на имитации, не ведет к более быстрому росту, чем рост мировой технологической границы. Тогда мы можем интерпретировать предположение (21.37) как естественное утверждение о том, что мировая технологическая граница расширяется за счет стратегии роста, основанного на инновациях, так как страна, находящаяся на мировой технологической границе, не может имитировать технологии других стран.

На рис. 21.4 показаны графики уравнения (21.40). Из них нетрудно увидеть, что экономика с долгосрочными контрактами ($R = 1$) достигает более высокого роста (большего значения $a(t)$ при заданном значении $a(t-1)$) за счет имитаций и более медленного роста за счет инноваций. Из рис. 21.4 также следует, что выбор режима, на котором темп роста экономики достигает максимума, зависит от значения $a(t-1)$, то есть от расстояния экономики до мировой технологической границы. В частности из уравнений (21.40) следует существование порогового значения:

$$\hat{a} \equiv \frac{\bar{\eta} - \eta}{\bar{\gamma} - \underline{\gamma}} \in (0,\ 1), \qquad (21.42)$$

такого, что если $a(t-1) < \hat{a}$, то стратегия, основанная на имитации ($R = 1$), ведет к более быстрому росту, а если $a(t-1) > \hat{a}$, то более бстрый рост экономики достигается при стратегии, основанной на инновациях ($R = 0$). Поэтому для выбора набора стратегий, при которых темп экономического роста достигает максимума, экономика должна начинать при $R = 1$, а затем, по достижении достаточно близкого расстояния до мировой технологической границы, переходить на стратегию роста, основанного на инновациях ($R = 0$). В режиме, основанном на имитации, присутствующие на рынке предприниматели защищены от конкуренции со стороны молодых предпринимателей, и это может позволить экономике лучше использовать опыт старых предпринимателей для финансирования инвестиций за счет нераспределенной прибыли их фирм. С другой стороны, режим, основанный на инновациях, базируется на организационной форме, основанной на лучшем выборе предпринимателей, и в нем большое значение придается максимизации количества инноваций за счет опыта, имитаций и инвестиций.

На рис. 21.4 показана динамика технологии в экономике как функции от организационной структуры фирмы (рынков), описываемой параметром R. Он не описывает равновесную траекторию $\{R(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Чтобы найти

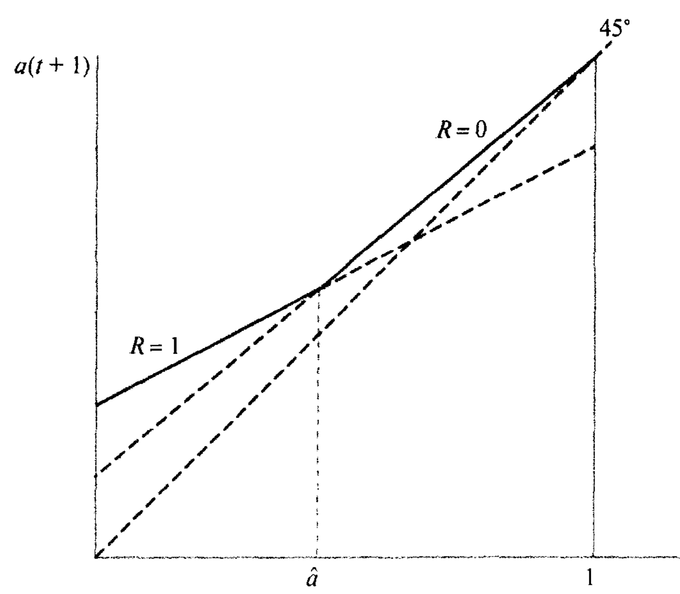

Рис. 21.4. Динамика расстояния до мировой технологической границы в равновесии с максимальным темпом роста

эту траекторию, необходимо описать равновесное поведение, которое включает в себя выбор предпринимателей, а также устройство кредитного рынка. Ограничение на объем книги не позволяет нам провести полный анализ равновесия в этой модели. Поэтому мы неформально опишем основные результаты этого анализа.

На концептуальном уровне мы можем выделить четыре основные конфигурации, которые могут быть равновесиями в экономике при институциональных режимах и значениях параметров модели.

1. *Равновесие с максимальным темпом роста:* в первом и наиболее очевидном равновесии темп роста экономики достигает максимума. В частности, если задачей рынков и предпринимателей является максимизация темпа экономического роста и они в состоянии разрешить конфликт интересов между агентами, имеют достаточный горизонт планирования и способны при принятии решений принимать во внимание монетарную и другие экстерналии, то равновесие в экономике будет оптимальным по Парето. Такое равновесие имеет простой вид:

$$R(t)=\begin{cases}1, & \text{если } a(t-1)<\hat{a},\\ 0, & \text{если } a(t-1)\geq\hat{a},\end{cases}$$

то есть экономика располагается на верхней огибающей двух сплошных линий на рис. 21.4. В этом случае никакие внешние вмешательства в экономику не способны увеличить темп ее роста[2]. Более того, экономика с начальным значением $a(0)<1$ всегда достигает темпа роста, превышающего g, и выходит на мировую технологическую границу, то есть $a(t)\to 1$. В таком равновесии с максимальным темпом роста в экономике вначале используются организационные формы и институты, соответствующие стратегии $R=1$. Затем в ней происходят структурные изменения, в данном случае изменение организации экономики и переход от стратегии $R=1$ к стратегии $R=0$. В простой экономике в этой модели структурные изменения состоят в исчезновении долгосрочных отношений между агентами и возникновении краткосрочных отношений, увеличении конкуренции между фирмами и предпринимателями и лучшем выборе предпринимателей.

2. *Равновесие с недостаточным объемом инвестиций:* второе возможное равновесие описывается следующей равновесной динамикой организационной структуры экономики:

$$R(t)=\begin{cases}1, & \text{если } a(t-1)<a_r(\delta),\\ 0, & \text{если } a(t-1)\geq a_r(\delta),\end{cases}$$

[2] Заметим, что максимизация темпа роста экономики не всегда означает максимизацию уровня благосостояния. В зависимости от вида предпочтений и структуры инвестиций, благосостояние может не достигать максимума в равновесии с максимальным темпом экономического роста.

где $a_r(\delta) < \hat{a}$. Такое равновесие показано на рис. 21.5, где сплошная черная линия описывает динамику расстояния экономики до мировой технологической границы a. Как определяется значение $a_r(\delta)$? В статье [Acemoglu, Aghion, Zilibotti 2006] показано, что если инвестиции важны для осуществления инноваций и кредитный рынок несовершенен, то нераспределенная прибыль опытных предпринимателей позволяет им больше инвестировать. Однако ввиду монополистической конкуренции на рынке в экономике присутствует стандартная *проблема присвоения прибыли*, когда предприниматель, осуществляющий большее количество инвестиций, не в состоянии получить весь доход от этих инвестиций, так как часть его получают потребители в виде увеличения излишка потребителя. Проблема присвоения прибыли дестимулирует инвестиции, и, так как большие инвестиции осуществляются опытными предпринимателями, она снижает эффективность стратегии, основанной на имитации. По этой причине такое равновесие называется равновесием с недостаточным объемом инвестиций: как показано на рис. 21.5, экономика может достичь большего темпа роста в интервале $a \in (a_r(\delta),\ \hat{a})$, выбирая стратегию $R(t) = 1$, однако в силу того, что проблема присвоения прибыли дестимулирует инвестиции, переход к равновесной динамике, основанной на инновациях, происходит раньше, чем экономика достигает порогового значения для максимизации темпа роста.

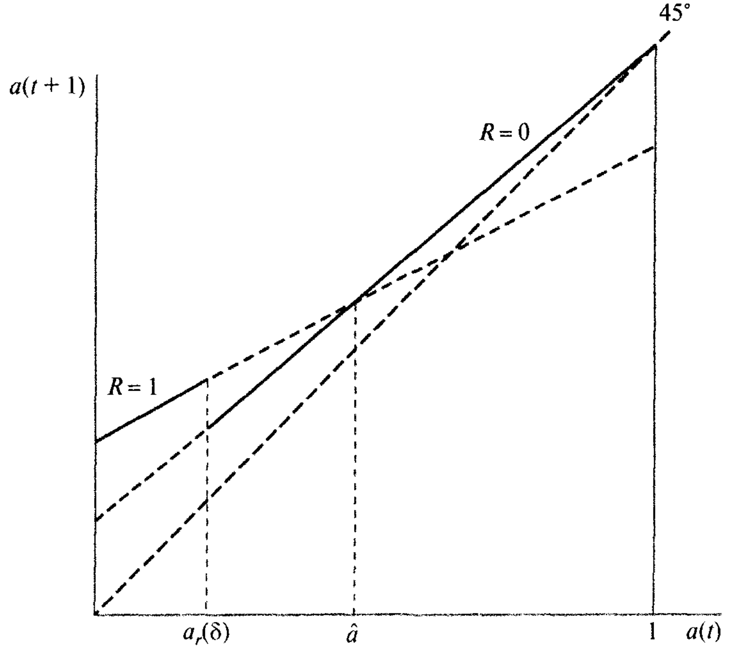

Рис. 21.5. Динамика расстояния до мировой технологической границы в равновесии с недостаточным объемом инвестиций

Заметим, что, хотя равновесие с недостаточным объемом инвестиций отличается от первого равновесия, в нем экономика также вначале выбирает стратегию $R = 1$, а затем проходит через структурные изменения, то есть переходит к режиму, основанному на инновациях ($R = 0$). Более того, в этом равновесии экономика также в конечном счете асимптотически достигает мировой технологической границы, то есть $a(t) \to 1$ при $t \to \infty$. Единственное отличие этого равновесия состоит в том, что структурные изменения (переход от $R = 1$ к $R = 0$) происходят раньше, в момент времени, когда $a(t-1) = a_r(\delta)$, а не пороговому значению $\hat{a}$.

Следовательно, в этом случае временное вмешательство правительства может позволить увеличить темп роста экономики. Важно отметить, что действия властей должны быть временными, так как темп роста экономики может быть увеличен, только если расстояние до мировой технологической границы находится в интервале $a \in (a_r(\delta), \hat{a})$. Как власти могут добиться увеличения темпа роста экономики? Одной возможностью является субсидирование инвестиций. В статье [Acemoglu, Aghion, Zilibotti 2006] показано, что уровень конкуренции на рынке товаров также косвенно влияет на равновесие, и поэтому мы используем обозначение $a_r(\delta)$. В частности, большее значение параметра δ, которое соответствует меньшей конкуренции на рынке товаров (большему значению параметра ξ), ведет к росту $a_r(\delta)$ и, таким образом, сокращает разрыв между $a_r(\delta)$ и $\hat{a}$. Несмотря на это, важно отметить, что снижение конкуренции создает другие статические искажения в экономике (в результате увеличения наценки монополиста). Еще более важным является то, что как мы увидим в двух следующих типах равновесия, снижение конкуренции может создать намного более значительные препятствия для роста экономики, и поэтому любое использование мер промышленной и антимонопольной политики для таких целей должно проводиться со значительной долей предосторожности.

3. *Склеротическое равновесие:* третьим возможным равновесием является склеротическое равновесие, когда выполняется неравенство $a_r(\delta) > \hat{a}$, то есть когда менее производительные предприниматели остаются на рынке даже когда они становятся возможным препятствием экономическому росту. В статье [Acemoglu, Aghion, Zilibotti 2006] показано, что такое распределение ресурсов может стать равновесием в силу того, что нераспределенная прибыль присутствующих на рынке предпринимателей играет роль щита, защищающего их от последствий созидательного разрушения, проводимого новыми предпринимателями. Следовательно, нераспределенная прибыль или другие преимущества опытных предпринимателей несут как общественные выгоды, так и издержки, и что из них имеет большее значение, зависит от параметризации модели. Если выгоды превышают издержки, то в равновесии возможен слишком ранний переход

к стратегии, основанной на инновациях. С другой стороны, если издержки превышают выгоды, то экономика может оставаться в имитационном режиме с избыточной защитой присутствующих на рынке опытных предпринимателей.

Динамика экономики в этом равновесии представлена на рис. 21.6. В данном случае она не достигает максимального темпа роста на интервале значений $a \in (\hat{a}, a_r(\delta))$. В этом интервале темп роста достигает максимума в режиме, основанном на инновациях, однако экономика продолжает оставаться в имитационном режиме, так как нераспределенная прибыль и мощь опытных предпринимателей не позволяют ей перейти к более эффективной организации. Из рис. 21.6 следует интересное свойство: динамика экономики согласуется с наблюдениями С. Кузнеца, вначале ее организационная форма задается стратегией $R = 1$, а затем в результате структурных изменений экономика выбирает стратегию $R = 0$. Как и в двух предыдущих типах равновесий, экономика также сходится к мировой технологической границе, то есть $a(t) \to 1$ при $t \to \infty$.

4. *Равновесие в ловушке несходимости к мировой технологической границе:* четвертый тип равновесия связан с третьим, так как в нем также имеет место неравенство $a_r(\delta) > \hat{a}$. Однако в этом случае, как показано на рис. 21.7,

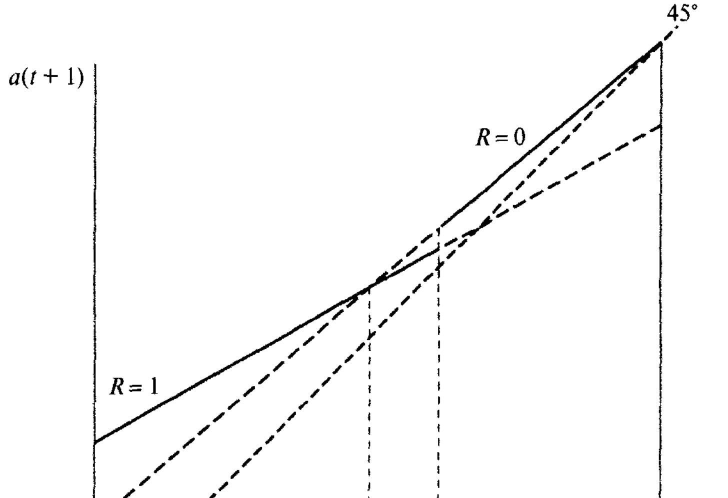

Рис. 21.6. Динамика расстояния до мировой технологической границы в склеротическом равновесии

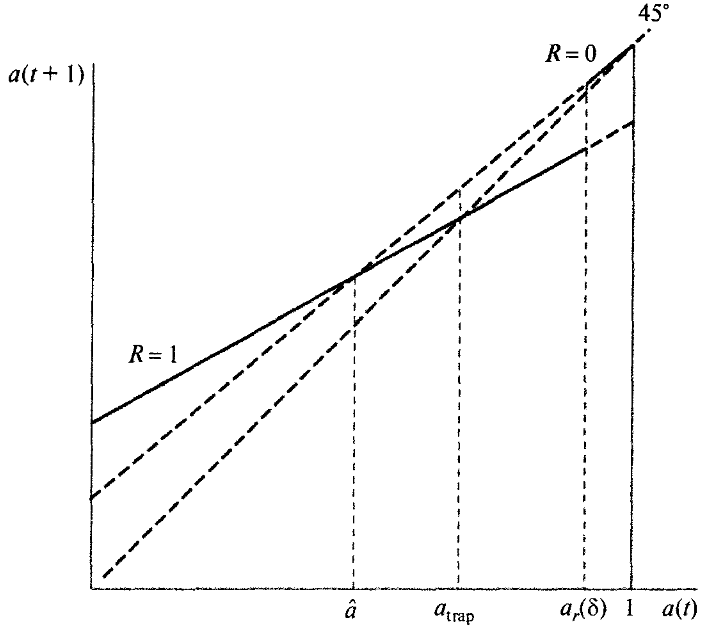

Рис. 21.7. Динамика расстояния до мировой технологической границы в равновесии в ловушке несходимости. Если в начальный момент времени $a(0) < a_{\text{trap}}$, то экономика не достигает мировой технологической границы и сходится к a_{trap}

разрыв между значениями $a_r(\delta)$ и $\hat{a}$ более велик, и значение расстояния до мировой технологической границы a_{trap}, такое, что

$$a_{\text{trap}} \equiv \frac{\bar{\eta}}{1+g-\underline{\gamma}}$$

лежит внутри интервала $(\hat{a}, a_r(\delta))$. Из уравнения (21.40) непосредственно следует, что если $a(t-1) = a_{\text{trap}}$ и $R(t) = 1$, то экономика всегда остается в точке a_{trap}. Следовательно, в этом случае нераспределенная прибыль или опыт присутствующих на рынке предпринимателей предоставляют им настолько значительную защиту, что экономика никогда не переходит в равновесие, основанное на инновациях. Такой сценарий развития не только тормозит рост, но и приводит экономику в ловушку несходимости к мировой технологической границе. В частности это единственная равновесная траектория, на которой экономика не достигает границы: в режиме, основанном на имитации ($R = 1$), экономика не переходит значение a_{trap}, и на таком расстоянии до мировой технологической границы она всегда остается в режиме $R = 1$. Следовательно, такое равновесие является наиболее опасным сценарием развития экономики, когда она не достигает мировой технологической границы. Стимулирование экономического роста, основанного на имитации, например с помощью поддержки присутствующих на рынке фирм, на первый взгляд может показаться хорошей политикой. Однако на практике это может привести экономику в равновесие в ловушке несходимости. Это равновесие также является единственным, в котором не происходит перехода к стратегии $R = 0$ и структурных изменений, так как экономика остается в ловушке. Во многих случаях такое равновесие является наилучшей иллюстрацией идеи С. Кузнеца: экономика остается неразвитой, отчасти потому, что она не в состоянии провести структурные изменения, необходимые для начала процесса экономического развития.

Из сравнения этих четырех типов равновесия следует, что в зависимости от деталей и параметризации модели мы не можем быть уверены в том, что в экономике реализуется последовательность стратегий развития, при которых темп ее роста достигает максимума. Поэтому некоторое вмешательство властей может оказаться полезным. Однако из третьего и четвертого случаев также следует, что государственное вмешательство также может иметь непреднамеренные отрицательные последствия. Оно может ускорить рост экономики в течение некоторого периода времени (во втором случае этот период соответствует времени, когда $a \in (a_r(\delta), \hat{a}))$, но затем может принести значительно большие потери, ведущие экономику в ловушку несходимости, как показано на рис. 21.7.

Несмотря на то что импликации из этих четырех сценариев развития для государственной политики неоднозначны, выводы об изменениях в организационной структуре экономики очевидны: независимо от выбора сценария, экономика начинает с организации производства, в которой долгосрочные контракты, присутствующие на рынке фирмы, опыт и имитация более важны, и затем (за исключением равновесия в ловушке несходимости) в конце концов приходит в равновесие со значительным объемом созидательного разрушения, краткосрочными контрактами, более молодыми предпринимателями и большим числом инноваций. В этом состоит еще один элемент структурных изменений, которым С. Кузнец придавал особое значение в процессе экономического развития. Несмотря на то что модель, описанная выше, является моделью в сокращенной форме, она может быть использована для анализа других аспектов изменений в организации производственной деятельности в процессе экономического развития (см. упражнение 21.7).

21.5. Множественность равновесий из-за экстерналии совокупного спроса и «большой толчок»

В этом параграфе мы опишем простую модель с множественными равновесиями, возникающими в результате экстерналии совокупного спроса, основанную на модели «большого толчка» из статьи [Murphy, Shleifer, Vishny 1989]. В этой модели формализуются впервые предложенные в работах [Rosenstein-Rodan 1943; Hirschman 1958; Nurske 1958] идеи о том, что процесс экономического развития может (или должен) рассматриваться как переход из одного (не оптимального по Парето) равновесия в другое, более эффективное равновесие. Более того, в этих ранних работах по экономическому развитию утверждается, что такой переход требует значительной степени координации между индивидами и фирмами и поэтому «большого толчка». Как показано в главе 4, множественность равновесий, интерпретируемая в буквальном смысле, вряд ли является основной причиной низкого уровня экономического развития, так как если в экономике действительно возможно улучшение в смысле Парето, то есть изменение, при котором уровень благосостояния всех индивидов возрастет, то вероятность того, что необходимая степень координации не будет достигнута в течение десятилетий или даже столетий, очень мала. Несмотря на это, силы, ведущие к множественности равновесий, открывают важный экономический механизм, который может быть связан с провалами рынка, замедляющими или даже останавливающими процесс экономического развития. Более того, динамическая версия модели с множественными равновесиями может привести к множественности стационарных состояний, когда экономика, пришедшая в стационарное состояние с низким уровнем экономической активности, может остаться в нем навсегда (и в этом равновесии невозможен переход в другое стационарное состояние). Модели с множественными стационарными состояниями, которые подходят для анализа процесса долгосрочного экономического развития более, чем модели с множественными равновесиями, описаны в следующем параграфе.

В работе [Murphy, Shleifer, Vishny 1989] авторы формализуют идею большого толчка с помощью модели с множественностью равновесий из-за экстерналии совокупного спроса. Они рассматривают двухпериодную экономику, допускающую существование репрезентативного домохозяйства, наделенного предпочтениями вида

$$U(C(1),\, C(2)) = \frac{C(1)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta\frac{C(2)^{1-\theta}-1}{1-\theta},$$

где переменные $C(1)$ и $C(2)$ обозначают потребление в двух периодах, β — норма дисконтирования домохозяйства, а параметр θ играет стандартную роль (межвременная эластичность замещения, определяющая готовность домохозяйства переносить потребление из периода 1 в период 2, равна $1/\theta$). Предложение труда репрезентативным домохозяйством абсолютно неэластично и общий запас рабочей силы в экономике равен L.

Ресурсное ограничение имеет следующий вид:

$$C(1) + I(1) \leq Y(1) \text{ и } C(2) \leq Y(2), \tag{21.43}$$

где переменная $I(1)$ обозначает инвестиции в периоде 1, переменная $Y(t)$ — совокупный выпуск в периоде t и инвестиции осуществляются только в периоде 1.

Домохозяйства имеют возможность привлекать заимствования и делать сбережения, поэтому их бюджетное ограничение выглядит как:

$$C(1) + \frac{C(2)}{1+r} \leq w(1) + \pi(1) + \frac{w(2) + \pi(2)}{1+r},$$

где переменная $\pi(t)$ обозначает прибыль, полученную репрезентативным домохозяйством, а переменная $w(t)$ — его заработную плату в периоде времени t. Параметр r обозначает процентную ставку между периодами 1 и 2, значение которой определяется в равновесии таким образом, чтобы выполнялось ресурсное ограничение (21.43).

Конечный товар производится из континуума различных промежуточных товаров с помощью производственной функций вида ПЭЗ:

$$Y(t) = \left(\int_0^1 y(v, t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dv \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

где переменная $y(v, t)$ обозначает выпуск промежуточного товара v в периоде времени t. Как обычно, параметр ε является эластичностью замещения между различными промежуточными товарами и мы предположим неравенство $\varepsilon > 1$.

Производственные функции промежуточных товаров в два периода времени имеют следующий вид:

$$y(v, 1) = l(v, 1),$$

$$y(v, 2) = \begin{cases} l(v, 2) & \text{при старой технологии,} \\ \alpha l(v, 2) & \text{при новой технологии.} \end{cases} \tag{21.44}$$

где $\alpha > 1$ и переменная $l(v, t)$ обозначает число работников, занятых в производстве промежуточного товара v в периоде времени t. Тогда условие равенства спроса и предложения на рынке труда принимает следующий вид:

$$\int_0^1 l(v, t) dv \leq L. \tag{21.45}$$

В периоде 1 каждый промежуточный товар производится назначенным производителем, которого мы будем называть монополистом. В экономике также существует пул конкурентных фирм, которые могут войти на рынок и производить каждый товар настолько же производительно, как и фирма-монополист. В периоде 1 назначенный производитель также может осуществить инвестиции в новую технологию с издержками F единиц конечного товара. Если он осуществляет такие инвестиции, то, как следует из уравнения (21.44), его производительность в периоде 2 увеличивается в α раз. С другой стороны, пул конкурентных фирм не получает выгоды от этих инвестиций, то есть назначенный производитель обладает некоторой монопольной силой. Естественным образом, прибыль производителей промежуточных товаров распределяется между репрезентативными домохозяйствами.

Мы будем искать симметричное совершенное по подыграм равновесие в чистых стратегиях (ССПР) в такой двухпериодной экономике (см., например, параграф 18.5). Определим ССПР стандартным образом как комбинацию производственных и инвестиционных решений фирм и потребительского выбора домохозяйств, которые являются лучшими ответами друг на друга в обоих периодах времени.

Во-первых, так как все товары в экономике симметричны, условие равенства спроса и предложения на рынке труда очевидно и имеет следующий вид:

$$l(v, 1) = L \text{ для всех } v \in [0, 1]$$

(напомним, что мера множеств отраслей и фирм нормализована единицей). Тогда имеет место равенство:

$$Y(1) = L.$$

Равновесие в периоде 2 зависит от того, сколько фирм внедрили новую технологию. Так как мы описываем только ССПР, достаточно рассмотреть два экстремальных случая: все фирмы внедряют новую технологию и ни одна фирма не внедряет новую технологию. В обоих случаях предельные производительности во всех секторах экономики совпадают между собой, поэтому занятость распределена между ними равномерно, то есть выполняется равенство:

$$l(v, 2) = L \text{ для всех } v \in [0, 1].$$

Следовательно, если новая технология не внедряется, то

$$Y(2) = L,$$

а если новая технология внедряется, то

$$Y(2) = \alpha L.$$

Далее обратимся к задаче ценообразования. В первом периоде назначенный производитель не обладает монопольной силой, так как в экономике присутствует пул конкурентных фирм, и поэтому они устанавливают цену, равную предельным издержкам производства, которые составляют $w(1)$, и получают нулевую прибыль (то есть $p(v, 1) = w(1)$ и $\pi(v, 1) = 0$ для всех $v \in [0, 1]$). Так как агрегированный выпуск равен $Y(1) = L$, отсюда также следует, что равновесная заработная плата равна $w(1) = 1$. Если во втором периоде новая технология не внедрена, то равновесие в нем совпадает с равновесием в первом периоде, то есть $w(2) = 1$ и прибыль продолжает оставаться равной нулю. В этом случае инвестиции не осуществляются и потребление в обоих периодах равно L. Так как уравнение Эйлера для потребления имеет вид $C(1)^{-\theta} = (1 + r)\beta C(2)^{-\theta}$, равновесная процентная ставка задается следующим равенством:

$$\hat{r} = \beta^{-1} - 1. \tag{21.46}$$

Далее рассмотрим случай, когда назначенный производитель осуществляет инвестиции в новую технологию. Тогда они могут производить α единиц продукции, используя единицу рабочей силы, в то время как конкурентные фирмы в пуле способны произвести единицу товара, используя одного работника. Тогда назначенный производитель обладает монопольной силой. Величина монопольной силы зависит от сравнения параметров ε и α.

Во-первых, выведем функцию спроса на каждый промежуточный товар, которая является решением следующей задачи максимизации прибыли для фирмы в секторе производства конечного товара:

$$\max_{[y(v,2)]_{v\in[0,1]}} \left[\int_0^1 y(v,\ 2)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dv\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} - \int_0^1 p(v,\ 2) y(v,\ 2) dv,$$

где переменная $p(v, 2)$ обозначает цену промежуточного товара в периоде 2. Из условия первого порядка для этой задачи следуют равенства:

$$y(v, 2) = p(v, 2)^{-\varepsilon} Y(2) \text{ для всех } v \in [0, 1]. \tag{21.47}$$

Эта формула очень важна для объяснения экстерналии совокупного спроса: спрос на промежуточный товар v является функцией от совокупного выпуска $Y(2)$. Функция спроса (21.47) обладает знакомым нам свойством изоэластичности. Далее предположим, что в экономике отсутствует пул конкурентных фирм. В этом случае каждый назначенный производитель действует как неограниченный монополист и максимизирует прибыль, равную произведению разности цены товара и предельных издержек производства и выпуска, то есть

$$\pi(v,\ 2)=\left(p(v,\ 2)-\frac{w(2)}{\alpha}\right)y(v,\ 2)\ \text{для всех}\ v\in[0,\ 1].$$

Подставим в это уравнение функцию спроса (21.47) и перепишем задачу максимизации прибыли для фирмы в следующем виде:

$$\max_{p(v,2)}\left(p(v,\ 2)-\frac{w(2)}{\alpha}\right)p(v,\ 2)^{-\varepsilon}Y(2).$$

Решением этой задачи является цена, при которой прибыль фирмы достигает максимума:

$$p(v,\ 2)=\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\frac{w(2)}{\alpha}.$$

Это уравнение представляет собой стандартную формулу для оптимальной цены монополии с постоянной наценкой на предельные издержки, значение которой зависит от эластичности замещения между промежуточными товарами. Так как эластичность замещения — постоянная величина, наценка также постоянна.

Однако фирма-монополист обладает возможностью установить такую цену, только если конкурентные фирмы из пула не могут выйти на рынок и получить положительную прибыль при такой цене, тем самым захватив весь рынок. Так как технология конкурентных фирм требует для производства единицы товара одного работника, фирма-монополист обладает возможностью установить такую цену, только если выполняется неравенство $\varepsilon/((\varepsilon-1)\alpha)\leq 1$. В противном случае оптимальная цена будет слишком высокой и конкурентные фирмы будут выходить на рынок. Предположим, что значение параметра α недостаточно высоко и фирма-монополист не обладает возможностью установить оптимальную цену. Другими словами, допустим, что

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\frac{1}{\alpha}>1. \tag{21.48}$$

В этом предположении фирма-монополист вынуждена переходить к *предельному ценообразованию*. Нетрудно убедиться, что равновесная предельная цена задается равенством $p^*=w(2)$. Следовательно, если выполняется неравенство (21.48), то прибыль на единицу продукции каждой фирмы-монополиста задается следующим уравнением:

$$w(2)-\frac{w(2)}{\alpha}=\frac{\alpha-1}{\alpha}w(2).$$

Тогда из уравнения (21.47) находим общую прибыль как

$$\pi(v,\ 2) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} w(2)^{1-\varepsilon} Y(2). \tag{21.49}$$

Значение заработной платы может быть найдено с помощью разложения дохода в экономике. Общий выпуск равен $Y(2) = \alpha L$, и он должен быть разделен между прибылью и заработной платой. Отсюда получаем уравнение:

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha} w(2)^{1-\varepsilon} \alpha L + w(2) L = \alpha L,$$

решением которого является $w(2) = 1$. Это решение в точности совпадает со значением заработной платы в случае, когда инвестиции в новую технологию не осуществляются. На интуитивном уровне заработная плата в экономике определяется спросом конкурентных фирм в пуле, и поэтому увеличение предельного продукта труда не приносит работникам прямой выгоды. Несмотря на это, вся прибыль в экономике распределяется между домохозяйствами, которые владеют фирмами, и поэтому потребление в периоде 2 составляет $C(2) = \alpha L$. Однако в периоде 1 часть выпуска расходуется на инвестиции в новую технологию, и поэтому $C(1) = L - F$. Тогда уравнение Эйлера для потребления имеет вид $(L - F)^{-\theta} = (1 + \tilde{r})\beta(\alpha L)^{-\theta}$, и поэтому равновесное значение процентной ставки задается следующим равенством:

$$\tilde{r} = \beta^{-1}\left(\frac{\alpha L}{L - F}\right)^{\theta} - 1 > \hat{r},$$

где значение $\hat{r}$ задано уравнением (21.46). В этом случае процентная ставка $\tilde{r}$ превышает $\hat{r}$, так как индивиды замещают потребление в периоде 1 потреблением в периоде 2. Заметим, что значение процентной ставки $\tilde{r}$ возрастает по параметру θ, так как большее значение θ соответствует меньшей эластичности межвременного замещения потребления. Увеличение издержек осуществления инвестиций F также ведет к росту процентной ставки $\tilde{r}$, так как в этом случае домохозяйства вынуждены в большей степени сокращать потребление в периоде 1.

В первую очередь надо ответить на вопрос, будет ли осуществление инвестиций в новую технологию в периоде 1 приносить прибыль фирме-монополисту. Причина возможного возникновения в модели множественности равновесий в том, что ответ на этот вопрос зависит от того, будут ли другие фирмы осуществлять такие инвестиции. Вначале рассмотрим ситуацию, когда ни одна другая фирма не осуществляет инвестиций, и проанализируем стимулы к осуществлению таких инвестиций для отдельной фирмы.

В этом случае совокупный выпуск в периоде 2 равен L (так как фирма, планирующая осуществление инвестиций, мала) и рыночная процентная ставка равна $\hat{r}$. Более того, из уравнения (21.49) и равенства $w(2) = 1$ следует, что прибыль в периоде 2 равна:

$$\pi^N(v,\ 2) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} L \text{ для всех } v \in [0,\ 1],$$

где верхний индекс N обозначает, что ни одна другая фирма не осуществляет инвестиции. Следовательно, чистая дисконтированная прибыль для рассматриваемой фирмы в периоде 1 равна:

$$\Delta\pi^N = -F + \frac{1}{1+\hat{r}} \frac{\alpha - 1}{\alpha} L = -F + \beta \frac{\alpha - 1}{\alpha} L.$$

Далее рассмотрим случай, когда все остальные фирмы осуществляют инвестиции. В этом случае прибыль в периоде 2 задается равенством:

$$\pi^I(v, 2) = (\alpha - 1)L \text{ для всех } v \in [0,\ 1],$$

где верхний индекс I обозначает, что все остальные фирмы осуществляют инвестиции. Следовательно, чистая прибыль от инвестиций в периоде 1 составляет:

$$\Delta\pi^I = -F + \frac{1}{1+\tilde{r}}(\alpha - 1)L = -F + \beta\left(\frac{\alpha L}{L - F}\right)^{\theta}(\alpha - 1)L.$$

Как отмечено выше, основная идея статьи [Murphy, Shleifer, Vishny 1989] (схожая с идеями многих других экономистов, работавших в теории экономического развития) заключается в возможности существования в модели множественности равновесий, когда одно из них соответствует отсталости экономики, а другое — индустриализации. В данной модели это значит, что при заданном наборе параметров распределения ресурсов, когда ни одна фирма не осуществляет инвестиций в новую технологию и когда все фирмы-монополисты осуществляют инвестиции в новую технологию, являются равновесиями. Условием для этого являются неравенства:

$$\Delta\pi^N < 0 \text{ и } \Delta\pi^I > 0, \tag{21.50}$$

то есть инвестиции не приносят прибыли, если никакая другая фирма их не осуществляет, и являются прибыльной активностью, если все остальные фирмы их осуществляют. Очевидно, что такая ситуация возможна, так как из существования *экстерналии совокупного спроса* следует неравенство $\Delta\pi^I > \Delta\pi^N$: если другие фирмы осуществляют инвестиции, то они производят больше продукции, совокупный спрос возрастает и прибыль от использования новой технологии увеличивается. С другой стороны, увеличение процентной ставки в случае, когда все фирмы осуществляют инвестиции, отчасти нейтрализует этот эффект. Следовательно, множественность равновесий возможна в том случае, если эффект процентной ставки не слишком велик. Например, в экстремальном случае, когда функция полезности является линейной ($\theta = 1$), получаем неравенство:

$$\Delta\pi^I = -F + \beta(\alpha-1)L > \Delta\pi^N = -F + \beta\frac{\alpha-1}{\alpha}L,$$

и неравенства (21.50) вполне могут иметь место. В общем случае условием существования множественности равновесия являются следующие неравенства:

$$\beta\left(\frac{\alpha L}{L-F}\right)^{\theta}(\alpha-1)L > F > \beta\frac{\alpha-1}{\alpha}L. \qquad (21.51)$$

Нетрудно убедиться, что если оба равновесия существуют, то равновесие с инвестициями доминирует в смысле Парето равновесие без инвестиций, так как из неравенств (21.51) следует, что полезность всех домохозяйств больше на возрастающей траектории потребления, когда потребление в периоде 2 превышает потребление в периоде 1 (см. упражнение 21.8). Таким образом, из этого анализа следует, что если выполняются неравенства (21.51), то в модели существуют два ССПР в чистых стратегиях. В одном из них все фирмы-монополисты осуществляют инвестиции в новую технологию в периоде 1 и полезность всех домохозяйств возрастает, в то время как в другом инвестиции в новую технологию не осуществляются, что можно интерпретировать как провал рынка. На интуитивном уровне, инвестиции в новую технологию в периоде 1 приносят прибыль, только если в периоде 2 реализуется значительный уровень совокупного спроса. С другой стороны, совокупный спрос в периоде 2 достаточно велик, только если все фирмы осуществляют инвестиции в новую технологию. То есть причиной множественности равновесий в этой модели является экстерналия совокупного спроса. В частности решения об инвестициях отдельной фирмы создают положительную монетарную экстерналию для других фирм посредством увеличения спроса на их продукцию. Действие этой монетарной экстерналии имеет величину первого порядка из-за монопольного ценообразования: фирмы не получают весь выигрыш от увеличения выпуска, и это создает выгоды первого порядка для домохозяйств и других фирм, которые получают возможность увеличить продажи.

К. Мерфи, А. Шлейфер и Р. Вишни интерпретируют равновесие без инвестиций в новую технологию как «ловушку развития», когда экономика остается отсталой, так как ни одна фирма не осуществляет инвестиции в новую технологию. Такая динамика экономики возможна, если совокупный спрос, необходимый для того, чтобы эти инвестиции стали прибыльными, отсутствует. С другой стороны, авторы статьи интерпретируют равновесие с инвестициями в новую технологию как процесс индустриализации экономики. Из такой интерпретации следует, что общества, которые могут каким-то образом скоординировать действия фирм и выбрать равновесие с инвестициями (в результате формирования ожиданий в частном секторе или определенной экономической политики властей), индустриализуются и вступают на траекторию экономического роста и улучшения по Парето. Таким образом, эта модель является формализацией идеи «большого толчка», сформулированной такими экономистами, как Р. Нурксе и П. Розенштейн-Родан. Несмотря на то что идея большого толчка и экстерналий совокупного спроса выглядит привлекательной, данная модель обладает рядом очевидных недостатков. Во-первых, в то время как индустриализация представляет собой динамический процесс, модель является статической. Следовательно, она не позволяет буквально интерпретировать индустриализацию как переход из равновесия без инвестиций в новую технологию в равновесие с такими инвестициями. Во-вторых, как показано в главе 4, модели с множественностью равновесия не стоит рассматривать как удовлетворительное описание процесса экономического развития, так как ситуация, когда общество оказывается не в состоянии скоординированно осуществить достаточно простые действия, которые приведут к росту благосостояния всех домохозяйств (и фирм), представляется маловероятной. С другой стороны, намного более вероятным представляется то, что экстерналии совокупного спроса (и другие возможные факторы, ведущие к множественности равновесий) более важны как причины множественности стационарных состояний в экономике (находящихся на единственной равновесной траектории).

21.6. Неравенство, несовершенство кредитных рынков и человеческий капитал

В модели из предыдущего параграфа показано, как экстерналии совокупного спроса могут привести экономику в ловушку развития. Инвестиционные решения различных фирм могут требовать координации, что приводит к множественности равновесий. Недоразвитость экономики в этом случае соответствует отсутствию координации, ведущему к плохому равновесию, и процесс экономического развития начинается с большого толчка и координации, ведущих к равновесию с инвестициями в новую технологию. В этом параграфе мы остановимся на ряде связанных вопросов в контексте влияния распределения доходов в экономике на накопление человеческого капитала при несовершенном кредитном рынке. В отличие от предыдущего параграфа, мы сделаем ударение на возможность существования нескольких стационарных состояний (а не нескольких равновесий). Более того, мы остановимся лишь на инвестициях в человеческий капитал, однако неравенство и несовершенства кредитного рынка влияют не только на накопление человеческого капитала, но и на динамику создания новых предприятий, выбор работниками профессии и другие аспекты организации производственной деятельности. Причина нашего выбора состоит в том, что модели, связывающие неравенство и накопление человеческого капитала, достаточно просты математически и при этом являются естественным продолжением теории инвестиций в человеческий капитал, представленной в главе 10.

21.6.1. Простая модель без заимствований

Если кредитные рынки в экономике несовершенны, то распределение доходов служит основным определяющим фактором инвестиций в человеческий капитал (вместе со степенью несовершенства кредитных рынков). Мы начнем с описания простой модели, в которой заимствования и кредитование отсутствуют, и, таким образом, она соответствует максимальной степени несовершенства кредитного рынка. Затем мы расширим модель, и несовершенство финансового рынка в ней будет соответствовать ситуации, когда стоимость привлечения займов превышает процентную ставку, по которой домохозяйства размещают свои сбережения.

Экономика состоит из континуума династий единичной меры. Каждый индивид живет в течение двух периодов, детства и зрелости, и порождает потомка во втором периоде своей жизни. Потребление осуществляется только по окончании периода зрелости. Предпочтения индивида имеют следующий вид:

$$(1-\delta)\log c_i(t) + \delta \log e_i(t),$$

где переменная c обозначает потребление по окончании жизни индивида, а переменная e — расходы на образование его потомка. Бюджетное ограничение выглядит как

$$c_i(t) + e_i(t) \leq w_i(t),$$

где переменная w обозначает заработную плату индивида. Заметим, что, как и в главе 9 и параграфе 21.2, предпочтения включают в себя разумно-эгоистический альтруизм. В частности, родители не придают значения полезности своих детей, а лишь заботятся о размере наследства, которое они им оставляют (в данном случае расходы на образование). Как обычно, такое предположение значительно упрощает анализ модели.

Предположим совершенную конкуренцию на рынке труда, и тогда заработная плата каждого индивида является линейной функцией от его запаса человеческого капитала:

$$w_i(t) = Ah_i(t).$$

В свою очередь, запас человеческого капитала потомка индивида i из поколения t задается следующим образом:

$$h_i(t+1) = \begin{cases} e_i(t)^{\gamma}, & \text{если } e_i(t) \geq 1, \\ \bar{h}, & \text{если } e_i(t) < 1. \end{cases} \tag{21.52}$$

где γ PR (0, 1) и константа $\bar{h} \in (0, 1)$ обозначает некоторое минимальное количество человеческого капитала, которое индивид получает даже без образования. Как только расходы на образование превышают определенный уровень (в данном случае единицу), индивид начинает получать выгоду от дополнительных расходов и накапливать человеческий капитал (с убывающей отдачей от расходов, так как $\gamma < 1$).

Уравнение (21.52) описывает важное свойство модели, необходимое для того, чтобы несовершенство кредитного рынка порождало множественность равновесий или стационарных состояний: невыпуклость технологии накопления человеческого капитала. В упражнении 21.9 показано, что это свойство играет важнейшую роль в динамике модели.

Далее опишем равновесие в модели. Каждый индивид выбирает уровень расходов на образование, при которых его собственная полезность достигает максимума. Отсюда напрямую вытекает следующее выражение для «нормы сбережений» как функции расходов на образование:

$$e_i(t) = \delta w_i(\mathrm{t}) = \delta A h_i(t). \tag{21.53}$$

Это правило обладает одним непривлекательным свойством (которое не влияет ни на один из результатов модели): так как родители получают полезность от расходов на образование своих детей, они осуществляют инвестиции в образование, даже если $e_i(t) < 1$, однако в этом случае образовательные расходы не приносят пользу (и не ведут к росту запаса человеческого капитала их потомков).

Чтобы вывести одно сильное утверждение, предположим, что выполняются следующие неравенства:

$$\delta A > 1 > \delta A\bar{h}. \tag{21.54}$$

Опишем динамику запаса человеческого капитала для некоторой династии i. Если в периоде 0 $h_i(0) < (\delta A)^{-1}$, то из уравнения (21.53) следует неравенство $e_i(0) < 1$, то есть запас человеческого капитала наследника равен $h_i(1) = \bar{h}$. Тогда из неравенств (21.54) имеем $h_i(1) = \bar{h} < (\delta A)^{-1}$ и с помощью индуктивных рассуждений получаем выражение $h_i(t) = \bar{h} < (\delta A)^{-1}$ для всех t. Следовательно, династия, обладающая в начальном периоде времени запасом человеческого капитала $h_i(0) < (\delta A)^{-1}$, никогда не достигнет его уровня, превышающего $\bar{h}$.

Далее рассмотрим династию с начальным запасом человеческого капитала $hi(0) > (\delta A)^{-1}$. Для нее из неравенств (21.54) следует выражение $h_i(1) = (\delta A h_i(0))^{\gamma} > 1$, то есть такая династия будет непрерывно накапливать человеческий капитал с каждым новым поколением и его значение в конечном счете сойдется к стационарному состоянию, которое удовлетворяет уравнению $h^* = (\delta A h^*)^{\gamma}$, то есть

$$h^* = (\delta A)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} > 1.$$

Очевидно, что такое описание подходит для любой династии с начальным запасом человеческого капитала $h_i(0) \in ((\delta A)^{-1}, h^*)$. Если в начальном периоде времени имеет место неравенство $h_i(0) > h^*$, то у династии слишком много человеческого капитала и со временем она будет сокращать его запас.

Динамика человеческого капитала династии представлена на рис. 21.8. На нем показано два стационарных состояния уровня человеческого капитала индивидов, $\bar{h}$ и $h^* > \bar{h}$. В любой модели с множественностью стационарных состояний важным вопросом является вопрос о том, к какому состоянию сходится экономика (или определенный индивид) при заданных начальных условиях. На данном этапе предположим, что несмотря на то, что в экономике существует насколько стационарных состояний, она обладает единственным равновесием (то есть при заданных начальных условиях существует единственная равновесная траектория, таким свойством обладают все модели, представленные в этом параграфе). Тогда равновесная динамика описывается динамической системой с несколькими стационарными состояниями. Каждое локально асимптотически устойчивое стационарное состояние обладает *областью притяжения аттрактора*, то есть множеством начальных условий, при которых система сходится к этому стационарному состоянию. Оба стационарных состояния в этой модели асимптотически устойчивы, и области притяжения их аттракторов показаны на рис. 21.8. В частности, из анализа рис. 21.8 следует, что областью притяжения аттрактора стационарного состояния $\bar{h}$

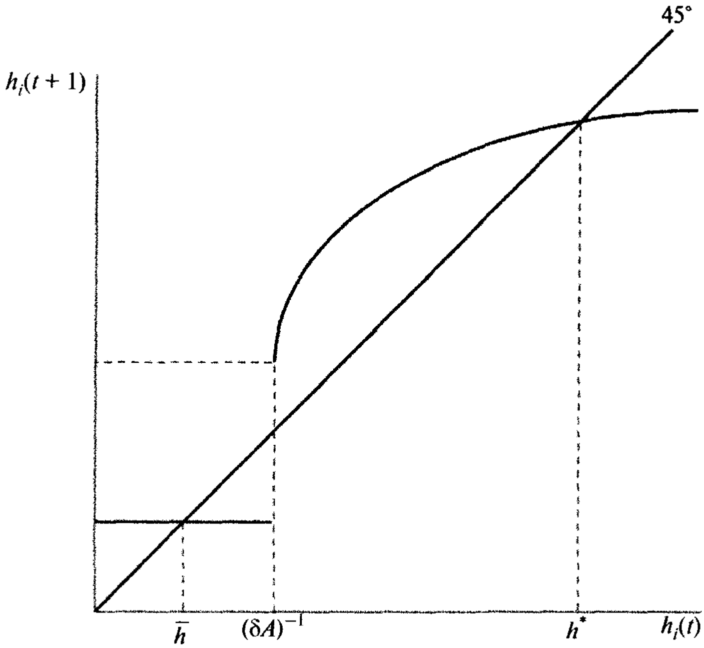

Рис. 21.8. Динамика запаса человеческого капитала с невыпуклостью и отсутствием заимствований

является интервал $(0, (\delta A)^{-1})$, то есть династии с начальным запасом человеческого капитала $h_i(0) < (\delta A)^{-1}$ сходятся к его более низкому стационарному значению $\bar{h}$. Династии с начальным запасом человеческого капитала $h_i(0) > (\delta A)^{-1}$ лежат в области притяжения аттрактора стационарного состояния h^* и сходятся к его более высокому стационарному значению.

Рис. 21.8 также демонстрирует, почему динамика этой модели настолько проста: траектория запаса человеческого капитала содержит в себе всю информацию, необходимую для описания дохода и запаса человеческого капитала в агрегированной экономике. Это связано с тем, что в модели отсутствуют цены (например, доходность человеческого капитала или процентная ставка), значения которых определяются в равновесии. Поэтому динамику в моделях такого типа иногда называют *марковской:* она задается марковским процессом, описывающим динамику человеческого капитала единственного индивида (без каких-либо равновесных соотношений). Марковские модели намного более проще моделей, в которых динамика уровня неравенства в экономике зависит от равновесных цен. В упражнении 21.13 приводится пример более общей модели такого типа.

Наиболее важным следствием из модели является существование в экономике ловушки бедности. Для наиболее простой иллюстрации рассмотрим экономику, населенную двумя группами индивидов с начальным уровнем дохода h_1 и $h_2 > h_1$, так что $(\delta A)^{-1} < h_2$. Если уровень неравенства (бедности) высок, так что $h_1 < (\delta A)^{-1}$, то значительная доля населения никогда не накапливает значительный запас человеческого капитала. С другой стороны, если уровень неравенства ограничен, то есть $h_1 > (\delta A)^{-1}$, то все индивиды накапливают человеческий капитал и его запас в итоге достигает значения h^*. Из этого примера также следует существование в экономике бесконечного числа стационарных состояний. В зависимости от значения доли династий, обладающих в начальном периоде времени запасом человеческого капитала, превышающим $(\delta A)^{-1}$, экономика приходит в стационарное состояние с любой долей населения, имеющего низкий уровень человеческого капитала $\bar{h}$. Чем больше эта доля, тем беднее будет экономика.

Мы можем провести ряд параллелей между моделями с множественностью стационарных состояний в этом параграфе и моделями с множественностью равновесий из предыдущего параграфа. Однако различия между ними более важны. Модель из параграфа 21.5 является статической моделью с множественностью равновесий. Поэтому у нас нет возможности определить, в каком из равновесий будет находиться экономика. В лучшем случае мы можем использовать механизм формирования ожиданий и утверждать, что экономика окажется в лучшем равновесии, если все агенты ожидают, что реализуется лучшее равновесие. Неформально мы можем апеллировать к роли истории, утверждая, например, что если экономика некоторое время находится в равновесии с низким уровнем инвестиций, то, скорее всего, она и останется в нем. Однако такое рассуждение неверно. Во-первых, модель является статической и поэтому анализ экономики, «некоторое время находящейся в равновесии с низким уровнем инвестиций», не имеет смысла в рамках этой модели. Во-вторых, даже если мы превратим модель в динамическую, рассматривая ее повторяющейся во времени, история пребывания экономики в некотором равновесии в течение ряда периодов в прошлом не оказывает влияния на возможность существования множественности равновесий в следующем периоде времени. В частности, каждое статическое равновесие останется равновесием и в «динамической» модели, и экономика может в любой момент времени перейти из одного равновесия в другое. Поэтому модели с множественностью равновесий обладают некоторой неопределенностью, которая выглядит непривлекательно как с теоретической, так и с эмпирической точек зрения. Модели с множественностью стационарных состояний позволяют избежать таких проблем. Они обладают единственным равновесием, и начальные условия определяют стационарное состояние, в которое со временем приходит динамическая система. Так как равновесие единственно, в них не возникает трудностей, связанных с неопределенностью и влиянием ожиданий на динамику экономики. При этом существование в них нескольких стационарных состояний позволяет использовать такие модели для анализа возможности попадания экономики в ловушку развития.

Эта модель также демонстрирует важность распределения доходов в экономике с несовершенным кредитным рынком (в данном случае в отсутствие кредитного рынка). В частности, множество индивидов, которые не осуществляют инвестиции в накопление человеческого капитала, зависит только от распределения доходов в экономике и, таким образом, распределение доходов влияет на долгосрочное значение уровня дохода в экономике. Поэтому одна из интерпретаций выводов из моделей такого типа состоит в том, что неравномерное распределение доходов в экономике ведет к низкому уровню выпуска (и темпу экономического роста). Пример с двумя стационарными состояниями, приведенный выше, в некотором смысле говорит в пользу этого утверждения. Однако такой результат не является общим и необходимо отметить, что в таких моделях не существует явной зависимости между уровнем неравенства в экономике и темпом ее роста. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим аналогичную экономику с начальными условиями $h_1 < h_2 < (\delta A)^{-1}$. В этом случае ни одна из групп населения не накапливает человеческий капитал, однако перенос ресурсов от группы 1 группе 2 (увеличение уровня неравенства) так, чтобы имело место неравенство $h_2 > (\delta A)^{-1}$, приводит к ускорению накопления человеческого капитала. Этот результат является общим: в моделях с невыпуклостью не существует однозначной зависимости между уровнем неравенства и темпом экономического роста, увеличение неравенства может вести к ускорению или замедлению роста в зависимости от того, больше или меньше индивидов переходят пороговое значение $(\delta A)^{-1}$. Однако при некоторых дополнительных предположениях модель позволяет получить более точные результаты о влиянии неравенства на накопление человеческого капитала и экономическое развитие общества. В упражнении 21.10 представлена параметризация модели, изложенной выше, в которой увеличение уровня неравенства ведет к сокращению запаса человеческого капитала и снижению выпуска на душу населения в относительно богатых экономиках и росту инвестиций в человеческий капитал в менее развитых странах.

21.6.2. Инвестиции в человеческий капитал в модели с несовершенным кредитным рынком

В этом подпараграфе мы расширим модель из подпараграфа 21.6.1 и по аналогии со статьей [Galor, Zeira 1993] введем в экономику кредитный рынок. Как и ранее, предположим, что каждый индивид живет в течение двух периодов времени. Допустим, что в молодости он обладает возможностью работать и получать образование. Функция полезности каждого индивида имеет следующий вид:

$$(1-\delta)\log c_i(t) + \delta \log b_i(t),$$

где, как и ранее, переменная c обозначает потребление индивида по окончании жизни. Бюджетное ограничение выглядит как

$$c_i(t) + b_i(t) \leq y_i(t),$$

где переменная $y_i(t)$ обозначает доход индивида i в периоде времени t. Отметим, что предпочтения включают в себя разумно-эгоистический альтруизм, однако полезность родителя в данном случае зависит от денежного трансферта потомку $b_i(t)$, а не от объема расходов на его образование. В данной модели агенты сами используют денежные трансферты для инвестиций в образование. Как и в предыдущей модели, из логарифмической формы функции полезности следует постоянное значение нормы сбережений, равное δ.

Образование имеет бинарный исход, образованные (квалифицированные) работники получают заработную плату w_s, а необразованные работники получают заработную плату w_u. Расходы на образование, необходимые для получения квалификации, равны h, и работник, выбирающий обучение, не получает заработную плату w_u в первом периоде своей жизни. Бинарная структура выбора образования приносит в модель вышеупомянутую невыпуклость в решениях об инвестициях в человеческий капитал[3].

Несовершенство кредитного рынка в экономике моделируется предположением о необходимости мониторинга возврата привлеченных займов. Издержки мониторинга ведут к появлению различия между процентными ставками по привлеченным и размещенным средствам. В частности предположим, что всем индивидам в экономике доступна некоторая линейная технология сбережений, и их доходность задана постоянной процентной ставкой r. При этом процентная ставка по привлеченным займам равна $i > r$, так как для гарантии возврата индивидами займов необходим мониторинг (более микрообоснованная версия модели издержек заимствования приведена в упражнении 21.12).

Также предположим, что имеет место неравенство

$$w_s - (1 + r)h > w_u(2 + r), \tag{21.55}$$

из которого следует, что инвестиции в человеческий капитал оказываются прибыльными, если стоимость их финансирования равна r.

Рассмотрим индивида, обладающего богатством x. Если $x \geq h$, то из неравенства (21.55) следует, что индивид будет осуществлять инвестиции в образование. Если $x < h$, то прибыльность инвестиций в образование

[3] В статье [Galor, Moav 2004] предложен альтернативный подход к моделированию инвестиций в человеческий капитал. В ней показано, что множественность стационарных состояний в экономике возможна в случае, когда невыпуклость в структуре модели отсутствует, кредитные рынки несовершенны и предельная склонность к сбережениям достаточно высока, что делает динамику модели более богатой. Это предположение основано на работе [Kaldor 1957], его анализ проведен в упражнении 2.12 из главы 2.

зависит от размера богатства индивида и величины процентной ставки по привлеченным займам i.

Выпишем выражения для полезности индивида (при $x < h$) и для размера наследства, которое он оставляет своему потомку, в двух возможных случаях. Если индивид осуществляет инвестиции в образование, имеем равенства:

$$U_s(x) = \log(w_s + (1+i)(x-h)) + \log(1-\delta)^{1-\delta}\delta^{\delta},$$

$$b_s(x) = \delta(w_s + (1+i)(x-h)).$$

Если индивид не осуществляет инвестиций в образование, то эти уравнения принимают вид:

$$U_u(x) = \log((1+r)(w_u + x) + w_u) + \log(1-\delta)^{1-\delta}\delta^{\delta},$$

$$b_u(x) = \delta((1+r)(w_u + x) + w_u).$$

Сравнив эти выражения, нетрудно убедиться, что индивид предпочитает инвестировать в образование, если и только если выполняется следующее неравенство:

$$x \geq f \equiv \frac{(2+r)w_u + (1+i)h - w_s}{i-r}.$$

Тогда динамика богатства индивидов в экономике может быть получена из размера наследства, которое оставляют неограниченные, ограниченные и осуществляющие инвестиции и ограниченные и не осуществляющие инвестиции агенты.

Более точно, равновесное соответствие, описывающее динамику равновесия, имеет следующий вид:

$$x(t+1) = \begin{cases} b_u(x(t)) = \delta((1+r)(w_u + x(t)) + w_u), & \text{если} \quad x(t) < f, \\ b_s(x(t)) = \delta(w_s + (1+i)(x(t)-h)), & \text{если} \quad h > x(t) \geq f, \\ b_n(x(t)) = \delta(w_s + (1+r)(x(t)-h)), & \text{если} \quad x(t) \geq h. \end{cases} \quad (21.56)$$

График функции (21.56), который позволяет провести графический анализ равновесной динамики модели, показан на рис. 21.9. Как мы уже отметили в контексте модели из подпараграфа 21.6.1, кривая на рис. 21.9 одновременно описывает динамику богатства отдельного индивида и распределения богатства в агрегированной экономике. Это свойство является следствием марковской структуры данной модели.

Далее определим значение x^* как точку пересечения графика функции (21.56) и луча, проходящего под углом 45° в том месте, где угол наклона кривой превышает 45°. Такая точка существует, если процентная ставка

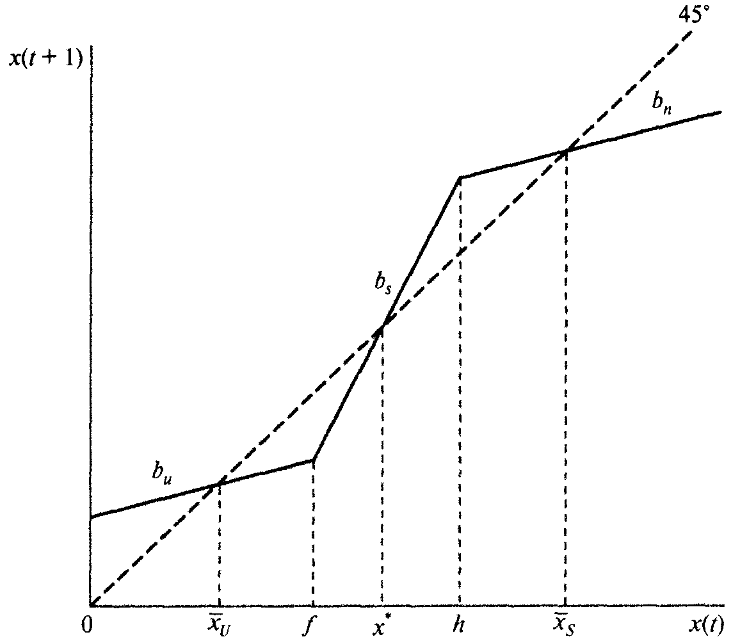

Рис. 21.9. Множественность стационарных равновесий в модели из работы [Galor, Zeira 1993]

по привлеченным займам i достаточно велика и доходность сбережений r не слишком значительна (более точно, должно иметь место неравенство $i > (1 - \delta)/\delta > r$). Предположим, что оно выполняется. Тогда из рис. 21.9 следует, что существует три точки пересечения между графиком функции (21.56) и лучом, проходящим под углом 45°: $\bar{x}_u$, x^* и $\bar{x}_s$. Более того, нетрудно убедиться, что точка x^* является неустойчивым стационарным состоянием, а два других стационарных состояния локально асимптотически устойчивы.

Анализ рис. 21.9 также позволяет описать области притяжения аттрактора каждого стационарного равновесия. В частности, индивиды с богатством $x(t) < x^*$ будут сходиться к состоянию $\bar{x}_u$, в то время как индивиды с богатством $x(t) > x^*$ сходятся к большему значению $\bar{x}_s$. Поэтому областью притяжения аттрактора $\bar{x}_u$ является интервал $(0, x^*)$ и она соответствует ловушке бедности в том смысле, что индивиды (династии) с начальным уровнем богатства, лежащим в этом интервале, сходятся к стационарному состоянию $\bar{x}_u$. Начальное распределение дохода, как и ранее, имеет влияние первого порядка малости на эффективность экономики и уровень дохода в ней. Если большинство индивидов в начальный период времени обладают богатством $x(t) < x^*$, то экономика описывается низкой производительностью, небольшим запасом человеческого капитала и низким уровнем богатства. Следовательно, эта модель является расширением простой модели без кредитного рынка из подпараграфа 21.6.1, в котором индивиды принимают решения об инвестициях в человеческий капитал. Как и ранее, основные результаты в ней следуют из взаимодействия несовершенства кредитного рынка (которое ведет к тому, что процентная ставка по привлеченным займам превышает процентную ставку по сбережениям) и неравенства доходов. Как и в предыдущей модели, здесь нетрудно построить примеры, когда увеличение уровня неравенства ведет как к худшему, так и к лучшему исходу в зависимости от того, как изменяется количество индивидов, находящихся в области притяжения аттрактора стационарного состояния с низким уровнем богатства.

Важное свойство модели состоит в том, что она, допуская возможность индивидов привлекать и размещать средства на финансовом рынке, позволяет провести анализ влияния финансового развития экономики на процесс накопления человеческого капитала. Страна с лучше развитым финансовым рынком характеризуется меньшей разницей между процентными ставками по займам и кредитам, то есть меньшим значением i при заданном значении r. При меньшем значении процентной ставки i большее количество агентов избегают попадания в ловушку бедности, более того, в некоторых случаях ловушка бедности отсутствует в равновесии (график функции (21.56) не пересекается с лучом, проходящим под углом 45° в точке, где его угол наклона больше). Таким образом, развитие финансового рынка не только позволяет улучшить разделение рисков в экономике (как показано в параграфе 21.1), но и, смягчая кредитные ограничения индивидов, способствует накоплению человеческого капитала.

Несмотря на то что модель, представленная здесь, значительно богаче модели из подпараграфа 21.6.1, она остается моделью частного равновесия. Множественность стационарных состояний в ней для различных индивидов возможна как функция от их начального запаса человеческого капитала (или богатства), однако равновесные цены не влияют на динамику модели. В работах: [Galor, Zeira 1993; Banerjee, Newman 1993; Aghion, Bolton 1997; Piketti 1997] рассматривается более общий подход, в котором динамика доходов каждой династии (индивида) зависит от траекторий цен (например, процентной ставки или заработной платы) в общем равновесии, которые, в свою очередь, являются функциями от уровня неравенства доходов. В упражнении 21.11 показано, что множественность стационарных состояний в модели, представленной выше, может не быть робастной при введении в модель неопределенности в динамике доходов. В этом случае вместо нескольких стационарных состояний долгосрочное равновесие описывается стационарным распределением запаса человеческого капитала, однако такое стационарное распределение характеризуется значительной персистентностью[4]. С другой стороны, в моделях, в которых цены определяются в общем равновесии и влияют на динамику богатства (доходов) индивидов, множественность стационарных состояний более робастна.

21.7. К объединенной теории экономического развития и роста?

Все модели, представленные в этой главе, связаны одной идеей. Они описывают преобразования в экономике и обществе в процессе экономического развития или выделяют причины, по которым такие преобразования не происходят. Эти преобразования включают в себя изменение структуры производства, начало процесса индустриализации, перемещение рабочей силы из сельской местности в города, развитие финансового рынка, изменения коэффициентов смертности и рождаемости вследствие улучшений в здравоохранении и демографических изменений, снижение уровня неэффективности и количества провалов рынка в экономике. Во многих случаях движущая сила этих изменений усиливается в процессе структурных преобразований, которые они вызывают.

Построение объединенной теории структурных изменений и провалов рынка в процессе экономического развития не является основной задачей этого параграфа. Попытка объединить различные аспекты экономического развития в рамках одной модели часто делает ее значительно более сложной, в то время как нам кажется, что относительно абстрактное описание реальности позволяет сделать более содержательные выводы. Более того, экономисты пока не достигли значительного прогресса в построении объединенной теории. Поэтому в этом параграфе мы остановимся на модели в сокращенной форме, которая описывает важное общее свойство моделей, представленных в этой главе.

Во всех моделях, представленных в этой и предыдущих главах, процесс экономического развития связан с расширением капитала, то есть с увеличением использования в производстве капитала вместо рабочей силы. Поэтому мы можем аппроксимировать экономический рост увеличением отношения капитала к труду в экономике $k(t)$. Из этого утверждения не следует, что накопление капитала является основной причиной экономического роста. В предыдущих главах мы показали, что процесс экономического

[4] Заметим, что это связано с марковской структурой модели. Множественность стационарных состояний возникает в марковских моделях, потому что марковская цепь, или марковский процесс, описывающий динамику системы, не эргодический (то есть бедные индивиды никогда не накапливают достаточного богатства, чтобы стать богатыми). Некоторый шум, который приводит к тому, что различные части распределения становятся связанными друг с другом, делает марковский процесс эргодическим и, таким образом, устраняет множественность стационарных состояний.

роста (и экономического развития) порождается технологическими изменениями в экономике, поэтому расширение капитала может быть следствием технологических изменений. Более того, в параграфе 21.4 показано, что важной переменной, описывающей уровень развития экономики, является расстояние между технологией в ней и мировой технологической границей. Несмотря на это, даже в этих случаях на равновесной траектории происходит увеличение отношения капитала к труду, поэтому мы можем рассматривать его как показатель уровня развития экономики (однако в этом случае необходимо быть осторожным и различать увеличение отношения капитала к труду и обеспечение экономического развития). Принимая во внимание эти предостережения, в этом параграфе мы будем рассматривать отношение капитала к труду как показатель уровня экономического развития общества и для упрощения выкладок будем использовать модель роста Солоу для описания динамики отношения капитала к труду.

В частности рассмотрим экономику в непрерывном времени, в которой выпуск на душу населения задан следующей производственной функцией:

$$y(t) = f(k(t), x(t)), \tag{21.57}$$

где переменная $k(t)$ обозначает отношение капитала к труду, а переменная $x(t)$ — некоторую общественную переменную, например уровень финансового развития, урбанизации, структуры производства или семьи. Как обычно, предположим, что функция f является дифференцируемой, возрастающей и строго вогнутой по аргументу k. Общественная переменная x влияет на эффективность производственной деятельности и поэтому является аргументом производственной функции на душу населения (21.57). Предположим, что увеличение переменной x соответствует «структурным изменениям» в экономике (например, перемещению рабочей силы из сельской местности в города). Следовательно, функция f также возрастает по аргументу x и ее частная производная по этому аргументу неотрицательна, то есть $f_x \geq 0$. Очевидно, что не все структурные изменения выгодны для экономики. Однако для упрощения модели мы остановимся на случае, когда функция f возрастает по аргументу x.

Предположим, что процесс структурных изменений может быть описан следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}(t) = g(k(t), x(t)), \tag{21.58}$$

где функция g является дважды дифференцируемой. Так как переменная x соответствует структурным изменениям, связанным с процессом экономического развития, функция g должна возрастать по k, и поэтому ее частная производная по этому аргументу положительна, то есть $g_k > 0$.

Из стандартных предположений о «сходимости к среднему» следует, что предположение о том, что частная производная g_x отрицательна, является наиболее подходящим. Если значение переменной x выше ее естественного уровня, то она будет убывать, а если оно находится ниже ее естественного уровня, то она возрастает. Основываясь на этих рассуждениях, допустим, что $g_x < 0$.

Процесс накопления капитала описывается моделью экономического роста Солоу, то есть

$$\dot{k}(t) = sf(k(t), x(t)) - \delta k(t), \qquad (21.59)$$

где мы для простоты предположили, что население экономики постоянно и технологический прогресс отсутствует. При заданном значении переменной x процесс накопления капитала в точности описывается базовой моделью экономического роста Солоу. Однако переменная $x(t)$ также изменяется во времени, поэтому структура экономики чуть более сложна.

Вначале рассмотрим случай, когда $f_x(k, x) \equiv 0$, то есть общественная переменная x не влияет на производительность. В этом случае динамика экономики показана на рис. 21.10. Сплошная вертикальная линия является графиком уравнения $\dot{k}(t)/k(t) = 0$, она описывает автономное решение дифференциального уравнения (21.59). Эта кривая является вертикальной линией, так как стационарному состоянию соответствует единственное

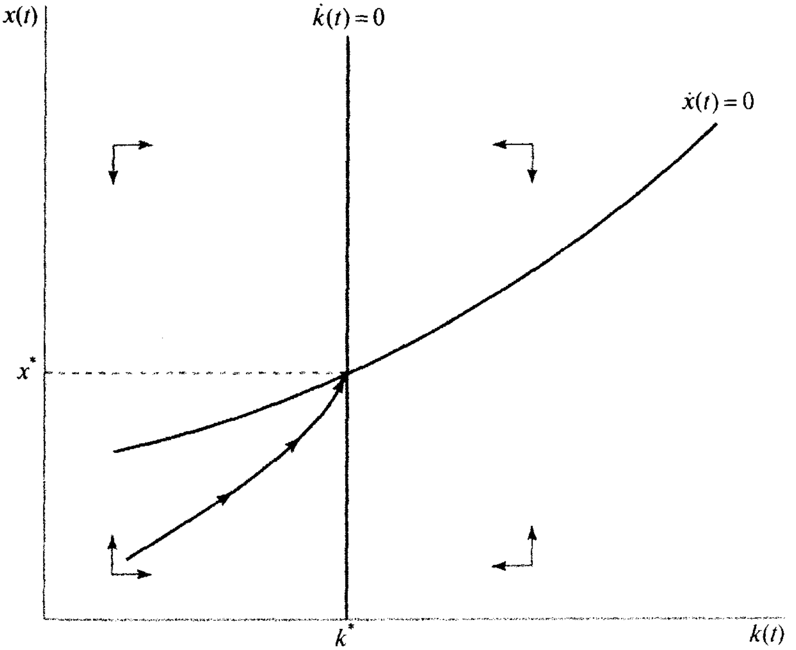

Рис. 21.10. Накопление капитала и структурные изменения в экономике в случае, когда общественная переменная x не влияет на производительность

значение переменной $k(t)$, k^*. С другой стороны, наклонная кривая соответствует уравнению (21.58) и описывает множество пар точек k и x, при которых имеет место равенство $\dot{x}(t)/x(t) = 0$. Она является возрастающей кривой, так как функция g возрастает по аргументу k и убывает по аргументу x. Направления динамических траекторий, показанные на рис. 21.10 стрелками, непосредственно следуют из уравнений (21.58) и (21.59). Например, если $k(t) < k^*$, то из уравнения (21.59) следует, что переменная $k(t)$ возрастает. Аналогично если значение переменной $x(t)$ находится выше кривой $\dot{x}(t)/x(t) = 0$, то из уравнения (21.58) следует, что она будет убывать. Из такого фазового портрета следует, что динамическая система, описывающая равновесие в модели, является глобально устойчивой и при любых начальных значениях $k(0) > 0$ и $x(0) > 0$ экономика сходится к единственному стационарному равновесию (k^*, x^*). Далее опишем динамику менее развитой экономики, то есть экономики с низкими значениями начального отношения капитала к труду $k(0)$ и общественной переменной $x(0)$. Развитие такой экономики происходит на фоне постепенного расширения капитала и соответствующего ему роста переменной $x(t)$ к значению x^*. Такая динамика может быть рассмотрена как сокращенная форма описания структурных изменений в процессе экономического развития.

Далее рассмотрим более интересный случай, когда $f_x(k, x) > 0$. В этом случае кривая $\dot{k}(t)/k(t) = 0$ также является возрастающей, так как $f_x > 0$ и нетрудно убедиться, что правая часть уравнения (21.59) убывает по аргументу k (в частности это следует из строгой вогнутости функции $f(k, x)$ по k и из неравенства $f(k,x)/k > f_k(k,x)$ для всех k и x, см. упражнение 21.14). Стационарное равновесие снова задается пересечением кривых $\dot{k}(t)/k(t) = 0$ и $\dot{x}(t)/x(t) = 0$. Так как теперь обе эти кривые являются возрастающими, в модели возможна множественность стационарных состояний (см. рис. 21.11). Эти стационарные состояния могут соответствовать множественности равновесий, возникающей в результате экстерналии совокупного спроса или несовершенства кредитного рынка. Плохое стационарное состояние (k', x') соответствует ситуации, в которой значение общественной переменной x мало, что снижает производительность и приводит экономику в равновесие с низким значением отношения капитала к труду. С другой стороны, в хорошем стационарном состоянии (k^*, x^*) высокое значение переменной x поддерживает высокий уровень производительности и поэтому большее значение отношения капитала к труду в стационарном равновесии. Нетрудно убедиться, что и плохое и хорошее стационарные состояния в общем случае локально устойчивы и поэтому экономика с начальными значениями в окрестности одного из них сходится к нему и остается в нем длительное время. Это наблюдение подчеркивает важность исторических факторов в процессе экономического развития. Если

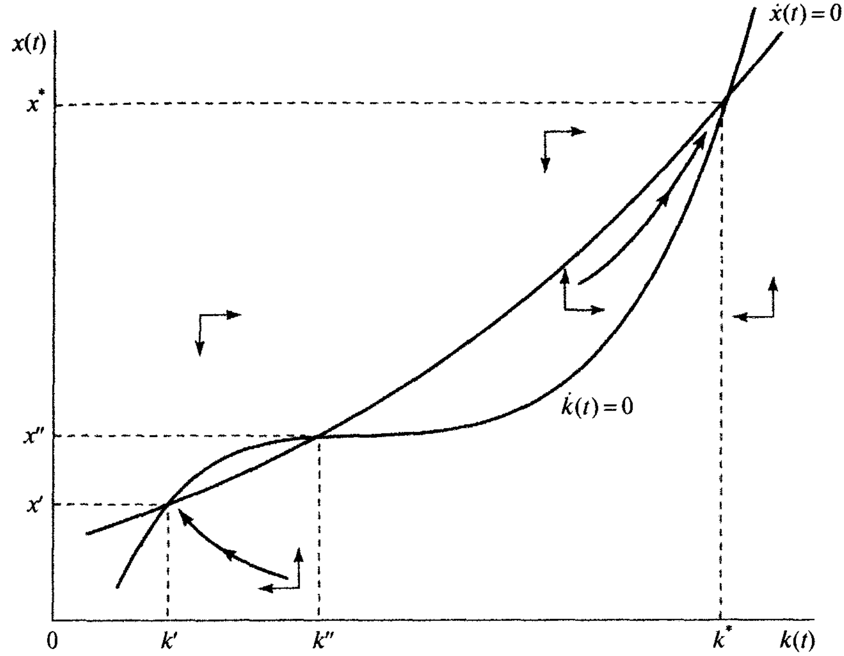

Рис. 21.11. Накопление капитала и структурные изменения в модели с множественностью стационарных состояний

исторические факторы или начальные запасы помещают экономику в область притяжения аттрактора плохого стационарного состояния, то экономика сходится к этому состоянию, тем самым попадая в ловушку развития. Интересное замечание состоит в том, что ловушка развития, по крайней мере отчасти, является следствием отсутствия структурных изменений (т. е. низкого значения общественной переменной x).

Из рис. 21.11 очевидно, что существование множественности стационарных состояний требует, чтобы кривая $\dot{k}(t)/k(t) = 0$ была относительно пологой, по крайней мере в некоторой ее области. Из уравнения (21.59) следует, что это возможно, когда частная производная $f_x(k, x)$ велика, по крайней мере в некоторой области. На интуитивном уровне, множественность равновесий возможна, только если общественная переменная x или структурные изменения значительно влияют на производительность.

Возможно, более интересной, чем множественность стационарных состояний, окажется ситуация, когда при той же структуре экономики в ней существует единственное стационарное состояние. Аналогичные рассуждения приводят к тому, что это возможно, когда частная производная $f_x(k, x)$ относительно мала. В этом случае график уравнения $\dot{k}(t)/k(t) = 0$ во всех точках более крутой, чем график уравнения $\dot{x}(t)/x(t) = 0$. Этот случай показан на рис. 21.12, и единственным стационарным состоянием на нем

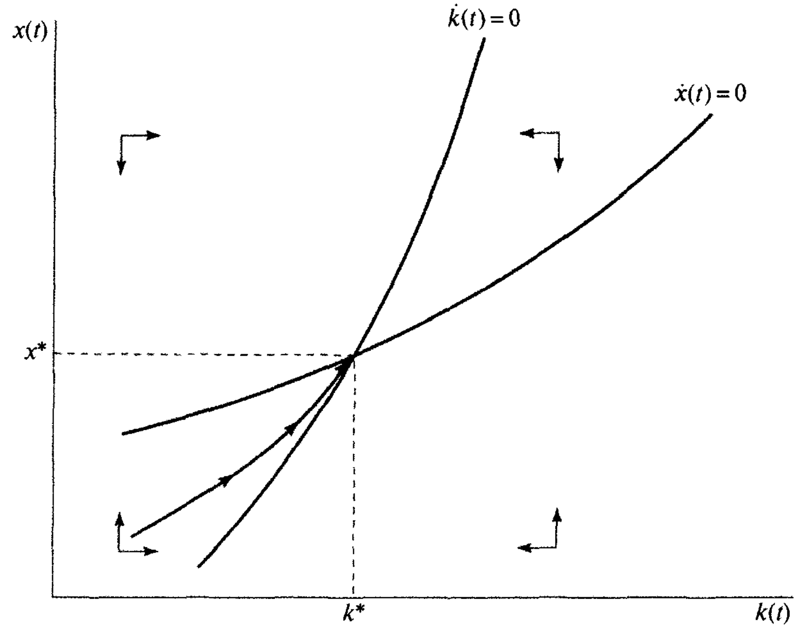

Рис. 21.12. Накопление капитала и структурные изменения в случае, когда общественная переменная x влияет на производительность, но стационарное состояние единственно

является точка (k^*, x^*). Направления траектории, показанные на рисунке стрелками, как и ранее, следуют из уравнений (21.58) и (21.59). Из рисунка следует, что единственное стационарное состояние (k^*, x^*) является глобально устойчивым (см. доказательство в упражнении 21.14). Снова рассмотрим менее развитую экономику с низкими начальными значениями отношения капитала к труду $k(0)$ и общественной переменной $x(0)$. В этом случае динамика экономики качественно схожа с ее динамикой на рис. 21.10. Однако ее экономический смысл несколько другой. Накопление капитала (расширение капитала), как и ранее, ведет к росту общественной переменной $x(t)$, но здесь структурные изменения также увеличивают производительность (как в моделях из параграфа 17.6 из главы 17 и из параграфов 21.3 и 21.1). Рост производительности, в свою очередь, ведет к ускорению накопления капитала, и процесс экономического развития, когда экономический рост побуждает структурные изменения, которые стимулируют дальнейший экономический рост, становится самодостаточным. Однако в силу того, что влияние общественной переменной x на производительность ограничено, в конечном итоге этот процесс приводит экономику к единственному стационарному состоянию.

Следовательно, такая модель структурных изменений в сокращенной форме описывает наиболее важные свойства процесса экономического развития, описанные в этой главе. Она не является объединенной моделью, наоборот, вместо того чтобы объяснять различные аспекты структурных изменений, она предоставляет абстрактный подход, описывающий, как процесс экономического развития, соответствующий накоплению капитала, проходит на фоне структурных изменений в экономике, которые, в свою очередь, могут привести к росту производительности и способствовать дальнейшему накоплению капитала. Построение действительно объединенной теории экономического развития и структурных изменений является одним из направлений дальнейших исследований.

21.8. Основные выводы

В этой главе представлено большое количество моделей, описывающих структурные изменения в экономике, сопровождающие процесс экономического развития. Как показано в предыдущем параграфе, на данный момент ученые не обладают единой теорией различных аспектов этих изменений, однако во всех описанных выше моделях можно выделить ряд общих свойств. В предыдущем параграфе сделана попытка описать эти общие свойства. Поэтому здесь в заключении, вместо того чтобы повторять эти общие выводы, мы укажем, что эти вопросы находятся на переднем крае современных исследований и многое еще предстоит сделать. Экономическое развитие тесно связано с экономическим ростом, однако теория развития может потребовать построения других, в чем-то специальных, моделей, которые не только концентрируются на траектории сбалансированного роста и упорядоченной динамике экономики, описываемых неоклассической моделью экономического роста и моделями эндогенного технологического прогресса. Эти модели могут также потребовать явного введения в них провалов рынка и более серьезного анализа временной эволюции этих провалов рынка. Такой взгляд связан с пониманием того, что сущностью экономического развития является процесс структурных изменений, включающих в себя финансовое развитие экономики, демографические изменения, миграцию населения и урбанизацию, изменения в организации общественной жизни и производственной деятельности и другие общественные изменения.

Другой возможно важный аспект процесса экономического развития состоит в том, что неэффективная организация производственной деятельности, несовершенные финансовый рынок и рынки товаров могут привести экономику в ловушку развития. Причинами неэффективности экономики могут быть отсутствие координации в действиях агентов в экономике с экстерналией совокупного спроса, а также взаимосвязь между несовершенным кредитным рынком и инвестициями в человеческий капитал. Эти темы не только поднимают некоторые вопросы, ответы на которые необходимы для понимания процесса экономического развития, но и также выводят ряд проблем, которые обычно считаются вторичными в стандартной литературе по теории экономического роста, на передний край исследований. Помимо других, эти вопросы включают в себя организацию финансового рынка, распределение доходов и богатства, вопросы экономических стимулов (например, проблему риска недобросовестности), неблагоприятный отбор и неполные контракты, как на кредитном рынке, так и в производственных отношениях.

Понимание того, что в анализе экономического развития возникает необходимость обратить особое внимание на эти вопросы, также открывает путь для более конструктивной взаимосвязи между эмпирическими исследованиями по экономике развития и моделями экономического развития, представленными в этой главе. Как отмечено выше, эмпирическая литература по экономике развития, описывающая степень несовершенства кредитного рынка, влияние неравенства на инвестиции в человеческий капитал и выбор работниками профессий, процесс изменений в структуре общественных отношений и ряд других провалов рынка в менее развитых экономиках, довольно обширна. В основном эта литература посвящена провалам рынка в менее развитых экономиках, и в некоторых случаях в работах предлагаются способы ограничения влияния этих провалов рынка. Поэтому одним из плодотворных направлений будущих исследований является объединение теоретических моделей экономического роста и экономического развития (которые связаны с провалами рынка) со значительным количеством эмпирических свидетельств о влиянии, свойствах и издержках этих провалов рынка. Такие объединенные модели будут одновременно теоретически строгими и эмпирически обоснованными, и, что более важно, они позволят сосредоточиться на анализе, как нам представляется, основного вопроса теории экономического развития: почему экономики некоторых стран менее развиты, как они могут начать расти быстрее и как они могут запустить процесс структурных изменений, необходимый для их экономического развития.

21.9. Литература

В этой главе представлено большое число различных моделей. Наш выбор отражает наши собственные научные интересы, а также продиктован желанием не сделать главу еще более обширной, чем она есть.

Параграф 21.1 посвящен знакомству со значительной литературой по финансовому развитию и экономическому росту. Среди теоретических работ статьи [Townsend 1979; Greenwood, Jovanovich 1990; Bencivenga, Smith 1991] описывают взаимосвязь между финансовым развитием с одной стороны и делением рисков, распределением средств между различными проектами и индивидами — с другой. Работы [Obstfeld 1994;

Acemoglu, Zilibotti 1997] посвящены зависимости между финансовым развитием экономики и диверсификацией рисков в ней. Необходимо выделить также большое количество эмпирических работ, описывающих влияние финансового развития на экономический рост. Прекрасный обзор этой литературы представлен в статье [Levine 2005]. Наиболее известными эмпирическими работами являются статьи [King, Levine 1993], в которой представлен межстрановой анализ корреляций между различными мерами финансового развития и экономическим ростом, [Rajan, Zingales 1988], в которой показано, что недостаточное финансовое развитие особенно отрицательно сказывается на секторах, осуществляющих значительные внешние заимствования, и [Jayaratne, Strahan 1996], в которой описано, как либерализация банковского сектора в США, которая привела к росту конкуренции на финансовом рынке, послужила толчком к ускорению финансового развития и экономического роста. Говоря о финансовом развитии, в тексте главы мы упомянули кривую Кузнеца. Заметим, что консенсус о существовании кривой Кузнеца среди экономистов не достигнут. В работах, основанных на исторических данных, таких как [Lindert, Williamson 1976; Bourguignon, Morrison 2002], утверждается, что агрегированная динамика согласуется с кривой Кузнеца, однако в статьях, использующих межстрановые панельные данные в послевоенное время, например в работе [Field 1980], авторы не находят связей, имеющих сходство с этой кривой.

Литература по рождаемости и демографическим изменениям также довольно обширна. Основные тренды в динамике мирового населения и межстрановых различий в темпе его роста описаны в статьях [Livi-Bacci 1979; Maddison 2003]. Идея о том, что родители стоят перед выбором между количеством детей и уровнем их образования (выбор между качеством и количеством) была предложена в работе [Becker 1981]. Агрегированная динамика, представленная в статье [Livi-Bacci 1979], согласуется с этой идеей, однако микроэкономические свидетельства существования такого выбора незначительны. В ряде современных статей, основанных на микроэкономических данных [Black, Devereux, Salvanes 2005; Angrist, Lavy, Schlosser 2006; Qian 2007], авторы исследуют опыт Норвегии, Израиля и Китая и не находят значительной эмпирической поддержки существования выбора между качеством и количеством детей. Решения о рождении детей впервые были введены в модели экономического роста в работах [Becker, Barro 1988; Barro, Becker 1989]. Первая модель эндогенного экономического роста с выбором количества детей построена в статье [Becker, Murphy, Tamura 1990]. Более современные статьи о демографических изменениях и переходе экономики от мальтузианского режима к устойчивому экономическому росту включают в себя работы [Goodfriend, McDermott 1995; Galor, Weil 1996, 2000; Hansen, Prescott 2002; Doepke

2004]. В статьях [Kalemli-Ozcan 2002] и [Fernandez-Villaverde 2003] проанализировано влияние снижения смертности на решение о рождении детей в контексте теории экономического роста. В работах [Galor, Moav 2002, 2004] объединены решения о количестве детей, выбор между качеством и количеством и естественный отбор. Прекрасный обзор этой литературы представлен в статье [Galor 2005]. Первая модель, изложенная в параграфе 21.2, является упрощенной версией классической модели Т. Мальтуса из его книги [Malthus 1798; Мальтус 1993]. Вторая модель из этого параграфа является упрощенной версией моделей из работ [Becker, Barro 1988; Galor, Weil 2000].

Другим важным элементом процесса экономического развития является урбанизация. Обзор истории урбанизации представлен в работе [Bairoch 1988]. Первая модель из параграфа 21.3 основана на классической работе Артура Льюиса [Lewis 1954], в которой утверждается, что начальный этап экономического развития можно рассматривать как ситуацию с избыточным запасом рабочей силы, доступной для найма в современном секторе, поэтому экономический рост ограничивается капиталом и технологией, а не количеством работников. В хорошо известной статье [Harris, Todaro 1970] авторы также подчеркивают важность миграции населения, однако в их модели перемещение рабочей силы между сельской местностью и городами не сопровождается издержками и утверждается, что уровень безработицы в городах является основной переменной, приводящей экономику в равновесие.

Вторая модель, представленная в подпараграфе 21.3.2, основана на работах: [Banerjee, Newman 1998; Acemoglu, Zilibotti 1999]. В статье [Banerjee, Newman 1998] выделяется преимущество небольших сельских общин в снижении уровня риска недобросовестности в кредитных взаимоотношениях и показано, как оно связано с процессом урбанизации, когда индивиды перемещаются в местности, где их предельный продукт труда имеет большее значение. В работе [Acemoglu, Zilibotti 1999] утверждается, что экономическое развитие ведет к накоплению информации. В частности по мере того, как большее количество индивидов начинает выполнять схожие действия, обнаруживается новая общественно полезная информация, что приводит к появлению более сложных контрактных и производственных взаимоотношений. В подпараграфе 21.3.2 также указывается важность общественных норм как другого аспекта общественных и экономических отношений в менее развитых экономиках. В работе [Clifford, Geertz 1963] авторы подчеркивают важность механизма общественных норм и то, как в некоторых случаях он может вступать в конфликт с рыночными механизмами. Параграф 21.4 основан на статье [Acemoglu, Aghion, Zilibotti 2006].

Параграф 21.5 основан на известной статье [Murphy, Shleifer, Vishny 1989], в которой формализована идея, впервые предложенная в работе

[Rosenstein-Rodan 1943]. Другая модель с невыпуклостью, в которой демонстрируется возможность существования множественности равновесий в экономике с монополистической конкуренцией, представлена в статье [Kiyotaki 1988], в которой схожие результаты возникают в модели с эндогенными предложением труда и инвестициями. Прекрасный обзор моделей с множественностью равновесий содержится в статье [Matsuyama 1995]. В ней же автор приводит прозрачное объяснение причин, по которым монетарная экстерналия может привести к множественности равновесий в экономике с монополистической конкуренцией.

Различия между множественностью равновесий и множественностью стационарных состояний обсуждаются в статьях: [Krugman 1991; Matsuyama 1991]. В обеих статьях авторы подчеркивают, что в моделях с множественностью равновесий выбор равновесия определяется ожиданиями агентов, а в моделях с множественностью стационарных состояний равновесие может быть (и часто является) единственным и динамика экономики определяется ее начальными условиями и историей.

Модель из подпараграфа 21.6.2 основана на первой модели из статьи [Galor, Zeira 1993]. Схожие вопросы исследуются в работе [Banerjee, Newman 1993] в контексте влияния неравенства на выбор работниками профессии и в работах [Aghion, Bolton 1997; Piketty 1997] в контексте зависимости между неравенством и инвестициями предпринимателей. Другие работы о динамике уровня неравенства и его влиянии на эффективность экономики включают в себя статьи: [Loury 1981; Tamura 1991; Benabou 1996; Durlauf 1996; Fernandez, Rogerson 1996; Glomm, Ravikumar 1992; Acemoglu 1997b].

21.10. Упражнения

21.1. Проведите анализ равновесия в экономике в модели из параграфа 21.1 без предположения о том, что каждый индивид инвестирует в рискованную технологию сбережений все свое богатство или не осуществляет таких инвестиций вообще. Изменяет ли такое обобщение модели качественные результаты, приведенные в тексте главы?

21.2. Рассмотрите модель из параграфа 21.1.

(a) Покажите, что в уравнении (21.5) $K(t+1)$ всегда возрастает по $K(t)$ и существует некоторое значение $\bar{K}$, такое, что если $K(t) > \bar{K}$, то запас капитала растет во времени.

(b) Может ли в этой модели существовать более одного значения стационарного уровня капитала? Если да, то объясните, почему вы так считаете.

(c) Найдите достаточные условия единственности стационарного значения капитала K^*. Покажите, что если в этом случае $K(t) < K^*$, то $K(t+1) > K(t)$.

21.3. В модели из подпараграфа 21.2.1 предположите, что динамика населения экономики определяется не уравнением (21.8), а уравнением $L(t+1) = \varepsilon(t)(n(t+1) - 1)L(t)$, где случайная величина $\varepsilon(t)$, которая отражает случайные факторы прироста населения, принимает два значения, $1-\bar{\varepsilon}$ и $1+\bar{\varepsilon}$. Опишите стохастическое равновесие в этой модели. В частности, постройте стохастическое соответствие, описывающее динамику равновесия, и проанализируйте, как шок ε воздействует на рост населения и динамику доходов в экономике.

21.4. Полностью опишите динамику миграции, отношения капитала к труду в городах и заработной платы в модели из подпараграфа 21.3.1 (рассмотрите случай, когда условия 1, 2 и 3 из текста главы не выполняются одновременно).

21.5. Рассмотрите модель из подпараграфа 21.3.2 и предположите, что в периоде времени $t = 0$ предпочтения всех индивидов заданы стандартной функцией полезности типа CRRA. Рассмотрите равновесную траекторию экономики как заданную и найдите значение параметра ξ, при котором полезность в периоде времени $t = 0$ достигает максимума. Что произойдет, если фактическое значение параметра ξ превышает эту величину?

21.6. Рассмотрите задачу максимизации (21.31).

(a) Объясните, почему эта задача максимизации описывает равновесное распределение работников по профессиям. Какая система цен поддерживает такое распределение?

(b) Выведите условие первого порядка (21.32).

(c) Найдите достаточные условия для того, чтобы в решении этой задачи все квалифицированные работники были заняты в технологии $\bar{h}$.

(d) Приведите пример, когда ни один работник не занят в технологии $\bar{h}$, однако для всех $h \in [0, \bar{h}]$ выполняется неравенство $A_{\bar{h}} > A_h$.

(e) Существует ли решение, в котором в равновесии используется более двух технологий? Если да, то опишите условия, при которых такое равновесие возможно.

21.7. Рассмотрите вариант модели из параграфа 21.4, в котором фирмы принимают решение об организации производственной деятельности. В частности, они принимают решение о вертикальной интеграции. Для этого рассмотрите незначительную модификацию уравнения (21.38):

$$A(v,\ t)=\eta\bar{A}(t-1)+\gamma(v,\ t)A(t-1),$$

где $\gamma(v,\ t)=\gamma+\theta(v,\ t)$. Предположите, что усилие предпринимателя ведет к росту величины $\theta(v,\ t)$, а размер усилия, которое предприниматель затрачивает на инновационную деятельность, зависит от внутренней организации фирмы. В частности, предположите, что $\theta(v,\ t)=0$ для вертикально интегрированных фирм (так как предприниматель очень загружен и имеет мало времени для инновационной деятельности). С другой стороны, если фирма использует аутсорсинг, то $\theta(v,\ t)=\theta>0$. Однако если фирма использует аутсорсинг, то предприниматель делит долю прибыли β с менеджером (владельцем) фирмы, которой делегируется выполнение определенных задач (в то время как в вертикально интегрированной компании он оставляет всю прибыль себе).

(a) Найдите решение предпринимателя об аутсорсинге, при котором прибыль достигает максимума, как функцию от $a(t)$. В частности покажите, что существует пороговое значение $\bar{a}$, такое, что для всех $a(t)\leq\bar{a}$ предприниматель выбирает вертикальную интеграцию, а для всех $a(t)>\bar{a}$ он выбирает аутсорсинг.

(b) Сравните равновесную организацию фирмы с организацией, при которой рост экономики достигает максимума.

21.8. Покажите, что если в модели из параграфа 21.5 существует множественность равновесий, то равновесие с инвестициями доминирует в смысле Парето над равновесием без инвестиций.

21.9. Рассмотрите модель из подпараграфа 21.6.1, однако устраните в ней невыпуклость, предположив, что в уравнении накопления человеческого капитала (21.52) человеческий капитал потомка индивида i равен $h_i(t+1)=e_i(t)^\gamma$ для всех значений $e_i(t)$ и $\gamma\in(0,\ 1)$. Покажите, что тогда в модели существует единственное значение запаса человеческого капитала, к которому сходятся все династии. Основываясь на этом результате, объясните роль невыпуклости в существовании множественности равновесий.

21.10. Рассмотрите модель из подпараграфа 21.6.1 и предположите, что начальный уровень неравенства в экономике задается равномерным распределением со средним значением человеческого капитала $h(0)$ и носителем $[h(0)-\lambda,\ h(0)+\lambda]$. Увеличение параметра λ соответствует росту уровня неравенства.

(a) Покажите, что если значение $h(0)$ достаточно мало, то рост параметра λ ведет к увеличению долгосрочных средних значений человеческого капитала и дохода, а если значение $h(0)$ достаточно велико, то рост параметра λ приводит к их снижению. [Подсказка: используйте рис. 21.8 и 21.9.]

(b) Какие другие типы распределений дохода (кроме равномерного) приводят к такому же результату?

(c) Покажите, что этот результат можно обобщить для модели из подпараграфа 21.6.2.

(d) Основываясь на этом результате, прокомментируйте утверждение о том, что увеличение неравенства ведет к росту дохода в бедных странах и снижению дохода в богатых странах. (Если вы не согласны с ним, то приведите пример, когда это не так.)

21.11. Рассмотрите модель из подпараграфа 21.6.2 и сделайте в ней два следующих изменения. Предположите, во-первых, что функция полезности индивида имеет вид:

$$(1-\delta)^{-(1-\delta)}\delta^{-\delta}c^{1-\delta}b^{\delta}, \tag{21.60}$$

и, во-вторых, что заработная плата неквалифицированных работников равна $w_u + \varepsilon$, где случайный шок ε имеет нулевое среднее значение.

(a) Предположите, что шок ε распределен на носителе $[-\lambda, \lambda]$. Покажите, что если значение λ достаточно близко к нулю, то в модели сохраняется множественность стационарных состояний, описанных в тексте главы, в том смысле, что в зависимости от начальных условий некоторые династии становятся высококвалифицированными, а некоторые династии остаются низкоквалифицированными.

(b) В чем состоит удобство перехода от логарифмической функции полезности к виду (21.60)?

(c) Далее предположите, что шок ε распределен на носителе $[-\lambda, \infty)$, где $\lambda \le w_u$. Покажите, что в этом случае в модели существует единственное эргодическое распределение богатства и нет ловушки бедности. Объясните, почему этот результат отличается от результата части (a).

(d) Как изменятся ваши выводы, если предположить, что заработная плата квалифицированных работников равна $w_s + v$, где v является еще одним случайным шоком с нулевым средним значением? [Подсказка: сделайте лишь набросок динамики модели и структуры равновесия, не повторяя весь анализ из пункта (c).]

21.12. **(a)** В модели из подпараграфа 21.6.2 предположите, что каждый индивид имеет возможность скрыться и не возвращать свой долг, и если он выбирает такое действие, то он никогда не будет пойман. Однако банк обладает возможностью избежать этого, понеся издержки мониторинга в размере m на единицу заимствования. Предположите, что в экономике существует большое число банков, которые конкурируют за предоставление кредитов по Бертрану. В этих предположениях покажите, что все банковские кредиты будут сопровождаться мониторингом и процентная ставка по ним равна $i = r + m$. Покажите, что все результаты из текста главы имеют место и в этой модели.

(b) Далее предположите, что банк обладает возможностью предотвратить невыплату кредита, понеся фиксированные издержки мониторинга M. В тех же предположениях, что и в пункте (а), покажите, что в этом случае процентная ставка для индивида, который привлекает заем в размере $x - h$, равна $i = r + M/(x - h)$. Опишите равновесную динамику экономики в модели из параграфа 21.6.2 в этих предположениях. Как изменятся ваши выводы?

(c) Далее предположите, что у банка отсутствует возможность предотвратить невыплату кредита, однако если индивид скрывается, то с вероятностью p он будет пойман, и в этом случае доля $\lambda \in (0, 1)$ его дохода будет конфискована. Опишите равновесную динамику экономики в модели из параграфа 21.6.2 в этих предположениях. Как изменятся ваши выводы?

(d) Далее проанализируйте увеличение заработной платы w_s (при неизменном значении w_u), то есть увеличение премии за квалификацию. В каком из трех сценариев, описанных в пунктах (а)–(с), такое увеличение оказывает наибольшее влияние на инвестиции в человеческий капитал?

21.13. В этом упражнении вам предстоит проанализировать модель выбора типа деятельности из работы [Banerjee, Newman 1984]. Функция полезности каждого индивида имеет вид:

$$(1-\delta)^{-(1-\delta)}\delta^{-\delta}c^{1-\delta}b^{\delta} - z,$$

где переменная z говорит о том, прикладывает ли индивид усилие и что издержки приложения усилия нормированы единицей. Индивид имеет возможность выбрать (1) не работать и не получать трудовой доход, доходность его финансовых активов в этом случае равна $\hat{r} < 1/\delta$; (2) работать по найму и получать заработную плату v; (3) работать на себя, что требует инвестиций в размере I и труда индивида; и (4) стать предпринимателем, что требует инвестиций в размере μI и найма μ работников, в этом случае индивид становится руководителем, осуществляющим мониторинг работников (и не принимающим участия в производственной деятельности). Все варианты, кроме первого, требуют приложения усилий. Предположите, что доходность активов антрепренера и индивида, работающего на себя, превышает доходность активов не работающего индивида и в обоих случаях ее среднее значение равно $\bar{r} > \hat{r}$.

(a) Для заданной функции полезности найдите вид косвенной функции полезности. Покажите, что ни один индивид не выберет работу по найму при заработной плате меньше единицы.

(b) Предположите, что имеют место неравенства $\mu[I(\bar{r}-\hat{r})-1]-1 > I(\bar{r}-\hat{r})-1 > 0$. Проинтерпретируйте это предположение. [Подсказка: оно связывает прибыльность предпринимательской деятельности и работы на себя с минимально возможной заработной платой, равной 1.]

(c) Предположите, что только индивиды с богатством $w \geq w^*$ имеют возможность привлечь достаточное для работы на себя количество средств и что только индивиды с богатством $w \geq w^{**} > w^*$ имеют возможность привлечь μI, необходимое для начала предпринимательской деятельности. Приведите интуитивное объяснение этих кредитных ограничений.

(d) Далее найдите значение ожидаемой косвенной функции полезности для четырех вариантов активности.

(e) Предположите, что распределение богатства в периоде времени t задается функцией распределения $G_t(w)$. Основываясь на вашем результате в пункте (d), покажите, что спрос на труд в такой экономике выглядит как:

$$x = 0, \text{ если } \upsilon > \bar{\upsilon},$$

$$x \in [0, \mu(1 - G_t(w^{**}))], \text{ если } \upsilon = \bar{\upsilon},$$

$$x = \mu(1 - G_t(w^{**})), \text{ если } \upsilon > \bar{\upsilon}.$$

(f) Пусть $\tilde{\upsilon} = (\bar{r}-\hat{r})I > \bar{\upsilon}$. Тогда покажите, что предложение труда задается следующим образом:

$$s = 0, \text{ если } \upsilon < 1,$$

$$s \in [0, G_t(w^*)], \text{ если } \upsilon = 1,$$

$$s = G_t(w^*), \text{ если } 1 < \upsilon < \tilde{\upsilon},$$

$$s \in [G_t(w^*), 1], \text{ если } \upsilon = \tilde{\upsilon},$$

$$s = 1, \text{ если } \upsilon > \tilde{\upsilon}.$$

(g) Покажите, что если $G_t(w^*) > \mu(1 - G_t(w^{**}))$, то экономика характеризуется избыточным предложением труда и равновесная заработная плата равна единице, $\upsilon = 1$. Покажите, что если $G_t(w^*) < \mu(1 - G_t(w^{**}))$, то экономика характеризуется избыточным спросом на труд и равновесная заработная плата составляет $\upsilon = \bar{\upsilon}$.

(h) Далее выведите следующую динамику богатства (наследства) в экономике (для работника с богатством w): (1) не работающий индивид: $b(t) = \delta\hat{r}w$; (2) работник по найму: $b(t) = \delta(\hat{r}w + \upsilon)$; (3) индивид, работающий на себя: $b(t) = \delta(\bar{r}I + \hat{r}(w - I))$; (4) предприниматель: $b(t) = \delta(\bar{r}\mu I + \hat{r}(w - \mu I) - \mu\upsilon)$. Приведите интуитивное объяснение этого выражения.

(i) Далее, используя динамику из пункта (b), покажите, что в модели возможна множественность стационарных состояний с различными распределением богатства и выбором типов деятельности. В частности покажите, что стационарное значение уровня богатства работника с заработной платой υ имеет вид $w_w(\upsilon) = \delta\upsilon/(1-\delta\hat{r})$, стационарное значение уровня богатства индивида, работающего на себя, имеет вид $w_{se} = \delta(\bar{r} - \hat{r})I/(1-\delta\hat{r})$, а стационарное значение уровня богатства предпринимателя имеет вид $w_e(\upsilon) = \delta(\bar{r}\mu I - \hat{r}\mu I - \mu\upsilon)/(1-\delta\hat{r})$. Далее покажите, что если $w_w(\upsilon = 1) < w^*$ и $w_e(\upsilon = \bar{\upsilon}) > w^{**}$, то в стационарном состоянии с заработной платой $\upsilon = 1$ работники не накапливают достаточно богатства для того, что начать работать на себя, а предприниматели накапливают достаточно богатства и остаются предпринимателями. Объясните почему. [Подсказка: динамика богатства зависит от равновесной заработной платы.]

(j) Используя результат из пункта (i), покажите, что если распределение богатства в экономике в начальном периоде времени удовлетворяет неравенству $\mu(1 - G(w^{**})) < G(w^*)$, то в равновесном стационарном состоянии заработная плата равна единице и ни один индивид не работает на себя. С другой стороны, если $\mu(1 - G(w^{**})) > G(w^*)$, то равновесная заработная плата равна $\bar{\upsilon}$ и некоторые индивиды работают на себя. Сравните уровень выпуска в этих двух стационарных состояниях.

(k) Выглядит ли ваше сравнение выпуска в этих стационарных состояниях выпуска правдоподобным? Согласуется ли оно с историческими данными? Обсудите преимущества и недостатки этой модели по сравнению с моделью Галора—Зейра, описанной в подпараграфе 21.6.2.

21.14. В этом упражнении вам предстоит более строго проанализировать динамику модели в сокращенной форме из параграфа 21.7, чем в тексте главы.

1. Покажите, что если $f_x > 0$, то график уравнения $\dot{k}/k = 0$ (21.58) является возрастающей кривой.
2. Рассмотрите систему дифференциальных уравнений (21.58) и (21.59) и стационарное состояние (k^*, x^*). Линеаризуйте оба

дифференциальных уравнения вокруг точки (k^*, x^*) и покажите, что если значение $f_x(k^*, x^*)$ достаточно мало, то это стационарное состояние локально устойчиво.

3. Найдите равномерную верхнюю границу для $f_x(k, x)$, так что в модели существует единственное стационарное состояние. Покажите, что если это ограничение имеет место, то единственное стационарное состояние глобально устойчиво.
4. Постройте параметризацию модели, при которой существует несколько стационарных состояний. Проинтерпретируйте необходимые условия множественности стационарных состояний. Являются ли они правдоподобными с экономической точки зрения?

Часть VIII

ПОЛИТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

В этой части книги мы обратимся к механике экономического роста и проанализируем возможные причины роста экономики. Почти во всех моделях, рассмотренных нами ранее, экономические институты в стране (например, право собственности и структура контрактов) и экономическая политика (например, налоговое законодательство, распределение доходов и субсидий) рассматриваются как заданные. Выводы об экономическом росте и межстрановых различиях в уровне дохода на душу населения делаются в них в предположении о заданном типе институтов и экономической политике. Несмотря на то что эти модели составляют ядро теории экономического роста, они оставляют без ответа *несколько центральных вопросов, поставленных нами в главах 1–4*: почему некоторые страны выбирают институты и экономическую политику, препятствующие экономическому росту, а другие страны выбирают институты и экономическую политику, стимулирующие рост экономики? В этой части книги мы сделаем первую попытку предложить ответ на этот вопрос, основываясь на политической экономии, то есть на различиях в типах институтов и экономической политики, возникающих вследствие различных способов агрегирования индивидуальных предпочтений в обществе и различий в типе и структуре конфликтов общественных интересов. В частности, мы выделим ряд ключевых подходов и попробуем провести математически несложную и информативную формализацию этих идей. Мы остановимся на следующих основных темах.

1. Различные институты (типы экономической политики) приводят к различным распределениям ресурсов в экономике. В контексте моделей экономического роста это означает различие в темпах роста экономик или уровне выпуска на траектории сбалансированного роста. Однако институты также создают выигравших и проигравших. Следовательно, мы можем ожидать существования в обществе конфликта о типе институтов и экономической политике, которые должны быть использованы.
2. Два связанных между собой фактора наиболее важны в процессе формирования общественного (равновесного) выбора в условиях

общественного конфликта: тип политических институтов и политическая сила различных групп. Индивиды и группы со значительной политической силой в большей степени имеют возможность влиять на выбор политики, согласующейся с их предпочтениями. То, как политическая сила распределяется внутри общества и как индивиды могут использовать свою политическую силу (в результате выборов, неформальных действий или с помощью грубой силы), зависит от политических институтов в обществе. Например, распределение политической силы в обществе будет различным в диктаторском режиме, при котором политическая сила находится в руках узкой группы индивидов, и в демократическом режиме, соответствующем обществу с большей степенью политического равенства. Логично ожидать, что различные политические режимы ведут к различным типам экономических институтов и экономической политики и поэтому к различным экономическим последствиям. Задача двух следующих глав состоит в анализе процесса коллективного принятия решений и последствий выбора различных типов институтов и экономической политики для роста экономики.

3. Технологии, природные ресурсы и распределение доходов и запасов в экономике воздействуют как на структуру предпочтений, так и на распределение политической силы в обществе. Например, структура политического конфликта и устройство политэкономического равновесия, скорее всего, будут различны в обществе, где бóльшая часть земли и капитала сосредоточена в руках небольшого числа индивидов и семей, и в обществе с более равным распределением ресурсов. Мы также склонны ожидать различных политических механизмов в обществе, где основным активом является человеческий капитал работников, и в обществе, где основными активами являются природные ресурсы, например алмазы или нефть.

Вопросы, поднятые и исследуемые в этой части книги, находятся в центре политической экономии. Так как эта книга посвящена теории экономического роста, а не политической экономии, мы не будем подробно описывать объемную и продолжающую расти литературу в этой области. Вместо этого мы остановимся на теориях и моделях, которые, по нашему мнению, являются наиболее важными в свете поставленных выше вопросов. Для сокращения объема материала везде, где это возможно, вместо общих моделей, представленных в предыдущих главах, мы будем использовать неоклассическую модель экономического роста (в дискретном времени). Такой выбор на первый взгляд может показаться необычным. Имеет ли смысл исследовать политическую экономию роста в рамках неоклассической модели, в которой рост экономики возможен лишь за счет экзогенно заданного технологического прогресса? Однако неоклассическая модель экономического роста обладает двумя значительными преимуществами. Во-первых, она предоставляет наиболее простой математический аппарат для анализа основных политэкономических конфликтов. Во-вторых, роль политэкономических искажений в экономике наиболее четко видна в этой модели, так как конкурентное равновесие в ней является оптимальным по Парето. Естественно, что после того как основные закономерности описаны в рамках простой модели, становится относительно несложно обобщить их для модели эндогенного экономического роста или другой более сложной модели. Таким обобщениям посвящены некоторые упражнения. Наконец, в этой части книги мы будем использовать модели в дискретном времени, так как такие модели позволяют вести простой анализ теоретико-игровых взаимодействий.

Мы разбили материал по политической экономии экономического роста на две главы. Глава 22, в которой политические институты рассматриваются как заданные, посвящена анализу последствий конфликта о распределении дохода в различных сценариях. В этой главе мы опишем, когда и почему такие конфликты могут привести к искажающей экономической политике и препятствовать экономическому росту. Мы также остановимся на ряде дополнительных подходов к анализу этих вопросов. Затем в главе 23 мы исследуем влияние различных политических режимов на экономический рост. Эта глава также включает в себя краткий анализ вопроса о том, как сами политические институты эндогенно формируются в экономике.

Прежде чем перейти к изложению материала, начнем с абстрактного анализа взаимосвязей между экономическими институтами, политическими институтами, экономическими результатами и тем, как формируются предпочтения индивидов о политических и экономических институтах. В большинстве работ по политическим наукам предполагается, что индивиды обладают явными предпочтениями при выборе политических институтов (и возможно, при выборе экономических институтов). Например, индивид может получать прямую полезность от проживания в демократическом обществе. Несмотря на то что такой взгляд правдоподобен, в подходе, развитом в литературе, подчеркивается другая, возможно не столь важная причина, по которой индивиды могут предпочитать тот или иной тип политических институтов.

Экономические институты и экономическая политика (например, налоговая политика, регулирование, контрактные институты, описанные в предыдущих главах) напрямую воздействуют на экономические результаты. Поэтому основным фактором, определяющим предпочтения индивидов при выборе экономических институтов (и экономической политики), должно быть распределение ресурсов в обществе в результате принятия таких институтов. Основываясь на такой точке зрения, мы будем использовать такие индуцированные предпочтения об экономических институтах. Такая логика применима и для политических институтов. Таким образом определяются политические правила взаимодействия индивидов. Например, в прямых демократиях основные решения определяются большинством в процессе голосования. В представительных демократиях бóльшая часть населения избирает представителей, которые затем принимают решения и стоят перед риском потери статуса, если проводимая ими политика не согласуется с предпочтениями электората. С другой стороны, в недемократических режимах, таких как диктатура или автократия, основные решения принимает небольшая группа людей (олигархия богатых индивидов или военная хунта). Поэтому в различных политических системах логично ожидать различные типы экономических институтов и экономической политики. Тогда индивиды будут обладать индуцированными предпочтениями о типе политических институтов.

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим цепочку описанных выше причинно-следственных связей следующими отображениями. Обозначим множество политических режимов и институтов как $\mathcal{P}$, множество осуществимых экономических политик (или экономических институтов) как $\mathcal{R}$, а множество доступных распределений ресурсов (которое включает в себя различные значения потребления всех товаров и услуг в экономике всеми индивидами) как $\mathcal{X}$. Для простоты игнорируя неопределенность в экономике, мы можем представить, что каждый тип политических институтов из множества $\mathcal{P}$ ведет к некоторому набору экономических институтов из множества $\mathcal{R}$. Обозначим это соответствие как $\pi(\cdot)$. Аналогично, различные экономические институты и экономическая политика ведут к различным распределениям ресурсов (здесь мы также игнорируем возможность существования множественности равновесий). Обозначим это соответствие как $\rho(\cdot)$. Схематически мы можем записать:

$$\mathcal{P} \underset{\pi(\cdot)}{\rightarrow} \mathcal{R} \underset{\rho(\cdot)}{\rightarrow} \mathcal{X}.$$

Далее предположим, что каждый индивид i обладает функцией полезности u_i: $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, которая описывает его предпочтения на множестве возможных распределений ресурсов в экономике $\mathcal{X}$. Также предположим, что индивиды являются *консеквенциалистами* в том смысле, что единственной причиной формирования предпочтений об экономических или политических институтах для них является их влияние на распределение ресурсов в экономике. Тогда его предпочтения о некотором типе экономических институтов $R \in \mathcal{R}$ заданы функцией $u_i(\rho(R)) \equiv u_i \circ \rho : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Следовательно, это отображение описывает индуцированные предпочтения на множестве экономических институтов (как функцию от распределения ресурсов, возникающего в экономике с такими институтами). Аналогичным образом индуцируются предпочтения на множестве политических институтов. Полезность, которую индивид i получает от некоторого типа политических институтов, $P \in \mathcal{P}$, задана функцией $u_i(\rho(\pi(P))) \equiv \equiv u_i \circ \rho \circ \pi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$. Индуцированные предпочтения на множестве политических институтов важны, так как равновесный анализ должен быть способен объяснить возникновение и эволюцию политических институтов как функцию от этих предпочтений.

Таким образом, в этом кратком введении поставлены два типа вопросов для двух последующих глав. Во-первых, нам необходимо понять, каким образом различные типы экономических институтов (и экономической политики) приводят к различным экономическим результатам, включая экономическое развитие и распределение ресурсов, то есть структуру отображения ρ. Этому посвящена глава 22. Затем, основываясь на этом понимании, мы проанализируем предпочтения на множестве экономических институтов (типов экономической политики) различных групп населения и найдем условия, при которых различные группы общества будут предпочитать искажающие и не стимулирующие экономический рост институты. Во-вторых, для того чтобы понять политические изменения и то, как они связаны с экономическими решениями и экономическим ростом, нам понадобится анализ индуцированных предпочтений на множестве политических институтов — отображения π. Этому посвящена глава 23.

Глава 22
Институты, политическая экономия и экономический рост

Эта глава является первой попыткой ответа на следующий вопрос, который находился на заднем плане на протяжении почти всех предыдущих глав: почему схожие общества выбирают различные институты и экономическую политику, что приводит к различным последствиям для роста их экономик? Анализ, проведенный нами ранее, описывает роли накопления физического капитала, человеческого капитала и технологий в процессе экономического роста. Однако на протяжении всей книги мы утверждали, что количество физического и человеческого капитала в экономике и даже технологии, доступные обществу, должны рассматриваться как эндогенные переменные, то есть как переменные, которые изменяются под воздействием стимулов. Это приводит нас к следующему фундаментальному вопросу: почему различные общества создают различные стимулы для работников и фирм? В главе 4 мы предложили, что различия в институтах являются важным фактором, определяющим эти стимулы и межстрановые различия в инвестициях в физический капитал, человеческий капитал и в технологии. Целью этой и следующей глав является построение моделей, которые помогут нам понять, почему институты могут оказывать такое влияние и почему сами институты различаются между странами.

22.1. Влияние институтов на долгосрочное развитие экономики

Как мы уже подчеркнули в главе 4, институты имеют значение, по крайней мере если мы будем рассматривать множество политических и экономических институтов на длительном отрезке времени. Большинство моделей из этой книги обладают этим свойством, так как они описывают влияние различных институтов и типов экономической политики на распределение ресурсов в экономике. Например, налоговая политика и субсидии, структура рыночной организации могут воздействовать на накопление физического капитала, инвестиции в человеческий капитал и технологический прогресс, а контрактные институты и организация кредитного рынка воздействуют на выбор технологий и эффективность производственного процесса. Возможно более важным является то, что во всех рассмотренных нами ранее моделях предполагается существование организованной рыночной экономики. Если мы добавим в эти модели некоторую степень незащищенности права собственности или барьеры, препятствующие деятельности наиболее производительных фирм, то из них будет следовать значительная неэффективность экономики. Теоретические модели и эмпирические наблюдения свидетельствуют о важности этих факторов. Поэтому мы должны понимать, что ведение бизнеса в США очень отличается от ведения бизнеса в странах Черной Африки. Предприниматели в США (и в большинстве стран ОЭСР) имеют относительно защищенное право собственности и стабильную, устойчивую экономику. Индивиды и корпорации, желающие создавать новые предприятия, сталкиваются с относительно небольшим количеством барьеров. Ситуация очень сильно отличается в большинстве других стран мира, например, в странах Черной Африки, Карибского бассейна, большой части Центральной Америки и Азии. Аналогичным образом уровень жизни большинства населения очень сильно различается в этих двух группах стран: большинство граждан имеют доступ к широкому набору общественных благ и обладают возможностью осуществлять инвестиции в человеческий капитал в большинстве стран ОЭСР и лишь в небольшом числе менее развитых стран.

Экономисты часто суммируют все эти различия в обществах термином «институциональные различия» (или различия в институтах и экономической политике). Это термин неудачен, но он часто используется и является общепринятым в литературе. Слово «институты» в различном контексте обозначает различные понятия, и ни одно из них в точности не соответствует смыслу в данном выражении. Как мы уже отметили в главе 4, под институциональными различиями мы понимаем различия в широком наборе элементов структуры общественного устройства, включающие в себя защиту права собственности для бизнеса и рядовых граждан, возможности фирм и индивидов заключать контракты, облегчающие проведение экономических транзакций (контрактные институты), барьеры, препятствующие выходу на рынок новых фирм, созданные обществом издержки и барьеры, препятствующие индивидам осуществлять инвестиции в человеческий капитал, и стимулы политиков для предоставления общественных благ. Такое определение институтов является достаточно широким. Чтобы добиться теоретического и эмпирического прогресса, в большинстве случаев нам понадобится сузить это определение. На пути к этой цели мы уже сделали различие между *экономическими институтами* (и экономической политикой), которые соответствуют налоговому законодательству, степени защиты права собственности, контрактным институтам, препятствиям к выходу на рынок и другим экономическим соглашениям, и *политическими институтами,* которые соответствуют правилам и нормам, описывающим процесс принятия политических решений, включающими в себя сдержки и противовесы власти президента, премьер-министра или диктатора, методы агрегирования взглядов различных членов общества (то есть избирательное законодательство). В терминах обозначений, использованных во введении к этой части книги, воздействие экономических институтов на экономический результат описывается отображением $\rho(\cdot)$, в то время как влияние политических институтов на выбор экономических институтов и экономической политики описывается отображением $\pi(\cdot)$.

Необходимо отметить, что различия между экономическими институтами и экономической политикой не всегда очевидны, так как зачастую важной является их комбинация, а не они сами по себе. Например, мы можем говорить о защищенности права собственности как об экономическом институте, но в большинстве случаев мы не будем интерпретировать налоговую ставку как экономический институт. С другой стороны, полное отсутствие защиты права собственности и 100-процентное налогообложение во многом схожи. Одно из различий может состоять в том, что институты более долговечны, чем политика[1]. Поэтому в дальнейшем изложении материала мы введем следующее различие между экономическими институтами и экономической политикой: экономические институты создают рамки, в которых принимаются решения о мерах экономической политики. Однако в случаях, когда такое различие между экономическими институтами и экономической политикой не представляет интереса, мы будем использовать термин «экономические институты» для институтов и для политики.

Из эмпирических свидетельств, представленных в главе 4, следует, что институциональные различия сильно влияют на экономический рост. Целью этого параграфа является не обзор этих свидетельств, а использование их для анализа ответа на следующий вопрос: если экономические институты настолько важны для экономического роста, то почему некоторые общества выбирают институты, которые не стимулируют экономический рост? Более того, опираясь на имеющиеся эмпирические свидетельства, мы пойдем дальше и спросим, почему некоторые общества выбирают институты и экономическую политику, которые полностью блокируют технологический прогресс и экономическое развитие? Оставшаяся часть этой главы и бóльшая часть следующей посвящены анализу моделей, позволяющих ответить на эти вопросы. Мы начнем с неформального обсуждения основных подходов к ответам на них.

[1] В параграфе 22.9 мы обсудим другую возможную причину различия между налогообложением и защищенностью права собственности, которая связана с тем, каким образом используются денежные поступления.

Первым важным элементом политэкономического подхода является общественный конфликт. Очень малое количество экономических изменений (если такие есть вообще) ведет к росту благосостояния всех членов общества. Поэтому каждое изменение институтов и экономической политики ведут к появлению выигравших и проигравших по отношению к статус-кво. Рассмотрим следующий простой пример: ликвидация барьеров, препятствующих выходу на рынок таким образом, что рынок, который ранее был монопольным, становится рынком с совершенной конкуренцией. Потребители выиграют от такой политики, так как она приведет к снижению цены, а монополист, который ранее находился в привилегированном положении и получал большую прибыль, проиграет. Изменение благосостояния работников зависит от деталей структуры рынков. Если рынок труда является рынком с совершенной конкуренцией, то работники также выиграют, так как выход на рынок новых фирм приведет к росту спроса на труд. Однако на несовершенном рынке труда, когда работники получали некоторую долю ренты, достававшейся фирме-монополисту, они также могут стать возможными потерпевшими от реформы. Следовательно, даже если ликвидация барьеров, препятствующих выходу на рынок, ведет к увеличению темпа роста и выпуска в экономике, нам не следует ожидать единогласной поддержки такой политики.

Этот пример иллюстрирует основной принцип: так как различные институты ведут к различным распределениям ресурсов, индивиды обладают различными, часто конфликтующими между собой, предпочтениями на множестве институтов. Каким образом тогда общество принимает решения в условиях конфликтующих предпочтений относительно общественного выбора (и в частности институтов и экономической политики)? Политическая экономия посвящена строгому анализу процесса коллективного принятия решений. Если в экономике присутствует общественный конфликт между фирмой-монополистом, которая стремится сохранить барьеры, препятствующие выходу на рынок, и потребителями, которые хотят ликвидировать их, то конечный выбор определяется политическим равновесием. Этот процесс может быть организованным в демократических обществах и неорганизованным и даже хаотичным в других политических режимах, что демонстрируют слишком частые в человеческой истории гражданские войны. Независимо от того, определяется ли политическое равновесие демократическим или недемократическим путем, центральную роль в этом процессе играет политическая сила конфликтующих сторон. Проще говоря, если два индивида предпочитают различные решения некоторой задачи (например, как им разделить между собой один доллар), то фактическое решение определяется их относительной силой. На политической сцене это наблюдение соответствует политической силе различных индивидов и групп. Например, в примере с фирмоймонополией мы можем ожидать, что монополист обладает политической силой, так как он уже накопил значительный доход и богатство и способен лоббировать свои интересы. В недемократических обществах, где не соблюдается верховенство закона, мы даже можем ожидать, что для подавления оппозиции фирма-монополист будет использовать бандитов и парламентариев. С другой стороны, в демократических обществах потребители могут обладать достаточной политической силой, чтобы преодолеть интересы и желания фирмы-монополиста с помощью формального голосования или сформировав свою собственную лоббирующую группу.

Второй ключевой элемент политэкономического подхода — проблема принятия обязательств, которая является источником неэффективности в экономике и увеличивает в ней искажения, создаваемые социальным конфликтом. Политические решения в каждый момент времени совершаются в рамках политического процесса в этот момент времени (например, индивидами, обладающими в этот момент времени политической силой), принятие обязательств о будущей последовательности политических и экономических решений невозможно, если такой выбор действия не является равновесным (далее мы убедимся в том, что важное значение здесь имеет выбор интересующего нас теоретико-игрового равновесия: равновесия, совершенного по подыграм (СПР) или совершенного марковского равновесия (СМР)).

На данном этапе необходимо провести различие между экономической политикой, не стимулирующей экономический рост (искажающей политикой) и неоптимальностью по Парето. Во многих моделях политической экономии равновесие в экономике остается оптимальным по Парето. Это связано с тем, что такие равновесия являются решениями задачи максимизации взвешенной общественной функции полезности (см. параграф 22.7). В таком случае возникающее в них распределение ресурсов является точкой на границе Парето-экономики (при заданном множестве доступных инструментов). Несмотря на это, во многих таких распределениях ресурсов используется искажающая и не стимулирующая экономический рост политика[2]. Более того, если в экономике существует проблема принятия обязательств, то политическое равновесие может оказаться неоптимальным с точки зрения понятия ограниченной оптимальности по Парето, так как в экономике могут существовать наборы будущих мер экономической политики, которые могут привести к увеличению благосостояния всех членов общества, но не будут реализованы в равновесии.

[2] Рассмотрим, например, распределение ресурсов, в котором такой диктатор, как президент Республики Заир Мобуту Сесе Секо, экспроприирует собственность всех инвесторов в стране. Тогда существует изменение политики, которое приведет к увеличению инвестиций и темпа роста экономики, но в большинстве случаев такое изменение требует изъятия ресурсов и политической силы у Мобуту, и поэтому его благосостояние в этом случае ухудшится.

Рассмотрим ситуацию, в которой политическая сила находится в руках определенной группы индивидов, — политической элиты общества. Для того чтобы упростить этот мысленный эксперимент, проигнорируем ограничения на возможность использования политической силы. Тогда политическая элита может выбрать экономическую политику, которая приведет к наиболее благоприятному для нее распределению ресурсов, и поэтому политическое равновесие можно рассматривать как решение задачи максимизации общественной функции полезности, в которой вес членов политической элиты равен единице. Даже в том случае, когда возникающее в экономике равновесие может не быть неоптимальным по Парето, в большинстве случаев в нем применяется не стимулирующая экономический рост политика. Основным вопросом в данном контексте является следующий: при каких обстоятельствах использование политической силы элитой общества ведет к искажающей экономической политике?

Мы выделим две основные причины, по которым индивиды, обладающие политической силой, могут выбирать искажающую экономическую политику. Первая из них состоит в изъятии дохода, то есть в попытке политической элиты экспроприировать ресурсы других членов общества. Для этого источника искажающей экономической политики ключевыми являются следующие два аспекта общественного устройства: (1) отделение политической силы (находящейся в руках элиты) и экономических возможностей (которыми обладают предприниматели и работники) и (2) ограниченное множество фискальных инструментов. Объединяя эти два аспекта, нетрудно прийти к выводу о том, что члены элиты будут использовать имеющиеся у них искажающие фискальные инструменты для переноса ресурсов от других членов общества к себе. Далее мы также убедимся в том, что аналогичная искажающая политика будет использоваться и в обществе, где нет политической элиты, и решения принимаются демократическим путем (см. параграф 22.8). Здесь важным является ограничение на множество доступных фискальных инструментов, таких как искажающие пропорциональные налоги. Если бы в экономике существовали неискажающие фискальные инструменты, такие как паушальные налоги, то политическая элита могла бы присвоить ресурсы других членов общества без замедления экономического роста. Однако наложение паушальных налогов в большинстве случаев невозможно, и в более общем смысле — большинство механизмов перераспределения доходов вносят в экономику искажения, снижая стимулы работать и прилагать усилия или дестимулируя инвестиции.

Во-вторых, члены политической элиты могут выбирать искажающую экономическую политику, потому что они конкурируют с другими общественными группами. Это может быть экономическая конкуренция. Например, элита может быть вовлечена в производственную деятельность и осознавать, что налоги на других производителей приведут к снижению спроса на факторы производства и, таким образом, неявно к росту прибыли элиты. Мы будем называть такое использование искажающей экономической политики манипуляцией ценами факторов производства. Конкуренция между элитой и другими общественными группами также может быть политической. Обогащение других групп может стать угрозой для способности элиты использовать свою политическую силу и получать от нее выгоду в будущем. В этом случае искажающие налоги будут выгодны элите, так как они ведут к обеднению ее политических конкурентов. Мы будем называть это использование искажающих налогов политическим замещением. В оставшейся части главы мы проиллюстрируем эти различные механизмы. Важное следствие из моделей, представленных далее, состоит в том, что манипуляция ценами факторов производства и политическое замещение часто приводят к бóльшим искажениям в экономике и бóльшему снижению потенциала ее роста, чем мотив изъятия дохода.

Этот простой анализ также показывает дополнительную неэффективность экономики, возникающую вследствие проблемы принятия обязательств. Так как элита не может принять обязательство о будущей политике, в экономике может появиться *проблема ограбления*, когда инвестиции, после того как они начинают осуществляться, экспроприируются или на них накладываются налоги с запретительно высокими ставками. Проблема ограбления может быть значительной при достаточно широком наборе обстоятельств: например, когда инвестиции осуществляются в долгосрочный проект и выбор экономической политики происходит после старта проекта. Мы будем использовать этот подход для анализа вопроса о том, когда и при каких условиях экономические институты могут ограничить равновесный выбор экономической политики.

В параграфах 22.7 и 22.8 мы покажем, как анализ политэкономического равновесия может применяться в моделях с большей гетерогенностью и почему конфликты, связанные с распределением дохода, в таких обществах также ведут к искажающей экономической политике. В заключении главы мы обсудим роль предоставления общественных благ государством и то, как политэкономические соображения воздействуют на равновесное значение инвестиций государства (и контролирующих его групп, обладающих значительной политической силой) инвестиций в общественные блага.

22.2. Конфликты, связанные с распределением дохода, и экономический рост в простом обществе

В этом и последующих четырех параграфах мы проанализируем последствия конфликтов, связанные с распределением дохода, для экономического роста в *простом обществе*. В простом обществе индивиды в течение всей жизни находятся в одной общественной группе (например, производители, землевладельцы, работники) и основной конфликт состоит в распределении дохода между группами. Это свойство следует из предположения о том, что все индивиды внутри одной группы одинаковы и ограничения на множество фискальных инструментов, которое не позволяет переносить ресурсы от одного члена группы к другому. Первое предположение также снимает проблемы выбора рода деятельности и мобильности населения, которым посвящена следующая глава. Основное преимущество анализа простого общества в наших целях состоит в том, что он позволяет математически простое агрегирование политических предпочтений индивидов. Анализу моделей с невырожденным распределением запасов (например, богатства или производительности) посвящен параграф 22.8. Несмотря на то что такие модели значительно богаче, чем модель простого общества, представленная далее, экономические механизмы, которые формируют политическое равновесие в них, довольно схожи. Именно это послужило мотивировкой для подробного анализа политэкономического равновесия в модели простого общества в нескольких последующих параграфах.

Предположим, что общество состоит из трех групп индивидов. Первую группу составляют работники, которые абсолютно неэластично поставляют занятость на рынок труда. Вторая группа состоит из предпринимателей, обладающих доступом к производственной технологии и принимающих инвестиционные решения. В третью группу входят члены элиты общества, которые принимают политические решения (они также могут заниматься производственной деятельностью). Предположим вначале, что политической системой общества является олигархия политической элиты. В дальнейшем в этой и последующей главах мы расширим модель несколькими способами, вводя в нее дополнительную гетерогенность, выбор рода деятельности, и делая распределение политической силы между различными членами общества эндогенным.

22.2.1. Базовая модель

Экономика населена континуумом меры $1 + \theta^e + \theta^m$ нейтральных к риску агентов с нормой дисконтирования $\beta \in (0, 1)$. Предположим, что в ней производится единственный не складируемый конечный товар. Ожидаемая полезность агента i в периоде времени $t = 0$ задана следующим образом:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t C_i(t), \tag{22.1}$$

где переменная $C_i(t) \in \mathbb{R}$ обозначает потребление агента i в периоде времени t, а символ $\mathbb{E}_t$ является оператором условного математического ожидания на множестве информации, доступной в периоде времени t. Наиболее важным свойством этих предпочтений является их линейность (нейтральность агентов к риску). В данном случае выгода от предположения о линейном виде предпочтений превышает потерю общности анализа, так как в этом случае в модели отсутствует переходная динамика, что позволяет полностью описать политэкономическое равновесие в экономике.

В экономике проживает континуум работников единичной меры, каждый из которых абсолютно неэластично поставляет занятость на рынок труда. Вся политическая сила в обществе в начальном периоде времени принадлежит элите, которую мы обозначим символом e. Мера множества членов элиты равна θ^e. Вначале предположим, что элита не принимает участия в производственной деятельности (см. анализ этого предположения в параграфе 22.4). Наконец, в экономике также проживает континуум меры θ^m представителей «среднего класса», которых мы обозначим символом m. Эти члены общества являются предпринимателями и обладают доступом к производственной технологии. Мы используем термин «средний класс» для описания предпринимателей, основываясь на ряде исторических примеров, изложенных в следующей главе. Это предположение никак не влияет на формальный анализ модели. Обозначим множества производителей среди членов элиты и представителей среднего класса как S^e и S^m соответственно. Несколько злоупотребляя обозначениями, мы будем использовать символ i для индивидов и для групп агентов (при этом группы мы будем обозначать верхним индексом, а агентов — нижним индексом). Как мы уже отметили выше, принадлежность агентов группам не изменяется во времени.

Каждый предприниматель (представитель среднего класса) $i \in S^m$ обладает доступом к следующей технологии производства конечного товара:

$$Y_i(t) = F(K_i(t), L_i(t)), \tag{22.2}$$

где переменная $Y_i(t)$ обозначает выпуск конечного товара производителем i, а переменные $K_i(t)$ и $L_i(t)$ — соответственно общее количество капитала и труда, которые он использует в производстве. Предположим, что функция F удовлетворяет предположениям 1 и 2 из главы 2. Так как она обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, единственный производитель может нанимать всю рабочую силу и арендовать весь капитал в экономике. Чтобы получить диспергированное распределение предпринимательской активности, предположим, что каждый предприниматель ограничен в найме факторов производства (например, потому что он не владеет полным контролем над деятельностью нанятых им работников). В частности, допустим, что $L_i(t) \in [0, \bar{L}]$ при некотором вещественном $\bar{L} > 0$. Тогда, по крайней мере после достижения определенного уровня занятости, предельный продукт капитала для каждого предпринимателя будет убывать. Так как совокупная рабочая сила в экономике равна единице, условие равенства спроса и предложения на рынке труда имеет следующий вид:

$$\int_{S^m} L_i(t)di \leq 1, \tag{22.3}$$

и $L_i(t) \leq \bar{L}$ для всех i. Как и в стандартной неоклассической модели экономического роста, предположим экспоненциальную амортизацию с нормой амортизации, равной δ.

Конкурентное равновесие в такой экономике без налогообложения и без политэкономических взаимодействий выглядит просто. Как обычно, обозначим отношение капитала к труду как $k \equiv K/L$ и производственную функцию на душу населения как $f(k) \equiv F(K/L, 1)$. Нетрудно убедиться, что в отсутствие налогообложения каждый предприниматель в любом периоде времени t выбирает следующее значение отношения капитала к труду:

$$k_i(t) = k^* \equiv (f')^{-1}(\beta^{-1} + \delta - 1), \tag{22.4}$$

где функция $(f')^{-1}(\cdot)$ является обратной к предельной производительности капитала (производной функции f). Уравнение (22.4) совпадает со стандартным условием стационарного равновесия из глав 6 и 8 и приравнивает валовой предельный продукт капитала $f'(k^*) + 1 - \delta$ к величине, обратной норме дисконтирования β^{-1} (см., например, уравнение (6.52) из главы 6). Важное отличие состоит в том, что здесь в результате линейности функции полезности уравнение (22.4) выполняется в любом периоде времени, а не только в стационарном состоянии. Поэтому в модели отсутствует переходная динамика.

Другим особым свойством этой экономики является то, что она может не достичь полной занятости. Напомним, что совокупная рабочая сила в ней равна единице. Однако из уравнения (22.5) следует, что уровень занятости на каждой фирме может оказаться строго меньшим, чем $1/\theta^m$, ввиду ограничения на максимальное количество работников на фирме. Если это условие выполняется, то $1-\theta^m\bar{L}$ работников будут не заняты и заработная плата будет равна нулю. Если в экономике имеется избыточное предложение труда, то каждый предприниматель $i \in S^m$ нанимает $\bar{L}$ работников и предложение труда превышает общую занятость. Если избыточное предложение труда не наблюдается, то вся рабочая сила занята и распределение работников между предпринимателями произвольно (так как все предприниматели получают нулевую прибыль). Для упрощения дальнейшего анализа мы, не ограничивая общность, предположим, что и в этом случае все предприниматели нанимают равное число работников, то есть

$$L_i(t) = L^* = \min\left\{\bar{L}, \frac{1}{\theta^m}\right\} \tag{22.5}$$

для всех $i \in S^m$ и для всех t.

Более того, в этом параграфе мы предположим неравенство

$$\theta^m \bar{L} > 1, \qquad (22.6)$$

из которого следует полная занятость и поэтому $L^* = \frac{1}{\theta^m}$. В этом предположении равновесная заработная плата в конкурентном равновесии без налогообложения равна

$$w(t) = w^* \equiv f(k^*) - k^* f'(k^*) \text{ для всех } t, \qquad (22.7)$$

где значение k^* задается уравнением (22.4). Мы будем называть такое равновесие без политической экономии (в котором отношение капитала к труду равно k^*, а заработная плата равна w^*) наилучшим равновесием.

22.2.2. Меры экономической политики и экономическое равновесие

Прежде чем перейти к описанию политэкономического равновесия, необходимо специфицировать множество доступных фискальных инструментов (экономических политик) и определить экономическое равновесие при заданной последовательности мер экономической политики. В дальнейшем изложении модели экономическое равновесие при заданной политике совпадает с конкурентным равновесием, описанным в главах 6 и 8. Экономические равновесия при различном выборе экономической политики характеризуются различными уровнями благосостояния различных агентов и, таким образом, неявно определяют индуцированные предпочтения на множестве мер экономической политики и экономических институтов, приводящих к этим равновесиям. Затем в политэкономическом равновесии происходит агрегирование этих предпочтений на множестве различных последовательностей мер экономической политики. В данной модели последний шаг является несложным, так как мы предполагаем, что вся политическая сила находится в руках элиты.

Допустим, что обществу доступно четыре типа фискальных инструментов: пропорциональный налог на выпуск по ставке $\tau(t) \in [0, 1]$ и паушальные трансферты каждой из трех групп агентов (работники, представители среднего класса и политическая элита) $T^w(t) \geq 0$, $T^m(t) \geq 0$, $T^e(t) \geq 0$. Так как паушальные трансферты неотрицательны, они не могут использоваться как неискажающие паушальные налоги. Поэтому доходы могут собираться только с помощью пропорциональных налогов на выпуск. Несмотря на то что власть в некоторых случаях может накладывать паушальные налоги, способность индивидов переходить в неформальный сектор экономики или прекращать работу накладывает ограничения на такой метод налогообложения. При этом предположение об использовании лишь пропорциональных налогов значительно ограничивает анализ, так как в экономике могут существовать более эффективные способы сбора доходов. В моделях политической экономии такие ограничения часто накладываются для гарантирования существования равновесия (например, когда используется теорема о медианном избирателе, см. параграф 22.7). Здесь мы накладываем их для того, чтобы показать, как взаимодействие между разделением политической и экономической сил и ограниченным выбором фискальных инструментов может привести к выбору искажающей экономической политики.

Далее опишем временную структуру последовательности событий в каждом периоде. Самым важным элементом здесь является очередность выплаты налога и осуществления инвестиций (именно поэтому модель в дискретном времени является более удобной в данном контексте). Вначале предположим, что налог взимается до принятия решения об осуществлении инвестиций. В частности, временная структура экономики выглядит следующим образом. В начале каждого периода времени t задается предопределенная ставка налога на выпуск $\tau(t)$ и количество капитала у всех предпринимателей $[K_i(t)]_{i \in S^m}$. Затем предприниматели принимают решения о найме работников $[L_i(t)]_{i \in S^m}$ (и в результате этого на рынке труда достигается равновесие) и производят выпуск, доля $\tau(t)$ которого выплачивается ими в качестве налога. Затем в результате политического процесса (например, членами группы, обладающей политической силой) принимаются решения о трансфертах каждой группе агентов $T^w(t) \geq 0$, $T^m(t) \geq 0$, $T^e(t) \geq 0$, удовлетворяющих бюджетному ограничению правительства

$$T^w(t) + \theta^m T^m(t) + \theta^e T^e(t) \leq \tau(t) \int_{S^m} F(K_i(t),\ L_i(t))di, \qquad (22.8)$$

где левая часть неравенства (22.8) представляет собой совокупные государственные расходы на трансферты, а его правая часть — произведение предопределенной ставки налога и агрегированного выпуска. Далее, в результате политического процесса принимается решение о налоговой ставке $\tau(t+1)$, которая будет действовать в следующем периоде времени. После анонсирования налоговой ставки предприниматели выбирают запас капитала в следующем периоде $[K_i(t+1)]_{i \in S^m}$, то есть они принимают решение о капитале, точно зная будущую ставку налога. Анализ альтернативной последовательности событий, когда выбор капитала осуществляется до принятия решения о ставке налога, представлен в параграфе 22.5. Здесь заметим лишь, что альтернативный подход ведет к большему количеству искажений в экономике ввиду проблемы ограбления.

Более строго, обозначим доступную (бесконечную) последовательность мер экономической политики начиная с периода времени t как $p^t = \left\{\tau(s),\ T^w(s),\ T^m(s),\ T^e(s)\right\}_{s=t}^{\infty}$. Определим экономическое равновесие (начиная с периода времени t) как *конкурентное равновесие* при заданных значениях p^t и распределения капитала между предпринимателями в периоде времени t $[K_i(t)]_{i \in S^m}$. Экономическое равновесие состоит из последовательностей запаса капитала и занятости для каждого предпринимателя $\left\{[K_i(s+1),\ L_i(s)]_{i\in S^m}\right\}_{s=t}^{\infty}$ и заработных плат $\{w(s)\}_{s=t}^{\infty}$, таких, что при заданных значениях $[K_i(t)]_{i\in S^m}$, p^t и $w^t \equiv \{w(s)\}_{s=t}^{\infty}$ функция полезности каждого предпринимателя $i \in S^m$ достигает максимума на последовательности $\{K_i(s+1),\ L_i(s)\}_{s=t}^{\infty}$ и рынок труда достигает равновесия при заданных значениях $\left\{[L_i(s)]_{i\in S^m}\right\}_{s=t}^{\infty}$[3].

Так как работники поставляют занятость на рынок труда абсолютно неэластично, все нетривиальные решения принимаются предпринимателями. Полезность предпринимателя i, владеющего в периоде времени t капиталом $K_i(t)$, при заданных доступных последовательностях мер экономической политики p^t и равновесных заработных платах w^t имеет следующий вид:

$$\mathrm{U}_i\left(\{K_i(s),\ L_i(s)\}_{s=t}^{\infty} \mid p^t,\ w^t\right) = \sum_{s=t}^{\infty}\beta^{s-t}[(1-\tau(s))F(K_i(s),\ L_i(s)) -$$
$$-(K_i(s+1)-(1-\delta)K_i(s)) - w(s)L_i(s) + T^m(s)]. \qquad (22.9)$$

В этом выражении используется предположение о линейности предпочтений, из которого следует, что стоимость предпринимателя может быть представлена дисконтированной суммой его потребления. Его потребление, в свою очередь, задается выражением в квадратных скобках, так как в периоде времени t ставка налога на выпуск равна $\tau(t)$ и, более того, от капитала предыдущего периода остается лишь доля $(1-\delta)$, поэтому для достижения запаса капитала $K_i(t+1)$ в следующем периоде необходимо осуществить инвестиции в размере $K_i(t+1)-(1-\delta)K_i(t)$. Затем из этой величины вычитаются издержки найма работников по текущей заработной плате и к ней добавляется величина трансферта представителям среднего класса. Заметим, что функция полезности (22.9) построена при заданной последовательности мер экономической политики p^t. Несмотря на то что мы заинтересованы в поиске политэкономического равновесия, в котором политики не принимают на себя обязательств о будущей политике, индивидуальный предприниматель рассматривает последовательность мер экономической политики p^t как заданную[4].

[3] Здесь следует обратить внимание на доступность политики, так как доступность последовательности политических мер не может быть определена без анализа действий предпринимателей (например, политика с положительными трансфертами не может быть доступной, если все предприниматели выбирают нулевое значение капитала). В данной задаче линейные предпочтения снова значительно упрощают анализ, так как значение капитала зависит только от налоговой ставки, а производство и трансферты могут быть найдены как остаток из бюджетного ограничения государственного сектора (22.8).

[4] Такой способ записи задачи максимизации для предпринимателя не позволяет провести анализ его действий в том случае, когда политический процесс (в данном случае действия элиты) отклоняется от p^t, так как такое отклонение может быть связано с изменениями

Максимизируя функцию (22.9) по последовательностям запаса капитала и выбора занятости, приходим к следующему простому условию первого порядка:

$$\beta[(1-\tau(t+1))f'(k_i(t+1)+(1-\delta))]=1, \tag{22.10}$$

где переменная $k_i(t+1)$ обозначает выбор отношения капитала к труду предпринимателем i в периоде времени $t+1$ при заданной ставке налога $\tau(t+1)$, которая была объявлена до принятия им решения об инвестициях в предыдущем периоде. Так как функция f удовлетворяет условиям Инада из предположения 2 из главы 2, это условие первого порядка выполняется как равенство при любой ставке налога $\tau(t+1)\in[0,1)$, а в упражнении 22.1 показано, что власть ни при каких условиях не будет выбирать 100-процентного налогообложения. Поэтому нам не потребуется условие дополнительной нежесткости.

Уравнение (22.10) задает равновесное значение отношения капитала к труду. Так как $\theta^m\bar{L}>1$ и рынок труда характеризуется полной занятостью, агрегированный запас капитала также задается уравнением (22.10).

Нетрудно убедиться, что если все ставки налога равны нулю ($\tau(t)=0$ для всех t), то единственное решение уравнения (22.10) совпадает с наилучшим отношением капитала к труду k^* из уравнения (22.4). Очевидно, что если ставки налога положительны, то значение отношения капитала к труду в равновесии меньше k^* (это непосредственно следует из строгой вогнутости функции $f(\cdot)$,см. неравенство (22.12)).

Наиболее важное свойство равновесного отношения капитала к труду, заданного уравнением (22.10), состоит в том, что из предположения о линейности предпочтений следует, что выбор отношения капитала к труду в периоде времени $t+1$ зависит лишь от значения ставки налога $\tau(t+1)$ и не зависит от будущих налоговых ставок. Поэтому мы можем записать равновесное отношение капитала к труду $\hat{k}(\tau(t))$ для всех предпринимателей в периоде времени t $\hat{k}(\tau(t))$ следующим образом:

$$\hat{k}(\tau(t))\equiv(f')^{-1}\left(\frac{\beta^{-1}+\delta-1}{1-\tau(t)}\right). \tag{22.11}$$

На будущее заметим, что из того, что функция $F(\cdot,\cdot)$, а следовательно, и функция $f(\cdot)$, дважды дифференцируема, следует, что функция $\hat{k}(\tau)$ также дифференцируема. Явно дифференцируя уравнение (22.11), получаем следующее выражение для ее производной:

$$\hat{k}'(\tau)=\frac{f'(\hat{k}(\tau))}{(1-\tau)f''(\hat{k}(\tau))}<0. \tag{22.12}$$

в будущей экономической политике. Однако из линейной структуры предпочтений следует, что в этой модели такая проблема не стоит, потому что, как мы убедимся далее, решения предпринимателей зависят лишь от текущей ставки налога.

Эта производная отрицательна, так как $f'(k) > 0$ и $f''(k) < 0$ при всех k (это следует из предположения 1 из главы 2).

Из значения равновесного отношения капитала к труду (22.11) и полной занятости, вытекающей из неравенства (22.6), следует, что равновесная заработная плата в периоде времени t задается следующим выражением:

$$\hat{w}(\tau(t)) = (1-\tau(t))\left[f(\hat{k}(\tau)) - \hat{k}(\tau(t))f'(\hat{k}(\tau))\right], \qquad (22.13)$$

которое схоже с уравнением (22.7) с отличием в том, что в нем перед выражением в квадратных скобках стоит множитель со ставкой налога.

Из анализа, проведенного выше, вытекает следующее утверждение.

Утверждение 22.1. *Предположим, что выполняется неравенство* (22.6). *Тогда для любого начального распределения запаса капитала между предпринимателями* $[K_i(0)]_{i \in S^m}$ *и для любой доступной последовательности мер экономической политики* $p^t = \left\{\tau(s),\ T^w(s),\ T^m(s),\ T^e(s)\right\}_{s=0}^{\infty}$ *существует единственное конкурентное равновесие, в котором последовательность отношений капитала к труду для каждого предпринимателя равна* $\left\{\hat{k}(\tau(s))\right\}_{s=0}^{\infty}$, *а последовательность равновесных заработных плат равна* $\left\{\hat{w}(\tau(s))\right\}_{s=0}^{\infty}$, *где функции* $\hat{k}(\tau(t))$ *и* $\hat{w}(\tau(t))$ *определены в уравнениях* (22.11) *и* (22.13) *соответственно.*

Это утверждение представляет интерес не только потому, что вид равновесия достаточно прост, но и потому, что агрегированное равновесное распределение ресурсов единственно[5].

22.2.3. Политическая экономия при диктатуре элиты

Задача описания политэкономического равновесия в этой модели значительно упрощается по двум причинам. Во-первых, политическая сила находится в руках элиты и в модели не возникает вопросов, связанных с переходом власти от одной группы агентов к другой и с выбором элитой экономической политики, направленной на привлечение голосов избирателей. Во-вторых, в экономике отсутствуют фискальные инструменты,

[5] Отметим некоторое злоупотребление обозначениями, которым мы будем пользоваться в этой и последующей главах: строго говоря, равновесие в модели не «единственно», так как оно не описывает все возможные распределения капитала и труда между представителями среднего класса. Как и в общем случае для конкурентного равновесия в экономике с производственной функцией, обладающей свойством постоянной отдачи от масштаба, единственным образом определено лишь агрегированное распределение ресурсов и отношение капитала к труду. В контексте данной модели «единственность» достигается предположением о том, что все фирмы нанимают равное число работников, если для них не важно их количество. В дальнейшем в этой главе в аналогичной ситуации вместо утверждения о единственности агрегированного распределения ресурсов мы будем называть равновесие единственным.

позволяющие перераспределять доход внутри политической элиты. Поэтому политэкономический выбор здесь состоит лишь из выбора фискальной политики, при которой чистая приведенная дисконтированная полезность репрезентативного члена элиты достигает максимума[6].

В этом параграфе мы опишем динамику совершенного марковского равновесия в политической игре, описанной выше. Напомним, что в таком равновесии последовательность мер экономической политики p' должна быть такой, что политика в периоде времени t зависит только от переменных, ***определяющих выигрыш*** в этом периоде (формальное определение совершенного марковского равновесия дано в приложении С). В данной модели такими переменными являются значения капитала всех предпринимателей. Поэтому текущая политика может зависеть только от текущего распределения капитала между предпринимателями. Предположение о линейной структуре предпочтений позволяет значительно упростить анализ равновесия. Из него следует, что у нас нет необходимости следить за всем распределением капитала. Более того, нетрудно убедиться, что элита никогда не будет выбирать положительные трансферты работникам или представителям среднего класса, поэтому далее мы ограничимся анализом последовательностей мер экономической политики, в которых $T^w(t) = T^m(t) = 0$ для всех t. Далее, объединяя это наблюдение с бюджетным ограничением правительства (22.8), которое должно выполняться как равенство (так как в противном случае представители элиты могут увеличить свое потребление и полезность, увеличив трансферты себе), получаем равенство:

$$\begin{aligned} T^e(t) &= \frac{1}{\theta^e}\tau(t)\int_{S^m} F(K_i(t),\, L_i(t))di = \\ &= \frac{1}{\theta^e}\tau(t)f(\hat{k}(\tau)), \end{aligned} \tag{22.14}$$

где первая строка следует из бюджетного ограничения правительства (22.8), а во второй использовано описание равновесия из утверждения 22.1 и наблюдение о том, что при полной занятости общее число работников равно 1.

Тогда задача максимизации для элиты может быть записана в рекурсивном виде следующим образом:

$$V^e\left(\tau(t),\ [K_i(t)]_{i\in S^m}\right) = \max_{\tau(t+1)\in[0,1]}\left\{T^e(t) + \beta V^e\left(\tau(t+1),\ [K_i(t+1)]_{i\in S^m}\right)\right\}, \tag{22.15}$$

где функция $V^e\left(\tau(t),\ [K_i(t)]_{i\in S^m}\right)$ является функцией стоимости члена элиты при заданных ставке налога $\tau(t)$, объявленной в предыдущем перио-

[6] При заданном ограниченном выборе фискальных инструментов мы можем представить, что политэкономический выбор осуществляется голосованием среди членов элиты или одним случайно выбранным ее представителем.

де времени и распределении капитала между предпринимателями $[K_i(t)]_{i \in S^m}$. Трансферт одному представителю элиты $T^e(t)$ задан в первой строке уравнения (22.14) как функция от $\tau(t)$ и $[K_i(t)]_{i \in S^m}$. Элита выбирает ставку налога в следующем периоде $\tau(t + 1)$, при которой ее текущая стоимость достигает максимума, принимая во внимание влияние налога на инвестиции предпринимателей (см. вторую строку уравнения (22.14)). В такой рекурсивной формулировке выбор ставки налога зависит лишь от текущих переменных состояния, поэтому ее решение является совершенным марковским равновесием[7].

Чтобы описать равновесную последовательность налоговых ставок, заметим, что трансферт $T^e(t)$ зависит только от ставки налога в периоде времени t. Тогда ставки налога, при которой функция полезности элиты достигает максимума, будут совпадать во все периоды и определятся решением следующего условия первого порядка:

$$f\left(\hat{k}(\hat{\tau})\right)+\hat{\tau}f'\left(\hat{k}(\hat{\tau})\right)\hat{k}'(\hat{\tau})=0.$$

Налоговая ставка $\hat{\tau}$ максимизирует налоговые отчисления представителей среднего класса и ставит элиту в точку максимума кривой Лаффера. Подставляя выражения для $\hat{k}'(\hat{\tau})$ из уравнения (22.12), получаем следующее равенство для $\hat{\tau}$:

$$f\left(\hat{k}(\hat{\tau})\right)+\frac{\hat{\tau}}{1-\hat{\tau}}\frac{(f'(\hat{k}(\hat{\tau})))^2}{f''(\hat{k}(\hat{\tau}))}=0. \tag{22.16}$$

Другими словами, при ставке налога, при которой полезность элиты достигает максимума, выигрыш от небольшого увеличения налога $f\left(\hat{k}(\hat{\tau})\right)$ равен потерям дохода в результате снижения равновесного отношения капитала к труду при увеличении налога $\hat{\tau}f'\left(\hat{k}(\hat{\tau})\right)\hat{k}'(\hat{\tau})$. Налоговая ставка $\hat{\tau}$ всегда лежит между нулем и единицей (см. упражнение 22.1), однако задача максимизации для элиты не всегда будет вогнутой и поэтому уравнение (22.16) может иметь более одного решения. В этом случае $\hat{\tau}$ всегда будет соответствовать глобальному максимуму функции стоимости элиты[8].

---

[7] Заметим, что в общем случае задача максимизации является более сложной. Функция стоимости V^e должна зависеть от *правила политики*, которое связывает распределение капитала и будущий выбор политики. Следовательно, оптимальная политика также будет функцией от этого правила политики. Тогда в СМР решение задачи максимизации должно совпадать с таким правилом.

[8] Здесь мы игнорируем случай множественности глобальных максимумов.

Из этих рассуждений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 22.2. *Предположим, что выполняется неравенство* (22.6). *Тогда при любом начальном распределении капитала между предпринимателями* $[K_i(0)]_{i \in S^m}$ *существует единственное СМР, в котором элита в каждом периоде времени* $t = 0, 1, \ldots$, *выбирает ставку налога* $\hat{\tau} \in (0, 1)$, *заданную уравнением* (22.16), *все предприниматели выбирают отношение капитала к труду* $\hat{k}(\hat{\tau})$, *заданное уравнением* (22.11), *и равновесная заработная плата* $\hat{w}(\hat{\tau})$ *задана уравнением* (22.13). *В этом равновесии* $\hat{k}(\hat{\tau}) < k^*$, *где* k^* *задано уравнением* (22.4), *и* $\hat{w}(\hat{\tau}) < w^*$, *где* w^* *задано уравнением* (22.7).

Из этого утверждения следует, что в единственном политическом равновесии элита облагает предпринимателей положительным налогом. Следовательно, отношение капитала к труду, выпуск и заработная плата в нем будут меньше, чем в экономике без налогообложения. В упражнении 22.2 показано, как эта модель может быть расширена таким образом, что экономическая политика также влияет и на равновесный темп роста экономики.

Вернемся к фундаментальному вопросу, поставленному в начале этой главы: почему некоторые общества выбирают искажающие налоги на бизнес и предпринимателей? Данная модель дает простой ответ на него: политическая сила находится в руках элиты, которая стремится присвоить доход предпринимателей. При заданном выборе мер фискальной политики это может быть достигнуто лишь наложением искажающих налогов. Источником «неэффективности» в этой экономике является комбинация мотива присвоения дохода агентами, обладающими политической силой, и ограниченности множества доступных фискальных инструментов.

Несмотря на то что эта модель показывает, почему общество может выбрать искажающую экономическую политику, ведущую к снижению инвестиций и выпуска по сравнению с наилучшим равновесием, необходимо подчеркнуть, что равновесие в ней не является неоптимальным по Парето. Действительно, при заданном множестве фискальных инструментов равновесное распределение ресурсов является решением задачи максимизации общественной функции благосостояния, в которой вес элиты равен единице. Неоптимальность по Парето требует, чтобы при заданном множестве инструментов и информационных ограничений существовало другое доступное распределение ресурсов, в котором полезность каждого индивида увеличится или останется на том же уровне, что и в первоначальном равновесии. Если множество фискальных инструментов состоит только из пропорциональных налогов, то полезность работников и представителей среднего класса не может быть увеличена без снижения полезности элиты[9]. Из этого наблюдения следует, что если мы явным образом включаем в модель политэкономические соображения, то в большинстве случаев в экономике нет «бесплатных обедов», то есть в ней не существует простых способов увеличить благосостояние всех ее членов. Поэтому политэкономические модели обычно включают в себя выбор между победителями и проигравшими. Так как распределение ресурсов из утверждения 22.2 характеризуется искажающей экономической политикой и меньшим значением выпуска, чем в наилучшем равновесии, мы можем назвать его неоптимальным (хотя оно не является неоптимальным по Парето). Такой термин действительно часто встречается в литературе и мы также будем им пользоваться. Однако отметим еще раз, что неоптимальность в данном контексте не означает неоптимальность по Парето.

Утверждение 22.2 является хорошей начальной точкой для предварительного ответа на вопрос, поставленный в начале этой главы. Однако оно оставляет без ответа ряд других важных вопросов. Во-первых, оно не позволяет сделать упражнение по сравнительной статике, показывающее, в каких случаях в экономике будет использована более или менее искажающая экономическая политика. Во-вторых, распределение политической силы в обществе в нем рассматривается как заданное. Если бы политическая власть находилась в руках представителей среднего класса, а не элиты, не вовлеченной в производство товаров, выбор фискальной политики в экономике был бы другим. В третьих, в этом анализе мы рассматривали множество доступных фискальных инструментов как заданное. Если бы элита обладала возможностью взимать паушальные налоги, то она смогла бы присвоить доход предпринимателей, не внося в экономику искажений. Далее в этой и следующей главах мы расширим эту модель для того, чтобы ответить на эти вопросы. Однако сначала рассмотрим частный случай модели, в котором производственная функция в экономике является функцией Кобба—Дугласа. Модель экономики Кобба—Дугласа довольно проста математически, поэтому она будет основной моделью в параграфах 22.4–22.6. В упражнении 22.17 коротко показано, как эта модель может быть обобщена для случая вогнутых предпочтений индивидов.

[9] В несколько модифицированной модели существует механизм, ведущий к улучшению по Парето, однако такой механизм нереализуем как СМР (однако он может быть реализован как СПР). Например, если множество предпринимателей конечно, то существует СПР, в котором каждый предприниматель осуществляет добровольный трансферт элите и выбирает наилучшее отношение капитала к труду, а элита отказывается от использования искажающих налогов (см. упражнение 22.4). Этот пример показывает, что СМР может привести к неоптимальному по Парето равновесию, несмотря на то что в данной модели это не так. Он также показывает, почему модели с континуумом агентов, в которых такой механизм невозможен, часто более интуитивны.

22.3. Каноническая модель конфликтов распределения доходов Кобба—Дугласа

Рассмотрим частный случай модели из предыдущего параграфа с двумя отличиями. Во-первых, предположим, что производственная функция каждого предпринимателя выглядит как:

$$Y_i(t) = \frac{1}{\alpha}(K_i(t))^{\alpha}(A_i(t)L_i(t))^{1-\alpha}, \tag{22.17}$$

где переменная $A_i(t)$ обозначает трудоинтенсивный технологический множитель, который различается для групп или индивидов. Далее положим $A_i(t) = A^m$ для всех $i \in S^m$. Коэффициент $1/\alpha$ перед производственной функцией использован для удобной нормализации. Вид функции Кобба—Дугласа позволяет получить описание политэкономического равновесия в явном виде, а также связать равновесные ставки налога с эластичностью выпуска по капиталу. Во-вторых, из анализа в предыдущем параграфе следует, что предположение о неполной амортизации не имеет качественных последствий, поэтому для упрощения анализа мы предположим полную амортизацию, то есть положим $\delta = 1$.

Из уравнения (22.17) следует, что производственную функцию на душу населения можно записать следующим образом:

$$f(k_i) = \frac{1}{\alpha}(A^m)^{1-\alpha}k_i^{\alpha}.$$

Объединяя эту производственную функцию с предположением о том, что $\delta = 1$, из уравнения (22.10) находим, что значение отношения капитала к труду $k(t+1)$, которое будет выбирать каждый предприниматель, равно

$$k(t+1) = [\beta(1-\tau(t+1))]^{1/(1-\alpha)}A^m. \tag{22.18}$$

Налоговая политика, при которой функция полезности элиты достигает максимума, продолжает задаваться уравнением (22.16). Тогда из уравнения (22.17) следует, что ставка налога, при которой функция полезности элиты достигает максимума, равна

$$\hat{\tau} = 1-\alpha.$$

Эта формула одновременно проста и обладает важной экономической интуицией. Если значение α велико, то производственная функция почти линейна по капиталу. Тогда спрос на капитал будет очень эластичной функцией от его эффективной цены. При таком эластичном спросе на капитал увеличение ставки налога ведет к значительному снижению запаса капитала и налоговых поступлений. Следовательно, максимум кривой Лаффера для элиты достигается на относительно низкой ставке налога. С другой стороны, если значение α мало, то производственная функция достаточно вогнута по капиталу, поэтому даже при высокой налоговой ставке отношение капитала к труду, которое выбирают предприниматели, снижается незначительно. В этом случае элите будет выгодно устанавливать высокий налог.

22.4. Конфликты распределения доходов и конкуренция

В этом и следующем параграфах, чтобы продемонстрировать два важных результата, мы будем использовать модель из предыдущего параграфа. Вначале мы покажем, что конкуренция между агентами, обладающими политической силой, и другими членами общества (на товарных рынках и в политической сфере) может привести к выбору значительно более искажающей экономической политики, чем та, которая следует из мотива присвоения дохода, описанного выше. Затем мы используем эту модель, чтобы получить некоторые предварительные выводы о том, как конфликт распределения доходов может объяснить равновесный выбор экономических институтов, в рамках которых определяется экономическая политика.

Рассмотрим каноническую модель Кобба—Дугласа с двумя отличиями. Во-первых, предположим, что члены элиты, как и представители среднего класса, обладают возможностью стать предпринимателями. Производительность каждого представителя среднего класса в его производственной функции равна A^m ($A_i = A^m$ для всех $i \in S^m$), а производительность каждого члена элиты равна A^e ($A_i = Ae$ для всех $i \in S^e$). Производительность представителей различных групп общества может различаться, например потому, что они заняты различной производственной деятельностью (например, сельским хозяйством и машиностроением или заняты в старых и новых отраслях) или потому, что они обладают различным запасом человеческого капитала или талантом. Работники не имеют доступа к производственной технологии и абсолютно неэластично поставляют занятость на рынок труда. Как и в параграфе 22.2, предположим, что каждый предприниматель может нанять не более чем $\bar{L}$ работников, однако не будем накладывать условие (22.6). Во-вторых, позволим налоговым ставкам для представителей различных групп различаться, то есть предположим, что элита выбирает две ставки налога: τ^e, по которой облагается ее собственный выпуск, и τ^m, которая применяется в налогообложении представителей среднего класса. Тогда бюджетное ограничение правительства принимает следующий вид:

$$T^w(t)+\theta^m T^m(t)+\theta^e T^e(t)\le \phi \int_{S^m\cup S^e} \tau^i(t)F(K_i(t),\ L_i(t))di+R^N, \quad (22.19)$$

где параметр $\phi \in [0, 1]$ задает долю налоговой выручки, идущую на перераспределение (а оставшаяся доля $1-\phi$ теряется). Этот параметр можно интерпретировать как показатель мощности государственного аппарата: при высоком значении ϕ государство обладает возможностью собирать и перераспределять значительный объем доходов. Константа R^N обозначает ренту, получаемую от природных ресурсов. В параграфе 22.2 мы положили $\phi = 1$ и $R^N = 0$ (см. уравнение (22.8)). Далее мы будем использовать эти параметры при проведении упражнений по сравнительной статике.

Так как в этой модели предпринимателями могут быть и представители среднего класса, и члены элиты, условие полной занятости в экономике в ней отличается от неравенства (22.6). В частности далее мы везде положим, что $\theta^e\bar{L}<1$ и $\theta^m\bar{L}<1$, то есть ни одна из двух групп предпринимателей не способна предъявить спрос на труд, достаточный для найма всей рабочей силы. Тогда следующее условие описывает ситуацию, когда элита и средний класс вместе способны предъявить спрос на труд, достаточный для найма всей рабочей силы:

Условие 22.1. $(\theta^e+\theta^m)\bar{L}>1$.

Если это условие выполняется, то в экономике наблюдается полная занятость. Если оно не выполняется (здесь мы предполагаем $(\theta^e+\theta^m)\bar{L}<1$ и исключаем предельный случай $(\theta^e+\theta^m)\bar{L}=1$), то спрос на труд в экономике недостаточен и заработная плата равна нулю. Структура политического равновесия зависит от того, выполняется это условие или нет.

Из анализа в параграфе 22.2, в частности из уравнения (22.11), следует, что выбор отношения капитала к труду в периоде $t + 1$ каждым предпринимателем $i \in S^m \cup S^e$ задается уравнением:

$$k_i(t+1)=\hat{k}_i(\tau(t+1))\equiv(\beta(1-\tau(t+1)))^{1/(1-\alpha)}A_i. \quad (22.20)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (22.11), но использует вид производственной функции Кобба—Дугласа с трудоинтенсивным технологическим прогрессом для предпринимателя i, равным A_i. Подставляя выражение для $\hat{k}_i(\tau)$ в производственную функцию каждого предпринимателя и вычитая из нее издержки осуществления инвестиций, получаем следующее выражение для чистого предельного продукта (прибыльности) одного работника:

$$(1-\alpha)\beta^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\tau(t))^{1/(1-\alpha)}A_i/\alpha.$$

Тогда функция спроса на труд для каждого предпринимателя выглядит как:

$$L_i(t)\begin{cases} =0, & \text{если } w(t)>(1-\alpha)\beta^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\tau(t))^{1/(1-\alpha)}A_i/\alpha, \\ \in[0,\ \bar{L}], & \text{если } w(t)=(1-\alpha)\beta^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\tau(t))^{1/(1-\alpha)}A_i/\alpha, \\ =\bar{L}, & \text{если } w(t)>(1-\alpha)\beta^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\tau(t))^{1/(1-\alpha)}A_i/\alpha. \end{cases} \quad (22.21)$$

Это условие говорит о том, что если заработная плата превышает чистый предельный продукт, то предприниматель не нанимает работников. Если заработная плата строго меньше чистого предельного продукта, то он нанимает максимально возможное число работников $\bar{L}$. В этом случае экономическое равновесие описано в следующем утверждении.

Утверждение 22.3. *Предположим, что налоговые ставки на выпуск элиты и представителей среднего класса в периоде времени t равны $\tau^e(t)$ и $\tau^m(t)$ соответственно. Тогда равновесное отношение капитала к труду для каждого предпринимателя задается единственным образом уравнением* (22.20). *Более того, если выполняется условие* 22.1, *то равновесная заработная плата в периоде времени t задается уравнением:*

$$w(t)=\min\left\langle\frac{1-\alpha}{\alpha}\beta^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\tau^e(t))^{1/(1-\alpha)}A^e,\right.$$
$$\left.\frac{1-\alpha}{\alpha}\beta^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\tau^m(t))^{1/(1-\alpha)}A^m\right\rangle. \quad (22.22)$$

Если условие 22.1 *не выполняется, то* $w(t)=0$ *для всех t.*

Единственная часть этого утверждения, которая требует пояснения, — это уравнение для заработной платы. Если условие 22.1 выполняется, то оно говорит о том, что каждый работник получает минимум из чистых предельных продуктов элиты и среднего класса. Тогда из условия равновесия на рынке труда следует, что группа с меньшим чистым предельным продуктом, не сможет обеспечить максимальной занятости.

22.4.1. Конкуренция на товарных рынках: эффект манипуляции ценами факторов производства

Следующее утверждение является эквивалентом утверждения 22.2, однако в нем требуется, чтобы условие 22.1 не выполнялось. В случае когда оно выполняется, имеет место утверждение 22.5.

Утверждение 22.4. *Предположим, что условие* 22.1 *не выполняется и* $\phi > 0$. *Тогда в единственном СМР используется следующая экономическая политика:*

$$\tau^m(t)=\tau^{RE}(t)\equiv 1-\alpha \text{ и } \tau^e(t)=T^m(t)=T^w(t)=0 \quad (22.23)$$

для всех t, и значение $T^e(t)$ определяется из неравенства (22.19), *выполняющегося как строгое равенство.*

Доказательство. См. упражнение 22.5. ■

Следовательно, равновесие в этой модели схоже с равновесием в параграфе 22.2. Заметим, однако, что это утверждение требует, чтобы условие 22.1 не выполнялось, то есть равновесная заработная плата $w(t)$ равнялась нулю для всех t. Если это не так, то элита может использовать влияние налоговой политики на размер равновесной заработной платы. Это внесет в выбор экономической политики мотив конкуренции, анализ которого является нашей следующей задачей. Следующее утверждение описывает экстремальный случай эффекта манипуляции ценами факторов производства.

Утверждение 22.5. *Предположим, что выполняется условие* 22.1 *и* $\phi = 0$. *Тогда в единственном СМР используется экономическая политика* $\tau^m(t) = \tau^{FPM} \equiv 1$ и $\tau^e(t) = T^m(t) = T^w(t) = 0$ *для всех* t.

Доказательство. См. упражнение 22.6. ■

В этом утверждении мы положили ϕ равным нулю, то есть мотив присвоения дохода отсутствует. Поэтому единственным мотивом для использования налогообложения является его влияние на равновесную заработную плату. Очевидно, что тогда необходимо, чтобы условие 22.1 выполнялось, в противном случае заработная плата равняется нулю и элита не имеет возможности и желания манипулировать ценами факторов производства. Из утверждения 22.5 следует, что в этом случае равновесная ставка налога τ^{FPM} превышает ставку налога τ^{RE}, когда единственным мотивом налогообложения является присвоение дохода. На первый взгляд этот вывод может показаться неожиданным, но за ним стоит простая интуиция. При использовании механизма манипуляции ценами факторов производства цель элиты состоит в снижении прибыльности представителей среднего класса, в то время как для присвоения дохода элите необходимо, чтобы представители среднего класса осуществляли инвестиции и получали доход. Следовательно, ставка налога τ^{RE} определяется максимумом кривой Лаффера, а ставка τ^{FPM} выбирается так, чтобы нанести представителям среднего класса максимальный ущерб и снизить их спрос на труд (и, следовательно, равновесную заработную плату). Здесь также необходимо отметить, что в отличие от случая только присвоения дохода, в данном случае налоговая политика элиты неявно конфискует доход работников, чья заработная плата снижается.

В данном контексте также необходимо подчеркнуть роль предположения о том, что $\phi = 0$. Налогообложение представителей среднего класса по максимальной налоговой ставке очевидно неэффективно. Почему в экономике не существует более эффективного способа переноса ресурсов от среднего класса к элите? Ответ на этот вопрос снова связан с ограниченностью множества фискальных инструментов, доступных элите. В частности из равенства $\phi = 0$ следует, что она не имеет возможности использовать налоги для присвоения дохода представителей среднего класса и поэтому вынуждена прибегать к неэффективным способам увеличения собственного потребления, напрямую обедняя средний класс. Однако отсутствие в модели каких-либо способов переноса ресурсов от среднего класса к элите не существенно в контексте механизма манипулирования ценами факторов производства. Мы продемонстрируем это далее, объединив мотив манипулирования ценами факторов производства и мотив присвоения дохода (естественно, важным элементом модели остается отсутствие в экономике неискажающих паушальных налогов).

В следующем утверждении описано равновесие в модели в том случае, когда выполняется условие 22.1 и $\phi > 0$, то есть в экономике присутствуют как мотив манипулирования ценами факторов производства, так и мотив присвоения дохода. В утверждении 22.5 мотив манипулирования ценами факторов производства сам по себе ведет к максимально возможной ставке налога на представителей среднего класса. Присвоение дохода, хоть и является в большинстве случаев еще одним мотивом для налогообложения, в данном случае служит причиной снижения величины эффекта манипуляции ценами факторов производства. Причина этого в том, что высокие налоги снижают размер присвоенного элитой дохода (сдвигая экономику с вершины кривой Лаффера). Для описания политэкономического равновесия в этом случае вначале заметим, что здесь элита также никогда не будет облагать положительным налогом своих представителей и осуществлять положительные трансферты другим группам агентов, то есть $\tau^e(t) = T^m(t) = T^w(t) = 0$ для всех t. Тогда задача максимизации для элиты в периоде времени $t-1$ выглядит как:

$$\max_{\tau^m(t)}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\beta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}A^e - w(t)\right]L^e(t) +$$
$$+\frac{1}{\theta^e}\left[\frac{\phi}{\alpha}\tau^m(t)(\beta(1-\tau^m(t)))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}A^m\theta^m L^m(t) + R^N\right] \tag{22.24}$$

при ограничениях (22.22),

$$\theta^e L^e(t) + \theta^m L^m(t) = 1 \tag{22.25}$$

и

$$L^m(t) = \bar{L}, \text{ если } (1-\tau^m(t))^{1/(1-\alpha)}A^m \geq A^e, \tag{22.26}$$

где переменная $L^m(t)$ обозначает равновесную занятость на предприятиях представителей среднего класса, а переменная $L^e(t)$ — равновесную занятость на предприятиях элиты. Первое слагаемое в выражении (22.24) составляет чистую выручку элиты, а второе слагаемое — трансферты, которые она получает. Уравнение (22.25) описывает условие равенства спроса и предложения на рынке труда, а условие (22.26) говорит о том, что представители среднего класса нанимают максимальное число работников, если их чистый предельный продукт превышает чистый предельный продукт элиты.

Эту задачу можно решить двумя способами в зависимости от того, выполняется ли в нем условие (22.26). Если оно выполняется, то равновесная заработная плата равна $w = (1-\alpha)\beta^{\alpha/(1-\alpha)}A^e/\alpha$. В этом случае прибыль элиты равна нулю и единственным источником ее дохода являются трансферты. Тогда элита предпочтет позволить представителям среднего класса вести любую приносящую прибыль деятельность и максимизирует налоговые поступления (что ведет к экономической политике, совпадающей с описанной в утверждении 22.4). С другой стороны, если условие (22.6) не выполняется в решении задачи максимизации, то элита получает доход как от собственной производственной деятельности, так и от налогообложения представителей среднего класса. Этот случай описан в следующем утверждении.

Утверждение 22.6. *Рассмотрим каноническую политэкономическую модель с диктатурой элиты и производственной функцией Кобба—Дугласа. Предположим, что выполняется условие* 22.1, $\phi > 0$ *и*

$$A^e \geq \phi\alpha^{\alpha/(1-\alpha)} A^m \frac{\theta^m}{\theta^e}. \tag{22.27}$$

Тогда в единственном СМР

$$\tau^m(t) = \tau^{COM} \equiv \frac{\kappa(\bar{L}, \theta^e, \alpha, \phi)}{1+\kappa(\bar{L}, \theta^e, \alpha, \phi)} \tag{22.28}$$

для всех τ, где

$$\kappa\left(\bar{L}, \theta^e, \alpha, \phi\right) \equiv \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1+\frac{\theta^e \bar{L}}{(1-\theta^e \bar{L})\phi}\right). \tag{22.29}$$

Доказательство. См. упражнение 22.7. ■

Необходимо отметить несколько особенностей этого утверждения. Во-первых, значение $\kappa(\bar{L}, \theta^e, \alpha, \phi)$ конечно, поэтому равновесная ставка налога всегда меньше единицы. Следовательно, утверждение 22.6 показывает, что перспектива присвоения дохода среднего класса ведет к выбору желаемой элитой ставки налога, меньшей 100%, которая используется исключительно в случае манипулирования ценами факторов производства. С другой стороны, значение $\kappa(\bar{L}, \theta^e, \alpha, \phi)$ строго превышает

$(1-\alpha)/\alpha$, поэтому ставка налога τ^{COM} всегда превышает ставку $\tau^{RE} \equiv 1-\alpha$, то есть мотив манипулирования ценами факторов производства всегда ведет к росту ставки налога по сравнению с ее значением исключительно в случае присвоения дохода, то есть ставка налога лежит справа от вершины кривой Лаффера.

Во-вторых, так как утверждение 22.6 объединяет мотивы присвоения дохода и манипулирования ценами факторов производства, оно содержит в себе основные результаты по сравнительной статике, которые представляют интерес. Один из таких результатов состоит в том, что равновесная ставка налога убывает по ϕ, так как если значение ϕ увеличивается, то присвоение дохода становится более эффективным, что сдерживает желание элиты взимать высокий налог. На интуитивном уровне этот вывод показывает положительный эффект существования государственного аппарата: при мощном государственном аппарате элита способна собирать доходы с помощью налогообложения и поэтому стимул обеднения конкурирующих групп становится слабее (далее мы увидим возможный отрицательный эффект существования государственного аппарата). Еще один результат по сравнительной статике состоит в том, что равновесная ставка налога возрастает по θ^e. Причиной этого снова является взаимодействие между механизмами присвоения дохода и манипулирования ценами факторов производства. Если число представителей элиты возрастает, то снижение цен факторов производства становится более важной задачей по сравнению с увеличением налоговых сборов. Таким образом, эта сравнительная статика еще раз иллюстрирует, что если манипулирование ценами факторов производства более важно для элиты, то в большинстве случаев равновесная экономическая политика будет более искажающая. Третий вывод состоит в том, что снижение параметра α ведет к росту равновесной ставки налога по той же причине, что и исключительно в случае присвоения дохода: налоги создают меньше искажений и поэтому ставка налога, при которой налоговые сборы достигают максимума, растет. Наконец, на будущее заметим, что размер ренты от природных ресурсов R^N не влияет на равновесную экономическую политику.

22.4.2. Политическая конкуренция: эффект политического замещения

В подпараграфе 22.4.1 мы показали, как конкуренция на товарных рынках побуждает элиту выбирать искажающую экономическую политику, которая ведет к снижению спроса на труд со стороны представителей среднего класса. В этом подпараграфе мы обсудим последствия конкуренции в политической сфере. Основное изменение модели состоит в том, что теперь мы позволим политической власти переходить от одной группы агентов к другой. В частности, положим вероятность того, что в периоде времени t политическая сила навсегда перейдет от элиты к среднему классу, равной $\eta(t)$. Предположим, что после прихода к власти средний класс начнет проводить такую политику, при которой его функция полезности достигает максимума. Мы можем легко описать такую политику с помощью анализа, аналогичного анализу из предыдущего подпараграфа (см. упражнение 22.8). Обозначим полезность элиты в случае, когда политическая власть принадлежит ей, и в случае, когда политическая власть принадлежит среднему классу, как $V^e(E)$ и $V^e(M)$ соответственно.

Если вероятность потери элитой политической власти η задана экзогенно, то анализ из подпараграфа 22.4.1 применим и в этой модели без значительных изменений. Новые политэкономические эффекты возникают в том случае, когда вероятность перехода политической власти к среднему классу определяется эндогенно. Далее по соображениям сокращения объема материала мы будем использовать модель в сокращенной форме и предположим, что вероятность перехода политической власти от элиты к среднему классу является функцией от уровня чистого совокупного дохода всех представителей среднего класса:

$$\eta(t) = \eta(\theta^m C^m(t)) \in [0, 1], \tag{22.30}$$

где переменная $C^m(t)$ обозначает чистый доход репрезентативного представителя среднего класса, который равен его потреблению. Мы предположим, что функция $\eta(\cdot)$ является дифференцируемой с производной $\eta'(\cdot)$ и строго возрастающей. Из этого предположения следует, что вероятность перехода власти к среднему классу растет по мере его обогащения (например, обладая большими ресурсами, он будет более успешен в решении проблемы координации действий или сможет увеличить свою военную мощь).

Для упрощения анализа модели остановимся на случае, когда условие 22.1 не выполняется, то есть равновесная заработная плата равна нулю и мотив манипулирования ценами факторов производства отсутствует. Тогда в отсутствие мотива политического замещения единственной причиной налогообложения является присвоение дохода (и ставка налога в равновесии равна τ^{RE}). Используя сделанные выше предположения и определения величин $V^e(E)$ и $V^e(M)$, запишем задачу максимизации для элиты, выбирающей налоговую ставку $\tau^m(t)$ в периоде времени t – 1, следующим образом:

$$\begin{aligned} V^e(E) = \max_{\tau^m}\{ & \beta^{\alpha/(1-\alpha)} A^e \bar{L}/\alpha + \\ & + \left[\phi\beta^{\alpha/(1-\alpha)}\tau^m(1-\tau^m)^{\alpha/(1-\alpha)} A^m \theta^m \bar{L}/\alpha + R^N\right] / \theta^e + \\ & + \beta[(1-\eta[\tau^m])V^e(E) + \eta[\tau^m]V^e(M)]\}, \end{aligned}$$

где мы используем обозначение $\eta[\tau^m]$ для того, чтобы подчеркнуть зависимость вероятности перехода политической власти от ставки налога на представителей среднего класса (и при этом сокращаем формулу не выписывая явно аргументы функции $\eta(\cdot)$).Так как доход предпринимателя $C^m(t)$ убывает по ставке τ^m, функция $\eta[\tau^m]$ также убывает по τ^m.

Условие первого порядка для внутреннего решения задачи максимизации выглядит как

$$\frac{\phi(\beta(1-\tau^m(t)))^{\alpha/(1-\alpha)}A^m\theta^m\bar{L}}{\alpha\theta^e}\left(1-\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\tau^m(t)}{1-\tau^m(t)}\right)-$$

$$-\beta\frac{d\eta[\tau^m]}{d\eta\tau^m}(V^e(E)-V^e(M))=0.$$

Уменьшаемое в левой части этого условия описывает мотив присвоения дохода, а вычитаемое — эффект политического замещения. Нетрудно убедиться, что если $\eta'(\cdot)=0$, то это условие сводится к равенству из предыдущей модели: $\tau^m=\tau^{RE}=1-\alpha$. Однако если $\eta'(\cdot)>0$ и $V^e(E)-V^e(M)>0$, то $\tau^m=\tau^{PC}>\tau^{RE}$. Неравенство $V^e(E)-V^e(M)>0$ следует из упражнения 22.8.

Важное свойство этой модели состоит в том, что, как и в случае манипулирования ценами факторов производства, элита выбирает ставку налога, лежащую справа от максимума кривой Лаффера. В данном случае ее целью является не увеличение текущего дохода, а консолидация политической силы (более того, выбор ставки налога справа от вершины кривой Лаффера ведет к снижению текущего дохода элиты). Элита выбирает более высокий (и более искажающий) налог, потому что он приводит к снижению дохода и политической силы среднего класса. Это увеличивает вероятность сохранения власти элитой в будущем и позволяет ей получать выгоду от контроля над принятием экономических решений.

Из существования возможности потери элитой политической власти следуют несколько новых результатов по сравнительной статике. Во-первых, нетрудно убедиться, что увеличение параметра R^N ведет к увеличению разрыва между $V^e(E)$ и $V^e(M)$ (см. упражнение 22.8). Это приводит к более высокой равновесной ставке налога на представителей среднего класса. На интуитивном уровне, доход от природных ресурсов достается группе, обладающей политической властью, и поэтому увеличение этого дохода повышает *политические ставки*, определенные как стоимость политического контроля. Следовательно, в этом случае элита будет готова отказаться от налоговых доходов (от высокого налога на представителей среднего класса) ради увеличения вероятности сохранения власти (потому что сохранение власти становится более ценным). Этот результат отличается от результата предыдущей модели, где ставка налога не зависит от параметра R^N. Более того, в этой модели увеличение мощности государственного аппарата ϕ также ведет к росту разрыва между $V^e(E)$ и $V^e(M)$ (потому что оно позволяет группе, находящейся у власти, собирать больше налогов, см. упражнение 22.8) и, следовательно, к увеличению равновесной ставки налога. Таким образом, этот пример показывает потенциальную отрицательную сторону увеличения мощности государственного аппарата: если в экономике нет политической конкуренции, то увеличение мощности государственного аппарата позволяет увеличить эффективность распределения ресурсов в ней путем создания более эффективных способов трансферта доходов. С другой стороны, если в экономике присутствует политическая конкуренция, то увеличение мощности государственного аппарата ведет к росту политических ставок и может вызвать более сильно искажающие налоги.

Наконец, если вероятность перехода политической власти от элиты к среднему классу очень высока (то есть $\eta(\cdot) \approx 1$) или если смена власти очень маловероятна ($\eta(\cdot) \approx 0$), то значения функции $\eta'(\cdot)$ везде малы. В этих случаях ставка налога мало отличается от ее значения, при которой доход элиты достигает максимума. Эффект политического замещения вызывает значительный рост искажающего налогообложения, только если функция $\eta(\cdot)$ принимает промежуточные значения и зависит от богатства среднего класса таким образом, что производная $\eta'(\cdot)$ принимает высокие значения. Следовательно, мы можем ожидать, что элита будет выбирать сильно искажающую экономическую политику, если ее безопасность находится на промежуточном уровне (а не в случае, когда она полностью защищена от потери власти (то есть $\eta(\cdot) \approx 0$) или когда она гарантированно теряет ее (то есть $\eta(\cdot) \approx 1$). В этом смысле эффект политического замещения схож с эффектом замещения Эрроу в контексте инновационной деятельности (см. главу 12).

22.5. Равновесия, совершенные по подыграм, и совершенные марковские равновесия

До сих пор мы использовали концепцию совершенного марковского равновесия. Естественный вопрос: как изменятся результаты, если мы обратимся к концепции равновесия, совершенного по подыграм? В общем случае множество СПР в динамических играх шире, чем множество СМР, и некоторые СПР могут привести к более эффективному распределению ресурсов (см. приложение С). Вначале мы покажем как СПР и СМР связаны между собой в модели, рассмотренной выше. Затем мы проанализируем два варианта этой модели с проблемой ограбления, возникающей в результате изменения временной структуры налога или ex ante принятых решений о выборе технологии. Проблема принятия обязательств в этих моделях ведет к увеличению уровня неэффективности, и СПР могут оказаться более эффективными, чем СМР, так как они позволяют элите принять в равновесии большие обязательства.

22.5.1. СПР и СМР в модели без ограбления

Множество СМР лежит в множестве СПР, так как последнее включает в себя равновесия со стратегиями наказаний, зависящими от истории. Если такая зависимость от истории невозможна, то множества СМР и СПР совпадают. В моделях, рассмотренных выше, такие стратегии наказания невозможны. На интуитивном уровне, в экономической сфере каждый индивид является малым и действует конкурентным образом (рассматривает цены как заданные величины). Следовательно, условия (22.20) и (22.21) единственным образом задают спрос на факторы производства в любом равновесии. При заданных функциях спроса на факторы производства выигрыш от различных последовательностей мер экономической политики также определен единственным образом. Поэтому выигрыш элиты в различных стратегиях не зависит от истории и в модели не существует СПР, кроме СМР, описанных в предыдущем параграфе.

Утверждение 22.7. *СМР, описанные в утверждениях* 22.4–22.6, *являются единственными СПР.*

Доказательство. См. упражнение 22.10. ■

В упражнении 22.11 показано, что СМР в модели из подпараграфа 22.4.2 также является единственным СПР в ней. Последний результат, однако, зависит от предположения о том, что переход власти (от элиты к среднему классу) может произойти только один раз. Если переход власти случается более одного раза, то становится возможным построение стратегий наказания, зависящих от истории, и множество СПР может включать в себя немарковские равновесия.

22.5.2. Невозможность принятия обязательств и ограбление

В моделях, описанных выше, элита, находясь у власти, принимает обязательство о налогах в следующем периоде времени. В частности по окончании периода t элита принимает решение о ставке налога на выпуск в периоде $t + 1$. Используя понятие из организационной экономики, назовем такую модель моделью экономики без ограбления. С другой стороны, *ограбление* соответствует ситуации, когда принятие обязательств о будущих ставках налога и других параметров экономической политики не происходит и предприниматели могут быть «ограблены» с помощью высоких налоговых ставок, установленных после того, как они приняли решения об осуществлении инвестиций. Такой тип проблемы ограбления эндемичен в политической экономии, так как принятие обязательств о будущей экономической политике зачастую трудноосуществимо. Индивиды, находящиеся у власти в определенный момент времени, принимают необходимые решения именно в это время. Более того, если основные инвестиционные проекты в экономике являются долгосрочными (то есть после того, как осуществление проекта началось, он становится необратимым), проблема ограбления возникает даже в том случае, когда возможно принятие обязательств на один период времени вперед (так как в этом случае налог на поток дохода от этого проекта взимается в течение длительного времени).

Проблема ограбления связана с тем, что элита не может принять обязательство о выборе определенной ставки налога до начала осуществления инвестиций представителями среднего класса (потому что налог устанавливается после принятия решений об инвестициях). Невозможность принятия обязательства в общем случае ведет к росту ставки налога и искажений в экономике. Более того, в отличие от распределений ресурсов в моделях, представленных выше (которые остаются оптимальными по Парето, несмотря на присутствие искажений), проблема принятия обязательств приводит к неоптимальности равновесия по Парето. Для иллюстрации основных последствий проблемы принятия обязательств рассмотрим ту же модель, что и ранее, но изменим в ней временную последовательность событий таким образом, что решение о ставке налога на выпуск в периоде времени t принимается в этом периоде, то есть после того как инвестиции в капитал для этого периода были осуществлены. Экономическое равновесие по сути не изменяется, спрос на факторы производства продолжает быть задан уравнениями (22.20) и (22.21) с единственным отличием, что теперь переменные τ^m и τ^e обозначают ожидаемые ставки налога. Очевидно, что в равновесии ожидаемые и фактические ставки налога будут совпадать.

Основное отличие состоит в способе вычисления элитой оптимальной ставки налога. Ранее она принимала во внимание тот факт, что высокий налог на выпуск в периоде времени t ведет к снижению инвестиционной активности в этом периоде. Сейчас этот эффект отсутствует, так как налог устанавливается после принятия решений об инвестициях. Поэтому в СМР элита всегда выбирает максимальную ставку налога и во всех случаях существует единственное СМР с $\tau^m(t) = 1$ для всех t.

Утверждение 22.8. *В модели с ограблением существует единственное СМР с* $\tau^m(t) = \tau^{HP} = 1$ *для всех* t.

Очевидно, что такое равновесие с ограблением более неэффективно, чем равновесие, описанное выше. Например, рассмотрим случай, когда условие 22.1 не выполняется, то есть при начальной последовательности событий (без ограблений) равновесная ставка налога составляет $\tau^m(t) = 1 - \alpha$.

В экономике с ограблением равновесная ставка налога равна единице, $\tau^m(t) = 1$, и представители среднего класса прекращают производственную деятельность. Такая политика приносит издержки не только представителям среднего класса, но и элите, так как она теряет все налоговые поступления.

В этой модели единственное СМР не является единственным СПР, так как в ней возникает возможность неявного сговора между представителями различных групп, когда элита обещает (достоверно) установить налог по ставке, отличной от $\tau^{HP} = 1$. Такое СПР не оптимально по Парето, и общественный планировщик, обладающий таким же набором фискальных инструментов, может увеличить полезность всех членов общества.

Чтобы проиллюстрировать различие между СМР и СПР (и связанную с ним неоптимальность по Парето СМР), рассмотрим пример, в котором условие 22.1 не выполняется. В СМР налоговые доходы элиты равны нулю (так как выпуск представителей среднего класса равен нулю). Напомним, что историей игры называется множество действий всех агентов вплоть до текущего момента времени. Рассмотрим следующую последовательность событий. Элита выбирает ставку налога $\tau^m(t) = 1 - \alpha$ для всех периодов времени t, представители среднего класса осуществляют инвестиции в соответствии с условием (22.20) при $\tau^m(t) = 1 - \alpha$, если для всех $s < t$ $\tau^m(s) = 1 - \alpha$ и инвестиции определяются условием (22.20). Если в истории происходит другое событие, то элита выбирает ставку налога $\tau^m = 1$ и представители среднего класса не осуществляют инвестиций. Будет ли такой набор стратегий являться СПР? Во-первых, нетрудно убедиться, что у представителей среднего класса не существует приносящих прибыль отклонений, так как в каждом периоде времени они выбирают свой наилучший ответ на налоговую политику на равновесной траектории, следующий из условия (22.20). Чтобы проверить, существует ли приносящее прибыль отклонение для элиты, заметим, что при таком выборе стратегии налоговые поступления составляют $\phi(1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}\beta^{\alpha/(1-\alpha)}A^m\theta^m\bar{L}$, и поэтому трансферт равен:

$$\frac{\phi}{1-\beta}(1-\alpha)\alpha^{-(1-2\alpha)/(1-\alpha)}\beta^{\alpha/(1-\alpha)}A^m\theta^m\bar{L}. \qquad (22.31)$$

С другой стороны, если в некотором периоде времени элита отклоняется от этой стратегии, то наилучшим отклонением для нее будет ставка налога $\tau^m = 1$. Тогда в этом периоде налоговые доходы составят:

$$\phi\alpha^{-(1-2\alpha)/(1-\alpha)}\beta^{\alpha/(1-\alpha)}A^m\theta^m\bar{L}. \qquad (22.32)$$

После такого отклонения рассмотрим равновесную последовательность в единственном СМР, которое является наихудшим равновесием в этой модели и полезность элиты в нем начиная с момента отклонения равна нулю (см. приложение C). Следовательно, описанная выше последовательность стратегий будет равновесием, если значение выражения (22.31) больше значения выражения (22.32) или равно ему. Это условие выполняется, если $\beta \geq \alpha$. Из этих рассуждений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 22.9. *Рассмотрим игру с ограблением и предположим, что условие* 22.1 *не выполняется. Тогда если* $\beta \geq \alpha$, *то существует СПР, в котором* $\tau^m(t) = 1 - \alpha$ *для всех* t.

Доказательство. См. упражнение 22.12. ■

Важное следствие из этого утверждения состоит в том, что в обществах, где проблема ограбления имеет большое значение (например, потому что инвестиции осуществляются в достаточно длительные проекты), равновесное распределение ресурсов в СМР с большой вероятностью будет не оптимальным по Парето, и в экономике существует возможность улучшить его в рамках СПР с помощью неявной договоренности между элитой и другими группами общества. В СПР, описанном выше, уровень благосостояния всех агентов превышает их уровень благосостояния в СМР. Поэтому из этого анализа следует, что выбор СМР или СПР в качестве концепции равновесия имеет важные последствия для структуры равновесия и его эффективности. Несмотря на то что использование той или иной концепции равновесия является выбором ученого, различные концепции соответствуют различным жизненным ситуациям. Например, СМР может быть намного более подходящим выбором, если институциональное устройство экономики, частота взаимодействий между агентами и история делают координацию и взаимное доверие маловероятными, в то время как СПР может быть использовано для моделирования равновесия в обществах, где между различными сторонами конфликта интересов может быть достигнуто взаимное доверие.

22.5.3. Внедрение технологий

Еще одной причиной ограбления, которая на практике может оказаться более важной, чем временная последовательность налогообложения, является внедрение технологий предпринимателями. Многие важные решения о внедрении технологий делаются на долгосрочную перспективу, и поэтому будущие ставки налога могут иметь большое значение при принятии таких решений. Из анализа в предыдущих главах следует важность решений о внедрении технологий в контексте экономического роста, поэтому новый тип политэкономических взаимодействий, который возникает вследствие таких решений, представляет как практический, так и теоретический интерес. Дальнейший анализ также покажет, что СПР также может быть не оптимальным в смысле Парето в динамической политэкономической игре.

Вернемся к начальной модели, где решение о налоговой ставке в периоде времени $t + 1$ принимается в периоде t (то есть причина ограбления, описанная в подпараграфе 22.5.2, отсутствует). Предположим, что в периоде времени $t = 0$, до того, как были выбраны какие-либо экономические решения или меры экономической политики, представители среднего класса получают возможность осуществить инвестиции в увеличение своей производительности. В частности, допустим, что издержки осуществления инвестиций в производительность A^m заданы неотрицательной, дифференцируемой и строго выпуклой функцией $\Gamma(A^m)$. Такие инвестиции осуществляются единственный раз, и после этого производительность всегда равна A^m.

После осуществления инвестиций в технологию игра протекает так же, как и в предыдущей модели. Остановимся на случае, когда условие 22.1 не выполняется. Так как инвестиции в технологию осуществляются однажды, СМР и СПР единственны (см. утверждение 22.7) и ставка налога в них задается равенством $\tau^{RE} \equiv 1 - \alpha$ для всех периодов времени. Поэтому условие первого порядка для внутреннего решения задачи выбора технологии представителем среднего класса выглядит как:

$$\Gamma'(A^m) = \frac{1-\alpha}{\alpha(1-\beta)}\beta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\tau^{RE})^{\alpha/(1-\alpha)}\bar{L}. \tag{22.33}$$

В этом случае нетрудно увидеть, что распределения ресурсов в СМР и СПР будут не оптимальны по Парето. Действительно, если элита имеет возможность принять обязательство о последовательности налоговых ставок в периоде $t = 0$, то она выберет низкие налоги. Чтобы убедиться в этом, предположим, что элита действительно имеет возможность выбрать последовательность ставок налога в периоде $t = 0$. Тогда задача оптимизации для элиты состоит в максимизации налоговых сборов при заданном условии связи между налогом и технологией (22.33). Другими словами, элита максимизирует значение $\phi\tau^m(\beta(1-\tau^m))^{\alpha/(1-\alpha)}A^m\theta^m\bar{L}/\alpha$ при ограничении (22.33). Ограничение (22.33) описывает связь между ожидаемыми будущими ставками налога и выбором технологии.

Условие первого порядка для внутреннего решения задачи выглядит как

$$A^m - \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\tau^m}{1-\tau^m}A^m + \tau^m\frac{dA^m}{d\tau^m} = 0, \tag{22.34}$$

где производная $dA^m/d\tau^m$ описывает влияние будущих налогов на выбор технологии в периоде времени $t = 0$. Выражение для этой производной следует из дифференцирования уравнения (22.33) (с τ^m вместо τ^{RE}):

$$\frac{dA^m}{d\tau^m} = -\frac{(\beta(1-\tau^m))^{\alpha/(1-\alpha)}\bar{L}}{\alpha(1-\beta)\Gamma''(A^m)} < 0.$$

Поэтому решением уравнения (22.34) будет некоторая ставка налога $\tau^{TA} < \tau^{RE} \equiv 1 - \alpha$. Следовательно, если элита имеет возможность принять обязательство о будущих ставках налога, она выберет более низкие налоги в будущем для стимулирования улучшения производительности представителями среднего класса. Невозможность принятия обязательства о такой налоговой политике ведет к большему числу искажений в экономике (и к не оптимальному по Парето распределению ресурсов). Следующее утверждение резюмирует этот результат.

Утверждение 22.10. *Рассмотрим игру с внедрением технологий и предположим, что условие* 22.1 *не выполняется и* $\phi > 0$. *Тогда в единственном СМР и в единственном СПР* $\tau^m(t) = \tau^{RE} \equiv 1 - \alpha$ *для всех* t. *Если у элиты есть возможность принять обязательство о налоговой политике в периоде времени* $t = 0$, *то она выберет меньшую ставку налога* $\tau^{TA} < \tau^{RE}$ *в* $t = 0$.

В отличие от чистой проблемы ограбления, где СПР позволяет предотвратить дополнительную неэффективность (см. утверждение 22.9) в игре с внедрением технологий неэффективность сохраняется и в СПР. Причина этого в том, что представители среднего класса осуществляют инвестиции в технологии лишь однажды в начальный момент времени и после этого обладают единственными оптимальными стратегиями в конкурентном равновесии, поэтому у них отсутствует возможность использования стратегии наказания, зависящей от истории (когда после отклонения лучший ответ предпринимателя включает в себя выбор более низкого или нулевого уровня инвестиций). Это утверждение демонстрирует ограниченную возможность удерживать налог низким с помощью неявного договора. Такой договор не только требует высокого значения нормы дисконтирования ($\beta \geq \alpha$), но и частых инвестиций представителями среднего класса, так что они предоставляют правдоподобную угрозу элите, если она выбирает отклонение от обещанной ранее политики. Если такой неявный договор невозможен, то роль экономических институтов в ограничении будущей экономической политики становится более важной.

22.6. Неэффективные экономические институты: первый взгляд

Экономические институты задают рамки, в которых происходит принятие решений об экономической политике. Далее мы будем использовать модель из предыдущего параграфа, чтобы определить (1) условия, при которых экономические институты могут наложить ограничения на искажающую политику и (2) условия, при которых экономические институты развиваются в другом направлении и элита использует неэффективную политику, ведущую к снижению выпуска и прекращению экономического развития. Чтобы донести основные идеи наиболее простым способом, мы рассмотрим два прототипичных экономических института, которые влияют на выбор элитой экономической политики:

1. *Степень защиты права собственности:* в экономике могут существовать конституционные или другие ограничения на уровень перераспределительного налогообложения и экспроприации. В частности допустим, что существует возможность конституционно ограничить ставку налога максимальным значением $\bar{\tau}$. Более того предположим, что значение $\bar{\tau}$ определяется в начале игры и не изменяется в дальнейшем.
2. *Регулирование технологии:* эти институты связаны с прямыми и непрямыми факторами, влияющими на производительность фирм и индивидов.

Из анализа манипулирования ценами факторов производства следует частичный ответ на один из вопросов, поставленных выше: почему политическая система использует неэффективные инструменты? Полный анализ этого вопроса требует использования модели с более широким выбором фискальных инструментов, например паушальных налогов. Упражнение 22.16 посвящено предварительному анализу такой модели. Утверждения 22.5 и 22.6 являются первым шагом в ответе на вопрос, так как из них следует, что равновесная ставка налога строго превышает ставку, при которой налоговые доходы достигают максимума. Наша первая задача состоит в выводе из этих наблюдений некоторых следствий для конституционного ограничения на ставку налога для элиты.

22.6.1. Возникновение защиты права собственности

Рассмотрим модель экономики из предыдущего параграфа, однако предположим, что в момент времени $t = 0$ элита имеет возможность выбрать некоторое значение $\bar{\tau}$ на отрезке $[0, 1]$ как определенную конституцией максимальную ставку налога. Тогда все будущие налоговые ставки не могут превышать $\bar{\tau}$. Низкое значение $\bar{\tau}$ предоставляет среднему классу большую степень защиты права собственности. Очевидный вопрос состоит в том, почему конституционный закон, накладывающий ограничение $\bar{\tau} < 1$, будет заслуживать доверия граждан. Мы не будем анализировать этот вопрос и предположим, что такое конституциональное ограничение может быть установлено (однако такое предположение в некотором смысле противоречит предположению о том, что принятие элитой обязательств о будущей налоговой политике невозможно). Далее мы попробуем выяснить, будет ли элита заинтересована накладывать такое ограничение, если она обладает такой возможностью, то есть предпочтет ли она выбор $\bar{\tau} < 1$ выбору $\bar{\tau} = 1$.

Утверждение 22.11. *В модели без проблемы ограбления и внедрения технологий элита предпочтет ставку налога* $\overline{\tau} = 1$.

Доказательство этого утверждения очевидно: при отсутствии проблемы ограбления и внедрения технологий снижение ставки налога ведет к снижению полезности элиты. Из этого утверждения следует, что если экономические институты устанавливаются элитой (которая будет иметь политическую власть и в будущем) и в экономике отсутствует проблема ограбления, то элита не получает выгоду от введения ограничений на будущие ставки налога и не принимает меры по дальнейшему улучшению защиты права собственности.

Этот результат изменяется в том случае, когда в экономике существует проблема ограбления. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим модель с ограблением (когда решение о ставке налога в периоде t принимается после того как определено значение капитала в периоде t). Остановимся на анализе СМР и общего случая, когда присутствуют оба мотива присвоения дохода и манипулирования ценами факторов производства.

Утверждение 22.12. *Рассмотрим игру с ограблением и предположим, что выполняется условие* 22.1 *и* $\phi > 0$. *Тогда в единственном СМР* $\tau^m(t) = \overline{\tau}$ *при всех* t. *В момент времени* $t = 0$ *элита предпочтет установить конституционное ограничение* $\overline{\tau} = \tau^{COM} < 1$.

Доказательство. См. упражнение 22.13. ■

Это утверждение нетрудно описать интуитивно: если в экономике существует проблема ограбления, то из утверждения 22.8 следует, что в единственном СМР ставка налога $\tau^m = 1$. Однако такое равновесие не оптимально по Парето, действительно, если элита имеет возможность принять обязательство о ставке налога $\overline{\tau} = \tau^{COM}$, то она может увеличить свое потребление (а также потребление среднего класса и работников). Если элита имеет возможность использовать экономические институты для регулирования будущих налогов, например накладывая конституционные ограничения, то она будет использовать эту возможность для стимулирования инвестиций. Манипулируя экономическими институтами, элита может достигнуть желаемой экономической политики (в этой простой модели элита принимает обязательство о ставке налога, при которой ее полезность достигает максимума).

Из этого результата следует, что при некоторых обстоятельствах элита может стремиться изменить экономические институты и предоставить производителям дополнительную защиту права собственности. Однако заметим, что в этом утверждении важно ограничение на СМР. Если мы рассмотрим стратегии наказания, зависящие от истории, и остановимся на СПР, то элита сможет улучшить распределение ресурсов в СМР из утверждения 22.9 и, в зависимости от параметризации модели, в некоторых случаях даже неявно (и достоверно) принять обязательство о ставке налога, равной τ^{RE} в каждом периоде времени. В этом случае у нее будет меньше необходимости в изменении экономических институтов и принятии ограничений на будущие ставки налога. То, какая из концепций теоретико-игрового равновесия является более подходящей в этой модели, зависит от ожиданий различных групп агентов и от степени координации между ними (что обычно определяется историческими и другими институциональными факторами).

Если причиной неэффективности в экономике является внедрение технологий, а не проблема ограбления (возникающая из-за момента выбора ставки налога), то у элиты будет большая необходимость в изменении экономических институтов, даже если мы остановимся на анализе СПР. Этот результат представлен в следующем утверждении.

Утверждение 22.13. *Рассмотрим модель с внедрением технологий и предположим, что условие* 22.1 *не выполняется и* $\phi > 0$. *Тогда в единственном СПР и в единственном СМР соблюдается условие* (22.28) $\tau^m(t) = \tau^{RE} \equiv 1 - \alpha$. *В момент времени* $t = 0$ *элита предпочтет установить* $\bar{\tau} = \tau^{TA} < 1 - \alpha$, *заданную в утверждении* 22.10.

Доказательство. См. упражнение 22.14. ■

В этом утверждении говорится о том, что если долгосрочные инвестиции и решения о внедрении технологии важны в экономике, то неявные обещания из утверждения 22.9 не могут использоваться элитой. В этом случае для стимулирования инвестиций во внедрение подходящих технологий и обеспечения безопасности представителей среднего класса необходимо предоставление явных правдоподобных гарантий с помощью экономических институтов. Поэтому, несмотря на то что неявные обещания и другие неформальные меры в некоторых обстоятельствах могут играть роль экономических институтов, во многих случаях возможность использования их в этой роли достаточно ограниченна. Поэтому конституционные ограничения на использование искажающей экономической политики и экспроприацию (если они возможны) могут возникнуть в политэкономическом равновесии эндогенно как замена или улучшение таких неявных обещаний.

22.6.2. Блокирование экономического развития

В подпараграфе 22.6.1 мы описали выбор экономических институтов в момент времени $t = 0$ с целью предоставления представителям среднего класса большей степени защиты права собственности и стимулирования инвестиций. Такие экономические институты играют важную роль на практике, и межстрановые различия в степени защиты права собственности предпринимателей, вероятно, могут объяснить часть различий в уровне развития экономик. Однако уровень защиты права собственности и ограничения на налоговую политику представляют собой лишь один аспект экономических институтов. Во многих обществах элита вместо того, чтобы поощрять экономическую активность, активно стремится блокировать процесс экономического развития. Почему элита предпочитает выбирать столь неэффективную экономическую политику, ведущую к снижению производительности предпринимателей и блокирующую процесс экономического развития общества?

Чтобы продемонстрировать основные идеи в наиболее простой форме, расширим базовую модель из этого параграфа в одном направлении: предположим, что в момент времени $t = 0$ правительство (то есть элита, обладающая политической силой) выбирает политику, влияющую на технологический выбор производителей, которую мы обозначим как $g \in \{0, 1\}$. Этот выбор может быть инвестициями в инфраструктуру или обеспечением законности и порядка (где $g = 1$ соответствует созданию лучшего инвестиционного климата). С другой стороны, выбор $g = 0$ может напрямую соответствовать действиям элиты, направленным на предотвращение внедрения технологий представителями среднего класса. Предположим, что значение $g \in [0, 1]$ влияет на производительность представителей среднего класса во все будущие периоды времени, и в частности $A^m = A^m(g)$, где $A^m(1) > A^m(0)$. Для упрощения дальнейших выкладок допустим, что выбор $g = 1$ не несет издержек и не влияет на производительность элиты. Нас интересует вопрос, выберет ли элита политику $g = 1$, увеличивающую производительность представителей среднего класса или будет стремиться предотвратить внедрение ими новых технологий.

Если единственным мотивом элиты является присвоение дохода, то элита будет заинтересована в том, чтобы представители среднего класса владели наилучшей технологией.

Утверждение 22.14. *Предположим, что условие* 22.1 *не выполняется и* $\phi > 0$. *Тогда в экономическом равновесии всегда имеет место равенство* $w = 0$ *и в единственном СМР элита выбирает политику* $g = 1$.

Это утверждение описывает ряд случаев, когда элита не блокирует решения представителей среднего класса о внедрении новых технологий. Его доказательство очевидно, так как выбор политики $g = 1$ ведет к росту налоговых доходов и не имеет других последствий для потребления элиты. Следовательно, в этом случае элита выигрывает от роста выпуска представителей среднего класса и поэтому предпочитает, чтобы они были максимально производительны. На интуитивном уровне, в экономике отсутствует конкуренция между элитой и средним классом (и на рынках факторов производства, и в политической сфере), поэтому рост производительности среднего класса позволяет элите увеличить налоговые доходы.

Ситуация изменяется в случае, когда элита стремится к манипулированию ценами факторов производства. Для иллюстрации этого случая предположим, что в модели задан верхний предел для ставки налога $\bar{\tau} < 1$.

Утверждение 22.15. *Предположим, что выполняется условие* 22.1 *и* $\phi = 0$, $\bar{\tau} < 1$ *и* $(1-\bar{\tau})^{1/(1-\alpha)} < A^e / A^m$. *Тогда в любом СМР и в любом СПР элита выбирает политику* $g = 0$.

Доказательство. См. упражнение 22.15. ■

На интуитивном уровне, если $\bar{\tau} < 1$, то спрос на труд со стороны представителей среднего класса достаточно высок для того, чтобы равновесная заработная плата была положительной даже при максимальной ставке налога. Так как $\phi = 0$, налогообложение не приносит дохода элите и ее единственная цель состоит в как можно большем снижении спроса на труд со стороны представителей среднего класса (и поэтому заработной платы). Следовательно, из структуры механизма манипулирования ценами факторов производства следует, что если элита имеет такую возможность, то она будет выбирать экономические институты, снижающие производительность ее конкурентов (представителей среднего класса). Утверждение 22.15 показывает, какие действия элита предпринимает для того, чтобы напрямую снизить производительность конкурирующих с ней производителей, тем самым тормозя или блокируя процесс экономического развития. Аналогичный эффект наблюдается и в случае, когда политическая власть элиты оспаривается другими группами общества (см. упражнение 22.16).

В этом параграфе мы показали, как политические предпочтения элиты преобразуются в предпочтения на множестве экономических институтов. Если элита предпочитает принять обязательство о низких налогах, то это ведет к возникновению в экономике институтов, предоставляющих большую степень защиты права собственности. С другой стороны эффекты манипулирования ценами факторов производства или политического замещения могут вынудить элиту выбирать меры экономической политики, препятствующие внедрению технологий и в целом снижающие производительность конкурирующих групп общества.

22.7. Неоднородные предпочтения, общественный выбор и медианный избиратель*

Наша следующая задача состоит в отходе от предположения о простом обществе и анализе того как более общая и реалистичная форма неоднородности среди членов общества воздействует на выбор экономической политики. Мы сделаем это в два шага. В этом параграфе мы представим краткий обзор механизмов принятия политэкономических решений в обществе с неоднородными агентами. Основным инструментом в данном контексте является *теорема о медианном избирателе* и близко связанная с ней *теорема Даунса о сходимости политики.* Мы покажем, как две эти теоремы позволяют охарактеризовать политику в демократическом обществе при (ограниченной) неоднородности среди агентов. Затем в параграфе 22.8 мы, используя эти результаты, покажем, что качественные выводы из параграфа 22.2 обобщаются для модели с неоднородными предпринимателями. Основной результат параграфа 22.8 состоит в том, что утверждение о выборе элитой искажающей (неэффективной) политики вследствие желания присвоить доход некоторой части населения экономики присутствует и в более общих моделях, чем в рассмотренных в параграфе 22.2 моделях простого общества.

Теорема о медианном избирателе (ТМИ) имеет долгую историю и применяется в экономике во множестве различных областей. Принимая во внимание ее широкое использование в политэкономических моделях, в начале этого параграфа мы сформулируем теорему и приведем ее доказательство. Несмотря на свою простоту и элегантность, ТМИ не может применяться в том случае, когда меню выбора мер политики не может быть сведено к одномерному выбору. В заключение этого параграфа мы опишем некоторые альтернативные способы агрегирования неоднородных предпочтений в случае многомерного принятия решений. Этот анализ также демонстрирует, почему во многих случаях политическое равновесие может быть представлено как результат максимизации взвешенной общественной функции благосостояния.

22.7.1. Основные положения

Рассмотрим абстрактную экономику, состоящую из множества индивидов $\mathcal{H}$. В этом параграфе мы предположим, что множество $\mathcal{H}$ конечно и обозначим число индивидов в экономике символом H, однако результаты этого параграфа могут быть продолжены для случая, когда множество $\mathcal{H}$ континуально. Индивид $i \in \mathcal{H}$ обладает следующей функцией полезности:

$$u(x_i, Y(p), p \mid \alpha_i).$$

Переменная x_i здесь обозначает его действие, лежащее во множестве доступных действий X_i. Переменная p представляет собой вектор политических переменных (например, институты, меры экономической политики и другие результаты коллективного выбора) и лежит в множестве политических мер $\mathcal{R}$ (символ $\mathcal{P}$ уже использован для обозначения множества политических институтов в начале этой части книги). Вектор $Y(p)$ является вектором равновесных экономических переменных, таких как цены или экстерналии, возникающие в результате действий агентов или выбора политики. Вместо того чтобы выписывать различные функции полезности u_i для всех агентов, мы параметризуем различия в предпочтениях агентов переменной α_i. Такая параметризация не ограничивает общность (просто определим $u_i(\cdot) \equiv u_i(\cdot \mid \alpha_i)$) и будет удобна в дальнейшем анализе. Очевидно, что равновесные переменные, например цены, в векторе $Y(p)$ могут не быть определены единственным образом при заданном векторе политических переменных p. Несмотря на это, так как множественность равновесий не является предметом данного анализа, мы будем игнорировать это наблюдение и предположим, что значение $Y(p)$ определено единственным образом.

Мы также предположим, что целевая функция агента является строго квазивогнутой и поэтому каждый индивид имеет единственное оптимальное действие:

$$x_i(p,\ Y(p),\ \alpha_i) = \arg\max_{x_i \in X_i} u(x_i,\ Y(p),\ p \mid \alpha_i).$$

Подставляя этот оптимальный выбор индивида i в его функцию полезности, получаем *косвенную функцию полезности* индивида i $U(p,\ \alpha_i)$, которая описывает его ранжирование политик $p \in \mathcal{R}$. В некоторых случаях для обозначения того, что индивид i слабо или сильно предпочитает политику p политике π' (в соответствии с функцией $U(p, \alpha_i)$), мы будем использовать выражение $p \succeq p'$ или выражение $p \succ p'$ соответственно.

22.7.2. Голосование и парадокс Кондорсе

Агрегирование предпочтений неоднородных агентов с помощью голосования или других механизмов не всегда является простой и даже в принципе возможной задачей. Теорема Эрроу о несуществовании общественной функции полезности из теории общественного выбора описывает этот вопрос с точки зрения нормативного подхода. Схожая проблема возникает в контексте голосования. Наиболее просто она может быть продемонстрирована с помощью широко известного примера *парадокса Кондорсе*, который мы изложим далее.

Рассмотрим общество, состоящее из трех индивидов, 1, 2 и 3, и трех альтернатив выбора, a, b и c. Предпочтения индивидов имеют следующий вид:

$$1\ a \succ c \succ b,$$

$$2\ b \succ a \succ c,$$

$$3\ c \succ b \succ a.$$

Более того, сделаем дополнительные предположения о структуре механизма политического выбора и допустим, что он удовлетворяет следующим трем требованиям, которые вместе составляют политическую систему «прямой демократии с открытой повесткой дня».

А1. *Прямая демократия.* Граждане принимают политические решения большинством голосов на прямых выборах.

А2. *Искреннее голосование.* В каждом голосовании каждый гражданин выбирает альтернативу, приносящую ему наибольшую полезность в соответствии с его предпочтениями в политике $U(p;\ \alpha_i)$. *Стратегическое голосование*, когда каждый индивид делает выбор, максимизирующий его функцию полезности, будет описано далее.

А3. *Открытая повестка дня.* Граждане участвуют в голосовании о парах политических альтернатив таким образом, что политика, получившая поддержку в одном раунде выборов, ставится на голосование против другой альтернативы в следующем раунде и множество альтернатив включает в себя все доступные политики. Позже мы заменим предположение об открытой повестке дня предположением о том, что политические альтернативы предлагаются политическими партиями, что в некотором смысле приведет нас от прямой демократии к непрямой или представительной демократии.

Рассмотрим голосование о политиках a и b. Агенты 2 и 3 предпочитают альтернативу b, поэтому она будет выбрана большинством голосов. Далее, по предположению об открытой повестке дня происходит голосование между альтернативами b и c. В этом случае агенты 1 и 3 предпочитают альтернативу c, поэтому она становится новым победителем. Далее на голосование выносятся альтернативы c и a, и здесь агенты 1 и 2 предпочитают альтернативу a, которая выбирается большинством голосов. Следовательно, в этом случае альтернативы формируют цикл, или, другими словами, в процессе голосования не достигается равновесия, в котором принимается единственное политическое решение.

Для дальнейших ссылок определим понятие *победителя по Кондорсе* как такой выбор политики, который не приводит к подобным циклам.

Определение 22.1. *Определим* победителя по Кондорсе *как такую политику p^*, которая побеждает на попарном голосовании с любой другой доступной политикой.*

Очевидно, что в вышеописанном примере парадокса Кондорсе победителя по Кондорсе не существует.

22.7.3. Предпочтения с одним пиком

Предположим, что пространство мер политики одномерно, то есть переменная p вещественна и $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$. В этом случае простым способом избежать парадокса Кондорсе является предположение о том, что предпочтения всех избирателей имеют *один пик*. Далее мы убедимся в том, что предположение о том, что множество $\mathbb{R}$ одномерно, критично в данном контексте и предпочтения с одним пиком в общем случае не могут быть формально определены на многомерном пространстве мер политики. Вначале определим *предпочтительную политику*, или точку счастья (политического) избирателя i. Для упрощения обозначений предположим, что предпочтения определены единственным образом и заданы как

$$p(\alpha_i) \equiv \arg\max_{p \in \mathcal{R}} U(p;\ \alpha_i).$$

Мы будем говорить, что избиратель i обладает предпочтениями с одним пиком, если его ранжирование различных политических альтернатив определяется их относительным расстоянием до точки счастья (α_i). В общем случае сформулируем следующее определение.

Определение 22.2. *Пусть $p(\alpha_i) \in \mathcal{R}$ является единственной точкой счастья индивида i на множестве альтернатив $\mathcal{R}$. Тогда предпочтения гражданина i о выборе политики обладают* одним пиком, *если и только если для всех $p'' \in \mathcal{R}$ и $p' \in \mathcal{R}$, таких, что $p'' < p' < p(\alpha_i)$ или $p'' > p' > p(\alpha_i)$*

$$U(p'';\ \alpha_i) < U(p';\ \alpha_i).$$

Если $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$, то предпочтения с одним пиком эквивалентны строгой квазивогнутости функции $U(p'';\ \alpha_i)$. Нетрудно убедиться, что в парадоксе Кондорсе не все агенты обладают предпочтениями с одним пиком. Например, если мы упорядочим альтернативы как a, b, c, то агент 1, чьи предпочтения имеют вид $a \succ b \succ c$, не обладает предпочтениями с одним пиком (если мы упорядочим альтернативы другим способом, то предпочтения одного из двух других агентов не будут иметь одного пика, см. упражнение 22.18).

В следующей теореме утверждается, что если предпочтения всех агентов имеют один пик, то победитель по Кондорсе всегда существует. Прежде чем сформулировать теорему, определим понятие *медианного избирателя* в обществе. Пользуясь предположением о том, что каждый индивид обладает единственной точкой счастья на множестве $\mathcal{R}$, мы можем расположить индивидов в соответствии с их точками счастья $p(\alpha_i)$. Также, чтобы устранить неясности, предположим, что число агентов H нечетно. Тогда медианным избирателем является индивид, имеющий ровно $(H - 1)/2$ точек счастья слева и ровно $(H - 1)/2$ точек счастья справа от собственной точки счастья. Другими словами, его точка счастья лежит в центре распределения точек счастья всех членов общества. Мы обозначим этого индивида как α_M, а его точку счастья (предпочтительную политику) как p_M.

Теорема 22.1 (теорема о медианном избирателе). *Допустим, что число H нечетно, выполняются предположения* A1 *и* A2 *(из подпараграфа* 22.7.2) *и что предпочтения всех избирателей о выборе политики на заданном упорядоченном множестве политических альтернатив $\mathcal{R}$ имеют один пик. Тогда всегда существует единственный победитель по Кондорсе, который совпадает с медианной точкой счастья p_M. Более того, альтернатива p_M является единственной равновесной политикой (устойчивой точкой) при мажоритарном голосовании с открытой повесткой дня, то есть в предположениях* A1–A3.

Доказательство. Упорядочим индивидов по их точке счастья $p(\alpha_i)$ и обозначим медианную точку счастья как p_M. Из предположения о нечетности числа H следует, что p_M корректно определена единственным образом (при этом α_M может не быть единственной). Рассмотрим голосование о выборе между p_M и некоторой другой политикой $p' < p_M$. Из определения предпочтений с одним пиком следует, что для любого индивида, для которого выполняется неравенство $p_M < p(\alpha_i)$, имеем $U(p_M; \alpha_i) > U(p'; \alpha_i)$. Тогда по предположению A2 эти индивиды будут искренне голосовать за альтернативу p_M. Тогда коалиция индивидов, поддерживающих политику p_M, составляет большинство. Для случая $p' > p_M$ теорема доказывается аналогично. ■

Предположение о том, что число индивидов в обществе нечетно, необходимо лишь для упрощения формулировки и сокращения ее доказательства. Упражнение 22.19 посвящено обобщению теоремы на случай, когда H четно, и ее доказательству в этом случае.

Предположение об искреннем голосовании является более важным, чем число индивидов в обществе. Очевидно, что рациональные агенты могут отклоняться от правдивого изъявления своих предпочтений (и, следовательно, от искреннего голосования), если они получают выгоду от такого поведения. Поэтому логичный вопрос состоит в том, существует ли обобщение ТМИ для случая, когда индивиды голосуют не искренне. Ответ на этот вопрос положительный. Чтобы убедиться в этом, заменим предположение об искреннем голосовании на предположение о стратегическом голосовании.

A2′. *Стратегическое голосование.* Определим *функцию выбора* для индивида i при попарном голосовании между альтернативами p' и p'' как $v_i(p', p'') \in \{p', p''\}$. Для всех $p' \in \mathcal{R}, p'' \in \mathcal{R}$ определим правило выбора (подсчета голосов) в обществе с H гражданами как $V\colon \{p', p''\}^H \to \{p', p''\}$ (например, при мажоритарном правиле V^{maj} альтернатива p' предпочитается альтернативе p'', если она получает больше голосов избирателей, чем p''). Определим результат применения правила выбора V к попарному голосованию $\{p', p''\}$ как $V(v_i(p', p''), v_{-i}(p', p''))$, где $v_i(p', p'')$ обозначает выбор индивида i, а вектор $v_{-i}(p', p'')$ — выбор всех других индивидов. Тогда стратегическое голосование требует, чтобы поведение каждого индивида было наилучшим ответом на выбор других индивидов, то есть

$$\upsilon_i(p', p'') \in \arg \max_{\tilde{\upsilon}_i(p', p'')} U(V(\tilde{\upsilon}_i(p', p''), \upsilon_{-i}(p', p'')); \alpha_i).$$

Другими словами при стратегическом голосовании предполагается, что каждый индивид выбирает стратегию голосования, при которой его полезность достигает максимума при заданных стратегиях голосования других агентов.

Наконец напомним, что *слабо доминирующей* стратегией для индивида i называется стратегия, при которой выигрыш индивида i при использовании им любой другой стратегии независимо от выбора стратегий всеми остальными игроками больше его выигрыша или равен ему.

Теорема 22.2. Теорема о медианном избирателе при стратегическом голосовании. *Предположим, что число H нечетно, выполняются предположения* A1 *и* A2$'$ *и предпочтения всех избирателей на заданном упорядоченном множестве политических альтернатив $\mathcal{R}$ имеют один пик. Тогда искреннее голосование является слабо доминирующей стратегией для всех избирателей и в игре существует единственное равновесие по Нэшу в слабо доминирующих стратегиях. В этом равновесии медианная точка счастья p_M является победителем по Кондорсе.*

Доказательство. В данном случае правило выбора (политическая система общества) V^{maj} является мажоритарным. Рассмотрим две политики $p' \in \mathcal{R}$, $p'' \in \mathcal{R}$ и зафиксируем индивида $i \in \mathcal{H}$. Без ограничения общности допустим, что $U(p'; \alpha_i) \geq U(p''; \alpha_i)$. Вначале предположим, что для любого $\upsilon_i \in \{p', p''\}$ $V^{\mathrm{maj}}(\upsilon_i, \upsilon_{-i}(p', p'')) = p'$ или $V^{\mathrm{maj}}(\upsilon_i, \upsilon_{-i}(p', p'')) = p''$, то есть индивид i *не* является ключевым избирателем. Тогда выбор $\upsilon_i(p', p'') = p'$ будет наилучшим ответом для индивида i. Далее предположим, что индивид i является ключевым избирателем, то есть

$$V^{\mathrm{maj}}(\upsilon_i(p', p''), \upsilon_{-i}(p', p'')) = p', \text{ если } \upsilon_i(p', p'') = p',$$

и

$$V^{\mathrm{maj}}(\upsilon_i(p', p''), \upsilon_{-i}(p', p'')) = p'' \text{ в противном случае.}$$

Здесь очевидно, что выбор $\upsilon_i(p', p'') = p'$ будет наилучшим ответом для индивида i. Так как такие рассуждения можно применить к любому $i \in \mathcal{H}$, из них следует, что искреннее голосование будет слабо доминирующей стратегией. Тогда теорема следует из теоремы 22.1. ■

Заметим, что в теореме 22.2 отсутствует утверждение, аналогичное второму утверждению в теореме 22.1 (о выборах с открытой повесткой дня). Это связано с тем, что предположение об открытой повестке дня ведет к тому, что игра не может быть корректно определена и поэтому теоретико-игровой анализ стратегического голосования становится невозможен. Более того, мы не можем утверждать, что искреннее голосование является оптимальной стратегией в динамической игре даже при предпочтениях с одним пиком (см. упражнение 22.20).

22.7.4. Конкуренция между политическими партиями и теорема Даунса о сходимости политики

До сих пор наш анализ был посвящен выбору между двумя политическими альтернативами на выборах с открытой повесткой дня, который может рассматриваться как экстремальный случай прямой демократии. ТМИ становится более важной и более сильной в анализе непрямой демократии, то есть в простой модели конкуренции между политическими партиями. Далее мы сделаем краткий обзор этой модели и выведем теорему Даунса о сходимости политики, которая является основой большого количества прикладных работ в политической экономии.

Допустим, что в игре существует победитель по Кондорсе и две политические партии, A и B, которые борются между собой за власть. Допустим, что партии не имеют идеологических мотивов и лишь желают прийти к власти. В частности, они обе максимизируют вероятность прихода к власти, например потому, что приход к власти приносит им ренту или полезность $Q > 0$.

Предположим, что обе партии одновременно анонсируют свой выбор политики и принимают обязательства об ее осуществлении в случае прихода к власти. Тогда поведение каждой партии может быть равновесием по Нэшу, соответствующим следующей паре задач максимизации:

$$\text{Партия A: } \max_{p_A} \mathbb{P}(p_A, p_B)Q \text{ и Партия B: } \max_{p_B}(1-\mathbb{P}(p_A, p_B))Q,$$

где параметр $Q > 0$ обозначает ренту, которую получает партия, пришедшая к власти, а $\mathbb{P}(p_A, p_B)$ — вероятность прихода к власти партии A в случае, когда политические платформы обеих партий заданы как p_A и p_B соответственно. Обозначим точку счастья медианного избирателя как p_M. Тогда, применяя ТМИ, получаем:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(p_A, p_B = p_M) = 0,\ \mathbb{P}(p_A = p_M, p_B) = \\ &= 1 \text{ и } \mathbb{P}(p_A = p_M, p_B = p_M) \in [0, 1].\end{aligned} \tag{22.35}$$

Последнее из уравнений (22.35) говорит о том, что если обе партии выбирают одну и ту же политику, то наилучшим ответом любого избирателя будет голосование за любую из них. В литературе в этом случае обычно делается предположение о рандомизации.

А4. *Рандомизация:* $\mathbb{P}(p_A = p_M, p_B = p_M) = 1/2$. Интуитивное объяснение этого предположения состоит в том, что если избиратели безразличны, то они голосуют случайным образом и вероятности прихода обеих партий к власти равны между собой.

Теорема 22.3. Теорема Даунса о сходимости политики. *Предположим, что в обществе за власть борются две партии, выполняется предположение* А4 *и предпочтения всех избирателей на заданном упорядоченном множестве политических альтернатив* $\mathcal{R}$ *имеют единственный пик. Тогда обе партии выбирают своей политической платформой медианную точку счастья* p_M.

Доказательство. Предположим, что теорема не верна. Тогда для одной из партий существует отклонение, приносящее ей выгоду. Например, если $p^A > p^B > p_M$, то одна из партий может анонсировать политику p_M и гарантированно выиграть выборы. Если $p^A \neq p_M$ и $p^B = p_M$, то партия A также может анонсировать политику p_M и увеличить вероятность прихода к власти до 1/2. ■

Обобщение этой теоремы, в котором не используется предположение А4, приведено в упражнении 22.21.

В этой теореме утверждается сходимость политик обеих партий и то, что политическая конкуренция приводит к выбору победителя по Кондорсе. Следовательно, если ТМИ имеет место, то демократический процесс принятия решений в режиме конкуренции между двумя партиями ведет к ситуации, в которой обе партии выбирают своей политической платформой точку счастья медианного избирателя. Поэтому ТМИ и теорема Даунса о сходимости политики позволяют нам упростить процесс агрегирования неоднородных предпочтений индивидов о выборе политики и утверждать, что при подходящих предположениях демократический процесс ведет к выбору политики, предпочитаемой медианным избирателем. В данном контексте важна теорема Даунса о сходимости политики, так как она является лучшей аппроксимацией демократического политического процесса, чем выборы с открытой повесткой дня.

Необходимо отметить, что в некотором смысле теорема 22.3 может ввести читателя в заблуждение. Если теорема верна для общества с двумя партиями, то у читателя может возникнуть впечатление о существовании общей тенденции сходимости политики в любом демократическом обществе. Во многих демократических обществах существует больше, чем две, партий. Естественным обобщением этой теоремы является случай существования трех и более партий. К сожалению, как показано в упражнении 22.22, этот результат невозможно обобщить для трех партий. Поэтому применение теоремы Даунса о сходимости политики в контексте других политических институтов требует осторожности. Теорема 22.3 также не верна, если в игре не существует победителя по Кондорсе. В частности если мы рассмотрим случай цикла, как в примере парадокса Кондорсе из подпараграфа 22.7.2, то в большинстве случаев в политической игре не существует равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. Анализу этого вопроса посвящено упражнение 22.22.

22.7.5. Ослабление предположения о предпочтениях с одним пиком

Предположение об одном пике предпочтений играет важную роль в выводе результатов теоремы 22.1, так как из него следует существование победителя по Кондорсе. Однако такое предположение слишком сильно и не имеет естественного продолжения для случая, когда голосование связано с более чем одним политическим выбором (см. упражнение 22.25). Если избиратели делают несколько политических выборов (или если выбор ведется относительно некоторой функции, как, например, в задаче нелинейного налогообложения), то для того, чтобы найти равновесную политику, необходимо наложить на процедуру голосования намного большее число ограничений. Возможно некоторое смягчение предположения о предпочтениях с одним пиком, которое позволяет ввести множество предпочтений с похожими свойствами в многомерном пространстве. Однако такое упражнение отдалило бы нас от анализа вопросов этой главы, и мы оставили его в качестве упражнения (см. упражнение 22.24). Вместо этого далее мы введем понятие *свойства единственности пересечения*, которое позволит нам доказать аналог теоремы 22.1 при несколько более слабых предположениях.

Определение 22.3. *Рассмотрим упорядоченное множество политик $\mathcal{R}$ и упорядочим избирателей в соответствии со значением параметра α_i. Тогда мы будем говорить о том, что предпочтения избирателей обладают свойством* единственности пересечения *на множестве политических альтернатив $\mathcal{R}$, если верно следующее утверждение:*

$$\text{если } p > p' \text{ и } \alpha_{i'} > \alpha_i \text{ или если } p < p' \text{ и } \alpha_{i'} < \alpha_i,$$

то из неравенства $U(p;\ \alpha_i) > U(p';\ \alpha_i)$ следует неравенство $U(p;\ \alpha_{i'}) > U(p';\ \alpha_{i'})$.

Пример 22.1. Рассмотрим следующий пример:

$$1\ a \succ b \succ c,$$

$$2\ a \succ c \succ b,$$

$$3\ c \succ b \succ a.$$

Нетрудно убедиться, что такие предпочтения не являются предпочтениями с одним пиком. Например, при упорядочении $a > b > c$ предпочтения игрока 2 имеют два пика: в a и в c. Чтобы увидеть, что эти предпочтения удовлетворяют требованию единственности пересечения, рассмотрим тот же порядок на множестве альтернатив и упорядочим игроков как 1, 2, 3. Тогда получаем:

$$\alpha = 2 : c \succ b \Rightarrow \alpha = 3 : c \succ b,$$

$$\alpha = 2 : \begin{matrix} a \succ c \\ a \succ b \end{matrix} \Rightarrow \alpha = 1 : \begin{matrix} a \succ c, \\ a \succ b. \end{matrix} \blacksquare$$

Отметим, что в то время, как единственность пика является свойством только предпочтений, свойство единственности пересечения связано с множеством предпочтений на заданном пространстве политических альтернатив $\mathcal{R}$ и поэтому является общим свойством предпочтений и мер политики. Следующая теорема — обобщение теоремы 22.1.

Теорема 22.4. Расширенная теорема о медианном избирателе. *Допустим, что выполняются предположения* A1 *и* A2 *и предпочтения избирателей обладают свойством единственности пересечения. Тогда в игре всегда существует победитель по Кондорсе и он совпадает с точкой счастья медианного избирателя (избирателя α_M).*

Доказательство. Доказательство во многом повторяет доказательство теоремы 22.1. Рассмотрим медианного избирателя с параметром α_M с точкой счастья p_M. Рассмотрим альтернативную политику $p' > p_M$. Очевидно, что $U(p_M; \alpha_M) > U(p'; \alpha_M)$. Тогда из свойства единственности пересечения следует, что $U(p_M; \alpha_i) > U(p'; \alpha_i)$ для всех $\alpha_i > \alpha_M$. Так как α_M является медианным избирателем, большинство избирателей поддержат политику p_M. Аналогичные рассуждения для случая $p' < p_M$ завершают доказательство теоремы. ■

Из теоремы 22.4 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 22.5. Расширенная теорема Даунса о сходимости политики. *Предположим, что в игре за власть борются две партии, выполняется предположение* A4 *и предпочтения всех избирателей обладают свойством единственности пересечения. Тогда обе партии выбирают своей политической платформой точку счастья медианного избирателя p_M.*

Доказательство. См. упражнение 22.23. ■

22.7.6. Равновесная функция общественного благосостояния

ТМИ и теорема Даунса о сходимости политики используются в анализе многих задач политической экономии. Однако, как показано в упражнении 22.25, предположения, необходимые для применения этих теорем, не выполняются во многих интересных (в том числе простых) моделях.

Поэтому в работах по политической экономии был предложен ряд других правдоподобных подходов к агрегированию неоднородных предпочтений в демократическом обществе. Полный анализ этих подходов находится за пределами этой книги. Однако в свете дискуссии об эффективности экономики по Парето необходимо отметить одно из свойств многих из этих подходов. Во многих простых вариантах таких моделей (например, в ТМИ) равновесие эквивалентно решению задачи максимизации взвешенной общественной функции полезности в сокращенной форме, поэтому распределение ресурсов в нем является оптимальным по Парето (при ограничениях модели).

Чтобы проиллюстрировать это утверждение, опишем один из таких подходов — *модель вероятностного голосования*. В этой модели в избирательное поведение индивидов вносится случайный шум (например, потому что избиратели принимают во внимание некоторые не связанные с экономической политикой или идеологические характеристки партий, борющихся за власть). Наша задача — показать, как эта модель при выполнении ряда правдоподобных предположений приводит к простому равновесию, которое может быть представлено как решение задачи максимизации взвешенной общественной функции благосостояния.

Предположим, что общество разделено на G различных групп, каждая из которых состоит из континуума избирателей, и предпочтения и экономические характеристики всех членов одной группы совпадают. Как и в модели Даунса, в обществе происходит борьба за власть между двумя политическими партиями, A и B. Обозначим долю избирателей в группе g, голосующих за партию J, где $J = A, B$ как π_J^g, а долю избирателей, принадлежащих к группе g, как λ^g. Очевидно равенство $\sum_{g=1}^{J} \lambda^g = 1$. Ожидаемая доля голосов за партию J равна:

$$\pi_J = \sum_{g=1}^{G} \lambda^g \pi_J^g.$$

В предыдущих моделях все избиратели из группы g голосовали бы одинаково (за исключением случая, когда они безразличны в своем выборе). Идея вероятностного голосования состоит в том, чтобы сгладить такое поведение с помощью введения в избирательное поведение индивидов других мотивов. В частности, предположим, что индивид i из группы g имеет следующие предпочтения:

$$\tilde{U}_i^g(p, J) = U^g(p) + \tilde{\sigma}_i^g(J), \qquad (22.36)$$

если партия J приходит к власти, где переменная p обозначает вектор мер экономической политики, которые принимает партия, пришедшая к власти.

Слагаемое $\tilde{\sigma}_i^g(J)$ описывает неполитическую составляющую полезности, которую индивид получает от прихода партии $J = A$, B к власти. Предположим, что $p \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^K$, где K — натуральное число, возможно, большее единицы. Тогда $p \equiv (p^1, ..., p^K)$, возможно, является многомерным вектором мер политики. Функция $U^g(p)$ представляет собой косвенную функцию полезности агентов из группы g (которую ранее мы обозначали для индивида i как $U(p; \alpha_i)$) и описывает их экономические интересы.

Нормализуем $\tilde{\sigma}_i^g(A) = 0$, то есть положим

$$\tilde{U}_i^g(p, A) = U^g(p) \text{ и } \tilde{U}_i^g(p, B) = U^g(p) + \tilde{\sigma}_i^g. \tag{22.37}$$

В этом случае избирательное поведение индивида i может быть представлено следующим образом:

$$v_i^g(p_A, p_B) = \begin{cases} 1, \text{ если } U^g(p_A) - U^g(p_B) > \tilde{\sigma}_i^g, \\ \frac{1}{2}, \text{ если } U^g(p_A) - U^g(p_B) = \tilde{\sigma}_i^g, \\ 0, \text{ если } U^g(p_A) - U^g(p_B) < \tilde{\sigma}_i^g, \end{cases} \tag{22.38}$$

где переменная $\upsilon_i^g(p_A, p_B)$ обозначает вероятность события, в котором индивид голосует за партию A, переменная p_A — политическую платформу партии A и переменная p_B — политическую платформу партии B. Если индивид безразличен между двумя партиями (включая его идеологические взгляды), то он голосует случайным образом.

Предположим, что распределение не связанных с политикой выгод $\tilde{\sigma}_i^g$ для индивида i из группы g $\tilde{\sigma}_i^g$ задано гладкой функцией распределения H^g, определенной на вещественной прямой $(-\infty, +\infty)$ с соответствующей ей функции плотности распределения h^g. Случайные величины $\tilde{\sigma}_i^g$ распределены независимо между индивидами. Следовательно, доля голосов за партию A среди членов группы g равна:

$$\pi_A^g = H^g(U^g(p_A) - U^g(p_B)).$$

Далее для того, чтобы упростить изложение модели, предположим, что партии максимизируют ожидаемую полученную ими долю голосов избирателей. В этом случае партия A выбирает политическую платформу, при которой выражение

$$\pi_A = \sum_{g=1}^{G} \lambda^g H^g(U^g(p_A) - U^g(p_B)) \tag{22.39}$$

достигает максимума.

Партия B решает схожую задачу максимизации π_B, которая определена аналогичным образом. В частности, так как $\pi_B = 1 - \pi_A$, задача партии B состоит в минимизации π_A. Равновесный выбор политики тогда определяется как равновесие по Нэшу в игре с нулевой суммой, в которой обе партии одновременно анонсируют политику, при которой доля голосов за них достигает максимума. Вначале найдем условие первого порядка для партии A по ее собственному выбору политики p_A при заданной политике партии B p_B. Это условие первого порядка имеет следующий вид:

$$\sum_{g=1}^{G} \lambda^g h^g(U^g(p_A) - U^g(p_B)) DU^g(p_A) = 0,$$

где символ $DU^g(p_A)$ обозначает градиент функции $U^g(\cdot)$,который задается как

$$DU^g(p_A) = \left(\frac{\partial U^g(p_A)}{\partial p_A^1}, \ \ldots, \ \frac{\partial U^g(p_A)}{\partial p_A^K} \right)^T,$$

где переменная p_A^k соответствует k-му элементу вектора политики p_A. Так как задача для партии B симметрична, естественно ограничить внимание симметричным равновесием в чистых стратегиях. Действительно, если задачи максимизации для обеих партий строго вогнуты, то такое симметричное равновесие существует (см. упражнение 22.26). Очевидно, что в этом случае мы имеем сходимость политики $p_A = p_B = p^*$, поэтому $U^g(p_A) = U^g(p_B)$. Таким образом, в симметричном равновесии политики удовлетворяют следующему равенству:

$$\sum_{g=1}^{G} \lambda^g h^g(0) DU^g(p^*) = 0. \tag{22.40}$$

Нетрудно убедиться, что условие (22.40) также соответствует решению задачи максимизации следующей взвешенной утилитаристской общественной функции полезности:

$$\sum_{g=1}^{G} \chi^g \lambda^g U^g(p), \tag{22.41}$$

где веса, присвоенные в общественной функции полезности различным группам, равны $\chi^g \equiv h^g(0)$. Следовательно, из этих рассуждений вытекает следующая теорема.

Теорема 22.6. О вероятностном голосовании. *Рассмотрим множество политических альтернатив $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^K$, вектор политики $p \in \mathcal{R}$ и предположим, что предпочтения избирателей заданы уравнениями* (22.37) *с функцией распределения случайной величины* $\tilde{\sigma}_i^g$ H^g. *Тогда если симметричное равновесие в чистых стратегиях существует, то равновесная политика в нем* p^* *является решением задачи максимизации функции* (22.41).

Заслуживает упоминания важное свойство этого результата, состоящее в его кажущейся общности: если в игре политической конкуренции между партиями существует симметричное равновесие в чистых стратегиях, то оно соответствует максимуму некоторой взвешенной общественной функции полезности. Однако эта общность отчасти преувеличена, так как такое симметричное равновесие существует не всегда. Достаточные условия существования такого равновесия довольно сильны. Их анализу посвящено упражнение 22.26.

22.8. Конфликты распределения дохода и экономический рост: неоднородность предпочтений и медианный избиратель

Далее мы вернемся к анализу модели из параграфа 22.2, но отойдем от предположения о том, что политическая власть находится в руках элиты. Вместо этого мы введем неоднородность среди агентов и используем для анализа политэкономического равновесия в этой модели результаты из параграфа 22.7, в частности ТМИ и теорему Даунса о сходимости политики (теоремы 22.1–22.5). Напомним, что из этих теорем следует, что если политический выбор является одномерной величиной и предпочтения индивидов имеют один пик (или предпочтения на множестве политических альтернатив обладают свойством единственности пересечения), то политическое равновесие совпадает с политикой, наиболее предпочтительной для медианного избирателя.

Для упрощения дальнейшего анализа несколько изменим модель из параграфа 22.2. Во-первых, предположим, что в обществе отсутствует элита. Вместо этого допустим, что все экономические решения принимаются мажоритарным голосованием среди всех агентов. Во-вторых, чтобы абстрагироваться от политического конфликта между предпринимателями и работниками, предположим, что работники также отсутствуют. Другими словами, экономика состоит из континуума мелких предпринимателей, пронумерованных индексом $i \in [0, 1]$, каждый из которых обладает доступом к неоклассической производственной функции

$$Y_i(t) = F(K_i(t), A_i L_i(t)),$$

где переменная A_i обозначает постоянную во времени меру трудоинтенсивной производительности. Она является единственным источником неоднородности среди предпринимателей. Допустим, что функция F удовлетворяет предположениям 1 и 2 из главы 2. Предположим, что функция $\mu(A)$ задает закон распределения A_i между предпринимателями. Предположение о малости каждого предпринимателя означает, что он может нанять как работника только себя самого, то есть $L_i(t) = 1$ для всех t. Для упрощения анализа также положим норму амортизации капитала δ равной единице.

Все индивиды обладают линейными предпочтениями, заданными функцией (22.1). Как и в параграфе 22.2, инвестиционные решения в периоде времени $t + 1$ зависят лишь от ставки налога в этом периоде. Это свойство здесь имеет особенную важность, так как в параграфе 22.7 показано, что ТМИ в общем случае неприменима для анализа задач многомерного политического выбора. Предположение о том, что в любом периоде времени все действия зависят лишь от одной политической переменной, позволяет нам использовать ТМИ.

Временная последовательность событий схожа с последовательностью событий в параграфе 22.2. В каждом периоде времени t происходит голосование о ставке пропорционального налога $\tau(t + 1) \in [0, 1]$, по которой будет облагаться выпуск каждого предпринимателя в следующем периоде $(t + 1)$. В выборах участвуют две партии, поэтому применимы теоремы 22.1–22.5. Налоговые доходы распределяются между всеми агентами как паушальные трансферты $T(t + 1) \geq 0$. Остановимся на анализе СМР и вначале убедимся в том, что выполняются условия ТМИ.

Определим эффективное отношение капитала к труду (отношение капитала к эффективному труду) для предпринимателя i как $k_i(t) \equiv K_i(t)/A_i$, и напомним, что переменная p^t включает в себя последовательность ставок налога, начиная с периода t. Используя эти определения, рекурсивно запишем стоимость каждого предпринимателя следующим образом:

$$V_i(k_i(t) \mid p^t) = \max_{k_i(t+1)\geq 0} \{(1-\tau(t))A_i f(k_i(t)) - A_i k_i(t+1) + \\ + T(t) + \beta V_i(k_i(t+1) \mid p^{t+1})\}, \tag{22.42}$$

где утверждение о том, что совокупный выпуск в периоде времени t равен $A_i f(k_i(t))$, следует из свойства постоянной отдачи для функции F, а о том, что общие инвестиции в физический капитал составляют $K_i(t + 1) = A_i k_i(t + 1)$, вытекает из определения.

Задача максимизации (22.42) имеет следующее условие первого порядка:

$$\beta(1 - \tau(t + 1))f'(k_i(t + 1)) = 1 \text{ для всех } i \text{ и } t. \tag{22.43}$$

Важной особенностью условия (22.43) является то, что выбор отношения эффективного капитала к труду $k_i(t + 1)$ не зависит от значения переменной A_i. Из этого интуитивного результата следует, что все предприниматели выбирают одинаковое значение отношения эффективного капитала к труду независимо от их уровня производительности.

Утверждение 22.16. *Обозначим налог, выбранный для периода времени $t + 1$, как τ. Тогда в любом СМР каждый предприниматель i выбирает отношение эффективного капитала к труду в периоде $t + 1$ $\hat{k}(\tau)$, равное*

$$\hat{k}(\tau) = (f')^{-1}((\beta(1-\tau))^{-1}), \tag{22.44}$$

где функция $(f')^{-1}(\cdot)$, является обратной к функции предельного продукта капитала.

Используя результат утверждения 22.16, мы можем вычислить общие налоговые поступления в периоде времени $t + 1$ и поэтому с помощью бюджетного ограничения величину паушальных трансфертов следующим образом:

$$T(t+1) = \int_0^1 \tau(t+1)A_i f(\hat{k}(\tau(t+1))di = \tau(t+1)\bar{A}f(\hat{k}(\tau(t+1))), \tag{22.45}$$

где величина $\bar{A} \equiv \int_0^1 A_i di$ является средним значением производительности для всех предпринимателей, а значение $\hat{k}(\cdot)$ задано уравнением (22.44). В первом равенстве просто используется определение совокупных налоговых поступлений (и паушальных трансфертов на душу населения) как суммы (интеграла) выпуска всех предпринимателей, в нем также используется утверждение о том, что все предприниматели выбирают отношение эффективного капитала к труду $\hat{k}(\tau(t+1))$. Во втором равенстве выражение, не зависящее от конкретного предпринимателя, выносится из-под знака интеграла и используется определение средней производительности $\bar{A}$.

Далее найдем точку политического счастья, то есть предпочтительную ставку налога, для каждого предпринимателя. Чтобы сделать это, выпишем значение их полезности начиная с завершения периода времени t. После подстановки наилучшего ответа (то есть значения отношения капитала к эффективному труду из условия (22.44)) ожидаемое значение дисконтированной полезности предпринимателя i из уравнения (22.42) принимает следующий вид:

$$\tilde{V}_i(\tau' \mid p^{t+1}) = -A_i\hat{k}(\tau') + \beta[(1-\tau')A_i f(\hat{k}(\tau')) + \tau'\bar{A}f(\hat{k}(\tau')) + \tilde{V}_i(p^{t+2})], \tag{22.46}$$

где переменная τ' обозначает выбор ставки налога в периоде времени $t + 1$, и мы используем обозначение $\tilde{V}_i$, чтобы различить функцию стоимости, определенную на множестве текущих налоговых ставок и функцию стоимости V_i, определенную в уравнении (22.42). Более того, функция $\tilde{V}_i(p^{t+1})$ определена как накопленное значение, начиная с завершения периода $t + 1$, и мы сделали подстановку для значения $T(t + 1)$ из уравнения (22.45).

Наиболее предпочтительная ставка налога для предпринимателя i может быть найдена из выражения для $\tilde{V}_i(\tau' \mid p^{t+1})$. Нетрудно убедиться, что функция $\tilde{V}_i(\tau' \mid p^{t+1})$ не всегда является квазивогнутой по τ', поэтому предпочтения не обладают единственным пиком. Несмотря на это, они удовлетворяют условию единственности пересечения.

Утверждение 22.17. *Предпочтения на множестве ставок налога* $\tau' \in [0, 1]$, *заданные функцией* $\tilde{V}_i(\tau' \mid p^{t+1})$ *в уравнении* (22.46) *удовлетворяют условию единственности пересечения из определения* 22.3.

Доказательство. См. упражнение 22.29. ■

Опираясь на утверждение 22.17, мы можем применить теоремы 22.4 и 22.5 и заключить, что в каждый момент времени устанавливается ставка налога, наиболее предпочтительная для предпринимателя с медианным значением производительности. Обозначим эту медианную производительность как A_M. Из уравнения (22.46) следует, что эта наиболее предпочтительная ставка налога удовлетворяет следующему условию первого порядка:

$$(\bar{A} - A_M) f(\hat{k}(\tau_M)) + \tau' \bar{A} \frac{(f'(\hat{k}(\tau_M)))^2}{(1-\tau_M) f''(\hat{k}(\tau_M))} \leq 0 \text{ и } \tau_M \geq 0, \qquad (22.47)$$

с условием дополнительной нежесткости. В этом выражении для упрощения записи мы использовали условие (22.44), а также его производную, для того чтобы найти значение $\hat{k}'(\tau_M)$ (которое совпадает со значением из условия (22.12)). Нетрудно убедиться, что $\hat{k}'(\tau_M) < 0$, то есть, как и в параграфе 22.2, увеличение налога, ведет к снижению отношения капитала к труду и уровня выпуска. Здесь важно отметить свойство дополнительной нежесткости в условии (22.47), так как наиболее предпочтительная медианным избирателем (предпринимателем) ставка налога может не удовлетворять условию первого порядка со знаком равенства, что соответствует угловому решению при $\tau = 0$.

Утверждение 22.18. *Рассмотрим модель, описанную выше. В ней существует* $\tau_M \in [0, 1)$, *такое, что в единственном СМР выполняется равенство* $\tau(t) = \tau_M$ *для всех* t. *Если функция распределения уровня производительности предпринимателей* $\mu(A)$ *такова, что* $A_M \geq \bar{A}$, *то* $\tau_M = 0$. *Если* $A_M < \bar{A}$, *то* $\tau_M > 0$ *и при заданном значении* $\bar{A}$ τ_M *строго убывает по* A_M.

Доказательство. Из рассуждений, представленных выше, и теорем 22.4 и 22.5 следует, что в каждом периоде времени устанавливается ставка налога, наиболее предпочтительная предпринимателем с медианным уровнем производительности. Более того, ставка налога $\tau' = 1$ не может быть предпочтительной ни для одного предпринимателя, так как она ведет к нулевому уровню выпуска и нулевым налоговым поступлениям (см. упражнение 22.1). Отсюда следует утверждение о существовании $\tau_M \in [0, 1)$, такой, что $\tau(t) = \tau_M$ для всех t (где ставка налога τ_M является решением уравнения (22.47)). Заметим, что это уравнение может иметь более одного решения, и в этом случае значение τ_M соответствует глобальному максимуму функции (22.46) при уровне производительности $\bar{A}$.

Далее предположим, что $A_M = \bar{A}$. Тогда первое выражение в условии (22.47) равно нулю и левая часть уравнения однозначно отрицательна при любом значении $\tau' > 0$ и в точности равна нулю при $\tau' = 0$. Из этого следует, что в этом случае $\tau_M = 0$. С другой стороны, если $A_M > \bar{A}$, то первое выражение в условии (22.47) строго отрицательно и левая часть уравнения однозначно отрицательна. Тогда условие $\tau_M = 0$ следует из условия дополнительной нежесткости.

Наконец, предположим, что $A_M < \bar{A}$. В этом случае первое выражение в условии (22.47) строго положительно. Чтобы получить противоречие, допустим, что $\tau_M = 0$. Тогда второй член должен быть равен нулю. Следовательно, левая часть неравенства (22.47) строго положительна и $\tau_M = 0$ не может быть решением. Таким образом, единственная равновесная ставка налога удовлетворяет неравенству $\tau_M > 0$. Чтобы получить результат о сравнительной статике, достаточно применить теорему о неявной функции (теорема А.25) к уравнению (22.47) и использовать тот факт, что так как на значении τ_M достигается глобальный максимум, производная (22.47) по τ_M строго отрицательна. ■

В этом утверждении содержится ряд важных результатов. Во-первых, в нем показано, что линейные предпочтения гарантируют существование корректно определенного СМР даже в случае существования различий в уровне производительности между предпринимателями.

Во-вторых, в утверждении показано, что если производительность медианного предпринимателя превышает средний уровень производительности, то в равновесии отсутствует перераспределительное налогообложение. Этот результат интуитивен. Из вида первого слагаемого в неравенстве (22.47) следует, что выгода от налогообложения пропорциональна среднему уровню производительности в экономике, в то время как издержки от него (для медианного предпринимателя) связаны с его уровнем производительности. Если медианный предприниматель более производителен, чем средний, то у него появляются две причины возражать против перераспределительного налогообложения: во-первых, он теряет часть дохода, во-вторых, как показывает второе слагаемое в неравенстве (22.47), такое налогообложение оказывает искажающее действие.

В-третьих, и наиболее важно, в том случае, когда производительность медианного избирателя оказывается ниже средней производительности, в политическом равновесии реализуется положительный искажающий налог на всех предпринимателей. Чтобы интуитивно объяснить этот результат, заметим, что налоговые поступления равны нулю при ставке налога $\tau = 0$. Незначительное увеличение ставки ведет к возникновению потерь второго порядка малости для каждого предпринимателя и, если $A_M < \bar{A}$, к выигрышу от перераспределения доходов для медианного избирателя первого порядка малости. Этот результат важен отчасти потому, что в реальной жизни большая часть распределений богатства и дохода скошена влево (то есть значение медианы меньше значения среднего), поэтому такой случай более вероятен на практике. Более того, этот результат наиболее интересен в сравнении с другими результатами из предыдущих параграфов, которые также вели к положительному искажающему налогу в экономике, в которой власть принадлежит не участвующей в производственной деятельности элите. Утверждение 22.18 показывает, что этот качественный результат обобщается для случая, когда решения принимаются демократическим путем и медианный избиратель является предпринимателем, но его производительность ниже, чем средняя производительность в экономике.

Наконец, в утверждении 22.18 представлен новый результат по сравнительной статике. Он состоит в том, что снижение производительности медианного избирателя (предпринимателя) при неизменном значении средней производительности ведет к более значительному искажающему налогообложению. Так как более высокий налог соответствует меньшему выпуску, а разрыв между средней и медианной производительностью может интерпретироваться как мера уровня неравенства в обществе, этот результат описывает политический механизм, связывающий более высокий уровень неравенства с большим числом искажений в экономике и низким уровнем выпуска. Однако при использовании этого результата необходима некоторая осторожность, так как разрыв между средней и медианной производительностью не является однозначной мерой уровня неравенства. В упражнении 22.30 приведен пример, в котором увеличение дисперсии распределения при постоянном среднем значении ведет к снижению разрыва между средним и медианой. Однако, несмотря на это предостережение, в литературе последний результат часто интерпретируется как показывающий связь между уровнем неравенства в обществе и величиной искажающего налогообложения. В упражнении 22.31 представлен вариант этой модели, в котором размер налога влияет на равновесный темп роста экономики.

22.9. Предоставление общественных благ: сильные и слабые государства

Анализ, проведенный выше, акцентирует внимание на искажающих эффектах налогообложения и конфискации собственности. В этом свете основной (политэкономической) причиной экономической неэффективности является уровень налоговой нагрузки и экспроприации. Несмотря на то что воздействие налогов на экономические стимулы агентов несомненно важно, их величина является лишь одним элементом экономической политики, который может воздействовать на темп роста экономики. Например, во многих моделях эндогенного экономического роста субсидии исследовательскому сектору также стимулируют рост экономики (даже если такая политика включает в себя налогообложение доходов капитала и труда). В целом предоставление общественных благ, инвестиции в инфраструктуру и обеспечения соблюдения законов и правопорядка являются важными функциями государства, и неспособность выполнения этих функций может привести к значительным негативным последствиям для экономического развития. Действительно, имеющиеся эмпирические свидетельства не поддерживают гипотезу о том, что экономический рост (и более высокий уровень выпуска) значительно коррелирует с официальными ставками налогов. Наоборот, бедные экономики зачастую характеризуются низким уровнем налоговых поступлений и государственных расходов. Легче всего в этом убедиться сравнив страны ОЭСР и африканские страны к югу от Сахары. Следовательно, политическая экономия экономического роста должна обращать внимание на то, как государство выполняет возложенные на него функции. Стандартный не политэкономический подход к анализу этого вопроса состоит в постулировании существования беневолентного правительства и поиске экономической политики, максимизрующей функцию общественного благосостояния. Однако если мы включим в модель политэкономические соображения, то мы должны признать, что государство может быть не заинтересовано в инвестициях в предоставление общественных благ. Поэтому важно определить, при каких обстоятельствах государство осуществляет инвестиции в предоставление общественных благ, инфраструктуру и обеспечение законности и правопорядка и при этом воздерживается от запретительно высоких налогов и экспроприации собственности.

В этом параграфе мы представим простейшую модель, позволяющую пролить свет на этот вопрос, основанную на работе [Acemoglu 2005]. Экономика состоит из политической элиты, обладающей властью и множества граждан, имеющих доступ к производственной технологии. Производительность зависит от инвестиций государства в предоставление общественных благ. Правительство осуществляет только те инвестиции, которые приносят выгоду элите. В такой среде объем предоставляемых общественных благ зависит от будущей доходности, которую может обеспечить себе политическая элита общества за счет осуществления таких инвестиций. Поэтому равновесный объем предоставляемых общественных благ определяется тем, насколько сильна государственная власть. Если государство очень слабо, то элита не в состоянии увеличить налоги в будущем и присвоить себе выгоду от осуществленных инвестиций. Ожидая такое развитие событий, она не станет осуществлять инвестиции в предоставление общественных благ. С другой стороны, если в обществе отсутствуют ограничения на величину налога на население, то государство очень сильно и частные инвестиции будут сокращаться. Следовательно, в этом контексте государство, обладающее промежуточным уровнем силы, может оказаться наиболее подходящим для стимулирования экономического роста.

22.9.1. Модель

Как и ранее, предпочтения агентов заданы функцией (22.1). Население экономики состоит из множества предпринимателей (граждан), мера которого нормализована единицей, и политической элиты. Элита не участвует в производственной деятельности, но контролирует правительство. В частности, она принимает решения о величине ставки налога и объеме предоставляемых общественных благ. Без ограничения общности мы также нормализуем меру множества членов политической элиты единицей.

Каждый гражданин i обладает доступом к следующей производственной технологии типа Кобба—Дугласа, позволяющей осуществлять выпуск единственного в экономике конечного товара:

$$Y_i(t) = \frac{1}{\alpha} K_i(t)^{\alpha} (A(t) L_i(t))^{1-\alpha}, \qquad (22.48)$$

которая отличается от функции (22.17) только тем, что здесь производительность $A(t)$ изменяется во времени. Значение $A(t)$ определяется инвестициями государства в предоставление общественных благ. Из предположения о том, что все граждане заняты производственной деятельностью, следует, что $L_i(t) = 1$ для всех $i \in [0, 1]$ и для всех t.

Временная структура событий схожа с базовой моделью с ограблением, в которой ставка налога на выпуск устанавливается в периоде t, в то время как размер инвестиций в физический капитал в периоде t определяется в периоде $t - 1$. Предположим, как и в параграфе 22.5, что существует максимальная ставка налога $\bar{\tau}$. Однако вместо предположения о конституционном ограничении на налогообложение допустим, что максимальная ставка налога является следствием возможности скрытия объема выпуска производителем (или его перехода в неформальный сектор экономики) в случае реализации слишком высокой ставки. Например, предположим, что если производитель решает скрыть выпуск, то он теряет его долю $\bar{\tau}$. Тогда если ставка налога превышает $\bar{\tau}$, то все производители предпочтут перейти в неформальный сектор и налоговые поступления будут равны нулю. Поэтому ставка налога всегда удовлетворяет условию $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$. В такой интерпретации величина $\bar{\tau}$ соответствует экономической *мощи государства*. Если значение $\bar{\tau}$ велико, то экономика характеризуется мощным государством, которое обладает возможностью устанавливать высокие налоги. Если оно мало, то государство слабо и не имеет такой возможности.

При заданной ставке налога $\tau(t)$ объем налоговых доходов равен

$$\mathrm{Tax}(t) = \tau(t)\int_0^1 Y_i(t)di = \tau(t)Y(t), \tag{22.49}$$

где переменная $Y(t)$ обозначает совокупный выпуск в экономике. Очевидно, что если ставка налога превышает $\bar{\tau}$, то налоговые доходы равны нулю, так как все производство переместится в неформальный сектор.

Правительство (политическая элита) в периоде времени t определяет величину расходов на общественные блага в следующем периоде $t + 1$. Предположим, что

$$A(t) = \left(\frac{\alpha\zeta}{1-\alpha}G(t)\right)^{1/\zeta}, \tag{22.50}$$

где переменная $G(t)$ обозначает государственные расходы на предоставление общественных благ и $\zeta > 1$, то есть технология производства общественных благ обладает убывающей отдачей от масштаба (большее значение ζ соответствует большей степени убывающей отдачи). Множитель $(\alpha\zeta/(1-\alpha))^{1/\zeta}$ включен в уравнение для удобной нормализации. В дополнение, из уравнения (22.50) следует полная амортизация $A(t)$, что упрощает дальнейший анализ. Потребление элиты задается остатком налоговых доходов после осуществления государственных расходов и трансфертов и равно $C^E(t) = \mathrm{Tax}(t) - G(t)$.

Как и ранее, остановимся на анализе СМР, которое в этой модели может быть представлено как набор $(\tau(A(t)), \; [k_i(A(t))]_{i\in[0,1]}, \; G(A(t)))$. Так как каждый предприниматель занят на собственной фирме, отношение капитала к труду k_i и общий запас капитала K_i совпадают для каждого предпринимателя. Из рассуждений из параграфа 22.5 следует, что единственная ставка налога в СМР задается условием

$$\tau(t) = \bar{\tau} \text{ для всех } t, \tag{22.51}$$

так как решения об инвестициях принимаются до того, как элита выбирает значение ставки налога.

Далее, отношение капитала к труду для предпринимателя, как и ранее, задается аналогом условия (22.18):

$$k_i(t) = (\beta(1-\bar{\tau}))^{1/(1-\alpha)} A(t) \text{ для всех } i \in [0, 1] \text{ и для всех } t. \tag{22.52}$$

Объединяя уравнение (22.52) с уравнениями (22.48) и (22.49), находим равновесные налоговые доходы как функцию от объема предоставляемых общественных благ:

$$T(A(t)) = \frac{(\beta(1-\bar{\tau}))^{\alpha/(1-\alpha)}\bar{\tau}A(t)}{\alpha}. \tag{22.53}$$

Наконец, элита выбирает уровень государственных инвестиций $G(t)$ так, что ее потребление достигает максимума. Чтобы описать этот выбор, запишем чистую приведенную дисконтированную стоимость элиты следующим образом:

$$V^e(A(t)) = \max_{A(t+1)} \left\{ T(A(t)) - \frac{1-\alpha}{\alpha\zeta} A(t+1)^\zeta + \beta V^e(A(t+1)) \right\}, \tag{22.54}$$

Что следует из рекурсивной записи дисконтированных выигрышей элиты и подстановкой вместо ее потребления $C^E(t)$ разности между налоговыми доходами, заданными уравнением (22.53), и расходов на предоставление общественных благ из уравнения (22.50).

Из теорем 6.3, 6.4 и 6.6 из главы 6 следует, что функция стоимости $V^e(\cdot)$ является вогнутой и дифференцируемой. Следовательно, условие первого порядка для выбора значения $A(t+1)$ выглядит как:

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} A(t+1)^{\zeta-1} = \beta(V^e)'(A(t+1)), \tag{22.55}$$

где функция $(V^e)'$ является производной функции стоимости элиты. Уравнение (22.55) связывает предельные издержки от увеличения инвестиций в предоставление общественных благ с увеличением стоимости элиты, которое следует из этих инвестиций. Для того чтобы найти решение, используем теорему об огибающей и продифференцируем уравнение (22.54) по аргументу $A(t)$:

$$(V^e)'(A(t+1)) = T'(A(t)) = \frac{(\beta(1-\bar{\tau}))^{\alpha/(1-\alpha)}\bar{\tau}}{\alpha}. \tag{22.56}$$

Выгода элиты от увеличения объема предоставляемых общественных благ состоит в увеличении налоговых доходов вследствие увеличения объема общественных благ и задается выражением в уравнении (22.56).

Объединяя эти условия, находим единственный выбор элиты в СМР как

$$A(t+1) = A[\bar{\tau}] = \left(\beta^{1/(1-\alpha)}(1-\alpha)^{-1}(1-\bar{\tau})^{\alpha/(1-\alpha)}\bar{\tau}\right)^{\frac{1}{\zeta-1}}. \tag{22.57}$$

Подставляя уравнение (22.57) в уравнение (22.54), находим простой вид функции стоимости элиты:

$$V^e(A(t)) = \frac{(\beta(1-\bar{\tau}))^{\alpha/(1-\alpha)}\bar{\tau}A(t)}{\alpha} + \frac{\beta^{1/(1-\alpha)}(\zeta-1)(1-\bar{\tau})^{\alpha/(1-\alpha)}\bar{\tau}}{(1-\beta)\zeta\alpha}A[\bar{\tau}]. \tag{22.58}$$

Второе слагаемое в уравнении (22.58) следует из того, что расходы на предоставление общественных благ равны доле налоговых доходов $1/\zeta$. Очевидно, что стоимость элиты зависит от текущего значения объема общественных благ $A(t)$, унаследованного из прошлого периода, поэтому равновесный уровень инвестиций задается уравнениями (22.52) и (22.57).

Утверждение 22.19. *В описанной выше экономике существует единственное СМР. В этом равновесии $\tau(A) = \bar{\tau}$ для всех A, значение $A(t)$ для всех $t > 0$ совпадает со значением $A[\bar{\tau}]$ в уравнении (22.57) и отношение капитала к труду для каждого предпринимателя i в каждом периоде времени t задается уравнением (22.52). Для всех $t > 0$ равновесное значение совокупного выпуска составляет*

$$Y(t) = Y[\bar{\tau}] \equiv \frac{1}{\alpha}(\beta(1-\bar{\tau}))^{\alpha/(1-\alpha)}A[\bar{\tau}]. \tag{22.59}$$

Доказательство. См. упражнение 22.32. ■

22.9.2. Слабые и сильные государства

Наиболее важным следствием из утверждения 22.19 является роль силы государства, описываемой параметром $\bar{\tau}$. Если значение $\bar{\tau}$ велико, то государство обладает экономической мощью и граждане не в состоянии выступить против высоких налогов. С другой стороны, если значение $\bar{\tau}$ мало, то государство экономически слабо (правительство ограничено в своих действиях), так оно не имеет возможности увеличить налоги. В такой интерпретации мы можем задаться вопросом о том, будет ли увеличение экономической мощи государства вести к ухудшению состояния экономики. Ответ на этот вопрос неоднозначен: если $\bar{\tau} = 0$, то элита выбирает $G(t) = 0$, в то время как если $\bar{\tau} = 1$, то граждане выбирают нулевой уровень инвестиций. В обоих случаях агрегированный выпуск равен нулю.

Нетрудно найти значение $\bar{\tau}$, при котором выпуск во все периоды времени, кроме начального (заданного уравнением (22.59)), достигает максимума. В упражнении 22.32 показано, что такая ставка налога равна

$$\bar{\tau}^* = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\zeta}. \tag{22.60}$$

Если экономическая мощь государства превышает значение $\bar{\tau}^*$, то государство слишком сильно и ставка налога слишком высока по сравнению с максимизирующей выпуск ставкой. Эта ситуация соответствует стандартному случаю, который рассматривается в большинстве политэкономических моделей. С другой стороны, если экономическая мощь государства меньше $\bar{\tau}^*$, государство недостаточно сильно для того, чтобы получить в будущем ренту, необходимую для осуществления инвестиций в предоставление общественных благ. Такая ситуация соответствует случаю слабого государства, где основной проблемой является недостаточный уровень производства общественных благ.

Здесь можно увидеть интересную параллель с теорией фирмы. В теории фирмы при оптимальной структуре собственности и управления переговорная сила ex post принадлежит сторонам, осуществляющим наиболее важные инвестиции. Аналогичный принцип применим и к оптимальному распределению экономической мощи, описываемой параметром $\bar{\tau}$: большая сила граждан выгодна, если их инвестиции имеют большее значение (что в данном случае соответствует большему значению параметра α). Если же большее значение для экономического развития имеют инвестиции государства (то есть значение параметра α мало), то необходима (оправданна) более высокая ставка налога[10].

Основной вывод из этого анализа состоит в том, что если инвестиции в производство осуществляются и государством и гражданами, то ограничение ренты, присваиваемой государством, не всегда ведет к улучшению экономического состояния общества. В этом случае необходимо существование некоторого *баланса сил* между государством и гражданами. Если политическая элита, обладающая властью в обществе, ожидает в будущем низкого поступления ренты, она теряет стимулы к осуществлению инвестиций в предоставление общественных благ. Следовательно, как очень слабое, так и неограниченно сильное государство, осуществляющее экспроприацию собственности, могут оказаться препятствием экономическому развитию общества.

Необходимо отметить ряд недостатков этой модели. Первый состоит в том, что она опирается на возможность граждан перейти в неформаль-

[10] В этом анализе мы остановились на значении параметра $\bar{\tau}$, при котором выпуск достигает максимума. Упражнение 22.32 посвящено влиянию различных ставок налога на уровень благосостояния элиты и граждан.

ный сектор экономики как на способ их контроля власти, в то время как на практике более важным может оказаться политический контроль. Второй недостаток в том, что модель ограничена анализом СМР и не описывает возможность неявного сговора между властью и гражданами. Результаты, приведенные выше, обобщаются в этих направлениях в работе [Acemoglu 2005]. В ней показано, что схожие результаты могут быть получены в случае, когда контроль граждан за государством осуществляется не экономическими, а политическими способами. В частности мы можем представить ситуацию, в которой граждане обладают стохастической возможностью сменить власть, если налоги слишком высоки. В этом случае если граждане обладают политической силой, то влияние налогообложения и объема предоставляемых общественных благ также будет ограниченным. Более того, в модели с переменной степенью политического контроля власти мы можем описать СПР, в котором возможен неявный сговор между государством и гражданами, допускающий налогообложение и высокий уровень производства общественных благ. Такое равновесие может рассматриваться как пример *консенсуально сильного государства*, так как в этом случае граждане позволяют сильную экономическую власть государства (отчасти потому что они верят в то, что имеют возможность контроля власти и политической элиты с помощью выборов или других механизмов). Равновесие с консенсуально сильным государством может послужить возможным объяснением более высоких ставок налога и объема производства общественных благ в странах ОЭСР по сравнению со многими менее развитыми странами.

Этот анализ также позволяет увидеть полезное различие между налогообложением и экспроприацией собственности. С одной стороны, высокие налоги и экспроприация оказывают схожий эффект на инвестиции и состояние экономики. Одним из различий между экспроприацией и налогообложением является неопределенность. Мы можем утверждать, что производитель в точности знает ставку налога, который он платит, в то время как экспроприация по своей сути является случайным событием. Если полезность агентов характеризуется неприятием риска, то экспроприация может нести большие издержки, чем налогообложение. Из проведенного анализа также следует еще одно важное различие, следующее со стороны расходов, а не доходов государства. При экспроприации государство присваивает долю выпуска для своего собственного потребления, в то время как в равновесии с консенсуально сильным государством некоторая часть налоговых доходов используется для производства общественных благ, которые приносят пользу гражданам. Если это различие важно, то одной из причин концептуальной разницы между экспроприацией и налогообложением является то, что при налогообложении часть налоговых доходов зачастую возвращается гражданам в форме общественных благ.

Возможно, наиболее важным элементом анализа в этом параграфе является демонстрация различных аспектов институтов, стимулирующих рост экономики. Экономический рост требует не только защиты права собственности и низких налогов, но и дополнительных инвестиций, которые часто наиболее эффективно осуществляются государством. Очевидными примерами такой деятельности являются обеспечение правопорядка и верховенства закона, инвестиции в инфраструктуру, предоставление общественных благ. Поэтому содействующие экономическому росту институты не только должны гарантировать индивидам защиту права собственности, но и обеспечивать государству стимулы осуществлять необходимые инвестиции в предоставление общественных благ. В этом свете слишком слабое государство может быть настолько же значительной преградой экономическому развитию, что и неограниченная власть слишком сильного государства.

22.10. Основные выводы

Чтобы понять, почему некоторые страны бедны, а другие страны богаты, нам необходимо выяснить, почему некоторые страны выбирают политику, стимулирующую экономический рост, а другие страны выбирают политику, которая препятствует экономическому развитию. В этой главе представлен ряд важных идей, позволяющих получить ответы на эти вопросы. Во-первых, причина институциональных различий и выбора не стимулирующих экономический рост институтов может лежать в общественном конфликте между различными индивидами и группами. Общественный конфликт подразумевает то, что мы не можем гарантировать выбор обществом экономических институтов и политики, поддерживающих экономических рост. Такой тип институтов может быть выгоден для широкого круга индивидов, но он также создает проигравших — индивидов и групп, чья экономическая рента нивелируется или сокращается после внедрения новых технологий. Если индивиды в обществе имеют различные предпочтения об институтах и экономической политике, распределение политической силы в обществе играет важную роль в определении выбора институтов и политики (а также в реформировании препятствующих экономическому росту институтов).

В этой главе мы показали, что институты, препятствующие экономическому росту, могут не приводить к значительной неэффективности по Парето. Мы продемонстрировали это наблюдение с помощью модели простого общества, в которой индивиды принадлежат к различным общественным группам с различными экономическими интересами и вся политическая власть находится в руках политической элиты. Мы показали, что в такой модели с линейными предпочтениями даже в узком понятии СМР равновесное распределение ресурсов является ограниченно оптимальным по Парето. Однако, несмотря на оптимальность по Парето, такое распределение ресурсов может характеризоваться значительными искажениями (откуда следует дополнительный вывод о том, что оптимальность по Парето может оказаться неподходящей концепцией в политэкономическом анализе экономического роста).

В дополнение к предоставлению простого и удобного подхода к анализу экономической политики, модель с политической силой, находящейся в руках элиты, ведет к ряду результатов по сравнительной статике, которые позволяют пролить свет на то, какие общества выбирают политику, стимулирующую экономический рост, а какие общества, вероятно, будут выбирать политику, препятствующую экономическому развитию. Некоторые основные результаты по сравнительной статике состоят в следующем: (1) налоги, скорее всего, будут высокими, если спрос предпринимателей на капитал не эластичен, так как в этом случае ставка налога, при которой доход элиты достигает максимума, будет высокой; (2) налоги будут высокими, если эффект манипулирования ценами факторов производства более важен по сравнению с эффектом присвоения дохода; (3) налоги будут высокими, если политическая сила элиты оспаривается другими общественными группами и снижение уровня дохода конкурирующих групп ведет к политической консолидации элиты; (4) налоги будут высокими и более искажающими, если существует значительная проблема ограбления, связанная с тем, что инвестиционные проекты являются долгосрочными или предприниматели принимают решения о внедрении технологий ex ante; (5) при отсутствии смены политической власти большая мощность государства ведет к более низким налогам; и (6) если эффект смены политической власти важен, то и большая мощь государства и большая рента от природных ресурсов могут привести к выбору более искажающей экономической политики, потому что они увеличивают политические ставки (стоимость обладания политической властью).

В этой главе также показано, что механизм присвоения дохода, который был описан в контексте общества с политически доминирующей элитой, присутствует и в более сложных обществах. Если политические решения в обществе с неоднородными технологиями (или предпочтениями) принимаются демократическим путем, то они часто отражают политические предпочтения медианного избирателя. Если медианный избиратель беднее среднего индивида (предпринимателя) в обществе, он может предпочесть искажающую политику, ведущую к перераспределению ресурсов в его пользу. Такой тип искажающего присвоения дохода медианным избирателем качественно схож с присвоением элитой дохода представителей среднего класса, хотя здесь он возникает в контексте более общей модели с неоднородными предпринимателями. Такой анализ также ведет к новым результатам по сравнительной статике: если разрыв между медианой и средним в распределении производительности более высок, то стимулы к присвоению дохода увеличиваются и экономическая политика с большей вероятностью будет искажающая.

Наконец, мы показали, что налогообложение не является единственной политикой, влияющей на экономический рост. Предоставление общественных благ в виде обеспечения правопорядка и верховенства закона, инвестиций в инфраструктуру и даже упрощения регулирования экономики также может быть важно для достижения высокого темпа экономического роста. Будет ли государство предоставлять достаточное количество и подходящий выбор общественных благ? В контексте политэкономических моделей ответ на этот вопрос зависит от того, обладают ли политически сильные группы, контролирующие власть, стимулами к предоставлению таких благ. Экономическая или политическая элита осуществляет инвестиции в предоставление общественных благ, только если она ожидает в будущем получить выгоду от этих инвестиций. Это наблюдение поднимает вопрос о сильном и слабом государстве. Несмотря на то что из анализа налогообложения следует, что ограничение политической и экономической мощи государства ведет к выбору более стимулирующей экономический рост политики, слабые государства не осуществляют инвестиции в предоставление общественных благ, так как обладающие властью индивиды понимают, что у них не будет возможности взимать налог с будущих доходов, созданных за счет этих инвестиций. Следовательно, с точки зрения поддержки экономического роста наиболее подходит государство с промежуточным уровнем силы. Наиболее важным наблюдением здесь является то, что при анализе влияния экономических институтов и политики на рост экономики необходимо учитывать как стимулы индивидов к осуществлению инвестиций в физический капитал, так и стимулы государства к осуществлению инвестиций в предоставление общественных благ.

Материал этой главы не более чем введение в интересный и важный раздел экономики о политэкономии роста. Нами не были затронуты многие интересные вопросы. Наиболее важные среди них следующие. Во-первых, в дополнение к налогообложению, экспроприации и предоставлению общественных благ важным элементом экономической политики является создание равных условий для деятельности широкого круга членов общества. Например, инвестиции в человеческий капитал, очень важные в контексте современного экономического роста, требуют создания стимулов и возможности осуществлять инвестиции не только для небольшого числа бизнесменов, а для всего населения экономики. Аналогично, защита права собственности для уже существующих фирм должна балансироваться свободой выхода на рынок для новых фирм. Во-вторых, в этой главе мы везде предполагали, что распределение политической силы между членами общества задано экзогенно. При этом очевидно, что различные распределения политической силы ведут к выбору различной политики и различным траекториям роста экономики. Следовательно, важным представляется понимание того, как распределение политической силы в обществе и равновесные политические институты могут развиваться эндогенно и как такие изменения влияют на экономическое равновесие. Некоторые из этих вопросов обсуждаются в следующей главе.

22.11. Литература

Материал этой главы основан на большом количестве работ по политической экономии и на ряде современных исследований по политической экономии экономического роста. Наша задача состояла не в предоставлении сбалансированного обзора этой литературы, а в демонстрации наиболее важных причин и источников межстрановых различий в экономических институтах и политике в надежде пролить свет на межстрановые различия в темпе экономического роста. Чтобы изолировать вклад политэкономических механизмов и сделать анализ достаточно простым, мы везде использовали неоклассическую модель экономического роста и ее различные модификации.

Введение в политическую экономию представлено в работах: [Persson, Tabellini 2000; Drazen 2001]. Институты неформально обсуждаются в статье [Eggertsson 2005].

Материал параграфов 22.2–22.6 и анализ эффектов присвоения дохода и манипулирования ценами факторов производства базируется на работе [Acemoglu 2007b], однако мы использовали модель, более согласованную с неоклассической моделью экономического роста. Эффект манипулирования ценами факторов производства обсуждается в работах: [Acemoglu 2007b, 2008a]. Эффект политического замещения впервые описан в статье [Acemoglu, Robinson 2000b] и более подробно анализируется в работе [Acemoglu 2007b]. Подробное обсуждение причин, по которым политическая элита может препятствовать технологическим инновациям с целью увеличения вероятности сохранения власти, представлено в статье [Acemoglu, Robinson 2000b]. В этой работе также показано, что при относительно защищенной элите, равно как и при демократическом принятии политических решений, у власти нет стимулов препятствовать технологическим изменениям, при промежуточном уровне защиты власти, когда новые технологии могут привести к ее потере, элита может стремиться препятствовать экономическому развитию. Модели с конкурентным экономическим поведением агентов, рассматривающих цены в экономике как заданные величины, и стратегическим принятием политических решений были впервые представлены в работе [Chari, Kehoe 1990] для анализа состоятельности во времени поведения беневолентного государства.

Материал параграфа 22.7 стандартен. Доказательство теоремы о невозможности коллективного выбора Эрроу представлено, например, в работах: [Arrow 1951; Эрроу 2004; Austen-Smith, Banks 1999]. Предпочтения с одним пиком впервые введены в работе [Black 1948]. Свойство единственности пересечения впервые используется в статье [Roberts 1977] и более подробно обсуждается в работе [Gans, Smart 1996]. Концепция промежуточных предпочтений, введенная в упражнении 22.24, заимствована из работы [Grandmont 1978]. Даунсианская модель политической конкуренции введена в работе [Downs 1957] и во многом основывается на важной статье [Hotelling 1929]. Даунсианская межпартийная конкуренция подробно обсуждается в работе [Austen-Smith, Banks 1999]. Вероятностная модель выборов представлена в статьях: [Lindbeck, Weibull 1987; Coughlin 1992]. Мы упростили ее анализ предположением о том, что партии заботятся о доле полученных на выборах голосов избирателей, а не о вероятности прихода к власти.

Теорема о медианном избирателе, представленная в параграфе 22.8, впервые была использована в модели с пропорциональными перераспределяющими налогами в работах: [Romer 1975; Roberts 1977]. Модель Робертса—Ромера используется в статье [Meltzer, Richard 1981] для анализа связи между налогообложением и неравенством в обществе и наличием избирательного права у его членов. Несколько экономистов в дальнейшем использовали модель Робертса—Ромера для анализа экономического роста. Наиболее интересные работы включают в себя статьи: [Alesina, Rodrik 1994; Persson, Tabellini 1994; Saint-Paul, Verdier 1993; Benabou 2000]. Модели из работ: [Alesina, Rodrik 1994; Persson, Tabellini 1994] схожи с использованной нами в параграфе 22.8, с отличием в том, что в них не описано корректно определенное СМР. Вместо этого в них предполагается, что (1) голосование о единственной ставке налога во всех будущих периодах происходит в начальный момент времени $t = 0$ или что (2) горизонт планирования агентов короток и они не принимают во внимание будущие выборы (однако при этом они принимают во внимание свои собственные будущие экономические решения). Также отметим, что в этих работах используется модель эндогенного экономического роста, поэтому различия в ставках налога ведут к различиям в равновесном темпе экономического роста (см. упражнение 22.31). В статьях: [Alesina, Rodrik 1994; Persson, Tabellini 1984] разрыв между медианной и средней производительностью интерпретируется как мера уровня неравенства в обществе и показана отрицательная связь между неравенством и экономическим ростом. В них также представлены межстрановые эмпирические свидетельства, говорящие об отрицательной корреляции между неравенством и экономическим ростом. Однако интерпретация этих межстрановых свидетельств затруднена, так как представленным авторами регрессиям роста присуща проблема пропущенных переменных, а также потому, что другие исследователи находят иную связь между неравенством и экономическим ростом (см., например, работы: [Forbesd 2000; Banerjee, Duffo 2003]. В то же время в статье [Saint-Paul, Verdier 1993] показано, что увеличение уровня неравенства в обществе ведет к ускорению экономического роста, если налоговые поступления инвестируются в накопление человеческого капитала. В работе [Benabou 2000] показано, как отрицательная зависимость между неравенством и экономическим ростом согласуется с утверждением о том, что увеличение уровня неравенства ведет к сокращению перераспределения доходов в обществе, в котором перераспределение может стимулировать экономический рост за счет инвестирования налоговых доходов в образование. Ни одна из этих работ не описывает СМР в динамической экономике. Вместо этого в них предполагается, что избиратели обладают коротким горизонтом планирования и выборы происходят один раз в начальном периоде времени. В статьях: [Krusell, Rios-Rull 1996; Hassler et. al. 2005] приведено описание СМП в схожей политической организации общества.

Параграф 22.9 основан на работе [Acemoglu 2005]. Идея о том, что слабое государство может быть значительным препятствием экономическому росту популярна среди ученых, занимающихся политическими науками и политической социологией. Наиболее известными работами на эту тему являются: [Migdal 1988; Wade 1990; Evans 1995; Herbst 2000]. Однако подход в них не основывается на анализе стимулов политиков или правительства. Первая формальная модель для анализа этих вопросов представлена в статье [Acemoglu 2005]. Материал параграфа 22.9 объединяет базовую модель из этой статьи с неоклассической моделью экономического роста.

22.12. Упражнения

22.1. Покажите, что ставка налога $\hat{\tau}$ в уравнении (22.16) удовлетворяет условию $\hat{\tau} \in (0, 1)$.

22.2. Рассмотрите модель из параграфа 22.2 с единственным отличием в том, что производственная технология заимствована из модели в статье [Romer 1986a], описанной в главе 11. Каждый предприниматель обладает доступом к производственной функции

$$Y_i(t) = F(K_i(t), A(t)L_i(t))$$

и

$$A(t) = B\int_0^1 K_i(t)di = BK(t).$$

Опишите СМР в такой модели и покажите, что искажающее налогообложение предпринимателей элитой снижает равновесный темп роста экономики. [Подсказка: предположите, что элита не принимает во внимание отрицательное воздействие налогов на накопление капитала. Как изменяются результаты, если она принимает его во внимание?]

22.3. Рассмотрите модель из параграфа 22.2 и предположите, что политические решения принимаются представителями среднего класса. Покажите, что средний класс может предпочесть положительную ставку налога на свой выпуск (при паушальном перераспределении налоговых доходов между его представителями). Подробно опишите, почему подобное налогообложение может иметь политэкономический смысл для представителей среднего класса. Возможен ли такой результат, если налоговые доходы паушально распределяются между всеми членами общества (включая рабочих)? Получим ли мы такой результат, если представители среднего класса владеют другими политическими инструментами?

22.4. Рассмотрите модель из параграфа 22.2, однако предположите, что в экономике существует $N < \infty$ представителей среднего класса и что они осуществляют добровольные взносы в фонд, средства из которого передаются элите. Вместо того чтобы предположить, что представители среднего класса ведут себя конкурентно, рассмотрите СПР в такой игре. Покажите, что если значение параметра β достаточно высоко, то в ней существует СПР, в котором динамика экономики на равновесной траектории включает в себя положительные взносы предпринимателей в фонд, а элита устанавливает нулевой налог. [Подсказка: рассмотрите равновесие со следующей структурой: если совокупные взносы в фонд оказываются меньше некоторого $\tilde{T} > 0$ или если в некотором периоде времени $t' < t$ элита устанавливает положительную ставку налога, то в дальнейшем развитии ставка налога составляет $\tau = 1 - \alpha$ и взносы в фонд равны нулю для всех $t'' > t$.]

22.5. Докажите утверждение 22.4.

22.6. Докажите утверждение 22.5.

22.7. Докажите утверждение 22.6.

22.8. Рассмотрите модель из параграфа 22.2 и предположите, что политическая власть принадлежит представителям среднего класса. Опишите СМР в такой модели. Найдите значение дисконтированной функции полезности элиты, если политические решения принимаются средним классом и обозначьте ее $V^e(M)$. Сравните его со значением дисконтированной функции полезности элиты в случае, когда власть принадлежит ей.

22.9. В модели с политическим замещением из подпараграфа 22.4.2 предположите, что $\eta'(\cdot) > 0$. Покажите что в этом случае предпочитаемая элитой ставка налога меньше $1 - \alpha$ и что даже если элита способна блокировать внедрение новых технологий, она не делает этого. Интуитивно объясните этот результат. Какой тип институциональной организации общества может привести к неравенству $\eta'(\cdot) > 0$ вместо $\eta'(\cdot) < 0$?

22.10. Докажите утверждение 22.7.

22.11. В модели с политическим замещением из подпараграфа 22.4.2 покажите, что единственное СМР также является единственным СПР.

22.12. **(a)** Докажите утверждение 22.9.

(b) Покажите, как должно быть изменено утверждение 22.9, если $\bar{\tau} < 1$, и проведите анализ наилучшего стационарного СПР (в котором используются только стационарные стратегии) в этом случае.

22.13. Докажите утверждение 22.12

22.14. Докажите утверждение 22.13.

22.15. Докажите утверждение 22.15. Объясните, почему условия $\bar{\tau} < 1$ и $(1-\bar{\tau})^{1/(1-\alpha)} < A^e / A^m$ являются необходимыми в этой теореме.

22.16. **(a)** Рассмотрите экономику с политическим замещением из подпараграфа 22.4.2. Предположите, что условие 22.1 не выполняется и $\phi = 0$. Покажите, что в любом СМР и СПР элита предпочитает блокировать внедрение новых технологий, то есть что $g = 0$.

(b) Предположите, что в этом утверждении значение параметра ϕ не равно нулю. Приведите пример СМР, в котором элита продолжает предпочитать $g = 0$.

(c) Далее предположите, что элита обладает возможностью установить паушальный налог на представителей среднего класса. Приведите пример СМР, в котором элита продолжает предпочитать $g = 0$. Объясните, почему в политическом равновесии могут использоваться неэффективные фискальные инструменты, несмотря на то что обществу доступны более эффективные альтернативы.

***22.17.** Предположите, что экономика состоит из двух групп агентов: элиты и производителей. Также предположите, что размеры обеих групп равны. Моментальная полезность каждой группы задана функцией $u(c)$ $\log c$ и норма дисконтирования равна β. Производители обладают доступом к производственной технологии $f(k) = Ak^{\alpha}$, где переменная k обозначает капитал. Элита в периоде времени t накладывает на производителей пропорциональный налог по ставке $\tau(t)$ и использует налоговые сборы на собственное потребление. Значение капитала в периоде $t+1$ должно быть выбрано в периоде t после объявления ставки налога $\tau(t)$. Капитал полностью выбывает после использования в одном периоде.

(a) Сформулируйте задачу динамической оптимизации для предпринимателей при заданной последовательности налоговой ставки и покажите, что динамика запаса капитала задается следующим уравнением:

$$k(t+1) = \alpha\beta(1-\tau(t))Ak(t)^{\alpha}. \tag{22.61}$$

Объясните, почему значение капитала в периоде времени $t+1$ зависит только от предыдущей, а не от текущей ставки налога. [Подсказка: для того чтобы вывести уравнение (22.61), сформулируйте задачу оптимизации для предпринимателя как задачу динамического программирования и предположите, что оптимальный выбор для предпринимателя i выглядит как $k_i(t+1) = \kappa y_i(t)$, где переменная $y_i(t)$ обозначает его выпуск в периоде времени t.]

(b) Чтобы найти значение ставки налога в СМР, выпишите стоимость репрезентативного представителя элиты в периоде $t+1$ как функцию от ставки налога $\tau = \tau(t+1)$, принимая во внимание то, что запас капитала предпринимателей в периоде времени $t+1$, $k = k(t+1)$ задается уравнением (22.61). Покажите, что эта функция стоимости выглядит как:

$$V^e(k) = \max_{\tau\in[0,1]}\left\{\log(\tau Ak^{\alpha}) + \beta V^e(\alpha\beta(1-\tau)Ak^{\alpha})\right\}. \tag{22.62}$$

Используйте теоремы из главы 6 и заключите, что функция $V^e(\cdot)$ строго вогнута и дифференцируема при $k > 0$ (и обозначьте ее производную как $(V^e)'$). Покажите, что уравнение Эйлера для потребления для элиты выглядит как:

$$\frac{1}{\tau} = \beta^2\alpha Ak^{\alpha}(V^e)'(k') = \beta\frac{k'(V^e)'(k')}{1-\tau}.$$

(c) Предположите, что $V^e(k) = \eta + \gamma\log k$ и используйте теорему об огибающей, для того чтобы показать, что $\gamma = \alpha/(1-\alpha\beta)$ и стратегия элиты, при которой ее полезность достигает максимума, выглядит как:

$$\tau(t) = 1 - \alpha\beta \tag{22.63}$$

для всех t (независимо от количества капитала в этом периоде). Объясните роль предположения о логарифмической функции полезности.

(d) Опишите динамику запаса капитала в экономике.

22.18. В примере парадокса Кондорсе, показанном в подпараграфе 22.7.2, покажите, что упорядочение исходов a, b и c также приводит к тому, что предпочтения по крайней мере одного из трех индивидов не обладают одним пиком.

22.19. Сформулируйте и докажите аналог теоремы 22.1 для случая, когда значение H четно.

22.20. Рассмотрите трех индивидов со следующими предпочтениями:

$$1\ a \succ b \succ c,$$

$$2\ b \succ c \succ a,$$

$$3\ c \succ b \succ a.$$

Предположите, что происходит следующее динамическое голосование: вначале проводятся выборы между политиками a и b, а затем их победитель ставится на голосование против политики c и победитель этих выборов претворяется в жизнь. Остановитесь на анализе СПР, в котором избиратели никогда не используют «слабо доминируемые» стратегии.

(a) Покажите, что такие предпочтения обладают одним пиком, однако искреннее голосование не является равновесной стратегией. [Подсказка: предположите, что игроки 1 и 2 голосуют искренне, и покажите, что тогда игрок 3 предпочтет не голосовать искренне.]

(b) Опишите СПР в этой игре при стратегическом голосовании всех участников.

(c) Рассмотрите обобщение этой игры, в котором общество $\mathcal{H}$ состоит из H индивидов и имеется конечный набор политик $\mathcal{R} = \{p_1, p_2, ..., p_M\}$. Для простоты предположите, что значение H нечетно. Голосование происходит в $M - 1$ туров. В первом туре определяется выбор между политиками p_1 и p_2. В следующем туре происходит выбор между победителем первого тура и политикой p_3 и так до последнего тура, где происходит голосование против политики p_M. Победитель последнего тура становится политическим выбором общества. Докажите, что если предпочтения всех агентов обладают одним пиком, то в единственном СПР реализуется точка счастья медианного избирателя.

***22.21.** Измените и докажите теорему 22.3, не используя предположение A4.

***22.22.** В этом упражнении описана даунсианская конкуренция между политическими партиями и затем показано, что если в ней участвуют три партии, то теорема 22.3 не выполняется. В частности рассмотрим даунсианскую конкуренцию между партиями в обществе, состоящем из континуума индивидов единичной меры с предпочтениями с одним пиком. Множеством политик является отрезок [0, 1]. Предположите, что точки счастья индивидов равномерно распределены на этом отрезке.

(a) Вначале предположите, что в обществе конкурируют две партии, А и В. Они обе стремятся максимизировать вероятность прихода к власти. В процессе игры обе партии одновременно объявляют политики $p^A \in [0, 1]$ и $p^B \in [0, 1]$, а затем избиратели голосуют за одну из двух партий. Политическая платформа партии, набравшей большинство голосов, претворяется в жизнь. Опишите равновесие в этой игре. Как изменится ваш результат, если партии максимизируют долю проголосовавших за них избирателей, а не вероятность прихода к власти?

(b) Далее предположите, что в политической жизни участвуют три партии, которые одновременно объявляют политики $p^A \in [0, 1]$, $p^B \in [0, 1]$ и $p^C \in [0, 1]$, и политическая платформа партии, набравшей большинство голосов, претворяется в жизнь. Предположите, что партии максимизируют вероятность прихода к власти. Опишите в этой игре все равновесия в чистых стратегиях.

(c) Далее предположите, что все партии максимизируют долю проголосовавших за них избирателей. Докажите что тогда в игре не существует равновесий в чистых стратегиях.

(d) В части (c) опишите равновесие в смешанных стратегиях. [Подсказка: предположите одинаковые симметричные распределения вероятности для двух партий и убедитесь в том, что при заданных таких распределениях для третьей партии не имеет значения выбор той или иной политики, лежащей в носителе распределения.]

22.23. Докажите теорему 22.5.

22.24. Это упражнение посвящено обобщению понятия единственности пересечения, использованного в теореме 22.4 для анализа многомерного пространства политических альтернатив. Подходящей концепцией предпочтений индивидов в таком случае становятся промежуточные предпочтения. Рассмотрите множество $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^K$ (где $K \in \mathbb{N}$) и предположите, что политики лежат в множестве $\mathcal{R}$. Мы будем говорить, что избиратель обладает «промежуточными предпочтениями», если его косвенная функция полезности может быть представлена в виде $U(p, \alpha_i) = G_1(p) + B(\alpha_i)G_2(p)$, где функция $B(\alpha_i)$ является монотонной (монотонно возрастающей или монотонно убывающей) по аргументу α_i и функции $G_1(p)$ и $G_2(p)$ едины для всех избирателей. Допустите, что выполняется предположение А2 и что все избиратели обладают промежуточными предпочтениями. Точкой (вектором) счастья индивида i является политика $p(\alpha_i) \in \mathcal{R}$, при которой функция полезности индивида i достигает максимума.

Докажите что при промежуточных предпочтениях победитель по Кондорсе всегда существует и совпадает с точкой счастья избирателя с медианным значением α_i, то есть $p_M = p(\alpha_M)$.

***22.25.** Рассмотрите общество, состоящее из трех индивидов, 1, 2 и 3, и единичного запаса ресурсов. Все три индивида участвуют в голосовании за способ распределения ресурсов между собой и каждый из них предпочитает получить большее количество ресурсов и не заботится об уровне потребления двух оставшихся агентов. Так как все ресурсы распределяются между тремя индивидами, мы можем представить все альтернативные политики как пары $\{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0,$ $x_2 \geq 0$ и $x_1 + x_2 \leq 1\}$, где переменная x_i обозначает долю ресурсов, передаваемую для потребления индивида i. Вектор политики $(x_1,$ $x_2)$ претворяется в жизнь, если за него голосуют два избирателя. Покажите, что предпочтения индивидов на множестве политик не обладают свойством единственности пересечения или условия из упражнения 22.24. Покажите, что в игре не существует вектора политики, являющегося победителем по Кондорсе. Покажите, что если две конкурирующие за власть партии принимают обязательство о следовании своей политической платформе, то в игре не существует равновесия в чистых стратегиях.

***22.26.** **(a)** Покажите, что в теореме 22.6 необходимым условием существования симметричного равновесия в чистых стратегиях является требование о том, что матрица

$$\sum_{g=1}^{G} \lambda^g h^g(0) D^2 U^g(p^*) + \sum_{g=1}^{G} \lambda^g \frac{\partial h^g}{\partial \sigma} (DU^g(p^*)) \cdot (DU^g(p^*))^T$$

является отрицательно полуопределенной, где матрица $D^2 U^g$ является якобианом матрицы U^g. Объясните, почему в этом условии используется модуль частной производной $\partial h^g / \partial \sigma$.

(b) Выведите достаточное условие существования такого симметричного равновесия. [Подсказка: остановитесь на различии между локальным и глобальным максимумами.]

(c) Покажите, что без дополнительных предположений о виде функций $U^g(\cdot)$ (помимо вогнутости) достаточное условие существования симметричного равновесия может выполняться, только если все H^g равномерны.

22.27. Рассмотрите следующую одноперiодную экономику, населенную континуумом агентов единичной меры. Доля λ этих агентов является капиталистами, каждый из которых владеет запасом физического капитала k. Оставшиеся агенты обладают лишь человеческим капиталом, который распределен между ними с функцией распределения $\mu(h)$. Выпуск производится на рынке с совершенной конкуренцией и производственная функция выглядит как:

$$Y = K^{1-\alpha}H^{\alpha},$$

где заглавные буквы соответствуют агрегированному запасу переменных. Предположите совершенную конкуренцию на рынках факторов производства и обозначьте равновесные значения арендной стоимости физического и человеческого капитала как r и w. Предположите, что агенты участвуют в голосовании о ставке пропорционального налога τ. Ввиду существования налоговых искажений совокупные налоговые доходы равны

$$\text{Tax} = (\tau - \upsilon(\tau))\left(\lambda rk + (1-\lambda)w\int h d\mu(h)\right),$$

где функция $\upsilon(t)$ является строго возрастающей и вогнутой и $\upsilon(0) = \upsilon'(0) = 0$ и $\upsilon'(1) = \infty$. Налоговые доходы распределяются между агентами паушальным способом.

(a) Найдите идеальную для каждого агента ставку налога. Найдите условия, при которых предпочтения обладают одним пиком, и определите равновесную ставку налога. Как изменяется равновесная ставка налога при увеличении значения k? Как она изменяется при росте значения λ? Интуитивно объясните эти результаты.

(b) Далее предположите, что агенты участвуют в голосовании о ставках налога на доход от капитала и трудовой доход, τ_k и τ_h с соответствующими функциями издержек от них $\upsilon(\tau_k)$ и $\upsilon(\tau_h)$, так что налоговые доходы составляют

$$\text{Tax} = (\tau_k - \upsilon(\tau_k))\lambda rk + (\tau_h - \upsilon(\tau_h))(1-\lambda)w\int h d\mu(h).$$

Найдите наиболее предпочтительные ставки налога для каждого агента. Предположите, что $\lambda < 1/2$. Существует ли тогда равновесие при голосовании? Как ваше утверждение изменяется при росте параметра λ? Объясните, почему ваши выводы отличаются от случая, когда существует лишь один налоговый инструмент.

(c) Далее предположите, что в такой модели с двумя налогами агенты сначала голосуют о ставке налога на доход капитала, а затем, рассматривая эту ставку как заданную, голосуют о ставке налога на трудовой доход. Существует ли в такой игре равновесие при голосовании? Если такое равновесие существует, как изменяются равновесные значения ставок налога при росте переменной k? Как они изменяются при росте значения λ?

22.28. Выведите уравнение (22.43).

22.29. Покажите, что функция $\tilde{V}_i(\tau' \mid p^{t+1})$ не обязательно является квазивогнутой, но всегда удовлетворяет условию единственности пересечения из определения 22.3.

22.30. Рассмотрите экономику, состоящую из трех групп индивидов: доли θ_p бедных агентов, каждый из которых обладает доходом y_p, доли θ_m представителей среднего класса, каждый из которых обладает доходом $y_m > y_p$, и оставшейся доли $\theta_r = 1 - \theta_p - \theta_m$ богатых индивидов, владеющих доходом $y_r > y_m$. Предположите, что $\theta_p < 1/2$, и $\theta_r < 1/2$, так что индивидом с медианным доходом (медианным избирателем) является представитель среднего класса.

(a) Постройте изменение распределения доходов в обществе, которое оставляет средний доход неизменным и увеличивает разрыв между медианным и средним доходом, но не является сохраняющим медиану спредом распределения.

(b) Постройте сохраняющий медиану спред распределения, такой, что разрыв между медианным и средним доходом сокращается. [Подсказка: увеличьте значение y_m и сократите значение y_p, оставив значение y_r неизменным.]

22.31. Рассмотрите экономику, населенную континуумом индивидов единичной меры. Каждый индивид i обладает логарифмической моментальной функцией полезности, то есть

$$U_i = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log C_i(t),$$

и наделен единицей занятости, которую он абсолютно неэластично поставляет на рынок труда. Конечный товар производится на рынке с совершенной конкуренцией фирмами, индексированными переменной j, которые арендуют капитал и труд у индивидов. Производственная функция каждой фирмы выглядит как:

$$Y_j(t) = AK_j(t)^{1-\alpha} G(t)^{\alpha} L_j(t)^{\alpha},$$

где переменные K_j и L_j обозначают капитал и труд, занятые на фирме j соответственно, а переменная G — государственные инвестиции в инфраструктуру. Единственным налоговым инструментом является пропорциональный налог на владение капиталом по ставке $\tau(t)$ в периоде времени t. Все налоговые поступления расходуются на государственные инвестиции в инфраструктуру, то есть

$$G(t) = \tau(t)\bar{K}(t),$$

где переменная $\bar{K}(t)$ обозначает средний (совокупный) запас капитала в экономике. Из такой спецификации модели следует, что государственные инвестиции в инфраструктуру создают экстерналию типа Ромера. Обозначьте начальный запас капитала в экономике как $\bar{K}(0)$.

(a) Опишите равновесие с постоянной в каждом периоде времени ставкой налога $\tau > 0$ и покажите, что если значение параметра A достаточно высоко, то экономика достигает постоянного положительного темпа роста. Покажите, что темп роста экономики не зависит от распределения начального запаса капитала между индивидами. [Подсказка: убедитесь в том, что чистая процентная ставка для домохозяйств равна разности между предельным продуктом капитала и ставкой налога τ.]

(b) Предположите, что начальный запас капитала распределен между индивидами в виде акций ω_i так, что начальный запас капитала индивида i равен $K_i(0) = \omega_i \bar{K}(0)$. Покажите, что в равновесии выполняется равенство $K_i(t) = \omega_i \bar{K}(t)$ для всех $t = 1, 2, \ldots$.

(c) Предположите, что в экономике принимается закон о введении постоянной ставки налога τ во всех будущих периодах. Значение ставки выбирается на основании предложения партии, получившей большинство голосов (из двух конкурирующих партий). Найдите наиболее предпочтительную для индивида i ставку налога как функцию от его доли начального запаса капитала ω_i в периоде времени $t = 0$. Покажите, что предпочтения индивидов обладают одним пиком. На основании этого результата покажите, что будет выбрана ставка налога, наиболее предпочитаемая индивидом с медианным запасом капитала ω_M. Покажите, что если медианное значение запаса капитала снижается, то ставка налога на капитал возрастает. Как это повлияет на темп роста экономики?

(d) Покажите, что равновесие, описанное в части (c), *не* является СМР. Объясните почему. Как бы вы поставили задачу для описания такого равновесия? [Подсказка: вам достаточно только поставить задачу, не находя структуру равновесия.]

22.32. **(a)** Докажите утверждение 22.19.

(b) Найдите значение ставки налога, при которой выпуск достигает максимума, аналогично уравнению (22.60).

(c) Рассмотрите значение ставки налога $\bar{\tau}$, при которой выпуск, общественное благосостояние, полезность элиты и полезность граждан достигают максимума, соответственно $\bar{\tau}^*$, $\bar{\tau}^{wm}$, $\bar{\tau}^e$ и $\bar{\tau}^c$. Покажите, что $0 < \bar{\tau}^c < \bar{\tau}^* < \bar{\tau}^e < 1$ и $0 < \bar{\tau}^c < \bar{\tau}^{wm} < \bar{\tau}^e < 1$.

Глава 23
Политические институты и экономический рост

В предыдущей главе описано, почему некоторые общества выбирают «неэффективные» экономические институты и политику. В ней подчеркнута важная роль общественного конфликта интересов между различными группами и невозможности принятия обязательств относительно будущей политики как основных причин выбора политики, препятствующей экономическому росту. Бóльшая часть анализа в ней проведена в контексте заданного множества политических институтов, в рамках которых формируются как структура, так и сила конфликта между различными индивидами и группами и то, какие меры политики могут быть выбраны и претворены в жизнь. Естественное предположение в этом контексте состоит в том, что политические институты влияют на выбор обществом экономических институтов и политики и, таким образом, на траекторию роста экономики. Это предположение ведет к двум следующим вопросам: позволяют ли определенные политические институты разрешить общественные конфликты более успешно, поэтому возможно предотвратить выбор политики, препятствующей экономическому росту? Почему различные общества выбирают или приходят к различным политическим институтам?

В этой главе приводятся некоторые предварительные ответы на два поставленных выше вопроса. Мы начнем с краткого обзора эмпирических свидетельств о влиянии различных политических режимов на экономический рост. Затем в параграфе 23.2 мы используем базовую модель из параграфа 22.2 из предыдущей главы, для того чтобы показать, что, если мы примем во внимание существование различных предпочтений, ни один политический режим не может быть назван совершенным и в каждом из них существуют издержки и выгоды для различных групп проигравших и победителей в обществе. Тогда ответ на вопрос о том, будет *ли* определенный набор политических институтов вести к политике, стимулирующей экономический рост, зависит от того, как они функционируют, от структуры технологий и запасов факторов производства в обществе, и от того, какие группы получают выгоды от этих институтов. Затем в параграфе 23.3 мы остановимся на динамическом выборе между различными режимами и покажем, как демократические режимы могут компенсировать краткосрочные искажения, которые они приносят, создавая долгосрочные выгоды, как за счет избегания склеротических исходов, так и за счет их большей гибкости. В этом параграфе мы также покажем, как различные политические режимы соотносятся с процессом созидательного разрушения, который, как мы убедились в главе 14, является одним из двигателей современного экономического роста. Из результатов параграфа 23.3 следует, что демократические общества могут эффективнее использовать преимущества сил созидательного разрушения. В параграфе 23.4 приведен краткий анализ вопроса о том, как возникают и изменяются сами политические институты.

23.1. Политические режимы и экономический рост

Большинство ученых, вероятно, начнут исследование влияния политических институтов на экономическое развитие и рост с противопоставления демократических и не демократических режимов. Однако различные типы демократических режимов также имеют различную структуру. Обычно демократия определяется как набор правил и процедур, например свободные и честные выборы, в которых участвует большинство дееспособного населения страны, и свободная конкуренция партий на политической арене. Однако такое определение демократии оставляет многие важные элементы демократического общества не заданными. Демократический режим может быть парламентским или президентским. Это ведет к различным структурам электорального законодательства и различиям во влиянии предпочтений меньшинств. Возможно более важной является интерпретация понятий «свободные и честные» и «большинство дееспособного населения». В большинстве выборов, даже в странах Европы и США, можно увидеть некоторую степень подлога и некоторые ограничения на участие в них кандидатов и партий. Более того, многие индивиды неявным, а иногда и явным образом лишаются гражданских прав. Например, политологи рассматривают Великобританию и США в конце XIX в. как демократические общества, однако избирательным правом в них обладали только мужчины. Аналогично число людей, которые назовут США в 1960-х гг. не демократическим обществом, мало, однако значительное количество черного населения не обладало в то время гражданскими правами. Эти наблюдения показывают различные оттенки демократических режимов, которые могут влиять на экономическое состояние общества.

Различия между недемократическими обществами, скорее всего, еще более значительны. Например, Китай, находящийся под руководством Коммунистической партии с 1948 г., является очевидным примером не-демократического режима, однако структура общества в нем очень сильно отличается от олигархической структуры режима в Великобритании до начала процесса демократизации после принятия парламентом Избирательного акта 1832 г. Премьер-министр и парламент существовали в Великобритании до 1832 г., однако они избирались незначительным меньшинством населения — богатыми, образованными и привилегированными членами общества, которые составляли менее 10% дееспособного населения страны. Более того, власть Коммунистической партии Китая никогда не оспаривалась другими партиями. Пример Китая также отличается от диктаторского режима Аугусто Пиночета в Чили или режима Пак Чон Хи в Южной Корее. Если мы добавим к анализу режимы, основанные на личной власти одного человека, такие как Заир под управлением Мобуту Сесе Секо, и монархии, например Саудовскую Аравию под властью династии Саудитов, то различия становятся еще более значительными.

Несмотря на это, мы можем отметить важное сходство между всеми недемократическими режимами и важное отличие недемократических режимов от демократий, что делает эти понятия удобными для концептуального и эмпирического анализа. Несмотря на все свои несовершенства и различия, демократические режимы, если они наделены по крайней мере минимальной степенью функциональности, предоставляют большее политическое равенство, чем недемократические режимы. Свободная конкуренция между партиями и правило «один избиратель — один голос» являются основой демократии и гарантируют возможность участия в политическом выборе каждого индивида. Если демократический режим успешен, то большинство обладает некоторым (и зачастую значительным) влиянием на политический выбор, однако оно само может быть ограничено некоторыми конституционными нормами. С другой стороны, в недемократических обществах политический выбор основан не на пожеланиях всего населения, а на предпочтениях некоторой его части, которую мы до сих пор называли элитой. Структура элиты различается между различными недемократическими режимами. В Китае основное значение имеют предпочтения лидеров Коммунистической партии. В Чили при режиме Пиночета большинство решений принимались военной хунтой и значение имели предпочтения ее членов (и, возможно, некоторой связанной с хунтой части общества, поддерживавшей диктаторский режим). В Великобритании до Избирательной реформы 1832 г. политическая власть принадлежала небольшому меньшинству богатых индивидов.

После такого предостерегающего введения о различиях между демократическими и недемократическими обществами зададимся вопросом о том, в чем основная разница между этими политическим режимами.

Во-первых, мы можем проанализировать траектории экономического роста в демократиях и в авторитарных странах. Естественным выбором периода наблюдений здесь станут послевоенные годы, так как мы владеем значительно большим количеством экономических данных для этого периода. В статьях: [Przeworski, Lemongi 1993; Barro 1999] на основании межстранового регрессионного анализа показано, что темп экономического роста в демократиях не опережает темпа роста в недемократических странах. Однако экономисты не достигли консенсуса по этому вопросу. Например, в работе [Minier 1998] представлены свидетельства, говорящие о положительном влиянии на экономический рост демократизации и об отрицательном влиянии перехода к недемократическому режиму. Несмотря на это, из большинства эмпирических фактов следует, что демократии не растут быстрее авторитарных режимов (по меньшей мере после учета вклада других влияющих на экономический рост факторов). Этот результат удивляет и, может быть, даже приводит в замешательство. На первый взгляд мы должны ожидать значительно более низкие темпы экономического роста среди недемократических государств, так как они включают в себя очень неуспешные страны, такие как Ирак при Саддаме Хусейне, Заир при Мобуту и Гаити при Дювалье. Однако, с другой стороны, мы можем выделить большее количество неуспешных демократий: Индию до начала 1990-х гг. и ряд других получивших независимость колоний, которые встали на путь построения электоральной демократии (хотя при этом часто превращались в военные хунты или диктатуры с личной властью сильного лидера). Более того, мы можем увидеть много успешных недемократических режимов, такие как Сингапур при Ли Куан Ю, Южная Корея при генерале Паке Чон Хи или современный Китай. Поэтому для того, чтобы понять, как различные политические институты влияют на процесс принятия экономических решений и экономический рост, нам необходимо пойти далее простых различий между демократическими и недемократическими режимами.

Если мы не видим различий в темпе экономического роста между демократическими и недемократическими режимами, существуют ли между ними другие важные политические различия или различия в распределении дохода? В работе [Rodrik 1999] показано, что демократии характеризуются большим значением доли дохода труда в ВВП и этот результат интерпретируется автором как следствие большего перераспределения дохода в демократиях. В статье [Acemoglu, Robinson 2006a] описан ряд эмпирических исследований и показано, что в демократиях происходит большее перераспределение дохода. С другой стороны, в работе [Gil, Mulligan, Sala-i-Martin 2004] на основании кросс-секционных регрессий показано, что многие показатели, в частности общий уровень государственных расходов и государственные расходы на социальное обеспечение, не различаются между демократическими обществами и диктатурами. Поэтому среди ученых нет консенсуса о влиянии выбора политического режима на фискальную политику и распределение ресурсов и дохода в обществе. Однако эмпирические свидетельства, представленные в работе [Rodrik 1999], и некоторые наблюдения, описанные в статье [Acemoglu, Robinson 2006a], говорят о том, что, по крайней мере в некоторых случаях, в демократиях происходит значительно большее перераспределение дохода, чем в недемократических обществах, и мы можем принять эти различия как базовую начальную гипотезу в дальнейшем анализе. Однако необходимо отметить, что различия в политике между демократическими и недемократическими странами, даже если они и существуют, на практике оказываются значительно менее выраженными, чем мы могли бы ожидать, основываясь лишь на экономической теории.

Здесь также необходимо отметить, что сравнение демократических и недемократических режимов только на протяжении послевоенных лет может оказаться недостаточным. Если мы обратимся к более длительному горизонту времени, то демократии демонстрируют лучшие экономические показатели. Большинство стран, проведших быструю индустриализацию в XIX в., были более демократическими, чем страны, не прошедшие индустриализацию. Сравнения США со странами Южной Америки или Великобритании и Франции с Россией и Австро-Венгрией являются наиболее информативными в данном контексте. Например, США, которые в конце в XVIII в. были одним из наиболее демократических государств, не были богаче, а, скорее всего, были значительно беднее, чем очень недемократические и репрессивные режимы в карибских колониях. Однако в XIX и начале XX вв. США прошли через индустриализацию и быстрый экономический рост, а карибские страны и большинство других государств Южной Америки находились в застое. Таким образом, этот исторический эпизод говорит о том, что более демократические общества могли оказаться более успешными в использовании преимуществ новых инвестиций и благоприятных возможностей экономического роста, появившихся в эпоху индустриализации в XIX в. Из сравнения Великобритании и Франции с Россией и Австро-Венгрией следуют схожие выводы. Несмотря на то что первые две страны были богаче двух последних в начале XIX в., разрыв в доходах между ними был мал. Однако различия в политических институтах были более значительны. Великобритания уже находилась на пути к становлению парламентской демократии, а во Франции уже прошла Великая французская революция 1789 г. Великобритания и Франция использовали стимулирующую экономический рост политику в течение большей части XIX в., даже когда она наносила значительный ущерб элите лендлордов, в то время когда Россия и Австро-Венгрия явным образом препятствовали индустриализации, чтобы защитить политические и экономические интересы владеющей землей аристократии.

Долгосрочные регрессии, схожие с описанными в главе 4, также согласуются с этим утверждением, и из них следует значительное влияние широкого набора институтов на экономический рост. Несмотря на то что мы не можем точно утверждать, что эти зависимости говорят о влиянии политических институтов на экономический рост, этот набор институтов включает в себя как политические, так и экономические элементы и, вероятнее всего, стимулирующий экономический рост набор институтов не смог бы существовать без политических институтов, поддерживающих экономическую политику, поощряющую инвестиции и свободный рынок.

Далее мы перейдем к теоретическим моделям, описывающим, как политические институты могут воздействовать на выбор экономической политики и экономическое развитие общества.

23.2. Политические институты и политика, стимулирующая экономический рост

Рассмотрим каноническую модель Кобба—Дугласа, представленную в параграфе 22.3 в предыдущей главе. В ней мы предполагали, что власть в обществе принадлежит некоторому подмножеству производителей — политической элите. Далее мы кратко опишем равновесие в этой модели в случае, когда власть принадлежит среднему классу или работникам, и сравним равновесные распределения ресурсов в экономике.

23.2.1. Диктатура среднего класса и диктатура элиты

Во-первых, предположим, что политическая власть в обществе принадлежит среднему классу, то есть *диктатуру среднего класса* вместо диктатуры элиты в предыдущей главе. Такая модель симметрична модели из предыдущей главы, средний класс и элита в ней меняются местами. В частности, из анализа, приведшего к утверждению 22.6, теперь непосредственно вытекает следующий результат.

Утверждение 23.1. *Рассмотрим модель из параграфа* 22.3, *однако предположим, что политическая власть в обществе принадлежит среднему классу, а не элите. Допустим, что выполняется условие* 22.1, $\phi > 0$ *и*

$$A^m > \phi \alpha^{\alpha/(1-\alpha)} A^e \frac{\theta^e}{\theta^m}. \tag{23.1}$$

Тогда в единственном СМР имеют место равенства $\tau^m(t) = 0$ *и*

$$\tau^e(t) = \bar{\tau}^{COM} \equiv \frac{\kappa(\bar{L}, \theta^m, \alpha, \phi)}{1+\kappa(\bar{L}, \theta^m, \alpha, \phi)},$$

для всех t, где функция $\kappa(\bar{L}, \theta^e, \alpha, \phi)$ *задается уравнением* (22.29).

Доказательство. См. упражнение 23.1. ■

В этом утверждении показано, что политические равновесия при управлении элиты и при управлении среднего класса совпадают между собой с единственным различием в том, что две группы агентов меняются местами. Следовательно, политические институты влияют на равновесное распределение ресурсов. В частности в обществе, в котором власть принадлежит элите, представители среднего класса облагаются налогом, который снижает их спрос на труд и приносит доход элите. Если же власть принадлежит среднему классу, то конкурирующей с ним группой производителей, лишенной политической власти, является элита (несмотря на то что термин «элита» обычно означает группу людей, владеющих политической властью). В этом случае элита облагается налогом, который приносит доход среднему классу и создает для него лучшие условия на рынке труда. Сравнение политик, выбираемых средним классом и элитой, в некоторой степени описывает ряд хорошо известных исторических эпизодов. Например, в контексте исторического развития европейских стран, в которых политическая власть вначале принадлежала лендлордам, которые использовали ее для того, чтобы удерживать работников на земле и снизить силу и прибыльность торговцев и ранних промышленников. Затем после экономических и конституциональных изменений в конце Средних веков власть перешла от аристократов-лендлордов к торговцам и промышленникам (то есть к среднему классу в терминах этой модели), и уже они использовали политику, благоприятствующую их собственным экономическим интересам и приносящую издержки лендлордам.

Какой из двух наборов политических институтов — диктатура элиты или диктатура среднего класса — в этом случае лучше? Ответ на этот вопрос заключается в том, что их простое сравнение невозможно. Во-первых, как уже показано в предыдущей главе, равновесие, описанное в параграфе 22.4, оптимально по Парето: при заданном множестве фискальных инструментов невозможно увеличить полезность любого другого члена общества без снижения полезности элиты. Аналогично описанное выше распределение ресурсов также оптимально по Парето, однако в нем экономика находится в другой точке на границе Парето — точке, благоприятной для среднего класса, а не для элиты. Что мы можем сказать о выпуске? Даже на этот вопрос нет однозначного ответа. Каждое из этих обществ может достичь более высокого уровня дохода на душу населения в зависимости от того, какая группа индивидов обладает более производительными инвестиционными возможностями. Если средний класс является более производительным, то режим, при котором политическая власть принадлежит элите, создает значительные искажения. С другой стороны, если элита имеет более прибыльные и выгодные обществу производственные возможности, то передача политической власти элите более выгодна с точки зрения экономического развития, чем диктатура среднего класса.

Следующее утверждение демонстрирует простую практическую версию этого результата.

Утверждение 23.2. *Рассмотрим модель из параграфа* 22.3 *с производственной технологией Кобба—Дугласа. Предположим, что выполняются условие* 22.1 *и неравенства* (22.27) *и* (23.1), $\theta^e = \theta^m$ *и* $\phi > 0$. *Тогда если* $A^m > A^e$, *то доход на душу населения выше в равновесии при диктатуре среднего класса, а если* $A^e > A^m$, *то доход на душу населения выше в равновесии при диктатуре элиты.*

Доказательство. См. упражнение 23.2. ∎

Это утверждение является примером простого случая, когда политические институты, ведущие к лучшему экономическому положению (в показателях дохода на душу населения) зависят от того, владеет ли наиболее производительная группа агентов политической властью. Если политическая и экономическая силы разделены, то неэффективность экономики возрастает. Непосредственным следствием этого утверждения является вывод о том, что невозможно обсуждать «эффективные политические институты» не рассмотрев интересы групп, конкурирующих за политическую власть и не проведя детальный сравнительный анализ их производительности и экономической активности. Очевидно, что мы можем подумать о политических институтах, при которых экономика будет развиваться лучше, чем при режиме диктатуры элиты, рассмотренном в предыдущей главе, и при режиме диктатуры среднего класса, рассмотренном в этом параграфе. В этом случае основным вопросом является вопрос возможности установления таких институтов в более реалистичной политэкономической модели с большим числом экономических взаимодействий между агентами. Анализ вопроса дизайна доступных политических институтов при наличии политэкономических ограничений является интересной областью науки, которая пока находится на этапе становления. Здесь мы лишь заметим, что в большинстве обстоятельств на практике выбор политических институтов происходит среди различных систем, которые создают различные типы искажений и различные группы победителей и проигравших.

23.2.2. Демократия или диктатура работников?

Подпараграф 23.2.1 посвящен сравнению диктатуры среднего класса и диктатуры элиты. Третьим возможным политическим устройством общества является более демократическая политическая система, при которой политические решения принимаются большинством. Так как на практике количество работников в экономике превосходит количество предпринимателей из среднего класса и представителей элиты, в этом случае в жизнь будут претворяться политические решения, благоприятствующие экономическим интересам работников (которые до сих пор рассматривались в модели как пассивные игроки, предоставляющие на рынок труд по равновесной заработной плате). Несмотря на то что такая система в чем-то напоминает демократию (особенно потому, что она предполагает большее политическое равенство, чем диктатура элиты или среднего класса), ее также можно рассматривать как «диктатуру работников»: в данном случае работники принимают политические решения, так же как элита или представители среднего класса принимают их при своей диктатуре[1]. Это наблюдение еще раз подчеркивает тот факт, что различные политические институты создают различных победителей и проигравших, в зависимости от того, какая группа агентов обладает политической властью в обществе.

Как и ранее, анализ такой модели прост, однако структура политического равновесия здесь еще больше зависит от того, выполняется ли условие 22.1.

Утверждение 23.3. *Рассмотрим модель из параграфа* 22.3 *и предположим, что политическая власть принадлежит работникам.*

1. *Предположим, что условие* 22.1 *не выполняется (то есть предложение труда в экономике избыточно). Тогда в единственном СМР имеют место равенства* $\tau^m(t) = \tau^e(t) = \tau^{RE}(t) \equiv 1 - \alpha$.
2. *Предположим, что условие* 22.1 *выполняется (то есть в экономике нет избыточного предложения труда) и* $\theta^e = \theta^m = \theta$. *Если при этом* $A^m > A^e$, *то в единственном СМР имеют место равенства* $\tau^e(t) = 0$ *и* $\tau^m(t) = \tau^{Dm}$, *где*

$$(1 - \tau^{Dm})^{1/(1-\alpha)}A^m = A^e$$

или $\tau^{Dm} = 1 - \alpha$ *и* $\alpha^{1/(1-\alpha)}A^m \geq A^e$. *Если* $A^m < A^e$, *то в единственном СМР имеют место равенства* $\tau^m(t) = 0$ *и* $\tau^e(t) = \tau^{De}$, *где*

$$(1 - \tau^{De})^{1/(1-\alpha)}A^e = A^m$$

$$\text{или } \tau^{De} = 1 - \alpha \text{ и } \alpha^{1/(1-\alpha)}A^e \geq A^m.$$

Доказательство. См. упражнение 23.3. ■

[1] Установление различий между диктатурой работников или других бедных слоев общества и истинной «демократией» является очень важным вопросом, однако он выходит за рамки нашего анализа в этой главе.

Наиболее интересным следствием из этого утверждения является сравнение экономик с избыточным предложением труда и без него. Если условие 22.1 не выполняется, то предложение труда в экономике избыточно и налоги не приводят к изменению заработной платы. Понимая это, работники выбирают положительную ставку налога на обе группы производителей, увеличивая тем самым доходы, которые они перераспределяют в свою пользу. Следовательно, в демократическом обществе такое распределение ресурсов будет политическим равновесием. Очевидно, что оно несет больше искажений, чем диктатура элиты или среднего класса, так как при этих двух политических режимах одна из групп производителей не облагается налогом. Если условие 22.1 выполняется, то ситуация значительно изменяется. Напомним, что в этом случае диктатуры элиты и среднего класса ведут к значительным искажениям ввиду эффекта манипулирования ценами факторов производства, в частности в них устанавливаются налоги на конкурирующую группу производителей для того, чтобы удерживать низкий уровень заработной платы. С другой стороны, в результате этого же изменения заработной платы работники не будут приветствовать такой налог. Следовательно, в этом случае работники будут более сдержанно использовать налогообложение и в демократическом обществе ставка налога будет ниже, чем при диктатуре элиты или среднего класса. Следовательно, это утверждение еще раз подчеркивает тот факт, что тип политических институтов, ведущий к большему уровню дохода на душу населения (и к более высокому темпу экономического роста), зависит от инвестиционных возможностей и рыночной организации экономики. Если работники (или другая группа агентов, имеющих в демократии большой политический вес) обладают возможностью облагать налогом предпринимателей, не неся при этом издержек, то в демократическом обществе будут устанавливаться высокие перераспределяющие налоги, что может привести к более низкому уровню дохода на душу населения, чем при диктатуре элиты или среднего класса. Однако если работники осознают воздействие налога на их собственную заработную плату, то демократия ведет к более умеренному политическому выбору.

Таким образом, простой анализ в этом параграфе уже позволяет увидеть некоторые причины отсутствия однозначной связи между политическим режимом и экономическим ростом. Если в модели выполняется эквивалент условия 22.1 и искажающая политика ведет к снижению заработных плат, то, вероятнее всего, демократический режим приведет к более высокому уровню агрегированного выпуска и темпа роста экономики, чем недемократический режим. С другой стороны, если эквивалент условия 22.1 не выполняется, то демократическое общество выбирает популистскую политику с высокими налогами, что ведет к ухудшению состояния экономики. Очевидно, что модель, представленная выше, во многом очень проста и условие 22.1 или его аналоги могут оказаться неподходящими для ответа на вопрос о том, какой из политических режимов является лучшим с точки зрения стимулирования экономического роста. Несмотря на это, из нее следует, что демократические правительства, как любые другие политические режимы, действуют в интересах групп, обладающих политической властью, и равновесное распределение ресурсов зачастую характеризуется различными искажениями. Будут ли эти искажения более или менее значительными, чем искажения, возникающие при других политических режимах, зависит от технологий, запасов факторов производства и типов политик, доступных к имплементации в обществе. Этот результат не удивителен в свете вышеприведенного анализа, однако его следствия очень важны. В частности из него вытекает, что мы не можем выделить априорные теоретические причины для того, чтобы утверждать существование простой связи между демократией и экономическим ростом.

23.3. Динамический выбор режима

Предыдущий параграф посвящен описанию распределения ресурсов в экономике при различных политических режимах. Несмотря на то что использованная нами модель является упрощенной версией неоклассической модели экономического роста с бесконечным горизонтом планирования, выбор политического режима в ней был статическим. В этом параграфе мы рассмотрим модель, в которой присутствует мобильность общественных групп, вход в предпринимательскую деятельность и простой тип созидательного разрушения. С ее помощью мы покажем различия между демократией и олигархией. Нашей основной целью будет описание динамического выбора между двумя этими режимами.

23.3.1. Базовая модель

Рассмотрим экономику, населенную континуумом бесконечно живущих индивидов единичной меры с предпочтениями, заданными функцией (22.1) из предыдущей главы. По причинам, которые станут ясны позднее, мы также предположим, что в каждом периоде времени для каждого индивида с небольшой вероятностью $\varepsilon > 0$ реализуется событие, при котором он умирает (и допустим, что после смерти полезность индивида равна нулю) и при этом в экономике рождается множество меры ε новых индивидов. Положим норму дисконтирования, включающую в себя вероятность смерти, равной $\beta \in (0, 1)$. Мы рассмотрим предельный случай этой модели при $\varepsilon \to 0$.

В экономике присутствуют два типа агентов: работники, производящие блага, и предприниматели. Это предположение ведет к появлению возможности перехода индивида из одной группы в другую. В частности, каждый агент может быть занят как работник и может стать предпринимателем. Предположим, что производительность всех агентов как работников одинакова, однако их производительность как предпринимателей различается. В частности агент i в периоде времени t обладает предпринимательскими навыками $a_i(t) \in \{A^L, A^H\}$ где $A^L < A^H$. Чтобы стать предпринимателем, агенту, который не имеет собственной фирмы, необходимо открыть новую фирму. Открытие новой фирмы может сопровождаться издержками, связанными с препятствиями к выходу на рынок, создаваемыми уже присутствующими на нем предпринимателями.

Следовательно, каждый агент вступает в период t с навыком $a_i(t) \in \in \{A^H, A^L\}$, некоторым запасом капитала, инвестированного в предыдущем периоде $k_i(t)$ (напомним, что инвестиции в физический капитал, как и ранее, производятся на один период раньше) и с еще одной переменной состояния, описывающей, имеет ли он уже в собственности фирму. Мы обозначим эту переменную как $e_i(t) \in \{0, 1\}$, где $e_i(t) = 1$ соответствует индивиду, выбравшему в периоде времени $t - 1$ предпринимательскую деятельность (в течение периода t). Индивид, который уже является предпринимателем в периоде t (то есть $e_i(t) = 1$), не несет возможных издержек выхода на рынок в следующем периоде, поэтому стоимость выбора предпринимательской деятельности в периоде $t + 1$ для него ниже. Мы будем называть агента с $e_i(t) = 1$ членом «элиты» в периоде времени t, так как он не несет издержек выхода на рынок, а также потому, что в олигархическом обществе он будет членом политической элиты, принимающей политические решения.

Таким образом, в периоде t каждый индивид выбирает значение $e_i(t + 1) \in \{0, 1\}$, и если он выбирает $e_i(t + 1) = 1$, то он становится предпринимателем и также принимает решение об инвестициях в следующем периоде $k_i(t + 1) \in \mathbb{R}_+$, в периоде $t + 1$ он определяет число работников $l_i(t + 1) \in \mathbb{R}_+$, которых он нанимает.

Агенты в этом обществе также участвуют в принятии политических решений. Зависимость различия в соответствии между предпочтениями различных агентов и политическим выбором от политического режима описана далее. В экономике возможно использование трех типов политики. Два из них схожи с политикой, которую мы использовали ранее: налог по ставке $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$ и паушальные трансферты всем агентам, которые мы обозначим как $T(t) \in [0, \infty)$. Отметим, что мы уже наложили верхний предел для ставки налога $\bar{\tau} < 1$. Это ограничение может быть следствием существования возможности укрытия агентами выпуска от налогообложения в неформальном секторе экономики или искажающего воздействия налогов. Оно будет рассматриваться нами как заданное. Новым политическим инструментом являются издержки $B(t) \in [0, \infty)$, которые несут новые предприниматели во время открытия фирмы. Предположим, что эти издержки являются абсолютными потерями, связанными, например, с бюрократическими процедурами, через которые проходит открывающий новое дело индивид. Паушальные трансферты финансируются только из налоговых поступлений.

Предприниматель с навыком $a_i(t)$, запасом капитала $k_i(t)$ и занятостью $l_i(t)$ производит

$$y_i(t) = \frac{1}{\alpha} k_i(t)^{\alpha} (a_i(t) l_i(t))^{1-\alpha} \tag{23.2}$$

единиц конечного товара. Как и в параграфе 22.3, предположим полное выбытие капитала, то есть инвестиции предпринимателя i в периоде времени $t-1$ в единицах единственного в экономике конечного товара также равны $k_i(t)$.

Упростим анализ модели дополнительным предположением о том, что размер всех фирм одинаков, то есть $l_i(t) = \bar{L}$ для всех i (анализу модели без этого предположения посвящено упражнение 23.5). Наконец, допустим, что предприниматель также может работать в собственной фирме как работник, откуда следует, что альтернативные издержки предпринимательской деятельности равны нулю.

Наиболее важным предположением здесь является предположение о том, что предприниматель должен сам управлять собственной фирмой, то есть выпуск зависит от его производительности $a_i(t)$. Альтернативным вариантом является модель, в которой с некоторыми издержками возможно делегирование полномочий управления фирмой другим более производительным индивидам. В этом случае предприниматели с низкой производительностью предпочтут нанимать более производительных управляющих. Мы предположим, что издержки делегирования находятся на запретительно высоком уровне.

Чтобы упростить выкладки, введем переменную $b(t) \equiv B(t)/\beta\bar{L}$, которая равна дисконтированным издержкам выхода на рынок на одного работника (и является подходящей переменной для сравнения прибыльности различных выборов вида деятельности агента). Прибыль (брутто-доход предпринимателя i, включая издержки выхода на рынок) в периоде t равен:

$$\pi_i(t) = (1-\tau(t)) y_i(t) - w(t) l_i(t) - \frac{1}{\beta} k_i(t).$$

В этой формуле учитывается, что инвестиции $k_i(t)$ осуществлялись в предыдущем периоде, поэтому альтернативные издержки инвестирования (которые равны упущенному потреблению) умножаются на величину, обратную норме дисконтирования. Это выражение говорит о том, что предприниматель, производящий выпуск $y_i(t)$, платит налог на него по ставке $\tau(t)$, а также несет совокупные издержки оплаты труда $w(t)l_i(t)$. Чистая прибыль предпринимателя с навыком $a_i(t)$ в периоде t при заданных ставке налога $\tau(t)$, заработной плате $w(t)$ и занятости $l_i(t)=\bar{L}$ составляет:

$$\pi(k_i(t)\,|\,a_i(t),\ w(t),\ \tau(t)) =$$
$$= \frac{1}{\alpha}(1-\tau(t))k_i(t)^{\alpha}(a_i(t)\bar{L})^{1-\alpha} - w(t)\bar{L} - \frac{1}{\beta}k_i(t). \qquad (23.3)$$

Используя это выражение, запишем моментальную выгоду от предпринимательской деятельности в периоде t для агента с навыком $z \in \{L, H\}$ как функцию от ставки налога $\tau(t)$ и заработной платы $w(t)$ следующим образом:

$$\Pi^z(\tau(t),\ w(t)) = \max_{k_i(t)} \pi(k_i(t)\,|\,a_i(t) = A^z,\ w(t),\ \tau(t)). \qquad (23.4)$$

Заметим, что это выражение определяет *чистую выгоду* от предпринимательской деятельности, так как агент получает заработную плату $w(t)$ в любом случае (или будучи занятым на фирме другого предпринимателя в качестве работника и работая в своей собственной фирме будучи предпринимателем, что позволяет нанимать на одного работника меньше). Более того, выгода от предпринимательской деятельности для агента с $e_i(t-1)=0$ и навыком $a_i(t)=A^z$ равна

$$\Pi^z(\tau(t),\ w(t)) - \frac{1}{\beta}B(t) = \Pi^z(\tau(t),\ w(t)) - b(t)\bar{L},$$

так как агент вынужден нести дополнительные издержки выхода на рынок, которые, как и издержки инвестирования, оплачиваются в предыдущем периоде времени и поэтому разделены на норму дисконтирования β.

Равновесие на рынке труда требует, чтобы совокупный спрос на труд не превышал его предложения. Так как предприниматели также заняты в качестве работников, предложение труда равно единице, то есть

$$\int_0^1 e_i(t)l_i(t)di = \int_{i\in S_i^E} \bar{L}di \le 1, \qquad (23.5)$$

где переменная S_i^E обозначает множество предпринимателей в периоде времени t.

Наконец, предположим корреляцию между предпринимательскими навыками агентов во времени. В частности, допустим, что переменная $a_i(t)$ является марковской цепью:

$$a_i(t+1)=\begin{cases} A^H \text{ с вероятностью } \sigma^H, & \text{если } a_i(t)=A^H, \\ A^H \text{ с вероятностью } \sigma^L, & \text{если } a_i(t)=A^L, \\ A^L \text{ с вероятностью } 1-\sigma^H, & \text{если } a_i(t)=A^H, \\ A^L \text{ с вероятностью } 1-\sigma^H, & \text{если } a_i(t)=A^L, \end{cases} \tag{23.6}$$

где σ^H, $\sigma^L \in (0, 1)$. Здесь параметр σ^H задает вероятность того, что агент обладает высоким уровнем предпринимательского навыка при условии того, что он владел высоким уровнем навыка в предыдущем периоде. Параметр σ^L задает вероятность перехода от низкого уровня навыка к высокому. Естественно предположить неравенство $\sigma^H \geq \sigma^L > 0$, то есть что динамика навыка персистентна и что высокий уровень навыка не является невозвратным состоянием. Из предположения $\sigma^H < 1$ следует неполная корреляция между предпринимательским навыком агента во времени. Следовательно, множество предпринимателей, обладающих необходимым уровнем предпринимательского навыка, изменяется во времени, что приводит к некоторому созидательному разрушению, когда новые предприниматели заменяют старых.

Неполная корреляция во времени между $a_i(t)$ может быть проинтерпретирована тремя различными дополняющими друг друга способами. Во-первых, мы можем допустить, что производительность индивида не постоянна во времени и изменения сравнительных преимуществ ведет к изменениям множества предпринимателей. Во-вторых, мы можем мыслить о бесконечно живущих агентах как о представителях династии, и тогда неполная корреляция во времени между $a_i(t)$ обозначает неполную корреляцию между навыками родителей и детей. Третьей, и, возможно, наиболее интересной, интерпретацией является предположение о том, что каждый индивид имеет заданный уровень компетенции в различных областях, а сравнительные преимущества в предпринимательской деятельности изменяются во времени вместе с относительной важностью различных видов предпринимательской активности. Например, некоторые индивиды могут быть лучше других в промышленном предпринимательстве, в то время как другие могут быть лучше в сельскохозяйственном предпринимательстве. Тогда по мере того, как промышленная деятельность становится более прибыльной, чем сельское хозяйство, индивиды, имеющие сравнительное преимущество в промышленном предпринимательстве будут выходить на рынок, а индивиды, имеющие сравнительное преимущество в агарном предпринимательстве, будут покидать его. Марковская цепь для навыка (23.56) позволяет явно описать все три этих канала.

Из марковской цепи (23.6) также следует, что доля агентов с высоким уровнем навыка в стационарном распределении равна:

$$M \equiv \frac{\sigma^L}{1-\sigma^H+\sigma^L} \in (0,\ 1). \tag{23.7}$$

Так как экономика населена большим числом (континуумом) агентов, доля агентов с высоким уровнем навыка равна M в каждом периоде времени. Мы также предположим неравенство:

$$M\bar{L} > 1,$$

из которого следует, что если издержки выхода на рынок отсутствуют, то спрос на труд со стороны предпринимателей с высоким уровнем навыка более чем достаточен, чтобы занять всю рабочую силу. Более того, предположим, что значение M мало, а значение $\bar{L}$ велико, в частности что $\bar{L} > 2$. Тогда работники всегда составляют большинство в обществе, что упрощает дальнейший анализ политэкономического равновесия.

Последовательность событий выглядит так. В начале каждого периода времени в результате действий индивидов в предыдущем периоде и реализации неопределенности относительно уровня навыка для всех них определяются значения переменных $a_i(t)$, $e_i(t)$ и $k_i(t)$. Затем происходит следующая последовательность действий.

1. Предприниматели формируют спрос на труд, определяется значение равновесной заработной платы и осуществляется выпуск конечного товара.
2. Устанавливается значение ставки налога на предпринимателей $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$.
3. Для каждого агента реализуется значение навыка в следующем периоде времени $a_i(t+1)$.
4. Устанавливается уровень издержек выхода на рынок для новых предпринимателей $b(t+1)$.
5. Все агенты принимают решение о выборе вида деятельности $e_i(t+1)$, и предприниматели осуществляют инвестиции в капитал следующего периода $k_i(t+1)$.

Препятствия к выходу на рынок и налоги устанавливаются различными агентами в различных политических режимах следующим образом. Заметим, что ставка налога выбирается после принятия инвестиционных решений. Это приводит к возникновению проблемы ограбления, описанной в предыдущей главе, и становится дополнительным источником неэффективности в экономике. Неравенство $\tau(t) \leq \bar{\tau} < 1$ ограничивает масштаб проблемы ограбления. Индивиды принимают решения о выборе вида деятельности и инвестициях, осознавая свои способности, то есть значение $a_i(t+1)$ определяется до принятия решений о переменных $e_i(t+1)$ и $k_i(t+1)$. Также отметим, что если индивид не управляет фирмой в текущем периоде времени, то он теряет «лицензию» на предпринимательскую деятельность, то есть если он желает открыть фирму в следующий раз, то он вынужден нести издержки выхода на рынок (а предположение $l_i(t) = \bar{L}$ не позволяет сохранить фирму очень малого размера). Наконец нам необходимо описать начальные условия. Мы предположим, что распределение навыка в обществе является стационарным и в начальный момент времени предприниматели отсутствуют, то есть $e_i(-1) = 0$ для всех i. Из линейности предпочтений следует, что начальный запас капитала не влияет на динамику модели.

Как и ранее, остановимся на анализе СМР, в котором стратегии игроков являются функциями только от состояний, определяющих выигрыш. Такое состояние для индивида i в периоде времени t включает в себя его собственное состояние $(e_i(t), a_i(t), k_i(t), a_i(t+1))$ и, возможно, долю индивидов с высоким уровнем навыка[2] $\mu(t)$, которая задана как

$$\mu(t) = \Pr(a_i(t) = A^H \mid e_i(t) = 1) = \Pr(a_i(t) = A^H \mid i \in S_t^E).$$

Как и ранее, *экономическое равновесие* представляет собой конкурентное равновесие при заданной последовательности политических мер $\{b(t), \tau(t)\}_{t=0,1,\ldots}$. Обозначим вектор выбора индивида i в периоде времени t как $x_i(t) = (e_i(t+1), k_i(t+1))$, множество выборов всех агентов как $x(t) = [x_i(t)]_{i\in[0,1]}$ и вектор политики в периоде t как $p(t) = (\tau(t), b(t+1))$. Обозначим бесконечную последовательность политических мер начиная с периода t как $p^t = \{p(s)\}_{s=t}^{\infty}$. Аналогичным образом обозначим последовательности заработных плат и выбора, начиная с периода t, как $w^t = \{w(s)\}_{s=t}^{\infty}$ и $x^t = \{x(s)\}_{s=t}^{\infty}$. Тогда $\hat{x}^t$ и последовательность заработных плат $\hat{w}^t$ являются экономическим равновесием при заданной последовательности политик p^t, если при заданных $\hat{w}^t, p^t$ и состоянии $(e_i(t-1), a_i(t))$ функция полезности индивида i достигает максимума на $x_i(t)$ и рынок труда находится в равновесии в периоде времени t при заработной плате $\hat{w}(t)$ (то есть выполняется уравнение (23.5)). Тогда тип каждого агента в следующем периоде $(e_i(t), a_i(t+1))$ определяется его решением о выборе предпринимательской деятельности в периоде t и динамикой цепи Маркова (23.6).

[2] Здесь переменные $e_i(t)$, $k_i(t)$ и $a_i(t)$ являются элементами состояния индивида в периоде t, так как они влияют на спрос предпринимателя на труд. В дополнение значение переменной $a_i(t+1)$ определяется в периоде t и влияет на его выбор вида деятельности и инвестиционные решения в периоде $t+1$ и также является элементом его состояния.

Далее опишем это равновесие. Так как $l_i(t) = \bar{L}$ для всех $i \in S_t^E$ (напомним, что S_t^E является множеством всех предпринимателей в периоде времени t), инвестиции, при которых прибыль достигает максимума, равны:

$$k_i(t+1) = (\beta(1-\tau(t)))^{\frac{1}{1-\alpha}} a_i(t)\bar{L}, \tag{23.8}$$

где $\tau(t)$ является равновесной ставкой налога, которую предприниматели ожидают на равновесной траектории. Из уравнения (23.8) следует, что инвестиции являются возрастающей функцией от навыка предпринимателя $a_i(t)$ и общей занятости $\bar{L}$ и убывающей функцией от ставки налога $\tau(t)$.

Далее, используя уравнение (23.8), запишем чистый выигрыш от предпринимательской деятельности для агента типа $z \in \{L, H\}$ (или с навыком A^L или A^H) следующим образом:

$$\Pi^z(\tau(t), w(t)) = \frac{1-\alpha}{\alpha}\beta^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\tau(t))^{1/(1-\alpha)} A^z\bar{L} - w\bar{L}. \tag{23.9}$$

Более того, из условия равновесия на рынке труда (23.5) следует, что мера множества предпринимателей в любом периоде времени равна $\int_{i \in S_t^E} di = 1/\bar{L}$. Налоговые доходы и паушальные трансферты на душу населения в периоде t тогда составляют:

$$T(t) = \int_{i \in S_t^E} \tau(t) y_i(t) di = \frac{1}{\alpha}\tau(t)(\beta(1-\tau(t)))^{1/(1-\alpha)}\bar{L}\int_{i \in S_t^E} a_i(t) di. \tag{23.10}$$

Упростим дальнейшие выкладки и обозначим последовательность будущих политик и заработных плат как $q^t = (p^t, w^t)$. Тогда стоимость агента с навыком $z \in \{L, H\}$ в периоде времени t, если он выбирает производственную деятельность (в периоде t), равна:

$$W^z(q^t) = w(t) + T(t) + \beta CW^z(q^{t+1}), \tag{23.11}$$

где $CW^z(q^{t+1})$ составляет будущую стоимость агента типа z начиная с периода $t+1$, которая равна:

$$\begin{aligned} CW^z(q^{t+1}) = \sigma^z \max\{W^H(q^{t+1});\ V^H(q^{t+1}) - b(t+1)\bar{L}\} + \\ + (1-\sigma^z)\max\{W^L(q^{t+1});\ V^L(q^{t+1}) - b(t+1)\bar{L}\}, \end{aligned} \tag{23.12}$$

где функция $V^z(q^t)$ определена аналогично функции $W^z(q^t)$ и задает стоимость агента с навыком z, если он выбирает предпринимательскую деятельность. Уравнения (23.11) и (23.12) интуитивны. Работник типа $z \in \{L, H\}$ имеет трудовой доход $w(t)$ (который не зависит от его навыка), получает трансферт $T(t)$ и имеет будущую стоимость $CW^z(q^{t+1})$. Работник типа $z \in \{L, H\}$ сегодня (с $e_i(t) = 0$) в следующем периоде времени с вероятностью σ^z будет иметь высокий уровень навыка, и в этом случае он может выбрать остаться работником и иметь стоимость W^H или понести дополнительные издержки и $b(t+1)\bar{L}$ и стать предпринимателем (с $e_i(t+1) = 1$) и иметь стоимость предпринимателя с высоким уровнем навыка V^H. Причина, по которой индивид должен выплатить $b(t+1)\bar{L}$ при выборе $e_i(t+1) = 1$, в том, что он в текущий момент времени не является предпринимателем и вынужден нести издержки выхода на рынок. Оператор максимума в уравнении (23.12) гарантирует то, что индивид делает выбор с большей стоимостью. Агент будет иметь низкий уровень навыка с вероятностью $1 - \sigma^z$ и получит соответствующее этому уровню значение функции стоимости.

Аналогично, функция стоимости предпринимателя имеет следующий вид:

$$V^z(q^t) = w(t) + T(t) + \Pi^z(\tau(t), w(t)) + \beta CV^L(q^{t+1}), \tag{23.13}$$

где функция $\Pi^z(\tau(t), w(t))$ задается уравнением (23.9) и зависит от уровня навыка агента, и $CV^z(q^{t+1})$ составляет будущую стоимость предпринимателя типа z:

$$\begin{aligned} CV^z(q^{t+1}) &= \sigma^z \max\{W^H(q^{t+1}); V^H(q^{t+1})\} + \\ &+ (1-\sigma^z)\max\{W^L(q^{t+1}); V^L(q^{t+1})\}. \end{aligned} \tag{23.14}$$

Предприниматель с навыком z также получает заработную плату $w(t)$ (работая в собственной фирме) и трансферт $T(t)$, а также прибыль, равную $\Pi^z(\tau(t), w(t))$. В следующем периоде времени предприниматель будет иметь высокий уровень навыка с вероятностью σ^z и низкий уровень навыка с вероятностью $1 - \sigma^z$. После реализации навыка он осуществляет выбор вида деятельности (остаться предпринимателем или стать работником) в следующем периоде. Здесь необходимы два замечания. Во-первых, в уравнении (23.14), в отличие от уравнения (23.12), отсутствуют дополнительные издержки перехода в предпринимательскую деятельность, так как индивид уже владеет фирмой. Во-вторых, если предприниматель решает стать работником, то его стоимость задается уравнением (23.12) и если в следующий раз он решает открыть фирму, то он вынужден будет нести издержки выхода на рынок.

Из анализа уравнений (23.12) и (23.14) следует, что выбор индивидом вида деятельности в периоде времени t зависит от *чистой стоимости предпринимательства* при условии его текущего состояния $e_i(t-1) = \mathbf{e}$. Запишем это значение следующим образом:

$$NV(q^t \mid a_i(t) = A^z, e_i(t-1) = \mathbf{e}) = V^z(q^t) - W^z(q^t) - (1-\mathbf{e})b(t)\bar{L}.$$

Последнее слагаемое здесь составляют издержки выхода на рынок, которые несет индивид с $\mathbf{e} = 0$. Из наличия оператора максимума в уравнениях (23.12) и (23.14) следует, что если для агента $NV > 0$, то он предпочитает стать предпринимателем.

Кто становится предпринимателем в такой экономике? Ответ на этот вопрос зависит от значения чистой стоимости NV. Из стандартных теорем динамического программирования из главы 16 и наблюдения о том, что моментальные выигрыши являются строго монотонными, следует, что функция $V^z(q^t)$ строго монотонна по аргументам $w(t)$, $T(t)$ и $\Pi^z(\tau(t), w(t))$, то есть $V^H(q^t) > V^L(q^t)$ (см. упражнение 23.4). Пользуясь аналогичными аргументами, нетрудно убедиться, что функция $NV(q^t \mid a_i(t) = A^z, e_i(t-1) = \mathbf{e})$ также является возрастающей по $\Pi^z(\tau(t), w(t))$. Поэтому для всех a и $\mathbf{e}$ имеем неравенства:

$$NV(q^t \mid a_i(t) = A^H, e_i(t-1) = 1) \geq NV(q^t \mid a_i(t) =$$
$$= a, e_i(t-1) = \mathbf{e}) \geq NV(q^t \mid a_i(t) = A^L, e_i(t-1) = 0).$$

Другими словами, чистая стоимость предпринимательской деятельности наиболее высока для присутствующих на рынке предпринимателей с высоким уровнем навыка и наиболее низка для низкоквалифицированных работников. Однако ex ante невозможно утверждать, будет ли значение $NV(q^t \mid a_i(t) = A^H, e_i(t-1) = 0)$ больше или меньше значения $NV(qt \mid a_i(t) = A^L, e_i(t-1) = 1)$, то есть является ли предпринимательство более прибыльным для существующих предпринимателей с низким уровнем навыка или для квалифицированных работников, которые должны понести издержки выхода на рынок.

Таким образом, мы можем определить два типа равновесий:

1. *Равновесие с выходом на рынок новых предпринимателей*, в котором для всех предпринимателей выполняется условие $a_i(t) = A^H$; и
2. *Склеротическое равновесие*, в котором агенты с $e_i(t-1) = 1$ остаются предпринимателями независимо от их производительности.

В равновесии с выходом на рынок требуется, чтобы чистая стоимость предпринимательской деятельности для не членов элиты с высоким уровнем навыка была выше, чем для членов элиты с низким уровнем навыка. Определим $w^H(t)$ как пороговое значение заработной платы, такое, что при ней высококвалифицированным агентам, не принадлежащим к элите, безразлично, занимаются ли они предпринимательской деятельностью или работой на производстве. То есть значение $w^H(t)$ должно быть таким, чтобы имело место равенство $NV(q^t \mid a_i(t) = A^H, e_i(t-1) = 0) = 0$. Используя уравнения (23.11) и (23.13), получаем следующее выражение для этого порогового значения:

$$w^H(t) \equiv \max\left\{\frac{1-\alpha}{\alpha}\beta^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\tau(t))^{1/(1-\alpha)}A^H - b(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta(CV^H(q^{t+1}) - CW^H(q^{t+1})}{\bar{L}};\ 0\right\}. \qquad (23.15)$$

Аналогично определим $w^L(t)$ как значение заработной платы, при которой присутствующим на рынке предпринимателям с низким уровнем навыка безразлично, продолжать ли предпринимательскую деятельность или работать на производстве. Тогда при таком значении заработной платы выполняется равенство $NV(q^t \mid a_i(t) = A^L, e_i(t-1) = 1) = 0$, или

$$w^L(t) \equiv \max\left\{\frac{1-\alpha}{\alpha}\beta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\tau(t))^{\frac{1}{1-\alpha}}A^L + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta(CV^L(q^{t+1}) - CW^L(q^{t+1}))}{\bar{L}};\ 0\right\}. \qquad (23.16)$$

Оба эти уравнения интуитивны. Например, первое слагаемое в уравнении (23.15) $(1-\alpha)\beta^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\tau(t))^{1/(1-\alpha)}A^H/\alpha$ составляет прибыль до выплаты заработной платы на одного работника для предпринимателя с высоким уровнем навыка. Переменная $b(t)$ обозначает издержки выхода на рынок на одного работника (дисконтированные общие издержки $\beta^{-1}B(t)$, деленные на $\bar{L}$). Наконец, слагаемое $\beta(CV^H(q^{t+1}) - CW^H(q^{t+1}))$ описывает косвенную (динамическую) выгоду (дополнительный выигрыш для высококвалифицированного агента от перехода из работников в элиту). Естественно, что размер этого выигрыша зависит от последовательности политических мер, например он будет значительным, если будут установлены высокие издержки выхода на рынок. Если $w^L(t) < w^H(t)$, то общая выгода от предпринимательской деятельности для высококвалифицированного не члена элиты превышает издержки. Аналогично объясняется уравнение (23.16). Очевидно, что при заработной плате, меньшей, чем $w^L(t)$ и $w^H(t)$, в экономике будет избыточный спрос на труд, поэтому она не может быть равновесной. Следовательно, условие существования равновесия с выходом в периоде времени t может быть упрощено и сведено к сравнению двух пороговых значений, введенных выше:

$$w^H(t) \geq w^L(t). \qquad (23.17)$$

С другой стороны, если выполняется обратное неравенство, то в экономике устанавливается склеротическое равновесие.

Более того, в равновесии с выходом, то есть в любом равновесии, в котором выполняется условие (23.17), имеет место равенство $NV(q^t \mid a_i(t) = A^H, e_i(t-1) = 0) = 0$. Если эта величина строго положительна, другими словами, если заработная плата меньше $w^H(t)$, то все агенты с высоким уровнем навыка предпочтут стать предпринимателями, что невозможно в силу предположения $M\bar{L} > 1$. Из этого наблюдения также следует, что мера множества предпринимателей в экономике равна $1/\bar{L}$. Тогда из уравнений (23.9), (23.11) и (23.13) следует, что равновесная заработная плата равна

$$w^E(t) = w^H(t). \tag{23.18}$$

Также заметим, что если выполняется условие (23.17), то $NV(q^t \mid a_i(t) = A^L, e_i(t-1) = 1) \le 0$, то есть при заработной плате $w^E(t)$ присутствующие на рынке предприниматели с низким уровнем навыка получат меньшую полезность, если они продолжат предпринимательскую деятельность.

Равновесие с входом схематически описано на рис. 23.1, где показаны спрос и предложение на рынке труда в экономике. Предложение труда постоянно и равно единице, в то время как спрос на труд является убывающей функцией от заработной платы. На рисунке представлен случай, когда выполняется условие (23.17), то есть существует равновесие с выходом. Первый отрезок кривой показывает готовность платить для присутствующих на рынке высококвалифицированных агентов (для которых $e_i(t-1) = 1$ и $a_i(t) = A^H$), которая составляет $w^H(t) + b(t)$. Этот результат интуитивен, так как предпринимательская деятельность выгодна для них как для высококвалифицированных новичков и они не должны нести издержки выхода на рынок. Второй отрезок описывает высококвалифицированных возможных новых предпринимателей (для которых $e_i(t-1) = 0$ и $a_i(t) = A^H$). Заработная плата на нем равна $w^H(t)$. Суммарный спрос на труд двух этих групп агентов равен $M\bar{L} > 1$ работников. Отсюда следует, что график функции спроса на труд пересекается с кривой предложения труда при заработной плате, заданной уравнением (23.18).

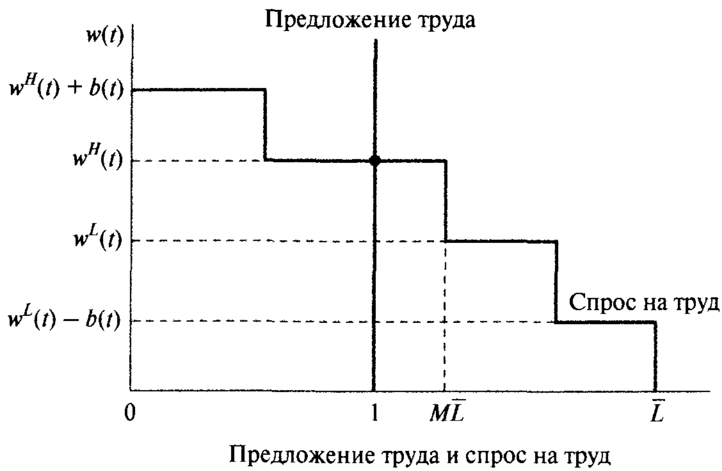

Рис. 23.1. Равновесие на рынке труда, если выполняется условие (23.17)

С другой стороны, в склеротическом равновесии $w^H(t) < w^L(t)$ и низкоквалифицированные присутствующие на рынке предприниматели продолжают предпринимательскую деятельность, то есть $e_i(t) = e_i(t-1)$. Если бы агенты в экономике не умирали (то есть $\varepsilon = 0$), то общее число предпринимателей было бы равно $1/\bar{L}$ и при любой заработной плате $w \in [w^H(t), w^L(t)]$ спрос на труд в точности бы равнялся предложению труда (то есть $1/\bar{L}$ агентов нанимали бы по $\bar{L}$ работников при совокупном предложении труда 1). Следовательно, равновесная заработная плата не была бы определена единственным образом. С другой стороны, если $\varepsilon > 0$, то общее число предпринимателей, способных платить заработную плату $w^L(t)$ меньше $1/\bar{L}$ при всех $t > 0$, поэтому при такой заработной плате, как и при любой другой, превышающей нижнюю границу отрезка $[w^H(t), w^L(t)]$, на рынке труда будет избыточное предложение. Поэтому равновесная заработная плата будет равна этой нижней границе $w^H(t)$, что совпадает с уравнением (23.18). Так как при такой заработной плате всем агентам с $e_i(t-1) = 0$ и $a_i(t) = A^H$ безразлично, заниматься ли предпринимательской деятельностью или работать на производстве, в равновесии их достаточное количество становится предпринимателями и совокупный спрос на труд равен единице. Далее мы остановимся на предельном случае такой экономики, где $\varepsilon \to 0$, в которой равновесная заработная плата задана равенством $w^E(t) = w^H(t)$ даже в том случае, когда спрос на труд равен предложению труда и при других ее значениях[3].

Этот случай схематически представлен на рис. 23.2. Так как условие (23.17) не выполняется, второй горизонтальный отрезок кривой спроса на труд соответствует присутствующим на рынке низкоквалифицированным предпринимателям (с $e_i(t-1) = 1$ и $a_i(t) = A^L$), которые при заданных издержках входа на рынок имеют большую предельную производительность труда, чем потенциальные высококвалифицированные новички.

Из этих рассуждений также следует, что динамика доли высококвалифицированных предпринимателей $\mu(t)$ описывается следующим уравнением:

$$\mu(t) = \begin{cases} \sigma^H \mu(t-1) + \sigma^L (1 - \mu(t-1)), & \text{если условие (23.17) не выполняется,} \\ 1, & \text{если условие (23.17) выполняется,} \end{cases} \quad (23.19)$$

начиная с $\mu(0)$. Напомним, что, так как $e_i(-1) = 0$ для всех i, любое значение $b(0)$ в равной мере затрагивает всех потенциальных новичков, и, следовательно, в равновесии в начальном периоде времени $\mu(0) = 1$.

[3] Множественность равновесных заработных плат в динамическом равновесии возникает в намного более общих моделях, чем данная модель с двумя типами предпринимателей (см. упражнение 23.11).

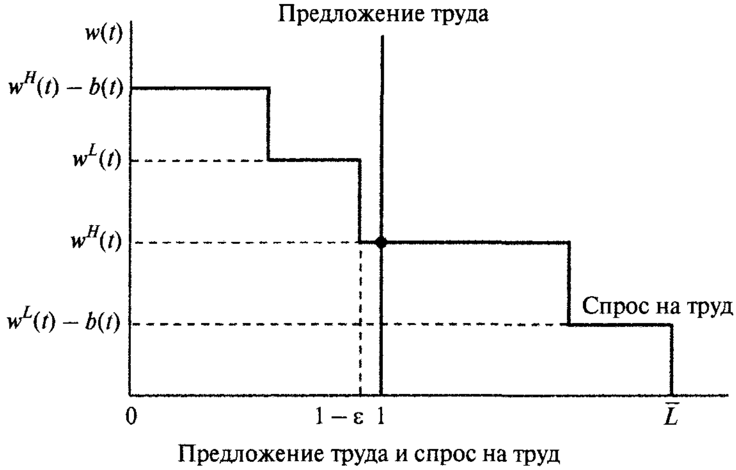

Рис. 23.2. Равновесие на рынке труда, если условие (23.17) не выполняется

Чтобы полностью описать политическое равновесие, нам необходимо определить последовательность политик p^t. Мы рассмотрим два политических режима: (1) демократию, когда значения $b(t)$ и $\tau(t)$ определяются мажоритарным голосованием и каждый агент имеет один голос; и (2) олигархию, когда значения $b(t)$ и $\tau(t)$ определяются голосованием среди членов элиты (предпринимателей) в периоде времени t.

23.3.2. Демократия

Демократическое равновесие — это СМР, в котором выбор $b(t)$ и $\tau(t)$ осуществляется в результате мажоритарного голосования в периоде времени t. Из спецификации последовательности событий следует, что ставка налога в периоде t $\tau(t)$ определяется после принятия решений об инвестициях, а размер издержек выхода на рынок — до этого события. Из предположения $\bar{L} > 2$ вытекает, что работники (не члены элиты) всегда составляют большинство избирателей. В момент голосования о ставке налога инвестиционные решения уже приняты и агенты выбрали вид своей деятельности. Следовательно, они выбирают ставку налога, при которой трансферт на душу населения, равный

$$\frac{1}{\alpha}\tau(t)k(t)^{\alpha}\bar{L}\sum_{i\in S_t^E} a_i(t),$$

достигает максимума. Здесь учтено, что значение $k(t)$ задано инвестиционными решениями в предыдущем периоде. Так как это выражение возрастает по $\tau(t)$ и $\tau(t) \le \bar{\tau}$, оптимальная ставка налога для работников равна $\tau(t) = \bar{\tau}$ для всех t. Поэтому совокупные налоговые доходы составляют:

$$T^E(t) = \frac{1}{\alpha}\bar{\tau}\left(\beta\left(1-\bar{\tau}\right)\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \bar{L} \sum_{i \in S_t^E} a_i(t). \tag{23.20}$$

Размер издержек выхода на рынок $b(t)$ устанавливается в конце периода $t-1$ (перед принятием агентами решений о виде деятельности) как решение задачи максимизации выражения (23.20). Низкоквалифицированные работники (с $e_i(t-1) = 1$ и $a_i(t) = A^L$) осознают, что они останутся работниками, и в СМР выбор политики в периоде времени t не влияет на будущие стратегии, кроме как через его воздействие на переменные состояния, определяющие размер выигрыша. Следовательно, при заданной ставке налога $\tau(t) = \bar{\tau}$ полезность агента i с $e_i(t-1) = 0$ и $a_i(t) = A^L$ зависит от $b(t)$ только через равновесные заработную плату $w^E(t)$ и трансферты $T^E(t)$. Работники с высокой производительностью (с $e_i(t-1) = 0$ и $a_i(t) = A^H$) могут стать предпринимателями, но, как следует из анализа выше, в этом случае $NV(q^t \mid a_i(t) = A^H, e_i(t-1) = 0) = 0$ и $w^H = w^L$, поэтому их полезность равна полезности низкоквалифицированных работников. Следовательно, все работники предпочитают уровень $b(t)$, при котором сумма $w^E(t) + T^E(t)$ достигает максимума. Так как предпочтения всех работников одинаковы, и они составляют большинство населения экономики, в демократическом равновесии максимизируются эти предпочтения.

Следовательно, демократическое равновесие (начиная с периода времени t) состоит из таких политики, заработной платы и последовательности экономических решений $\hat{p}^t$, $\hat{w}^t$ и $\hat{x}^t$ соответственно, что $\hat{w}^t$ и $\hat{x}^t$ являются экономическим равновесием при заданном $\hat{p}^t$ и $\hat{p}^t = (\bar{\tau}, b(t+1))$ удовлетворяет условию

$$b(t+1) \in \arg\max_{b(t+1)\geq 0} \left\{w^E(t+1) + T^E(t+1)\right\}.$$

Из уравнений (23.18) и (23.20) следует, что заработная плата и налоговые доходы достигают максимума при $b(t+1) = 0$ для всех t, то есть в демократическом равновесии отсутствуют издержки выхода на рынок. Этот результат интуитивен: у работников нет стимулов защищать присутствующих на рынке предпринимателей, в связи с тем что такая защита снижает спрос на труд и заработную плату. Так как издержки выхода на рынок равны нулю, предпринимателями становятся только высококвалифицированные агенты, то есть для всех t $e_i(t) = 1$, только если $a_i(t) = A^H$. Используя эту стационарную последовательность политик, получаем из функций стоимости (23.11) и (23.13) следующее условие:

$$V^H = W^H = W^L = W = \frac{w^D + T^D}{1-\beta},$$

где переменная w^D обозначает заработную плату в демократическом равновесии, а переменная T^D — уровень трансфертов (при $\tau(t) = \bar{\tau}$ и $b(t) = 0$ для всех t). Из уравнения (23.15) следует, что $w^D = (1-\alpha)(\beta(1-\bar{\tau}))^{\alpha/(1-\alpha)} A^H/\alpha$. Следующее утверждение резюмирует вышеприведенные рассуждения.

Утверждение 23.4. *В данной модели существует единственное демократическое равновесие. В этом равновесии* $\tau(t) = \bar{\tau}$ *и* $b(t) = 0$ *при всех* t. *Более того,* $e_i(t) = 1$, *если и только если* $a_i(t) = A^H$, *то есть* $\mu(t) = 1$. *Равновесная заработная плата задается уравнением*

$$w(t) = w^D \equiv \frac{1-\alpha}{\alpha} \beta^{\alpha/(1-\alpha)} (1-\bar{\tau})^{\alpha/(1-\alpha)} A^H,$$

и агрегированный выпуск равен

$$Y^D(t) = Y^D \equiv \frac{1}{\alpha} (\beta(1-\bar{\tau}))^{\alpha/(1-\alpha)} A^H.$$

Заметим, что агрегированный выпуск не изменяется во времени и в равновесии полностью отсутствует неравенство (потому что избыточное предложение высококвалифицированных предпринимателей приводит к тому, что они не получают ренты). Далее мы убедимся в том, что в олигархическом равновесии этот результат не имеет места.

23.3.3. Олигархия

В олигархической экономике политический выбор осуществляется посредством голосования среди членов элиты[4]. Во время голосования о размере издержек выхода на рынок элита состоит из агентов с $e_i(t-1) = 1$, а во время голосования о ставке налога она состоит из агентов с $e_i(t) = 1$. Мы начнем с описания решения вопроса о налогообложении индивидами с $e_i(t) = 1$ и наложим следующее ограничение.

Условие 23.1.

$$\bar{L} \geq \frac{1}{2}\frac{A^H}{A^L} + \frac{1}{2}.$$

[4] Заметим, что это предположение означает, что политическая власть принадлежит присутствующим на рынке предпринимателям. Как было показано в предыдущей главе, в реальности часто может наблюдаться разделение экономической и политической сил и важнейшие решения по историческим или другим причинам принимаются агентами, обладающими политической силой. Анализ в предыдущей главе и в параграфе 23.2 из этой главы иллюстрирует искажающую политику, которая может стать следствием такого разделения сил. В данной модели предполагается другой крайний случай: в ней вся политическая власть принадлежит присутствующим на рынке предпринимателям и демонстрируется другой тип возникающей в этом случае неэффективности.

Если это условие выполняется, то как высококвалифицированные, так и низкоквалифицированные предприниматели предпочитают нулевую ставку налога $\tau(t) = 0$. Мы упростим анализ модели предположением о том, что это условие выполнено. Случай, когда это не так, рассмотрен в упражнении 23.9. Условие 23.1 требует, чтобы разрыв между производительностью низко- и высококвалифицированных членов элиты не был настолько велик, что низкоквалифицированные члены элиты желали бы облагать прибыль налогом и косвенно переносить ресурсы от высококвалифицированных предпринимателей к себе.

Если условие 23.1 выполняется, то олигархия всегда выбирает ставку налога $\tau(t) = 0$. Во время принятия решения об издержках выхода на рынок высококвалифицированные предприниматели предпочтут выбрать $b(t)$, при котором значение V^H достигает максимума, а низкоквалифицированные предприниматели предпочтут максимизировать V^L (обе группы агентов ожидают $\tau(t) = 0$). Максимизация обеих этих величин требует выбора размера издержек выхода на рынок, при котором заработная плата находится на минимальном уровне. Напомним, что из уравнения (23.18) следует, что равновесная заработная плата в этом случае продолжает быть заданной уравнением $w^E(t) = w^H(t)$, поэтому она достигнет минимума $w(t) = 0$ при выборе

$$b(t) \geq b^E(t) \equiv \frac{1-\alpha}{\alpha}\beta^{\alpha/(1-\alpha)}A^H + \beta\left(\frac{CV^H(q^{t+1}) - CW^H(q^{t+1})}{\bar{L}}\right),$$

так что $w(t) = 0$. Без ограничения общности предположим, что в этом случае элита устанавливает размер издержек выхода на рынок на уровне $b(t) = b^E(t)$.

Тогда олигархическое равновесие (начиная с периода времени t) может быть определено как последовательность политик $\hat{p}^t$, последовательность заработных плат $\hat{w}^t$ и экономических решений $\hat{x}^t$, таких, что $\hat{w}^t$ и $\hat{x}^t$ является экономическим равновесием при заданной $\hat{p}^t$, а $\hat{p}^t$ задано как $\tau(s) = 0$ и $b(s) = b^E(s)$ для всех $s \geq t$. В олигархическом равновесии отсутствует перераспределительное налогообложение и размер издержек выхода на рынок достаточно высок для того, чтобы гарантировать склеротическое равновесие с нулевой заработной платой.

Используя условие $w^E(t) = 0$, мы можем найти равновесные стоимости высоко- и низкоквалифицированных предпринимателей из функции стоимости (23.12) следующим образом:

$$\tilde{V}^L = \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{(1-\beta\sigma^H)A^L + \beta\sigma^L A^H}{(1-\beta(\sigma^H - \sigma^L))}\frac{1-\alpha}{\alpha}\beta^{\alpha/(1-\alpha)}\bar{L}\right],$$

и

$$\tilde{V}^H = \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{(1-\beta(1-\sigma^L))A^H + \beta(1-\sigma^H)A^L}{(1-\beta(\sigma^H - \sigma^L))}\frac{1-\alpha}{\alpha}\beta^{\alpha/(1-\alpha)}\bar{L}\right].$$

Эти выражения интуитивны. Во-первых, рассмотрим $\tilde{V}^L$ в предельном случае $\beta \to 1$. Тогда, начиная с состояния $e(t-1) = L$, предприниматель проведет долю своего будущего $\sigma^L/(1-\sigma^H+\sigma^L)$ с высоким уровнем навыка A^H и долю $(1-\sigma^H)/(1-\sigma^H+\sigma^L)$ с низким уровнем навыка A^L. Если $\beta < 1$, то низкоквалифицированные состояния происходят чаще и имеют больший вес, который в этом случае равен $(1-\beta\sigma^H)/(1-\beta(\sigma^H-\sigma^L))$. Интуитивное объяснение выражения для $\tilde{V}^H$ аналогично.

Так как в равновесии заработная плата и трансферты равны нулю, очевидно, что для всех работников $W = 0$. Поэтому для высококвалифицированного работника $NV = \tilde{V}^H - b$, откуда следует, что величина

$$b(t) = b^E \equiv \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{(1-\beta(1-\sigma^L))A^H + \beta(1-\sigma^H)A^L}{(1-\beta(\sigma^H - \sigma^L))}\frac{1-\alpha}{\alpha}\beta^{\alpha/(1-\alpha)}\right] \quad (23.21)$$

достаточна для того, чтобы гарантировать нулевую заработную плату.

Агрегированный выпуск в олигархическом равновесии составляет:

$$Y^E(t) = \frac{1}{\alpha}\beta^{\alpha/(1-\alpha)}[\mu(t)A^H + (1-\mu(t))A^L], \quad (23.22)$$

где $\mu(t) = \sigma^H\mu(t-1) + \sigma^L(1-\mu(t-1))$ задано уравнением (23.19) при начальном значении $\mu(0) = 1$.

Напомним, что в начальном периоде времени $e_i(-1) = 0$ для всех индивидов, поэтому в равновесии имеет место равенство $\mu(0) = 1$. В этом случае (и даже для всех $\mu(0) > M$) последовательность $\mu(t)$ монотонно убывает и сходится к M и агрегированный выпуск также убывает во времени:

$$\lim_{t\to\infty} Y^E(t) = Y^E_\infty \equiv \frac{1}{\alpha}\beta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}[A^L + M(A^H - A^L)]. \quad (23.23)$$

На интуитивном уровне — сравнительное преимущество члена элиты в предпринимательской деятельности постепенно исчезает ввиду неполной корреляции уровня навыка во времени[5].

[5] Несмотря на это, возможно представить общества, в которых $\mu(0) < M$, так как в них существует другой тип отбора олигархии в начальном периоде времени, который отрицательно коррелирован с предпринимательским навыком. В этом случае, в чем-то неожиданно, $\mu(t)$ и $Y^E(0)$ будут возрастать во времени. Будучи интересным с теоретической точки зрения, этот случай менее правдоподобен на практике, так как естественно ожидать положительную корреляцию при начальном отборе, то есть высококвалифицированные агенты с большей вероятностью становятся предпринимателями в периоде времени $t = 0$ и $\mu(0) > M$.

Еще одним важным свойством олигархического равновесия является высокий уровень неравенства доходов в экономике. Заработная плата равна нулю, в то время как предприниматели получают положительную прибыль (фактически совокупный доход предпринимателей равен выпуску). Это контрастирует с относительным равенством в демократической экономике. Следующее утверждение резюмирует вышеприведенные результаты.

Утверждение 23.5. *Предположим, что выполняется условие* 23.1. *Тогда в модели существует единственное олигархическое равновесие. Оно является склеротическим и в нем для всех t налоги* $\tau(t) = 0$, *издержки входа на рынок* $b(t) = b^E$ *задаются уравнением* (23.21), $w^E(t) = 0$. *Доля высококвалифицированных предпринимателей в этом равновесии равна* $\mu(t) = \sigma^H\mu(t-1) + \sigma^L(1-\mu(t-1))$ *при начальном значении* $\mu(0) = 1$. *Агрегированный выпуск задается уравнением* (23.22), *убывает во времени и удовлетворяет условию* $\lim_{t\to\infty} Y^E(t) = Y^E_\infty$, *заданному уравнением* (23.23).

Доказательство. См. упражнение 23.7. ■

23.3.4. Сравнение демократии и олигархии

Так как $\mu(0) = 1$, агрегированный выпуск в начальном периоде времени в олигархическом равновесии $Y^E(0)$ превышает его постоянное значение в демократическом равновесии Y^D. То есть

$$Y^D = \frac{1}{\alpha}(\beta(1-\bar{\tau}))^{\alpha/(1-\alpha)} A^H < Y^E(0) = \frac{1}{\alpha}\beta^{\alpha/(1-\alpha)} A^H.$$

Следовательно, в начале в олигархической экономике производится больший выпуск, чем в демократии, так как в ней защищено право собственности предпринимателя (в то время как в демократии на предпринимателей накладываются искажающие налоги). Из анализа из предыдущего подпараграфа также следует, что $Y^E(t)$ убывает во времени, а Y^D остается постоянным. Следовательно, олигархическая экономика впоследствии может отстать от демократической. Произойдет это или нет, зависит от того, будет ли Y^D больше, чем Y^E_∞, заданный уравнением (23.23). Такое неравенство возможно, если $(1-\bar{\tau})^{\alpha/(1-\alpha)} A^H > A^L + M(A^H - A^L)$ или если выполняется следующее условие.

Условие 23.2

$$(1-\bar{\tau})^{\alpha/(1-\alpha)} > \frac{A^L}{A^H} + M\left(1 - \frac{A^L}{A^H}\right).$$

Если условие 23.2 выполняется, то демократическое общество в некоторый момент времени обгоняет олигархическое общество. Этот результат резюмируется в следующем утверждении.

Утверждение 23.6. *Предположим, что выполняется условие* 23.1. *Тогда в периоде времени* $t = 0$ *агрегированный выпуск в олигархическом обществе превышает его значение в демократическом обществе, то есть* $Y^E(0) > Y^D$. *Если условие* 23.2 *не выполняется, то агрегированный выпуск в олигархии всегда превышает его значение в демократии, то есть* $Y^E(t) > Y^D$ *для всех* t. *Если выполняется условие* 23.2, *то существует* t', *такой, что для всех* $t \le t'\, Y^E(t) \ge Y^D$, *а для всех* $t > t'\, Y^E(t) < < Y^D$, *то есть демократическое общество опережает олигархическое общество. Такое развитие событий более вероятно, если значения* $\bar{\tau}$, A^L/A^H *и* M *малы.*

Доказательство. См. упражнение 23.8. ■

Из этого утверждения следует, что олигархическая экономика является более производительной, чем демократия на раннем этапе развития, но ее размер сокращается со временем. В нем также утверждается, что в долгосрочной перспективе олигархия с большей вероятностью будет относительно не эффективна при выполнении следующих условий:

1. Если значение $\bar{\tau}$ мало: в этом случае демократический режим не в состоянии проводить очень популистскую политику со значительным перераспределением дохода от предпринимателей к работникам. Параметр $\bar{\tau}$ может соответствовать как некоторым институциональным препятствиям, ограничивающим перераспределение ресурсов, так и, что более интересно, специфичности активов в экономике: большая специфичность ограничивает размер налоговой ставки и искажения в экономике становятся менее существенными.
2. Если отношение A^H к A^L велико: тогда процесс созидательного разрушения — перехода высококвалифицированных агентов в предпринимательскую деятельность — становится важен с точки зрения эффективного распределения ресурсов.
3. Если значение M мало: в этом случае случайная выборка содержит малую долю высококвалифицированных агентов, что ведет к значительным искажениям в олигархическом склеротическом равновесии. Более того, значение M мало, если мала вероятность σ^H, то есть олигархическая экономика с большей вероятностью придет к низкому уровню выпуска в долгосрочной перспективе, если эффективное распределение ресурсов требует высокой степени волатильности производительности предпринимателей во времени. Такой тип волатильности является еще одной мерой важности процесса созидательного разрушения.

С другой стороны, если налоговая нагрузка в демократии высока и издержки, связанные с невозможностью направить в предпринимательскую деятельность подходящих агентов, ограниченны, то выпуск в олигархическом обществе превышает его значение в демократии и в долгосрочной перспективе.

Эти результаты по сравнительной статике могут быть использованы для объяснения того, почему, как показано в параграфе 23.1, северовосточные штаты США в XIX в. значительно опередили карибские аграрные экономики. Во-первых, демократический режим в США не использовал значительное перераспределение ресурсов, что в рамках данной модели соответствует низкому значению параметра $\bar{\tau}$. Во-вторых, XIX век был веком развития промышленности и торговли, то есть переход высококвалифицированных агентов в предпринимательскую деятельность, вероятно, имел большое значение, и, возможно, только малая доля населения действительно обладала предпринимательским и инновационным талантом. Это наблюдение может интерпретироваться как низкие значения A^L/A^H и M.

Таким образом, эта модель еще раз показывает, что теория не в состоянии однозначно ответить на вопрос о том, какой из двух режимов, демократический или не демократический, ведет к более высоким темпам экономического роста. Однако она также демонстрирует различные элементы этих режимов, определяющие развитие экономики. Несмотря на то что демократия может создавать краткосрочные искажения в экономике, она также может привести и к лучшей долгосрочной динамике, потому что она позволяет избежать политического склероза, то есть ситуации, когда присутствующие на рынке предприниматели получают политическую власть и создают значительные препятствия к выходу новых и лучших предпринимателей. Эта модель также согласуется с эмпирическими фактами, представленными в параграфе 23.1: отсутствием однозначной зависимости между демократией и экономическим ростом в течение последних пятидесяти лет и примерами демократических обществ, проведших индустриализацию в переломном периоде времени в XIX в. Более того, простое расширение этой модели позволяет выделить дополнительную причину, по которой демократии могут успешно не допускать политического склероза: из модели следует, что демократическое общество является более гибким, чем олигархическое. Например, в упражнении 23.10 показано, что демократии обычно лучше справляются с внедрением новых технологий, так как в них отсутствуют предприниматели, стремящиеся сохранить свою ренту и успешно препятствовать вводу новых технологий или замедлить его. Такая гибкость может быть одним из наиболее важных преимуществ демократических режимов.

Несмотря на то что из модели, представленной в этом параграфе, следуют важные для понимания сравнительной динамики экономического развития демократических и не демократических обществ выводы, как и в модели из предыдущего параграфа, основные издержки демократического режима в ней связаны с его перераспределительной природой. В частности, в ней утверждается, что демократический режим перераспределяет доход от богатых агентов и предпринимателей к более бедным членам общества, и это ведет к искажениям, снижающим уровень дохода на душу населения. Другой причиной появления искажений в демократии является то, что демократический режим может перестать быть эффективно работающим, например потому, что элита продолжает сохранять власть посредством коррупции или других механизмов, несмотря на существование в обществе демократических институтов. Если в обществе, переходящем к демократии, элита продолжает иметь значительную политическую силу, то она может попытаться контролировать развитие возможно более неэффективными способами, чем в не демократическом обществе, например с помощью коррупции, а не командным методом. В этом случае демократия может привести к плохим экономическим результатам не потому, что в ней используется популистская перераспределительная политика, как следует из представленной выше модели, а вследствие политической неэффективности, связанной с тем, что элита продолжает владеть властью.

23.4. Эндогенные политические изменения

23.4.1. Общие наблюдения

Материал предыдущих параграфов посвящен анализу влияния различных политических институтов на экономический рост и того, как их экономические последствия формируют предпочтения различных агентов на множестве политических институтов. Как происходит выбор равновесных политических институтов? И почему институты изменяются? Возвращаясь к модели из параграфа 23.3, мы можем представить себе, что демократия возникает после того, как олигархи добровольно отказываются от власти и устанавливают демократический режим. Несмотря на то что в некоторых случаях такое развитие может быть в их интересах, в общем случае они понесут издержки, отказавшись от монопольной политической власти и экономической ренты, которую эта власть приносит. В этой связи неудивительно то, что большинство институциональных изменений на практике происходят не в результате добровольного отказа от власти, а как следствие конфликта интересов в обществе.

Например, рассмотрим демократизацию в большинстве западноевропейских государств в течение XIX и начала XX в. или демократизацию в Латинской Америке в течение XX в. Везде в этих странах переход к демократии произошел не в результате добровольного отказа от власти политической элиты, а в процессе разрешения общественного конфликта, в котором лишенные политических прав группы индивидов требовали их предоставления и в некоторых случаях смогли добиться этого. Однако как происходит этот процесс? В недемократическом режиме политическая власть, по его природе, принадлежит очень узкой общественной группе. Индивиды, не входящие в эту группу, не члены элиты, не обладают избирательным правом и не принимают участия в коллективном принятии решений. Тогда каким образом они могут воздействовать на политическое равновесие и вызывать равновесные политические изменения? Ответ на этот вопрос связан с проведением различий между де-юре (формальной) и де-факто политической силой. Де-юре политическая сила связана с властью, которая предоставляется политическими институтами в обществе, и до сих пор в моделях мы рассматривали именно ее. Политические институты определяют множество индивидов, имеющих избирательное право, то, каким образом представители делают выбор, и общие правила коллективного принятия решений в обществе. Однако в процессе равновесных политических изменений возникает еще один, настолько же важный, тип политической силы. Политическая сила протестующих — участников марша против существующего режима — до Избирательной реформы в Великобритании в 1832 г. не была де-юре политической силой. Закон о земле не давал им права участвовать в политической жизни и влиять на выбор политики, на самом деле они были явным образом лишены избирательного права. Однако они обладали другим типом силы, исходящей из того, что они составляли большинство населения экономики и были способны решить задачу коллективных действий и организовать протесты. Такой тип политической силы, не связанной с политическими институтами, является де-факто политической силой.

Де-факто политическая сила имеет большое значение в процессе политических изменений, в то время как де-юре политическая сила действует как причина сохранения политических институтов. Например, рассмотрим модель из предыдущего параграфа. Элита обычно заинтересована в сохранении олигархического режима. Если де-юре политическая сила является единственной силой в экономике, то политические решения в обществе принимаются только элитой и вероятность перехода от олигархии к демократии мала. Однако если не члены элиты (граждане или работники) также обладают некоторой силой, которая по своей природе становится де-факто силой, то политические изменения становятся возможными. Возможно, в некоторый момент времени не члены элиты оказываются способными решить задачу коллективных действий и таким образом оказать достаточное для проведения некоторых изменений давление на власть. В экстремальном случае они способны заставить элиту распустить олигархию и осуществить переход к демократии или они могут сами сформировать новый олигархический режим.

Взаимодействие между де-юре и де-факто политическими силами является наиболее перспективным подходом к анализу равновесных политических изменений. Более того, это взаимодействие становится наиболее интересным в динамических моделях. Это связано с, по меньшей мере, двумя причинами. Во-первых, большинство вопросов, которые мы изучаем, такие как проблема принятия обязательств относительно политики и институциональные изменения, по своей природе являются динамическими. Во-вторых, то, будет ли распределение де-факто политической силы в обществе перманентным или стохастически изменяющимся, имеет значительные последствия для структуры политического равновесия. Если определенная (лишенная избирательного права) группа агентов обладает перманентной де-факто политической силой, то она может использовать эту силу в любой момент времени и требовать уступок у агентов, имеющих де-юре политическую силу. Такая ситуация ведет к перераспределению ресурсов в пользу этой группы, но не обязательно к политическим изменениям, потому что такое перераспределение может иметь место и в рамках существующего политического режима.

Далее рассмотрим ситуацию, когда де-факто политическая сила группы агентов, не обладающих избирательным правом, является скоротечной в том смысле, что они могут решить задачу коллективных действий и осуществить де-факто политическую власть сегодня, но при этом вероятность того, что они будут обладать такой властью завтра, мала. Тогда эта группа агентов не может полагаться на использование своей де-факто политической силы в будущем для получения уступок от власти и для того, чтобы добиться перераспределения ресурсов в свою пользу в будущем, она должна использовать свою текущую силу. В этом сценарии изменение распределения де-юре политической силы в будущем достигается посредством смены политических институтов. Как пример рассмотрим ситуацию, в которой определенная группа лишенных избирательного права индивидов обладает де-факто политической властью, достаточной для изменения распределения ресурсов в свою пользу, но также осознает, что завтра она потеряет де-факто власть. При этом любые трансферты ресурсов или другие уступки, на которые пойдет власть сегодня, в дальнейшем будут аннулированы. В этом случае скоротечная природа де-факто политической силы стимулирует это группу агентов предпринимать действия, направленные на смену политических институтов, для того, чтобы более твердо закрепить свою силу, то есть трансформировать свою скоротечную де-факто политическую силу в более прочную де-юре политическую силу. Этот неформальный анализ подсказывает определенный канал, через который взаимодействие между де-факто и де-юре политическими силами может привести к равновесному изменению политических институтов в обществе.

23.4.2. Подход к анализу динамики политических институтов

В предыдущем подпараграфе мы показали, как взаимодействие между де-факто и де-юре политическими силами может быть использовано для анализа равновесных политических изменений. Несмотря на то что эти рассуждения дают некоторую информацию о стимулах различных групп общества, обладающих и не обладающих де-факто политической силой в динамической игре, они не позволяют построить полную модель для анализа этих сил и получить приемлемые результаты по сравнительной статике. Далее мы предложим общий метод, который используется для анализа динамического взаимодействия между де-факто и де-юре политическими силами.

Представим себе динамическую модель с двумя переменными состояния, политическими институтами и распределением ресурсов в обществе. Например, положим некоторое множество $P(t) \in \mathcal{P}$ множеством политических институтов (таких как демократия или не демократия, парламентское или президентское правление или различные типы недемократических институтов) в периоде времени t. Множество $\mathcal{P}$ состоит из всех возможных типов политических институтов. Аналогично обозначим различные способы распределения ресурсов в периоде времени t как $W(t) \in \mathcal{W}$. Например, в обществе, состоящем из двух групп индивидов, богатых и бедных, $W(t)$ может быть отношением уровней дохода двух групп. В обществе с большим числом агентов это может быть функция распределения дохода или богатства. Множество $\mathcal{W}$ является множеством всех возможных распределений ресурсов. Приведем три причины, по которым мы можем рассматривать $P(t)$ и $W(t)$ как переменные состояния. Во-первых, они изменяются относительно медленно, что является одним из базовых свойств переменных состояния. Во-вторых, обычно они являются марковскими состояниями, определяющими размер выигрыша. В-третьих, две эти переменные задают два источника политической силы, необходимые для понимания процесса равновесных политических изменений. Переменная $P(t)$ определяет распределение де-юре политической силы $J(t) \in \mathcal{I}$, которое, например, задает распределение избирательного права в обществе и ограничения для политиков. С другой стороны, распределение ресурсов влияет на распределение де-факто политической силы. Де-факто политическая сила обычно возникает в результате способности решения задачи коллективных действий определенной группой общества или когда определенные группы обладают достаточными ресурсами для построения собственной армии, парламента и сторонников или просто используют финансовые ресурсы для лоббирования собственных интересов и взяток. Обозначим распределение де-факто политической силы в обществе в периоде времени t как $F(t) \in \mathcal{F}$. Как и в начале части VIII, обозначим экономические институты как $R(t) \in \mathcal{R}$ и показатель экономического развития, например уровень дохода на душу населения или темп роста экономики, как $Y(t) \in \mathcal{Y}$.

Динамический подход, который мы будем использовать для анализа политических изменений и их последствий для экономического роста, состоит из отображения φ: $\mathcal{P} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{J}$, которое задает распределение де-юре политической силы в периоде времени t, $P(t) \in \mathcal{P}$, а также некоторых, возможно стохастических, элементов $z(t) \in \mathcal{Z}$. Он также включает в себя отображение, которое аналогичным образом определяет равновесное распределение де-факто политической силы ϕ: $\mathcal{W} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{F}$. Тогда при заданных реализациях $J(t) \in \mathcal{I}$ и $F(t) \in \mathcal{F}$ еще одно отображение ι: $\mathcal{J} \times \mathcal{F} \to \to \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ определяет и экономические институты сегодня, $R(t) \in \mathcal{R}$, и политические институты завтра, $P(t+1) \in \mathcal{P}$. Другими словами, распределение де-факто и де-юре политических сил определяет, какой тип экономических институтов устанавливается в равновесии (что, таким образом, соответствует отображению π, введенному в начале части VIII). Оно также определяет, произойдет ли в обществе политическая реформа, ведущая к смене де-юре политической силы в будущем (например, переход от не демократии к демократии, ведущий к увеличению в будущем политической силы граждан, обладающих значительной долей де-факто силы сейчас). Наконец, отображение экономического равновесия ρ: $\mathcal{R} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{W}$ определяет экономические показатели и распределение экономических ресурсов в обществе. Например, если экономические институты включают в себя конкурентный рынок и защиту права собственности, то они ведут к высокому агрегированному выпуску, в то время как отсутствие защиты права собственности и барьеры к выходу на рынок ведут к снижению выпуска. Эти различные экономические институты также приводят к различным распределениям дохода и богатства в обществе. Описанный подход схематично изображен на рис. 23.3.

Этот подход включает в себя как влияние экономических институтов на развитие экономики, которое мы изучали в предыдущих главах, так и динамику политической власти и политических институтов. Очевидно,

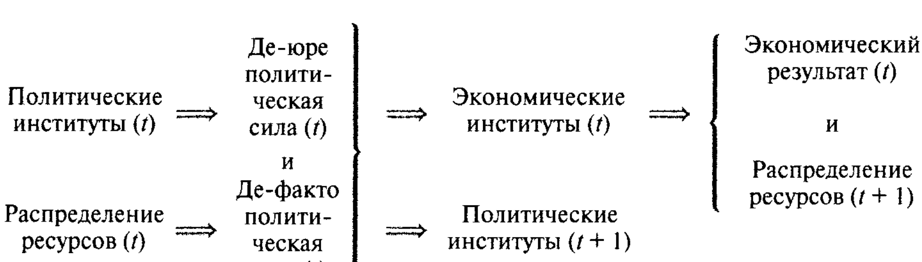

Рис. 23.3. Компоненты динамического подхода

что на таком уровне общности этот динамический подход является в некотором смысле бесполезным. Он становится осмысленным, только если мы сможем содержательно определить множество политических институтов и распределение ресурсов, заслуживающие рассмотрения, вывести отображения φ, ϕ, ι и ρ из экономических взаимодействий с помощью разумных микроэкономических оснований, а затем провести подходящие эксперименты по сравнительной статике. Это является довольно сложной задачей, и полной динамической модели такого типа в данный момент не существует. Несмотря на это, существуют модели, посвященные политическим изменениям и взаимодействию между экономикой и политикой и мы можем провести их оценку в рамках вышеописанного подхода. Абстрактный подход такого типа также может быть полезен в рамках идентификации важных передовых исследований и типов моделей, которые мы можем использовать для улучшения нашего понимания процесса политических изменений и взаимосвязи между политическими институтами и экономическим ростом.

23.4.3. Пример: возникновение демократии

Метод анализа, описанный выше, основывается на подходе к возникновению демократии, развитому в работах [Acemoglu, Robinson 2000a, 2006a]. В этом подходе подчеркивается, что институциональные изменения, в частности установление демократии, являются следствием общественного конфликта интересов между элитой, изначально обладающей де-эре политической властью, и массами, которые вначале не имеют политической силы. Несмотря на то что массы не имеют де-юре политической силы, в некоторые периоды времени они могут решить задачу коллективных действий и получить значительную де-факто политическую силу. Рассмотрим возникновение демократии в Европе в XIX в. Во многих европейских странах власть в XIX в. принадлежала узкой группе членов элиты. Во многих из них были избираемые органы представительской власти, наследники средневековых парламентов, однако вход в них был во многом доступен только мужчинам с относительно значительным уровнем активов, высоким доходом или общепризнанным богатством. Однако по мере развития промышленной революции монопольная политическая власть элиты начала оспариваться массами, которые смогли использовать свою де-факто политическую силу (проистекавшую из их большого числа) и вступили в коллективные действия, направленные на смену политического режима.

В ответ на такое развитие событий элита использовала три типа действий. Первый состоял в репрессиях, направленных не предотвращение политических волнений, которые происходили в большинстве европейских стран во время революции 1848 г. Второй, успешно использованный

О. фон Бисмарком в Германии, включал в себя экономические уступки нерадикальной оппозиции с целью склонить ее на свою сторону. Наконец, если ни репрессии, ни уступки не были эффективны, как в Великобритании, третий тип действий состоял в увеличении числа избирателей и передачи политической власти индивидам, ранее не имевшим избирательного права, что создало прецеденты современной демократии.

Первый важный шаг на пути к демократии в контексте европейской политической истории произошел в Великобритании во время Избирательной реформы 1832 года. Закон о внесении поправок снял наиболее жесткие ограничения существующего избирательного законодательства и установил избирательное право исключительно на основании имущества и дохода. Реформа была проведена вследствие растущих протестов и недовольства политической ситуацией в Великобритании. В 1820-х гг. промышленная революция шла полным ходом и десятилетие, предшествующее 1832 году, сопровождалось непрекращающимися общественными беспорядками и волнениями. Самыми известными из них стали восстания луддитов в 1811–1816 гг., бунт в Спа-Филдс в 1816 г., Битва при Питерлоо в 1819 г. и свинговские бунты в 1830 г. Еще одним катализатором реформ стала Июльская революция 1830 г. в Париже. Консенсус среди историков состоит в том, что основной причиной реформы 1832 г. было стремление элиты не допустить общественных беспорядков.

Избирательная реформа 1832 г. привела к увеличению электората с 492 700 до 806 000 человек, что составляло около 14,5% взрослого мужского населения страны. Таким образом, большинство населения Великобритании все еще не имело избирательного права. Отметим также свидетельство о значительной коррупции и шантаже избирателей вплоть до принятия Закона о введении тайного голосования 1872 г. и Закона о пресечении коррупции на выборах 1883 г. Следовательно, Избирательная реформа 1832 г. не привела к демократии, она была спланирована лишь как стратегическая уступка. Поэтому в середине XIX в. парламентская реформа продолжала стоять на повестке дня. Вследствие значительного циклического сокращения экономики во второй половине XIX в., создания Национального союза реформы в 1864 г., Лиги реформы в 1865 г. и бунта в Гайд-парке в июле 1866 г. была инициирована еще одна важная избирательная реформа. Вторая избирательная реформа 1867 г. привела к увеличению электората с 1,36 млн до 2,48 млн человек и сделала избирателей-рабочих большинством во всех городских избирательных округах. Электорат еще раз удвоился после Третьей избирательной реформы 1884 г., которая расширила избирательное законодательство, действовавшее в городских округах на сельскую местность. Закон о перераспределении мест 1885 г. снял большинство других ограничений избирательного законодательства, и с этого времени все избирательные округа в Британии стали одномандатными. После 1884 г. избирательное право имело около 60% взрослого мужского населения страны. Еще раз отметим, что общественные беспорядки были важным фактором, ставшим одной из причин Избирательной реформы 1884 г.

Избирательные реформы 1867–1884 гг. стали поворотной точкой в истории Британского государства. Экономические институты также начали изменяться. Правительства либералов и консерваторов приняли большое количество законов, регулирующих рынок труда, которые значительно изменили структуру промышленных отношений в пользу рабочих. В течение 1904–1914 гг. Либеральная партия под руководством Герберта Генри Асквита и Дэвида Ллойда Джорджа установила в Великобритании тип современного перераспределяющего государства, включающего в себя страховое здравоохранение и пособия по безработице, финансируемые государством пенсии по старости, закон о минимальной заработной плате и обязательства о перераспределительном налогообложении. В результате фискальной реформы доля налогов в ВНП более чем удвоилась в течение 30 лет, начиная с 1870 года, а затем удвоилась еще раз и налоги стали более прогрессивными. Наконец, Закон об образовании 1870 г. ввел государственное финансирование всеобщего среднего образования и в результате доля граждан, имеющих среднее образование, значительно возросла в это время. В результате этих изменений в Великобритании произошло значительное снижение уровня неравенства.

Таким образом, выводы из политической истории Великобритании очевидны. Начиная с 1832 года, когда власть в стране принадлежала относительно богатой, в основном деревенской аристократии, на протяжении 86 лет ею был сделан ряд стратегических уступок. Эти уступки были направлены на вовлечение в политику общественных групп, ранее не обладавших избирательным правом, так как альтернативой представлялись общественные беспорядки, хаос и возможно революция.

Однако в случае возникновения угрозы бунта и общественных беспорядков элита также может пытаться избежать предоставления политической власти другим группам. Вместо этого она может прибегнуть к экономическим уступкам, таким как перераспределение дохода и другие меры, улучшающие положение не членов элиты и индивидов, не обладающих избирательным правом. Несмотря на это, так как обещанные уступки обычно не заслуживают доверия в случае, когда угроза беспорядков скоротечна, их часто не достаточно для того, чтобы снять напряжение в обществе. Тогда демократизация может рассматриваться как заслуживающее доверия обязательство о проведении перераспределительной политики в будущем. Она заслуживает доверия, потому что она переносит де-юре политическую силу от элиты к массам. В демократии более бедные члены общества становятся более политически сильными и могут использовать свою де-юре политическую силу для установления экономических институтов и политики, согласующихся с их интересами. Тогда демократизация становится способом трансформации скоротечной де-факто политической силы бедных слоев общества в более долговременную де-юре политическую силу.

Описанные выше события убеждают в том, что переход к демократии во многих западных обществах, в особенности в Великобритании, не был добровольно инициирован находящейся у власти политической элитой. Во многих случаях демократия была вынужденным выбором перед угрозой революции. Несмотря на это, многие другие страны сталкивались с аналогичным давлением со стороны низов и политическая элита в них шла по пути репрессий, а не уступок не имеющим избирательного права общественным группам. Такие события регулярно происходили в XIX в. в Европе, однако с начала XX в. элита в большинстве западноевропейских государств приняла неизбежность перехода к демократии. Репрессии длились в большинстве стран Южной Америки гораздо дольше и до сих пор остаются предпочитаемым выбором элиты, находящейся у власти в Китае или Бирме. Заметим, что репрессии приносят издержки не только репрессируемым членам общества, но и элите, например потому, что они ведут к уничтожению активов, остановке производственной деятельности и требуют осуществления инвестиций в репрессионные технологии. Следовательно, политическая элита, столкнувшаяся со спросом на демократию, стоит перед выбором. В урбанизированных к XIX в. европейских государствах (во время Второй избирательной реформы степень урбанизации в Великобритании составляла 70%) лишенные избирательного права массы были относительно хорошо организованны, поэтому проведение репрессий было затруднительно. Более того, индустриализация породила экономику, основанную на физическом и во все большей степени человеческом капитале. Такие активы подвержены быстрому разрушению во время репрессий и конфликтов, поэтому репрессии несли элите значительные издержки. С другой стороны, во многих латиноамериканских странах, являвшихся в начале века в основном аграрными экономиками, и в современной Бирме физический и человеческий капитал не столь важны и проведение репрессий оказывается проще и дешевле. Более того, в таких обществах не только репрессии дешевле, но и установление демократии несет элите значительно большие издержки ввиду угрозы возможной радикальной земельной реформы. Так как осуществление перераспределения физического капитала более затруднительно, элита в Западной Европе пострадала в меньшей степени при переходе к демократии.

23.4.4. Моделирование демократизации

Пока мы лишь вербально описали способ построения модели перехода к демократии в рамках абстрактного подхода, предложенного в подпараграфе 23.4.2. Однако после такого описания основных идей построение формальной модели не представляет трудностей. Далее мы изложим упрощенный вариант модели из работы [Acemoglu, Robinson 2006a] (см. также упражнение 23.12). Общество состоит из двух групп агентов — элиты и масс (бедных индивидов или граждан). Политическая власть вначале принадлежит элите, но численность масс более велика. Поэтому, если в обществе происходит демократизация, массы обретают политическую силу и начинают формировать политику. Все индивиды обладают бесконечным горизонтом планирования, и элита владеет бóльшим богатством, чем массы. Так как в начальный момент времени общество не является демократическим, де-юре политическая власть принадлежит элите. Предположим, что единственным политическим выбором является ставка перераспределительного налога τ, поступления которого распределяются паушальным образом. Элита предпочитает нулевую ставку $\tau = 0$, так как она богаче и налогообложение переносит часть дохода от нее к более бедным массам.

Представим себе, что, хотя де-юре политической силой в недемократическом обществе обладает элита, бедные индивиды иногда обретают де-факто политическую силу. В частности, предположим, что в каждом периоде времени массы оказываются в состоянии решить задачу коллективных действий с вероятностью q, что создает угрозу революции. Революция сопряжена со значительными издержками для элиты, но приносит небольшие выгоды массам. Однако при этом массы предпочитают малый размер выгод жизни в недемократическом обществе с неравным распределением ресурсов. Поэтому если массы в состоянии решить задачу коллективных действий, то *угроза революции* становится явной. В этом случае богатые индивиды вынуждены идти на уступки для того чтобы предотвратить революцию.

Как и в описанной выше исторической перспективе, у элиты есть три способа разрядить угрозу революции. Первый состоит в уступках с помощью перераспределительной политики сегодня, который используется ею, если значение q высоко. В предельном случае, когда $q = 1$, революция возможна в каждом периоде времени, и элита принимает обязательство о перераспределении в каждом периоде, потому что если она не сделает этого, то массы сразу же проведут революцию. Однако такая стратегия не работает, если значение q мало. Рассмотрим противоположный предельный случай $q = 0$. В этом случае массы не ожидают такой же политической силы в будущем. В предположении о том, что объем перераспределения доходов, который элита может предложить массам, ограничен, они не будут удовлетворены временными уступками. В этом случае элита может предпочесть использовать репрессии. Репрессии будут успешными, если подготовка революции плохо организована, и будут приносить элите выгоду, если ее потери от демократизации велики. Поэтому репрессии будут выбором элиты, которая опасается значительного перераспределения при демократии, например элиты землевладельцев в Цетральной Америке и Бирме. Однако в таком урбанизированном и индустриальном обществе, как Великобритания, в котором издержки репрессий, по всей вероятности, высоки и потери элиты от демократизации не столь значительны, предпочтительным для нее способом разрядить угрозу революции становится вовлечение масс в политическую жизнь. Этот способ включает в себя изменение элитой политической системы и инициирование перехода к демократии с целью смещения распределения де-юре политической силы в сторону масс. Приобретя возможность принимать политические решения, массы, осознав, что они смогут в будущем выбрать политику, ведущую к более справедливому с их точки зрения распределению ресурсов, будут готовы принять демократические институты и откажутся от революции, которая приносит издержки не только элите, но и им.

Модель, описанная выше, довольно схематична в сравнении с абстрактным подходом из подпараграфа 23.4.2 (и в целях экономии мы даже не привели уравнения, из которых следуют основные выводы). Во-первых, распределение ресурсов в ней уже не является переменной состояния (оно постоянно и не влияет на динамику и распределение политической силы). Во-вторых, де-юре политическая сила является не стохастическим следствием политических институтов: в недемократических режимах решения принимаются элитой, а в демократических — посредством электорального правила «один человек — один голос», и массы, составляющие большинство населения, становятся решающими избирателями. Наконец множество экономических решений в модели ограничено. Поэтому в таком виде модель не является удовлетворительным инструментом для анализа воздействия политических институтов на экономические институты или зависимости между политическим режимом и экономическим ростом. Некоторые расширения этой модели, представленные в статьях: [Acemoglu, Robinson 2006a, 2008], позволяют включить в нее экономические институты и решения. Несмотря на это, ученым предстоит совершить значительный объем исследований на тему динамической взаимосвязи между политическими институтами и экономическим ростом.

23.5. Основные выводы

В этой главе представлен краткий обзор основных вопросов, связанных с влиянием политических институтов на экономический рост. Основываясь на выводах из главы 22, мы вправе ожидать, что различия в экономических институтах связаны с политическими институтами. Например, если политическая власть находится в руках элиты, выступающей против экономического роста, то стимулирующая рост политика не будет имплементирована. Такой взгляд поддерживается эмпирическими свидетельствами из главы 4, говорящими о том, что экономические институты, предоставляющие защиту права собственности широкому кругу агентов в обществе вместе с политическими институтами, накладывающими ограничения на элиту и политиков, благоприятствуют экономическому росту. Однако по ряду причин взаимосвязь между политическими институтами и экономическим ростом более сложна. Во-первых, эмпирические свидетельства не настолько однозначны, как мы ожидали вначале: несмотря на то что можно привести ряд исторических примеров положительного воздействия демократических институтов на экономический рост, послевоенные наблюдения не свидетельствуют безоговорочно о том, что демократия и политические институты, ограничивающие власть и политиков, всегда ведут к большему темпу экономического роста. Во-вторых, политические институты сами по себе являются эндогенными и значительно изменяются. Из этих двух факторов следует, что нам необходимо подробнее исследовать, как политические институты воздействуют на динамику экономики, а также обратиться к моделированию равновесных политических институтов. Обе эти задачи находятся на передовом крае исследований в политической экономии и в ближайшие годы наверняка будут играть более важную роль в теории экономического роста.

Мы также рассмотрели ряд моделей, которые могут пролить свет на связь между политическими институтами и экономическим ростом. Мы выделили то, что идеальных (совершенных) политических институтов, по всей видимости, не существует, так как различные политические институты создают различные множества победителей и проигравших и ведут к разным типам искажений в экономике. Например, олигархия благоприятствует уже владеющим значительными активами богатым индивидам и создает искажения, защищая интересы этой группы индивидов. С другой стороны, демократия обычно сопровождается высокими налогами на богатых индивидов и бизнес, доходы от которых используются для поддержки менее обеспеченных членов общества. В общем случае мы не можем однозначно заключить, что демократия или олигархия (или какая-либо другая политическая система, благоприятствующая другим группам) будет лучше всего стимулировать экономический рост. Однако некоторые выводы выглядят наиболее правдоподобными и согласующимися с эмпирическими данными. Один аспект, который мы хотели подчеркнуть, состоит в том, что динамический выбор между демократией и другими политическими режимами может отличаться от статического выбора. Демократия может создавать в экономике статические искажения, связанные со значительным перераспределением дохода, однако в долгосрочной перспективе она может опережать олигархию, так как она позволяет избежать политического склероза, при котором находящаяся у власти элита сохраняет ее в течение длительного времени и устанавливает барьеры для защиты собственного бизнеса, даже когда оптимальное равновесие требует выхода на рынок новых индивидов и бизнесов. Поэтому с точки зрения процесса созидательного разрушения, который является частью современного капитализма, демократия может быть более подходящим выбором, чем другие политические системы. Демократия также может быть более гибкой системой, лучше приспосабливающейся к появлению новых технологий.

Наконец мы также привели очень краткий обзор вопросов, связанных с моделированием динамики политических институтов. В параграфе 23.4 представлено общее описание типов моделей, которые могут использоваться для такого анализа, и примеры того, каким образом эти модели могут быть построены. Еще раз заметим, что эта область интенсивно развивается в настоящее время, и материал, представленный выше, является лишь верхушкой айсберга. Наша основная задача состояла в том, чтобы предложить читателю задуматься о различных аспектах зависимости между политическими институтами и экономическим ростом.

23.6. Литература

Эта глава базируется на значительном объеме работ по политической экономии и политическим наукам. В целях экономии места мы не будем приводить исчерпывающий обзор литературы. Основные ссылки на работы по зависимости между политическими институтами и экономическим ростом содержатся в параграфе 23.1.

Параграф 23.2 основывается на модели, представленной в предыдущей главе. Параграф 23.3 напрямую базируется на статье [Acemoglu 2008a]. Другие модели, в которых описывается устройство олигархического общества, содержатся в работах [Learner 1998; Bourguignon, Verdier 2000; Robinson, Nugent 2001; Sonin 2003; Galor, Moav, Vollrath 2005]. Информация об уровне развития экономики США по сравнению с экономиками Карибских островов и Южной Америки представлена в работах: [Coatsworth 1993; Eltis 1995; Engerman, Sokoloff 1997; Acemoglu, Johnson, Robinson 2002]. Сравнение индустриализации в Великобритании и Франции и в России и Австро-Венгрии заимствовано из статьи [Acemoglu, Robinson 2006b], в которой можно найти ссылки на оригинальные источники.

В параграфе 23.4 содержится абстрактный подход к вопросам, связанным с моделированием политических изменений, основанный на статье [Acemoglu, Robinson 2006a]. Модель, кратко описанная в заключении параграфа 23.4, построена на работах: [Acemoglu, Robinson 2000a, 2006a].

Обзор литературы по демократизации в Европе и Латинской Америке представлен в статье [Acemoglu, Robinson 2006a]. Современные исторические ссылки включают в себя работы: [Evans 1996; Lang 1999; Collier 2000]. Фискальные реформы, следующие за демократизацией, задокументированы и описаны в работах: [Lindert 2000, 2004], образовательные реформы обсуждаются в статьях: [Ringer 1979; Mitch 1983].

23.7. Упражнения

23.1. Докажите утверждение 23.1.

23.2. **(a)** Докажите утверждение 23.2.

(b) Обобщите результат утверждения 23.2 для случая $\theta^e \neq \theta^m$. В частности выведите неравенство, которое определяет, когда диктатура элиты ведет к большему выпуску на душу населения, чем диктатура среднего класса.

23.3. Докажите утверждение 23.3. [Подсказка: чтобы доказать вторую часть этого утверждения, вначале заметьте, что равновесная заработная плата определяется группой агентов, имеющей более низкую чистую (после уплаты налога) производительность. Затем рассмотрите полезность работников в двух случаях: (1) когда элита имеет более низкую чистую производительность, и (2) когда средний класс имеет более низкую чистую производительность. При выводе выражений для полезности заметьте, что группа с более низкой чистой производительностью нанимает $1-\theta\bar{L}$ работников, так как выполняется условие 22.1. Выведите оптимальную для работников налоговую политику в обоих случаях и затем сравните полезность при выборе этих двух оптимальных политик.]

23.4. В модели из параграфа 23.3 докажите, что функция $V^z(q^t)$, заданная уравнением (23.13), строго монотонна по $w(t)$, $T(t)$ и $\Pi^z(\tau(t), w(t))$ и, следовательно, $V^H(q^t) > V^L(q^t)$.

23.5. В модели из параграфа 23.3 предположите, что значение $I_i(t)$ не ограничено сверху. Какие трудности могут возникнуть в этом случае? Далее предположите, что значение $I_i(t)$ может быть сколь угодно малым. Какие трудности с точки зрения равновесия в этом параграфе могут возникнуть в этом случае? Можете ли вы обобщить результат этого параграфа для экономики, в которой $I_i(t) \in \left[\underline{L}, \bar{L}\right]$, где $\underline{L} > 0$ и $\bar{L} < \infty$?

23.6. Выведите уравнение (23.7).

23.7. Докажите утверждение 23.5.

23.8. Докажите утверждение 23.6.

23.9. Предположите, что условие 23.1 не выполняется. Обобщите в этом случае результаты утверждений 23.5 и 23.6.

23.10. Рассмотрите модель из параграфа 23.3 с начальным условием $\mu(0) = 1$ и олигархическим режимом. Предположите, что в некоторый момент времени $t' < \infty$ разрабатывается новая технология, производительность которой в ψ раз превышает производительность старой технологии, где $\psi > 1$. Предпринимательский навык при этой новой технологии не коррелирует с предпринимательским навыком при старой технологии и задан следующим образом:

$$\hat{a}_i(t+1) = \begin{cases} A^H \text{ с вероятностью } \hat{\sigma}^H, & \text{если } \hat{a}_i(t) = A^H, \\ A^H \text{ с вероятностью } \hat{\sigma}^L, & \text{если } \hat{a}_i(t) = A^L, \\ A^L \text{ с вероятностью } 1-\hat{\sigma}^H, & \text{если } \hat{a}_i(t) = A^H, \\ A^L \text{ с вероятностью } 1-\hat{\sigma}^L, & \text{если } \hat{a}_i(t) = A^L. \end{cases}$$

(a) Покажите, что существует пороговое значение $\bar{\psi}$, такое, что если $\psi > \bar{\psi}$, то издержки выхода на рынок повышаются и все присутствующие на рынке предприниматели переходят на новую технологию.

(b) Покажите, что если $\psi < \bar{\psi}$, то издержки выхода на рынок также повышаются, но только предприниматели с низким уровнем навыка при старой технологии переходят на новую технологию.

(c) Проанализируйте динамику демократии после появления новой технологии.

(d) Сравните выпуск на душу населения после появления новой технологии в демократии и в олигархии и объясните, почему демократия более гибко реагирует на появление новой технологии.

23.11. В этом упражнении показано, что препятствия к выходу на рынок обычно ведут к множественности равновесных заработных плат в динамических моделях. Рассмотрите следующую модель двухпериодной экономики. Производственная функция задана уравнением (23.2), и распределение предпринимательского навыка задано непрерывной функцией распределения $G(a)$. Издержки выхода на рынок в каждом периоде времени равны b, и каждый предприниматель нанимает одного работника (и сам не занят как работник). Население экономики равно единице.

(a) Рассмотрите только первый период, найдите равновесную заработную плату и определите, какие индивиды становятся предпринимателями. Покажите, что это равновесие единственно.

(b) Теперь рассмотрите двухпериодную модель и предположите, что норма дисконтирования равна β для всех агентов. Покажите, что во втором периоде равновесная заработная плата определена неединственным образом и, следовательно, в первом периоде равновесная заработная плата также не единственна.

(c) Предположите, что доля ε всех агентов умирает во втором периоде и заменяется новыми агентами. Если новые агенты решают стать предпринимателями, они должны понести издержки выхода на рынок. Предположите, что их предпринимательский навык также имеет функцию распределения $G(a)$. Опишите равновесие в этом случае и покажите, что оно единственно.

(d) Рассмотрите предельный случай части (c) $\varepsilon \to 0$. Объясните, почему в предельном случае равновесие единственно, а в случае $\varepsilon = 0$ в модели существует множественность равновесий.

23.12. Рассмотрите экономику, населенную λ богатыми агентами, которые владеют политической властью в начальный момент времени, и $1 - \lambda$ бедными агентами, лишенными власти, где $\lambda < 1/2$. Все агенты имеют бесконечный горизонт планирования и их норма дисконтирования равна $\beta \in (0, 1)$. Доход каждого богатого индивида равен θ/λ, а доход каждого бедного индивида составляет $(1 - \theta)/(1 - \lambda)$, где $\theta > \lambda$. Политическая власть определяет ставку пропорционального налога τ, доходы от которого распределяются паушальным способом. Каждый агент может скрыть свой доход с помощью альтернативной, не облагаемой налогом, производственной технологии, и в этом случае он теряет долю дохода ϕ. Другие издержки налогообложения отсутствуют. Бедные агенты могут совершить революцию, и если они это делают, то во всех следующих периодах времени получают долю $\mu(t)$ совокупного дохода в экономике (то есть доход $\mu(t)/(1 - \lambda)$ на одного бедного индивида). Бедные агенты не могут поднять мятеж против демократии. Богатые индивиды получают нулевой выигрыш в случае революции. В начале каждого периода времени богатые индивиды также решают, предоставить ли избирательное право бедным агентам. Если они это делают, то во всех будущих периодах значение налоговой ставки определяется бедными индивидами.

(a) Определите СМР в этой игре.

(b) Вначале предположите, что $\mu(t) = \mu^l$ во всех периодах времени. Также предположите, что $0 < \mu^l < 1 - \theta$. Покажите, что тогда в СМР не будет налогообложения, если у власти находятся богатые агенты, и ставка налога равна $\tau = \phi$, если у власти находятся бедные агенты. Покажите, что на равновесной траектории бедным агентам не предоставляется избирательное право и ставка налога равна нулю.

(c) Предположите, что $\mu^l \in (1-\theta, (1-\phi)(1-\theta)+\phi(1-\lambda))$. Опишите в этом случае СМР в модели. Почему ограничение $\mu^l < (1-\phi)(1-\theta)+\phi(1-\lambda)$ является необходимым?

(d) Далее рассмотрите СМР в этой игре для случая $\mu^l > (1-\theta)$. Постройте равновесие, в котором на равновесной траектории происходит предоставление избирательного права бедным индивидам. [Подсказка: для простоты рассмотрите предельный случай $\beta \to 1$ и опишите стратегии игроков, если ожидается, что богатые всегда будут выбирать ставку налога $\tau = 0$. Затем покажите, что в этом случае бедные агенты совершают революцию. Также объясните, почему стратегия для богатых агентов $\tau = 0$ во всех будущих периодах времени может быть частью СПР.] Почему в этом случае бедным индивидам предоставляется избирательное право? Можете ли вы построить схожее немарковское равновесие в случае $\mu^l < (1-\theta)$?

(e) Объясните, почему из СМР следуют выводы, отличные от выводов из других немарковских равновесий. Какие из них вы находите более удовлетворительными?

(f) Далее предположите, что $\mu(t) = \mu^l$ с вероятностью $1-q$ и $\mu(t) = \mu^h$ с вероятностью q, где $\mu^h > 1-\theta > \mu^l$. Постройте СМР, в котором бедным индивидам предоставляется избирательное право и, начиная с этого периода времени, они принимают решение о размере ставки налога. Найдите значения параметров модели, при которых такое равновесие существует. Объясните, почему предоставление бедным избирательного права лежит в интересах богатых агентов.

(g) Далее еще раз рассмотрите немарковское равновесие. Предположите, что в единственном СМР происходит предоставление избирательного права бедным индивидам. Можете ли вы построить СМР, в котором в предельном случае $\beta \to 1$ не происходит предоставления избирательного права бедным агентам?

Эпилог: источники и механика экономического роста

Вместо описания моделей и подходов, представленных в книге, мы закончим ее кратким обсуждением того, что мы узнали из этих моделей и каким образом они могут помочь понять причины мирового экономического роста и межстрановых различий в уровне дохода на душу населения. Далее мы приведем краткий обзор некоторых важных неосвещенных вопросов, которые одновременно говорят о мере нашего непонимания, а также, возможно, являются интересными темами будущих исследований.

Что мы узнали об экономическом росте

Вначале резюмируем основные наиболее важные аспекты и уроки, следующие из нашего анализа.

Экономический рост как причина современных различий в уровне дохода. На эмпирическом уровне исследования по теории экономического роста важны не только для понимания процесса роста мировой экономики, но и потому, что для анализа причин современных межстрановых различий в уровне дохода на душу населения нам необходимо понимать, почему некоторые страны быстро росли на протяжении последних двухсот лет, а другие страны — нет (см. главу 1).

Роль физического капитала, человеческого капитала и технологий. Межстрановые различия в уровне экономического развития и траектории экономического роста связаны с физическим капиталом, человеческим капиталом и технологиями. Часть нашего анализа посвящена вкладу этих факторов в производственную деятельность и экономический рост (главы 2 и 3). Один из выводов, следующих из этого анализа, состоит в важности технологий для понимания как межстрановых, так и межвременных различий в динамике экономики. Здесь под технологиями мы понимаем прогресс в производственных технологиях, новые научные открытия и общую эффективность производственной деятельности.

Эндогенность инвестиционных решений. Несмотря на то что в эмпирическом анализе мы можем рассматривать межстрановые различия в запасе физического и человеческого капитала как заданные, для более полного понимания механики и причин межстрановых различий в уровне дохода на душу населения и темпах экономического роста нам нужно рассматривать инвестиционные решения фирм и индивидов как эндогенные. Значительная часть книги посвящена пониманию процесса накопления физического и человеческого капитала (главы 8–11). Инвестиции в физический и человеческий капитал являются вперед смотрящими переменными и зависят от вознаграждения, которое индивиды рассчитывают получить от этих инвестиций. Следовательно, понимание различий в таких инвестициях тесно связано с пониманием того, каким образом структура вознаграждений, то есть монетарные и немонетарные вознаграждения и стимулы в различных видах экономической деятельности, различается в разных обществах и как индивиды реагируют на различия в структуре вознаграждений.

Эндогенность технологии. На протяжении всей книги мы также подчеркивали, что технологии также должны рассматриваться как эндогенная переменная, а не как манна небесная. Можно привести множество эмпирических и теоретических причин того, что новые технологии создаются индивидами и фирмами, стремящимися получить максимальную прибыль с помощью исследований, развития и научной деятельности. Более того, решения о внедрении новых технологий, скорее всего, очень сильно связаны с прибылью от них. Так как технологии являются основным двигателем экономического роста и главным фактором межстрановых различий в уровне экономического развития, нам необходимо понимать, как технологии реагируют на изменения в запасах факторов производства, рыночной организации и вознаграждениях. Построение концептуального подхода к моделированию эндогенности технологии является одной из основных задач этой книги. Моделирование эндогенной технологии требует использования новых методов и идей, в чем-то отличных от методов из моделей инвестиций в физический и человеческий капитал. Здесь особенно важны три следующих фактора. Во-первых, фиксированные издержки создания новых технологий вместе с их неконкурентной природой требуют использования моделей, в которых инноваторы обладают ex post (после осуществления инновации) монопольной силой. Аналогичные рассуждения, однако, возможно, в несколько меньшей степени, применимы к фирмам, производящим внедрение новых технологий. Наличие монопольной силы изменяет свойства децентрализованного равновесия о благосостоянии в экономике и создает ряд новых взаимодействий между агентами и экстерналий (см. главы 12, 13 и параграф 21.5 из главы 21). Во-вторых, инновационная деятельность неявным образом является конкурентным процессом созидательного разрушения. Моделирование эндогенной технологии требует построения более подробных моделей отраслевой структуры экономики и инноваций. Эти модели позволяют пролить свет на влияние на инновации и внедрение новых технологий рыночной структуры, уровня конкуренции в экономике, законодательства и степени защиты права интеллектуальной собственности (см. главы 12 и 14). В-третьих, из эндогенности технологии следует, что не только агрегированный темп технологического прогресса, но и типы технологий, которые создаются в обществе, зависят от структуры вознаграждений. Основными факторами, определяющими типы технологий, которые создаются в обществе, являются структура вознаграждений и запасы факторов производства. Например, изменения в относительном предложении различных факторов производства, скорее всего, повлияют на типы технологий, которые создаются и внедряются в экономике (см. главу 15).

Связи между странами и сбалансированный рост мировой экономики. Несмотря на то что эндогенная технология и эндогенный рост являются важными элементами нашего понимания процесса экономического роста в общем и в частности истории мирового экономического роста, важно отметить, что большинство экономик не изобретают свои собственные технологии, а внедряют их с мировой технологической границы или адаптируют уже имеющиеся технологии (см. главу 18). На самом деле процесс перемещения технологий между странами может быть одной их причин, по которой страны, которые были частями глобальной экономики, в завершение начального этапа индустриализации растут с примерно равными темпами (см. главу 1). Следовательно, моделирование межстрановых различий в уровне дохода на душу населения и процесса экономического роста в большинстве стран мира требует подробного анализа распространения технологий и международных экономических связей. В этом контексте особого внимания заслуживают два элемента. Первый — это контрактные институты, регулирующие контракты между фирмами, между фирмами и работниками и между фирмами и финансовыми организациями. Эти институциональные договоренности влияют на объем инвестиций, выбор предпринимателей и фирм и на эффективность, с которой различные виды деятельности распределяются между фирмами и работниками. Мы наблюдаем значительные межстрановые различия в контрактных институтах, и эти различия являются важным фактором, определяющим процесс внедрения технологий и их распространения в мировой экономике. Контрактные институты не только напрямую влияют на технологии и благосостояние, но и на внутреннюю организационную структуру фирм, которая определяет эффективность производства и то, насколько инновационной будет та или иная фирма (см. параграф 18.5 из главы 18). Второй — это международные торговые отношения. Международная торговля несет не только статические выгоды, знакомые все экономистам, но и влияет на инновационную деятельность и экономический рост. Международное разделение труда и циклы производства являются примерами того, как международные торговые связи стимулируют распространение технологий и улучшают специализацию производства товаров и услуг (см. главу 19).

Взлеты и падения. Последние двести лет, принесшие мировой экономический рост, сильно отличаются от предыдущих тысячелетий мировой истории. Несмотря на эпизодический рост в некоторых областях мира, в некоторые эпохи мировая экономика по большей части пребывала в застое до конца XVIII в. Этот застой проявлялся во многих аспектах. Они включают в себя низкую производительность, высокую волатильность на агрегированном и индивидуальном уровнях, в основном аграрную структуру экономики и ее мальтузианское устройство, при котором рост выпуска часто сопровождался ростом населения и лишь незначительным ростом дохода на душу населения. Другим важным аспектом застоя были неудавшиеся попытки роста: многие общества росли в течение определенного периода времени, а затем возвращались назад к застою и рецессии. Этот цикл изменился в конце XVIII в. Нашим богатством сегодня мы обязаны прорыву в экономической активности, в особенности промышленной деятельности, начавшемуся в Великобритании и Западной Европе и распространившемуся в некоторые другие части света, особенно в колонии западноевропейских государств, такие как США и Канада. Страны, которые богаты сегодня, — это в точности те страны, в которых этот прорыв начался, или те страны, которые смогли быстро принять технологии, лежащие в основе этого прорыва (см. главу 1). Анализ межстрановых различий в уровне дохода на душу населения требует понимания того, почему некоторые страны не смогли воспользоваться преимуществами новых технологий и производственных возможностей.

Структурные изменения и трансформация. Современный экономический рост и экономическое развитие проходят на фоне множества значительных структурных изменений и трансформаций. Они включают в себя изменения структуры производства и потребления (переход от сельского хозяйства к промышленности и от промышленности к сфере услуг), урбанизацию, развитие финансового сектора, изменения в уровне неравенства доходов и неравенства возможностей, изменения в общественной жизни, изменения внутренней организации фирм и демографические изменения. Несмотря на то что процесс экономического развития обладает множеством граней, его основная сущность лежит в структурных изменениях в экономике и в обществе в целом (см. параграф 17.6 из главы 17 и главы 20 и 21). Исследование многих из этих изменений представляет интерес само по себе. Они также являются важными элементами устойчивого экономического роста. Отсутствие структурных изменений не только является симптомом застоя, оно часто является одной из его причин. Общества могут не суметь выйти на траекторию устойчивого роста и воспользоваться преимуществами имеющихся технологий и инвестиционных возможностей отчасти оттого, что они не смогли пройти через требуемые для этого структурные изменения и поэтому в них отсутствуют финансовые отношения, подходящие навыки и типы фирм, позволяющие внедрить новые технологии.

Экономическая политика, институты и политическая экономия. Структура вознаграждений для фирм и индивидов играет ключевую роль в принятии решений об осуществлении инвестиций в новые технологии и человеческий капитал, необходимых для «взлета» экономики, индустриализации и экономического роста. Эта структура вознаграждений определяется экономической политикой и институтами. Политика и институты также напрямую влияют на то, сможет ли общество выйти на траекторию устойчивого роста по ряду связанных друг с другом причин (см. главу 4). Во-первых, они напрямую задают структуру вознаграждений в обществе и тем самым определяют, будут ли инвестиции в физический и человеческий капитал и технологические инновации приносить прибыль. Во-вторых, они определяют, имеются ли в обществе инфраструктура и контрактные отношения, необходимые для современных экономических связей. Например, современный экономический рост был бы невозможен при отсутствии механизма хотя бы минимального обеспечения контрактов, поддержания законности и правопорядка и по меньшей мере минимального уровня инвестиций в общественную инфраструктуру. В-третьих, они воздействуют на рыночную организацию и регулируют ее и таким образом определяют, смогут ли в экономике действовать силы созидательного разрушения, позволяющие новым более эффективным фирмам заменить менее эффективные старые фирмы. Наконец, политика и институты могут иногда (а возможно и часто) препятствовать внедрению и использованию новых технологий для того чтобы защитить наделенных политической властью присутствующих на рынке производителей и стабилизировать устоявшийся политический режим. Поэтому для понимания процесса современного экономического роста нам необходимо изучить, что определяет выбор обществом типов институтов и политики. Таким образом, нам необходим анализ политической экономии роста, в котором особое внимание уделяется исследованию вопроса о том, какие индивиды и общественные группы выигрывают, а какие теряют от экономического роста. Если проигравшие не могут получить компенсации и обладают значительной политической силой, то мы можем ожидать появления в политэкономическом равновесии институтов и политики, которые не стимулируют экономический рост. Простой анализ политической экономии роста позволяет сделать вывод о том, какие типы искажающей политики могут препятствовать экономическому росту, когда такая политика будет использоваться, как технологии, рыночная организация и запасы факторов производства взаимодействуют со стимулами общественных групп, находящихся у власти, и ведет ли это к ускорению или замедлению экономического роста (см. главу 22).

Эндогенность политических институтов. Экономическая политика и институты очень важны для понимания динамики процесса экономического роста во времени и межстрановых различий в экономическом развитии. В свою очередь, их выбор обществом определяется в контексте политических институтов в стране. Демократии и диктаторские режимы наверняка выберут различные политики и создадут различные типы структуры вознаграждений в обществе. Однако политические институты сами по себе не являются экзогенными. Они могут изменяться на равновесной траектории в соответствии со своей собственной динамикой или в результате изменений технологии, торговых возможностей или запасов факторов производства (см. главу 23). Следовательно, для более полного понимания мирового экономического роста и различий в уровне дохода на душу населения нам необходимо исследовать: (1) как политические институты влияют на экономические институты и выбор политики, таким образом формируя стимулы для фирм и работников, (2) как изменяются сами политические институты, особенно в результате взаимосвязи с состоянием экономики и технологиями, и (3) почему политические институты и связанные с ними экономические институты не привели к устойчивому экономическому росту в течение всей истории человечества, почему 200 лет назад произошел «взлет» на траекторию устойчивого роста и почему в некоторых странах они препятствуют внедрению и использованию современных технологий и тормозят экономический рост.

В этом резюме мы остановились на идеях, наиболее важных для анализа мирового экономического роста и современных межстрановых различий в уровне дохода на душу населения. Задачей книги было не только описание этих идей, но и их подробное математическое моделирование с целью построения последовательного и строгого математического подхода. Мы не стали повторять здесь математические основы этих идей, такие как базовые теории потребителя и фирмы, теория общего равновесия, динамические модели накопления факторов производства, модели монополистической конкуренции, модели равновесия в мировой экономике и политэкономические модели. Однако подчеркнем еще раз, что тщательное изучение теоретических оснований этих идей необходимо и для удовлетворительного понимания основных вопросов, и для поиска лучшего способа сделать их полезными в эмпирическом анализе.

Позитивный взгляд на мировой экономический рост и застои в последние двести лет

Наиболее важные идеи этой книги резюмированы в предыдущем параграфе. Далее мы покажем, как некоторые из этих идей могут быть использованы для того, чтобы пролить свет на процесс мирового экономического роста и межстрановой дивергенции, которые с самого начала мотивировали наше исследование. Основные вопросы таковы:

1. Почему мировая экономика не испытывала устойчивого экономического роста до 1800 г.?
2. Почему экономический «взлет» начался около 1800 г. и почему он начался в Западной Европе?

3. Почему некоторые общества смогли получить выгоду от новых технологий и организации производственной деятельности, пришедших начиная с 1800 г., а другие общества стойко отказались от них или не смогли ими воспользоваться?

Далее мы представим некоторые факты, которые позволяют получить предварительные ответы на эти три вопроса. Несмотря на то что некоторые элементы анализа, изложенного ниже, являются эконометрическими результатами, а другие его элементы основываются на исторических свидетельствах, читателю стоит рассматривать этот обзор как первую попытку предоставить последовательные ответы на эти основные вопросы теории экономического роста. Необходимо отметить два аспекта этих ответов. Во-первых, они основаны на теоретических выводах, следующих из моделей, представленных в этой книге. Во-вторых, в духе изложения главы 4 они связывают непосредственные факторы экономического развития с его фундаментальными причинами, и в частности с институтами. Здесь мы пойдем по короткой дороге. Несмотря на то что в главе 23 мы подчеркнули, что не существует идеальных политических институтов и каждый набор политических мер и решений благоприятствует некоторой группе агентов за счет других индивидов, мы упростим анализ в этом параграфе, проведя ключевое различие между двумя типами институционального устройства общества, один из которых является менее подходящим для экономического роста, чем другой. Первый, который мы будем называть *авторитарной политической системой*, включает в себя абсолютные монархии, диктатуры, автократии и различные типы олигархии, в которых власть принадлежит узкой группе агентов и экономическая политика проводится в интересах этого меньшинства. Авторитарные режимы часто базируются на некоторых репрессиях, так как они стремятся сохранить неравное распределение политической силы и экономических выгод. Они также используют экономические институты и политику, защищающие власть и создают ренту для политической элиты общества. Вторым типом институтов являются *режимы с участием общества*. Такие режимы накладывают ограничения на власть и политиков, таким образом не допуская абсолютизма политической системы, и предоставляют право голоса новым экономическим агентам, что позволяет избежать строгого разделения политической и экономической власти. Такие режимы включают в себя конституционные монархии (где более широкая часть общества имеет право участвовать в принятии экономических и политических решений) и демократии (в которых участие агентов в политической жизни более значительно, чем в недемократических режимах). Отличительной чертой режимов с участием общества является то, что они предоставляют избирательное право и (экономическую и политическую) безопасность более широкому кругу индивидов, чем авторитарные режимы. Вследствие этого они являются более открытыми для входа новых агентов и предоставляют более равные условия и лучшую защиту права собственности для относительно более широкого круга членов общества. Поэтому отличие авторитарной политической системы и режима с участием общества в некотором смысле связано с различием между набором институтов, стимулирующих экономический рост и препятствующих росту экстрактивными институтами, описанными в главе 4. Читателю следует заметить, что вместо терминов «авторитарный» и «участие» в литературе используется ряд других терминов и что некоторые элементы различия могут быть выбраны случайным образом. Более важным наблюдением является то, что даже в режимах с наибольшей степенью участия членов общества распределение политической силы неравномерно и агенты, обладающие политической властью, могут использовать фискальные инструменты и другие меры политики для своего блага, принося ущерб обществу в целом. Вопрос о том, будет ли такой тип поведения с успехом пресекаться или ограничиваться обществом, находится на переднем крае текущих исследований, и мы не будем здесь к нему обращаться.

Почему мировая экономика не демонстрировала устойчивого роста до 1800 года

Несмотря на то что устойчивый экономический рост является недавним феноменом, рост экономики и улучшение уровня жизни людей, очевидно, происходили много раз в прошлом. История человечества также изобилует важными технологическими открытиями. Различные технологические инновации позволили увеличить производительность в охоте и собирательстве даже до неолитической революции. Переход к фермерству около 9000 г. до н. э., возможно, был наиболее важной технологической революцией всех времен: он привел к росту производительности в сельском хозяйстве и развитию более сложных общественных отношений и политических систем. Мы также имеем ряд археологических свидетельств различных эпизодов экономического роста в античном мире. Исторические оценки говорят о том, что потребление на душу населения возросло в два раза во время расцвета древнегреческой цивилизации между 800 г. до н. э. и 50 г. до н. э. (см.: [Morris 2004]). Аналогичное улучшение уровня жизни наблюдалось в Римской республике и империи после 400 г. до н. э. (см.: [Hopkins 1980]) и, скорее всего, в южноамериканских цивилизациях в доколумбову эпоху, в особенности у ольмеков, майя и ацтеков и, возможно, даже у инков (см.: [Webster 2002; Mann 2004]). Несмотря на то что данные для столь далеких исторических периодов ограниченны, имеющиеся у нас эмпирические свидетельства говорят о том, что базовая неоклассическая модель экономического роста, в которой рост экономики, как правило, основывается на накоплении физического капитала, является хорошим описанием развития этих древних экономик (см., например: [Morris 2004]).

Однако эти эпизоды экономического роста качественно отличаются от траектории устойчивого роста, на которую вышли экономики мира в конце XVIII и начале XIX вв. Наиболее важными здесь являются четыре фактора, которые описывают различия между этими эпизодами роста и современным экономическим ростом. Во-первых, ранние эпизоды экономического роста были относительно краткосрочными или шли с относительно низким темпом[1]. В большинстве случаев начальный рост экономики быстро затухал по той или иной причине, что во многом напоминает неудавшиеся попытки «взлета» в модели из параграфа 17.6. Во-вторых, в продолжение первого фактора, рост экономики никогда не был связан с непрерывным процессом технологических инноваций, то есть он никогда не походил на экономический рост, основанный на технологии, описанный в главах 13–15. В-третьих, в большинстве случаев экономические институты, необходимые для поддержания устойчивого экономического роста, не были созданы. Финансовые отношения находились в основном на примитивном уровне, контрактные институты оставались неформальными, рынки были сильно зарегулированы различными внутренними тарифами, а доходы и сбережения не достигали уровня, необходимого для того, чтобы появления большого рынка и одновременные инвестиции в различные виды экономической деятельности стали прибыльными. Другими словами, структурные изменения, сопровождающие процесс экономического развития, описанные в главе 21, не имели места. В-четвертых (и это, возможно, наиболее важный фактор, ставший причиной остальных трех), все эпизоды античного экономического роста протекали в контексте авторитарных политических режимов. Они не были эпизодами экономического роста для всего общества. Вместо этого это был рост, вызванный элитой, использовавшей уже имеющиеся в обществе сравнительные преимущества, для своей собственной выгоды. Поэтому неудивительно то, что улучшение условий жизни коснулось лишь узкой группы индивидов и не затронуло общество в целом.

Почему эти эпизоды экономического роста не трансформировались в процесс «взлета» экономики, в конечном счете ведущий к устойчивому росту экономики? Наш основной ответ на этот вопрос связан с ответом из параграфа 23.3. Экономический рост возможен и при авторитарных режимах. Предприниматели и работники могут увеличивать свою производительность, может улучшаться разделение труда, также могут улучшаться за счет обучения в процессе производства технологии, которыми они пользуются. Более того, члены общества, владеющие политической властью, и их пособники обеспечены защитой права собственности, необходимой для осуществления инвестиций. Также в экономике могут случай-

[1] Например, в статье [Morris 2004] приведена оценка того, что доход на душу населения лишь удвоился (как максимум не более чем утроился) в течение 500 лет между 800 г. до н. э. и 300 г. до н. э. и рост в основном был догоняющим ростом при очень низком начальном уровне дохода на душу населения в 800 г. до н. э.

но происходить некоторые технологические прорывы. Несмотря на это, отличительной чертой экономического роста в авторитарном обществе является то, что он защищает интересы находящейся у власти элиты. То есть в конце концов такой рост всегда основывается на существующих технологиях и производственных отношениях. Он не вызывает процесс созидательного разрушения и выход на рынок новых талантов и новых фирм, необходимый для перехода экономики на траекторию устойчивого экономического роста. В дополнение, важную роль могут играть технологические ограничения. Например, относительно быстрый экономический рост в XIX в. требовал квалифицированных работников, и до того, как был изобретен печатный станок, обучение критической массы работников с необходимыми навыками было запретительно дорого. Несмотря на то что прогресс технологических знаний не является монотонным во времени (и некоторые полезные производственные технологии иногда утрачиваются), технологическая база, доступная потенциальному предпринимателю в конце XVIII в., была значительно шире базы, доступной предпринимателю в Древней Греции или Древнем Риме.

Далее подробно остановимся на некоторых критических аспектах политической экономии и приведем ряд примеров, иллюстрирующих ограничения на экономический рост в авторитарных обществах. Имеющиеся у нас эмпирические свидетельства говорят о том, что в Китае на различных этапах его развития было достаточное количество технологических инноваций. Производительность в экономике Китая, особенно в дельте реки Янцзы и в других плодородных районах, была достаточно высока для поддержания высокой плотности населения. Однако экономика Китая никогда даже близко не подошла к устойчивому экономическому росту. Авторитарные политические институты жестко регулировали экономическую активность на протяжении почти всей ее истории. Общество было иерархическим, с четко выраженным разделением на элиту и массы. Политическая система не допускала выход на рынок новых предпринимателей, которые могли внедрить и использовать новые технологии, породив тем самым процесс созидательного разрушения. Когда перспектива экономического роста вступала в конфликт с политической стабильностью, элита выбирала политическую стабильность, даже если ее ценой был возможный экономический рост. Власти Китая жестко контролировали внешнюю и внутреннюю торговлю, не устанавливали необходимые для современного экономического роста контрактные институты, не предоставляли защиту права собственности широкому кругу агентов и препятствовали становлению среднего класса предпринимателей как экономической и политической силы (см.: [Elvin 1973; Mokyr 1990; Мокир 2014; Wong 1997]).

Античные греческая и римская цивилизации часто рассматриваются как примеры первых демократических обществ. Поэтому у читателя может возникнуть искушение считать их режимами с участием общества, которые должны были достичь устойчивого экономического роста. Но такое утверждение не всегда верно. Во-первых, как отмечено выше, режимы с участием общества не гарантируют достижения устойчивого экономического роста, если не выполнены другие необходимые для него условия. Однако более важным является то, что эти общества были демократическими лишь по сравнению с другими обществами в то время. Представительная власть в обоих государствах избиралась малой долей населения. Производственная деятельность была основана на рабстве и насилии. Более того, несмотря на существование некоторых демократических институтов, в обоих обществах существовало четкое разделение на малочисленную элиту, монополизировавшую экономическую и политическую власть, и массы, состоящие из рабов и свободных плебеев. Экономический рост в античных Греции и Риме не основывался на непрерывных инновациях. Оба общества достигли высокого уровня производительности в сельском хозяйстве, но не смогли радикально изменить структуру производства в нем. Оба общества получили значительную выгоду от своего военного превосходства в определенные периоды времени, а вызовы, вставшие перед их военной машиной, стали одной из важных причин их упадка.

Османская империя является еще одним примером успешного в течение длительного времени общества, не сумевшего встать на путь устойчивого экономического роста. Османская империя, в особенности в XIV, XV и XVI вв., достигла относительно высокого богатства и военной мощи. Во многих частях империи была высокая производительность в сельском хозяйстве и дань, поступающая в казну от побежденных соседей, перераспределялась среди некоторой части населения. Однако политическая элита, которая контролировала процесс принятия решений в империи, никогда не стимулировала экономический рост всей страны. В империи отсутствовала частная собственность на землю, торговля была разрешена только в том случае, если она была согласованной с целями государства и жестко контролировалась даже в этом случае, и все новые технологии, которые могли дестабилизировать государственную власть, блокировались. Экономический рост в Османской империи, как и в Китае, Греции и Риме, со временем замедлился, и в конце концов она пришла в упадок.

Последним примером, который мы здесь приведем, будет Испанское королевство. В начале XVI в., после брака короля Фердинанда II и королевы Изабеллы I, испанская корона добилась политического доминирования на территории страны и контролировала большое число колоний за рубежом. Многие части Великой Испании, включая земли в Арагоне и к югу от него, которые недавно были отвоеваны у мавров, были богатыми уже в XV в. Вся Испания стала значительно богаче после ввоза золота, серебра и других ресурсов из колоний в XVI в. Однако это богатство не привело к устойчивому росту экономики. Управление государством и колониями велось очень авторитарным режимом, установленным

Фердинандом и Изабеллой, и наиболее прибыльные экономические проекты передавались близким к короне индивидам. Значительные доходы, получаемые от колоний, помогли лишь укрепить контроль короны над остальными членами общества и экономикой. Уровень абсолютизма, вместо того чтобы снижаться, лишь только рос. Торговля и промышленность оставались сильно зарегулированными, и общественные группы, не связанные напрямую с короной, находились под подозрением и дискриминировались. Наиболее экстремальным примером такой дискриминации было преследование евреев, которое началось во время инквизиции и продолжилось и распространилось на других независимых предпринимателей впоследствии. После перемещения богатства из колоний Испания прошла через очень длительный период застоя, который привел к экономическому и политическому упадку (см.: [Elliot 1963]).

Замечательно и то, что ни в одном из приведенных выше примеров развития не произошло становление необходимых для роста экономических институтов. Финансовая система оставалась в зачаточном виде. В Римской республике появились предшественники современных корпораций и были разрешены некоторые типы контрактов между свободными гражданами, однако подавляющая часть экономического процветания была построена за счет традиционной экономической деятельности, которая не требовала появления сложной системы взаимоотношений между производителями и между фирмами и работниками. Таким образом, в этих обществах не произошли структурные изменения, которые сопровождают экономический рост. Население в основном проживало в сельской местности, и общественные отношения регулировались государством и общинами. Более важным, возможно, является малый объем инвестиций в человеческий капитал вне элиты, для которой образование редко было способом увеличить собственную производительность. Начало процесса созидательного разрушения было еще более трудным в отсутствие человеческого капитала и политических прав, так как большая доля населения не имела возможности вести предпринимательскую деятельность. Все описанные выше примеры подтверждают наши ожидания.

Все эти примеры показывают, что общества, которые стимулируют увеличение производительности элиты в традиционной экономической деятельности, могут достичь экономического роста в течение некоторого периода времени. Однако в них вряд ли начнется процесс созидательного разрушения. Экономический рост проходит на фоне политического доминирования элиты, поэтому экономика характеризуется значительными издержками выхода на рынок, которые защищают статут и политическую силу элиты. Поэтому ответ на вопрос, почему не до 1800 г., двойственен. Во-первых, ни одно общество до 1800 г. не осуществляло инвестиций в человеческий капитал, которые могли бы позволить фирмам вводить новые технологии и в целом запустили бы процесс созидательного разрушения. Их отсутствие отчасти могло быть связано с трудностями осуществления значительных инвестиций в человеческий капитал в обществах, не владеющих технологией печати и с ограниченными коммуникационными технологиями. Однако это также было связано со структурой вознаграждений в экономике и ограничениями, стоявшими перед фирмами и работниками. Важным следствием из этого наблюдения является то, что ни одна экономика не прошла через значительные структурные изменения, которые являются существенной частью современного экономического роста (см. главу 21). Во-вторых, ни одно из обществ не предприняло шаги на пути к устойчивому росту, так как во всех из них власть находилась в руках авторитарных политических режимов.

Почему устойчивый экономический рост начался в Западной Европе около 1800 года

Разделение труда (о котором писал Адам Смит) и накопление капитала всегда предоставляют обществу возможность начать экономический рост. Более того, человеческая изобретательность достаточно велика для создания важных новых технологий практически в любой обстановке. Поэтому в любом человеческом обществе всегда существует потенциал для роста экономики (см.: [Jones 1988]). Однако он может оставаться лишь возможностью, так как он существует в контексте политических (и экономических) институтов общества. Если эти институты не поддерживают экономический рост — если они не создают подходящую структуру вознаграждений и тем самым препятствуют росту, а не стимулируют его, — мы не ожидаем, что возможность роста приведет к устойчивому экономическому росту. Экономический рост возможен даже в таких условиях, и мы видим это на примерах Китая, Древней Греции и Древнего Рима и других империй, демонстрировавших экономический рост на некотором этапе своей истории. Однако их развитие не полностью использовало потенциал роста, вместо этого оно проходило в контексте политических режимов, которые по своей природе должны были контролировать перспективы роста экономики, потому что эти перспективы в конечном счете привели бы к падению таких режимов.

Рост западноевропейских экономик, начавшийся в конце XVIII в., был другим, так как Западная Европа прошла через три важных структурных изменения, начавшихся в конце Средних веков. Эти структурные изменения создали условия для того, чтобы латентный потенциал роста превратился в двигатель устойчивого экономического роста.

Первой из них было падение одного из столпов античного режима — исчезновение феодальных отношений в Западной Европе. Начиная с XIII в., и в особенности после пандемии чумы в XIV в., феодальные экономические отношения начали разрушаться во многих частях Западной Европы. Крепостные крестьяне получали свободу по умолчанию (так как феодальные отношения разрушились) или убегая в расширяющиеся города (см.: [Postan 1966]).

Это освобождение стало причиной начала процесса важных структурных изменений: урбанизации и изменения общественных отношений. Однако возможно более важным следствием было появление рабочей силы, готовой работать за низкую заработную плату на промышленных и коммерческих предприятиях. Оно также ликвидировало один из самых важных источников конфликта между старой элитой и новыми предпринимателями — конкуренцию за работников на рынке труда (см. главу 22). Падение феодального общественного порядка еще больше ослабило мощь европейских авторитарных режимов (см. [Pirenne 1937]).

Второе структурное изменение было связано с первым. Реальные доходы населения в большинстве стран Европы выросли в XIV в. после сокращения населения, и во многих городах был создан достаточно большой рынок для того, чтобы коммерсанты начали искать новый импорт, а промышленники — новые товары. Ряд важных технологий в металлургии, вооружениях, сельском хозяйстве и в других отраслях (например, в текстильном производстве) был улучшен уже в Средние века (см.: [White 1964; Mokyr 1990; Мокир 2014]). Таким образом, европейская экономика достигла технологического уровня, необходимого для начала предпринимательской деятельности в широком ряде отраслей и уровень дохода в ней был достаточен для поддержания инвестиций в физический капитал и технологии, породивших новый тип производственных отношений.

Третьим, и наиболее важным, было политическое изменение. Окончание эпохи Средневековья стало началом политического процесса, неумолимо приведшего к падению абсолютных монархий и приходу конституционных режимов. Конституционные режимы, установленные в Западной Европе в XVI и XVII вв., были первыми примерами режимов с участием общества, так как политическая власть в них была передана большой группе индивидов, которые ранее находились вне политического процесса. Эта группа включала в себя дворянство, купечество, протопромышленников, а также иностранных коммерсантов и финансистов. Затем эти режимы предоставили защиту права собственности и стимулирующие экономический рост институты более широкому кругу членов общества. Эти институциональные изменения создали условия, необходимые для новых инвестиций и технологических изменений и начала устойчивого экономического роста. Их кульминацией стали торговая революция в Нидерландах и Великобритании в XVII в. и промышленная революция в Великобритании в конце XVIII в. К концу XVIII в. промышленность и торговля распространились на большинство стран Западной Европы (см. главу 4 и работу [North, Thomas 1973]).

Заметим, что конституционные монархии не были демократиями в современном понимании этого термина. В них не использовалось правило «один человек — один голос» и различия между богатыми и бедными членами общества были очень значительны. Несмотря на это, появление этих режимов было ответом на спрос со стороны коммерсантов и промышленников. Более важным является то, что эти конституционные режимы не только изменили политические институты в Западной Европе, но и провели ряд экономических реформ, которые способствовали началу современного капиталистического экономического роста. Внутренние тарифы и ограничения были устранены. Вход на внутренний рынок и во внешнеторговую деятельность был значительно облегчен. Например, развитие финансового рынка в Великобритании началось после основания Банка Англии и других финансовых реформ.

Конституционные режимы, которые были установлены в Великобритании и Нидерландах, а затем во Франции и частях Западной Европы, проложили путь к устойчивому экономическому росту, основанному на защите права собственности для широкого круга индивидов, контроле над исполнением контрактов, законе и порядке и свободным выходом на новые и уже существующие в экономике рынки. В соответствии с теоретическими моделями, изложенными в предыдущих главах, такое улучшение условий ведения хозяйства должно было привести к росту инвестиций в физический капитал, человеческий капитал и технологии. Так и произошло, и процесс современного экономического роста был запущен. Экономические отношения теперь опирались на новый бизнес, осуществляющий инвестиции в промышленность и торговлю, и на построение сложных организационных форм и производственных отношений. При этом экономический рост не ускорился моментально. В XVII и XVIII вв. темпы роста западноевропейских экономик были умеренными (см.: [Maddison 2001]). Однако эти институциональные изменения стали основой более быстрого роста, который начался вскоре. Появлялись новые финансовые институты, расширялись городские поселения, изобретались новые технологии, а рынки стали основным местом конкуренции и проведения транзакций (см.: [North, Thomas 1973]). К 1800 г. процесс технологических изменений и инвестиций зашел настолько далеко, что его назвали промышленной революцией (см.: [Ashton 1969; Mokyr 1993]). За начальным этапом промышленной революции последовало изобретение еще более производительных технологий, появление более сложных производственных отношений, увеличение зависимости производственного процесса от навыков и человеческого капитала и еще большая глобализация мировой экономики. Ко второй половине XVIII в. Западная Европа достигла беспрецедентно высокого темпа экономического роста.

Естественно, полный ответ на вопрос, поставленный в заглавии этого подпараграфа, требует объяснения, почему конституционные режимы, которые были столь важны для современного экономического роста, возникли в Западной Европе в XVII и XVIII вв. Эти институты имели свои корни в аристократических парламентах в европейских странах в позднем Средневековье. Однако важнее то, что они были результатом радикальных реформ, проведенных после изменения баланса политической силы в Европе в начале XVI в. (см.: Ertman 1997). XVI век стал эпохой значительных экономических изменений в Европе, последовавших за увеличением международной торговли после открытия Америки и проложением морского пути вокруг мыса Доброй Надежды (см.: [Davis 1963; Acemoglu, Johnson, Robinson 2005a]). Вслед за увеличением международной торговли последовал рост коммерческой деятельности внутри Европы. Эти изменения привели к некоторому улучшению уровня жизни и, что более важно, к росту экономической и политической силы новых коммерсантов, торговцев и промышленников. Эти новые люди не были традиционными союзниками европейских монархий. Поэтому они требовали изменений политических институтов, которые предоставили бы им большую защиту права собственности, и выбора политики, которая помогала бы им вести экономическую деятельность, и часто обладали достаточной силой, чтобы их получить. К этому времени, с падением феодальных порядков, авторитарные средневековые режимы уже были слабы. Несмотря на это, изменения, приведшие к появлению конституционных режимов, не были легкими. Для получения независимости и установления республики Нидерланды вынуждены были вступить в войну с монархией Габсбургов. Великобритания прошла через гражданскую войну и Славную революцию. Во Франции произошла революция 1879 года. Но во всех случаях средневековый режим уступил перед институтами представительной власти, которые наложили ограничение на абсолютную власть монарха и расширили участие в политической жизни коммерсантов, промышленников и предпринимателей. Важным было то, что эти общественные изменения привели к появлению новых политических институтов, а не просто к уступкам со стороны власти. Это различие важно в свете теоретической идеи, описанной в параграфе 23.3: новые группы требуют долгосрочных гарантий защиты их права собственности и своего участия в экономической жизни общества. Такие гарантии наиболее просто предоставляются изменением политических институтов, а не краткосрочными уступками.

Эти изменения создали множество политических институтов, которые затем сделали возможным появление экономических институтов, перечисленных выше. Падение авторитарных политических режимов и появление режимов с участием общества затем открыло путь современному экономическому росту.

Почему некоторые общества смогли получить выгоду от новых технологий, а другие оказались не в состоянии этого сделать

Взлет экономики начался в Западной Европе, но быстро распространился на некоторые другие части Земли. Основным импортером экономических институтов и экономического роста были США. США, основанные колонистами, которые в борьбе за независимость победили Британскую империю, уже обладали политическими институтами с участием общества. Они были обществом, построенным людьми, которые жили в нем, и поэтому они в особенности желали создать систему сдержек и противовесов, которая не допустит появления сильной политической элиты в будущем. Эта система оказалась лучшим проводником современного экономического роста. Отсутствие сильной политической и экономической элиты означало, что значительная доля населения могла участвовать в экономической жизни общества, импортировать технологии из Западной Европы и затем разрабатывать собственные новые технологии, в результате чего страна быстро стала мощной промышленной державой (см.: [Galrnson 1996; Engerman, Sokoloff 1997; Keyssar 2000; Acemoglu, Johnson, Robinson 2002]). В контексте этого примера видны важность внедрения технологий с мировой технологической границы, описанного в главе 18, и влияние на экономический рост отсутствия элиты, устанавливающей препятствия к выходу на рынок, описанное в параграфе 23.3.

Схожие процессы проходили и в других западноевропейских колониях, например в Канаде. Однако в других частях света внедрение новых технологий и начало экономического роста стали частью движения к оборонительной модернизации. Япония начала свою экономическую и политическую модернизацию с реставрации Мэйдзи (а возможно, и ранее), и центральным элементом этой модернизации был импорт новых технологий из-за рубежа.

Однако такое отношение к новым технологиям было отнюдь не универсальное. Во многих регионах мира новые технологии не внедрялись, а отвергались. Так происходило почти во всей Восточной Европе (например, в России и в Австро-Венгрии, где находящаяся у власти элита землевладельцев рассматривала новые технологии как угрозу своим экономическим интересам (потому что они бы привели к уходу от феодальных отношений, которые до тех пор оставались в этой части Европы) и своим политическим интересам, которые состояли в ограничении силы новых коммерсантов и в замедлении процесса миграции крестьян в города, где они формировали новый рабочий класс (см. эмпирические свидетельства в работах: [Freudenberger 1967; Mosse 1992] и теоретический анализ в главе 22). Аналогичным образом ранее процветавшие плантационные экономики Карибских островов не были заинтересованы в появлении новых технологий и свободном выходе предпринимателей на рынок. Эти общества продолжали оставаться зависимыми от своего основного сельскохозяйственного производства. Индустриализация, конкуренция на свободном рынке труда и инвестиции работников в человеческий капитал рассматривались как возможная угроза экономической и политической власти элиты. В новых независимых государствах в Латинской Америке власть также принадлежала политической элите, которая продолжала традиции колониальной элиты и не показывала интереса в индустриализации. Почти вся Юго-Восточная Азия, Индия и значительная часть Африки к югу от Сахары продолжали оставаться западноевропейскими колониями и управлялись авторитарными и репрессивными режимами (и часто выступали поставщиками сырья для быстро развивающихся промышленных государств Западной Европы или как источник дани). Свободный рынок труда, мобильность факторов производства, созидательное разрушение и новые технологии не были отличительной чертой колониального политического развития этих стран (см. главу 4).

Таким образом, в XIX в. индустриализация прошла лишь в некоторых частях мира. Однако в XX в. все больше и больше стран начинали импортировать технологии, разработанные и используемые в Западной Европе. Этот процесс заимствования технологий позволил странам, интегрированным в глобальную мировую экономику, увеличить уровень дохода на душу населения (см. главу 19). Однако этот экономический рост шел на пользу не всем странам. Многие из них должны были получить независимость от колониальных метрополий, и даже после падения колониального режима во многих из них наступал период политической нестабильности и борьбы между группами, стремящимися стать элитой. Экономический рост начинался после достижения определенного уровня политической стабильности и установления экономических институтов, стимулирующих рост экономики. Например, за ростом экономик Австралии и Новой Зеландии последовал экономический рост в Гонконге, затем в Южной Корее, затем в остальной Юго-Восточной Азии и, наконец, в Индии. В каждом из этих случаев, как подчеркивается в главах 21 и 22, экономический рост протекал на фоне структурных изменений в обществе. Начало процесса структурных изменений способствовало дальнейшему росту. В соответствии с моделями, представленными в главах 18 и 19, страны, интегрированные в глобальную мировую экономику, начали импортировать технологии и достигли темпа роста экономики, совпадающего с темпом роста мировой технологической границы (и часто даже более высокого во время начального этапа догоняющего развития). В большинстве случаев этот процесс означал рост для новых членов глобальной мировой экономики, но не обязательно исчезновение различий в уровне дохода на душу населения между этими новыми членами и индустриальными державами.

В то же время многие регионы мира продолжали страдать от политической нестабильности, которая препятствовала инвестициям в капитал и новые технологии, или даже проявляли открытую враждебность по отношению к новым технологиям. Они включают в себя некоторые африканские страны к югу от Сахары и, до недавнего времени, большинство стран Центральной Америки. Возвращаясь к некоторым примерам, представленным в главе 1, Нигерия и Гватемала не смогли создать подходящие стимулы для своих предпринимателей и работников ни в колониальном периоде, ни после получения независимости. Обе эти страны во второй половине XX в. получили значительную политическую независимость и прошли через гражданскую войну, принесшую огромные экономические потери. Бразилия смогла достичь умеренного роста экономики, но он в основном был основан на инвестициях больших защищенных государством корпораций, а не на устойчивом процессе технологических изменений и созидательного разрушения (таким образом, в терминах модели из параграфа 23.3 из главы 23 он был больше похож на олигархический рост). В этих и других случаях экономическая политика, которая не смогла предоставить защиту права собственности новым предпринимателям и которая блокировала внедрение новых технологий, так же как и политическая нестабильность и борьба между элитами, по всей видимости, играли важную роль в неспособности этих стран вступить в мировую экономику и запустить процесс экономического роста. В результате уровень дохода на душу населения в этих странах упал ниже его среднемирового значения в XIX в. и продолжал оставаться низким в течение большей части XX в. Во многих африканских государствах к югу от Сахары, таких как Конго, Судан и Зимбабве, политическая обстановка до сих пор остается нестабильной и предприниматели и граждане в них лишены даже основных гражданских прав. Поэтому уровень дохода на душу населения в них продолжает падать по сравнению с его среднемировым значением.

Многие оставшиеся вопросы

В предыдущем параграфе мы представили повествовательное описание того, как технологические изменения трансформировали мировую экономику, начиная с XVIII в. и почему некоторые общества воспользовались их преимуществами, а другие общества не смогли этого сделать. Часть из изложенных мыслей находит поддержку в эмпирических данных. Существует множество свидетельств важности индустриализации на начальном этапе экономического роста. Среди экономистов также установился консенсус по поводу того, что экономические институты, защищающие право собственности, предоставляющие свободный выход на рынок и стимулирующие внедрение новых технологий, были важной частью процесса экономического роста в XIX в. и остаются таковой сейчас. Также большинство экономистов согласны с тем, что политическая нестабильность, слабая защита права собственности и отсутствие инфраструктуры являются основными препятствиями экономическому росту в африканских странах к югу от Сахары. Однако это описание в чем-то спекулятивно. Эти факторы могут быть важны, но при этом они могут не быть основной причиной динамики распределения доходов в мире в последние двести лет. И среди экономистов на данный момент нет консенсуса о роли политических институтов в этом процессе.

Поэтому представленное выше описание должно рассматриваться читателем не более как спекулятивный ответ на поставленные вопросы, который должен быть уточнен далее. Мы предложили его не только потому, что считаем, что этот ответ во многом верный, но и потому что он позволяет увидеть, как различные модели, представленные в этой книге, могут помочь нам найти ответы на фундаментальные вопросы теории экономического роста (и всей экономики и других общественных наук). Заметим, что дальнейшее исследование причин перехода мировой экономики на траекторию устойчивого роста и неспособности некоторых стран воспользоваться преимуществами новых технологий является лишь одним из множества оставшихся вызовов, стоящих перед учеными. Политическая экономия экономического роста важна, потому что она позволяет нам задавать вопросы о фундаментальных причинах экономического роста и находить ответы на них. Однако многие другие аспекты экономического роста требуют дальнейших исследований. Теория экономического роста в некотором смысле является наиболее развитым разделом экономики, и в макроэкономике это область, в которой среди экономистов присутствует наиболее широкий консенсус по поводу выбора моделей, как нельзя лучше подходящих для описания динамики экономики и для эмпирического анализа. Однако при этом многие вопросы остаются без ответа до сих пор.

Мы закончим главу упоминанием нескольких областей, которые обладают наибольшим потенциалом в дальнейших теоретических и эмпирических исследованиях. Во-первых, несмотря на то что мы в основном исследовали факторы, способствующие или препятствующие внедрению новых технологий в менее развитых странах, наше понимание факторов, определяющих скорость технологического прогресса в передовых экономиках, остается неполным. Модели эндогенного технологического прогресса предоставляют нам базовый инструмент анализа влияния стимулов к получению прибыли на инвестиции в новые технологии. Но мы до сих пор очень мало знаем о промышленной организации инновационной деятельности, например о том, как рыночная организация экономики влияет на ее рост. В главах 12 и 14 показано, как различные типы рыночной организации могут создавать различные стимулы для технологических изменений. Однако наше понимание этих вопросов остается на качественном уровне. Например, в контексте экономики инноваций мы не обладаем аппаратом, аналогичным моделям, используемым в теории общественных финансов для анализа воздействия налогов на капитал и труд и косвенных налогов, который может быть использован для анализа влияния на экономический рост различных политик, мер по защите права интеллектуальной собственности и антимонопольного законодательства. Так как скорость развития мировой технологической границы напрямую влияет на темп роста многих экономик мира, даже небольшое улучшение условий для осуществления инноваций в развитых экономиках может иметь значительные последствия для роста в менее развитых странах.

В дополнение к промышленной организации инновационной деятельности дальнейших исследований требует и структура контрактов в инновационной отрасли. Мы живем в достаточно сложном обществе, в котором большинство фирм связаны с другими как поставщики или покупатели, а также большинство фирм косвенно связаны со всей экономикой посредством финансового рынка. Эти отношения регулируются различными явными и неявными контрактами. Аналогичным образом отношения на рынке труда, которые во многом определяют производительность большинства фирм, регулируются контрактами между фирмами и работниками. Мы знаем, что в этих контрактных отношениях присутствуют угроза недобросовестности и угроза ограбления. Однако насколько они важны с точки зрения экономического роста? Может ли улучшение контрактных институтов в экономике ускорить инновации и улучшение технологии в передовых экономиках? Будет ли оно способствовать перемещению технологий? Эти важные вопросы до сих пор остаются без ответа. Контрактные основания теории экономического роста до сих пор остаются на ранней стадии развития и требуют значительного объема исследований.

В предыдущем параграфе показано, как различные экономики запустили процесс экономического роста посредством импорта технологий и интеграцией в глобальную мировую экономику. Сейчас мы живем в очень глобализованной и продолжающей свою глобализацию экономике. Однако наше понимание процесса перемещения технологий от одних фирм к другим и из передовых экономик в менее развитые страны остается неполным. В модели, представленной в главе 19, подчеркивается важность человеческого капитала, препятствий к внедрению технологий, вопроса о подходящих технологиях и трудностей заключения контрактов. Однако большинство подобных моделей описывают лишь качественную картину, и мы не обладаем инструментарием, позволяющим сделать количественные предсказания о скорости распространения технологий. Также мы до сих пор не включили в наш базовый подход множество важных элементов, связанных с перемещением технологий. Среди других, они включают в себя вопросы, связанные с неявными знаниями, подходящими технологиями, международным разделением труда, ролью защиты права интеллектуальной собственности на международном уровне и взаимодействием между международной торговлей и распространением технологий.

Читателю также необходимо заметить, что материал, представленный в главе 21, является намного менее структурированным и, возможно, более спекулятивным, чем в других главах книги. Несмотря на то что отчасти это следует из того, что мы вынуждены были упростить различные модели, чтобы уместить их в ограниченный объем книги, в основном это связано с тем, что мы еще далеки от построения удовлетворительного подхода к анализу процесса экономического развития и структурных изменений в обществе, связанных с ним. Некоторые аспекты этих структурных изменений, такие как увеличение вклада промышленности, а затем сектора услуг в ВВП по сравнению с сельским хозяйством могут рассматриваться как следствие экономического роста. Однако другие аспекты этого процесса, такие как развитие финансового сектора, изменение механизма контроля над исполнением контрактов, урбанизация и объем и структура инвестиций в человеческий капитал могут быть проводниками или даже необходимыми условиями для начала роста экономики и экономического развития общества. Поэтому отсутствие значительных структурных изменений может быть важным фактором, тормозящим экономический рост или препятствующим ему. Для понимания этого вопроса нам необходима модель с глубокими теоретическими основаниями, систематический подход к связанным вопросам и более подробные исследования, связывающие теоретические модели экономического развития со значительным числом эмпирических наблюдений о развитии экономик менее развитых стран, собранных экономистами в последние годы.

Последний, но, как следует из обсуждения в главах 4, 22, 23 и эпилога, не менее важный вывод, который не удивит читателя, состоит в том, что мы считаем, что много важных утверждений о причинах и природе экономического роста следует из политической экономии. Однако понимание политики во многих смыслах значительно сложнее понимания экономики, так как политические взаимодействия намного более многогранны. Несмотря на то что исследования в политической экономии и теории экономического роста в последние 10 лет позволили нам сделать ряд важных шагов в этой области, перед экономистами стоит еще много нерешенных задач. Политическая экономия экономического роста все еще находится на начальном этапе своего развития, и по мере того, как мы будем продолжать исследования того, почему различные общества делают разный коллективный выбор, мы сможем начать лучше понимать процесс экономического роста.

Часть IX

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А
Вещественный анализ
и его приложения в оптимизации

В этом приложении представлен обзор основных результатов вещественного математического анализа. Его основная задача состоит в том, чтобы сделать книгу самодостаточной и включить в нее строгие формулировки некоторых теорем, используемых в основной ее части. Изложенный в этом приложении материал ни в коем случае не является полным курсом математического анализа. Поэтому многие теоремы в нем приведены без строгого доказательства и ряд важных утверждений не приведен, так как они не используются в тексте книги и не требуются для доказательства приведенных теорем. Некоторые важные результаты мы будем называть фактами (и часто оставлять их доказательства в качестве упражнения). Большинство из этих результатов используется в книге. Наиболее важные утверждения мы будем называть теоремами.

Материал, представленный ниже, не замещает курс *математики для экономистов* или учебника по нему. Прекрасным учебником такого типа является: [Simon, Blume 1994], и мы будем предполагать, что читатель владеет материалом этой книги или схожего с ней учебника. В частности, мы предполагаем, что читатель хорошо знаком с линейной алгеброй, понятием функции, отношениями, языком теории множеств, многомерным дифференциальным исчислением и основными методами доказательств в математике.

Чтобы лучше усвоить материал этого приложения, мы рекомендуем читателю обратиться к одному из множества прекрасных учебников по математическому анализу, функциональному анализу и общей топологии. Часть материала, представленного здесь, является обзором начального курса по математическому анализу на уровне классических учебников [Apostol 1975; Rudin 1976]. Другие результаты, особенно по топологии и бесконечномерному анализу, более продвинуты и могут быть найдены в книгах [Kelly 1955; Kolmogorov, Fomin 1970; Колмогоров, Фомин 1976; Conway 1990; Royden 1994; Aliprantis, Border 1999]. Прекрасным справочным материалом о приложениях этих результатов в решении оптимизационных задач являются книги [Berge 1963; Luenberger 1969]. Более современное изложение некоторых этих тем и их приложений в экономике представлено в учебнике [Ok 2007].

А.1. Расстояние в метрическом пространстве

Далее везде символ X обозначает множество, а выражение $x \in X$ — общий элемент множества X. Множество X может рассматриваться как пространство в себе или как подмножество большего множества (пространства) Z. Подмножество Y множества X мы будем обозначать как $Y \subset X$ (это отношение включает в себя случаи $Y = X$ и пустое множество $Y = \varnothing$.) Для всех Y, X выражение $X \backslash Y$ обозначает дополнение множества Y в множестве X (разность множеств), то есть $X \backslash Y = \{x : x \in X \text{ и } x \notin Y\}$[1].

Два типа пространств являются наиболее важными в этом параграфе: (1) конечномерные евклидовы пространства, которые мы будем обозначать как $X \subset \mathbb{R}^K$, $K \in \mathbb{N}$ и (2) бесконечномерные пространства, такие как пространства последовательностей или функциональные пространства, которые используются в оптимизационных задачах в дискретном и непрерывном времени. Наиболее интересными для нас будут пространства, наделенные *метрикой*, которые мы будем называть *метрическими пространствами*. Метрические пространства играют важную роль в анализе задач динамического программирования из глав 6 и 16.

Определение А.1. *Пусть X — непустое множество. Назовем функцию* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ метрикой (функцией расстояния), *если для всех x, y, и z из X выполняются следующие условия:*

1. *(Аксиома тождественности)* $d(x, y) = 0$, *если и только если* $x = y$,
2. *(Аксиома симметрии)* $d(x, y) = d(y, x)$, *и*
3. *(Неравенство треугольника)* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Непустое множество X, наделенное метрикой d, будем называть метрическим пространством (X, d).

В этом определении, как и во всех последующих математических определениях, мы используем слово «если» в значении «если и только если», так как из контекста очевидно, что понятие (в данном случае «метрика») определяется математическим утверждением, следующим за ним, поэтому «если и только если» подразумевается неявно.

Одно и то же множество может быть наделено различными метриками. Во многих случаях различные метрики ведут к одинаковым результатам (в частности они накладывают на множество одну и ту же топологическую структуру). Тогда мы будем говорить, что метрики *эквивалентны* между собой. Формальное определение эквивалентности дано в определении А.4.

Пример А.1. Здесь приведено несколько примеров метрических пространств. Проверка тождественности и симметрии во всех случаях тривиальна, однако проверка выполнения неравенства треугольника требует некоторых выкладок (см. упражнение А.2).

[1] Мы упростим обозначения в приложениях и будем использовать в определениях символ $=$ вместо символа $\equiv$.

1. Для любого $X \subset \mathbb{R}^K$ обозначим i-ую координату его элемента $x \in X$ как x_i. Тогда стандартное евклидово расстояние $d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{K} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$ является метрикой в X, поэтому евклидово пространство со стандартным евклидовым расстоянием является метрическим пространством. Обычно его называют K-мерным евклидовым пространством. Более того, мы можем построить альтернативные метрики в евклидовом пространстве, эквивалентные стандартной метрике. Они включают в себя семейство метрик $d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{K} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$ для $1 \le p < \infty$. Предельный элемент этого семейства $d_\infty(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|$ также является эквивалентной метрикой в евклидовом пространстве.
2. На любом непустом множестве X можно задать дискретную метрику, определенную равенствами $d(x, y) = 1$, если $x \ne y$, и $d(x, y) = 0$, *если* $x = y$. В этом случае пара (X, d) называется дискретным метрическим пространством.
3. Рассмотрим множество непрерывных ограниченных (вещественнозначных) функций $f: X \to \mathbb{R}$ *на множестве* $X \subset \mathbb{R}^K$ и обозначим его как $\mathbf{C}(X)$. Естественной метрикой в $\mathbf{C}(X)$ является равномерная метрика $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$. В этом случае пара $(\mathbf{C}(X), d_\infty)$ является метрическим пространством. Такая же метрика может быть задана на множестве ограниченных (но не обязательно непрерывных) функций $\mathbf{B}(X)$. В этом случае пара $(\mathbf{B}(X), d_\infty)$ также является метрическим пространством.
4. Рассмотрим множество бесконечных последовательностей вещественных чисел $\ell \subset \mathbb{R}^\infty$. Например, последовательность $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ где $x_i \in \mathbb{R}$ при всех $i = 1, 2, 3, \ldots$ является общим элементом l. Зададим семейство метрик на этом множестве равенством $d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{K} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$ для $1 \le p < \infty$ (при условии, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ сходится, то есть $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} < \infty$ для всех $x \in \ell$) и равенством $d_\infty(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|$ (при условии, что $\sup_i |x_i| < \infty$ для всех $x \in \ell$. Для всех $p \in [1, \infty]$ пара (ℓ, d_p) является метрическим пространством, которое часто называют пространством l_p. ■

В метрическом пространстве мы можем определить понятия окрестности точки и открытого множества, которые являются основополагающими структурами в математическом анализе и очень важны в анализе оптимизационных задач.

Определение А.2. *Рассмотрим метрическое пространство (X, d) и вещественное число $\varepsilon > 0$. Тогда для любого $x \in X$ множество*

$$\mathcal{N}_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

назовем ε-окрестностью точки x.

Пример А.2. В простейшем случае, когда $X \subset \mathbb{R}$ и $x \in X$ $d(x, y) = |x - y|$, $\mathcal{N}_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap X$.

Определение А.3. *Рассмотрим метрическое пространство* (X, d). *Назовем множество* $Y \subset X$ открытым в X, *если для каждого* $y \in Y$ *существует вещественное* $\varepsilon > 0$, *такое, что* $\mathcal{N}_\varepsilon(y) \subset Y$. *Назовем множество* $Z \subset X$ замкнутым в X, *если множество* $X \backslash Z$ *открыто в* X.

Назовем *замыканием* множества Y в X множество $\overline{Y} = \{y \in X$: для всех $\varepsilon > 0\ \mathcal{N}_\varepsilon(y) \cap Y \neq \varnothing\}$, то есть любая окрестность каждой точки в $\overline{Y}$ содержит по меньшей мере один элемент из Y. Очевидно, что $Y \subset \overline{Y}$. Более того, если Y замкнуто, то $\overline{Y} = Y$. Определим *внутренность* множества Y в X как $\text{Int}\ Y = Y \backslash \overline{(X \backslash Y)}$. Если Y является открытым множеством в X, то $\overline{(X \backslash Y)} = X \backslash Y$ и, следовательно, Int $Y = Y$.

Пример А.3. В простейшем случае, когда $X = [0, 1]$ и $d(x, y) = |x - y|$ для всех $x \in (0, 1)$ и при достаточно малых $\varepsilon > 0$, множество $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ открыто в X, а множество $[0, 1]\backslash(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = [0, x - \varepsilon] \cup [x + \varepsilon, 1]$ замкнуто в X. Также $\text{Int}(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $\text{Int}[0, 1]\backslash(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = (0, (x-\varepsilon) \cup (x+\varepsilon, 1))$, $\overline{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)} = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ и $\overline{[0, 1]\backslash(x-\varepsilon, x+\varepsilon)} = [0, x-\varepsilon] \cup [x+\varepsilon, 1]$. ■

Факт А.1. *Рассмотрим метрическое пространство* (X, d). *Множества* X *и пустое множество* $\varnothing$ *одновременно открыты и замкнуты в* X.

Важность следующей теоремы станет понятна после того, как мы перейдем к более абстрактным топологическим характеристикам замкнутых и открытых множеств. Обозначим *семейство множеств* в X как $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (где $X_\alpha \subset X$ для всех $\alpha \in A$ и A — произвольное множество. Если множество A является счетным (конечным), то $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ является счетным (конечным) семейством множеств из X. Также обозначим дополнение множества X_α в X как X_α^c (то есть $X_\alpha^c = X \backslash X_\alpha$).

Теорема А.1. О свойствах открытых и замкнутых множеств. *Рассмотрим метрическое пространство* (X, d) *и семейство множеств* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *в нем, где* $X_\alpha \subset X$ *для всех* $\alpha \in A$.

1. *Если каждое* X_α *открыто в* X, *то множество* $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ *также открыто в* X.
2. *Если каждое* X_α *открыто в* X *и* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *является конечным семейством множеств (то есть множество* A *конечно), то множество* $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ *также открыто в* X.
3. *Если каждое* X_α *замкнуто в* X, *то множество* $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ *также замкнуто в* X.
4. *Если каждое* X_α *замкнуто в* X *и* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *является конечным семейством множеств, то множество* $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ *также замкнуто в* X.

Доказательство. (Часть 1) Рассмотрим произвольное семейство множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Если объединение $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ пусто, то оно открыто по факту А.1. Если оно не пусто, то для любого $x \in \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ существует некоторый $\alpha' \in A$, такой, что $x \in X_{\alpha'}$. Так как множество $X_{\alpha'}$ открыто, то существует $\varepsilon > 0$, такое, что $\mathcal{N}_\varepsilon(x) \subset X_{\alpha'} \subset \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. Следовательно, для каждого $x \in \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ существует его ε-окрестность, лежащая в $x \in \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, то есть множество $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ открыто.

(Часть 2) Рассмотрим конечное семейство открытых множеств в $X \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (где $\alpha = 1, 2, ..., N$). Еще раз заметим, что если пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ пусто, то оно открыто по факту А.1. Если оно не пусто, то для каждого $x \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ выполняется $x \in X_\alpha$ для всех $\alpha = 1, 2, ..., N$. Так как множества X_α открыты, то по определению для всех $\alpha = 1, 2, ..., N$ существует $\varepsilon_\alpha > 0$, такое, что $\mathcal{N}_{\varepsilon_\alpha}(x) \subset X$. Положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_N\}$. Очевидно, что $\varepsilon > 0$. Более того, по построению $\mathcal{N}_\varepsilon(x) \subset \mathcal{N}_{\varepsilon_\alpha}(x) \subset X_\alpha$ для всех $\alpha = 1, 2, ..., N$. Следовательно, $\mathcal{N}_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$, что завершает доказательство утверждения.

(Части 3 и 4) Утверждения следуют непосредственно из закона де Моргана, в котором утверждается, что

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha^c \ . \ \blacksquare$$

Требование конечности семейства является существенным в части 2 теоремы А.1. Рассмотрим следующий пример.

Пример А.4. Пусть $X = \mathbb{R}$ с евклидовой метрикой $d(x, y) = |x - y|$. Рассмотрим подмножества $X X_\alpha = (0, 1 + \alpha^{-1})$ для всех $\alpha \in \mathbb{N}$ и построим бесконечное пересечение $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}} X_\alpha$. Нетрудно убедиться, что $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}} X_\alpha = (0, 1]$, которое не является открытым множеством. Еще более простым примером будет семейство множеств $X_\alpha = (-1/\alpha, 1/\alpha)$, где $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}} X_\alpha = \{0\}$, которое также не является открытым множеством. $\blacksquare$

Определение А.4. *Две метрики d и d', заданные на множестве X, называются* эквивалентными, *если они порождают совпадающие системы открытых множеств в X. Другими словами, обозначим семейства всех окрестностей, порождаемых этими метриками как $\mathcal{N}_\varepsilon$ и $\mathcal{N}'_\varepsilon$. Две метрики называются эквивалентными, если для всех $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$ и $\delta' > 0$, такие, что $\mathcal{N}'_\varepsilon(x) \subset \mathcal{N}_\delta(x)$ и $\mathcal{N}_\varepsilon(x) \subset \mathcal{N}'_{\delta'}(x)$.*

В упражнении А.4 показано, что две части определения А.4 вытекают друг из друга.

Определение А.5. *Рассмотрим метрическое пространство (X, d). Множество $Y \subset X$ называется* ограниченным *в X, если существуют $x \in X$ и $\delta \in (0, +\infty)$, такие, что $Y \subset \mathcal{N}_\delta(x)$. Если множество $Y \subset X$ не ограничено, то оно называется неограниченным.*

Пример А.5. Пусть $X = \mathbb{R}$ с евклидовой метрикой $d(x, y) = |x - y|$. Тогда подмножества $(0, 1)$ и $[0, 1]$ ограничены в $\mathbb{R}$, а подмножество $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ является неограниченным в $\mathbb{R}$. ■

А.2. Отображения, функции, последовательности, сети и непрерывность

Отображением ϕ из множества X в множество Y назовем подмножество прямого произведения $X \times Y$, такое, что для каждого $x \in X$ существует $y \in Y$, такой, что $(x, y) \in \phi$. Следуя стандартной практике, мы будем обозначать отображение как $\phi: X \to Y$. Обозначение $\phi: X \to Y$ везде в книге подразумевает, что значение $\phi(x)$ определено для каждого $x \in X$. Мы также везде принимаем, что каждому $x \in X$ соответствует лишь один $y \in Y$ и поэтому рассматриваем $\phi(x)$ как элемент множества Y, то есть $\phi(x) \in Y$ (в смысле определения выше это значит, что если $(x, y) \in \phi$ и $(x, z) \in \phi$, то $y = z$). Это предположение не ограничивает общность, так как множество Y может быть выбрано произвольно. Например, для множества Z мы можем выбрать множество $Y = \mathcal{P}(Z)$ (напомним, что $\mathcal{P}(Z)$ обозначает множество всех подмножеств множества Z). В этом случае элементами множества Y являются подмножества множества Z. Поэтому для $x \in X$ мы можем альтернативно записать $\phi(x) \in Y$ или $\phi(x) \subset Z$. Мы также будем использовать обозначение $\phi(X')$, которое задает *образ* множества X', определенный следующим образом:

$$\phi(X') = \{y \in Y\colon \exists x \in X', \text{ для которого } \phi(x) = y\}.$$

Множество X в отображении $\phi : X \to Y$, будем называть его *областью определения*, а множество Y — его *множеством значений*. Формально множеством значений верно было бы называть множество $Y' = \phi(X)$, однако в рамках данного анализа это различие не представляет важности.

Символ ϕ^{-1} является стандартным обозначением отображения, обратного к ϕ. Заметим, что отображение ϕ^{-1} может быть не однозначным, даже если отображение ϕ является таковым, так как несколько элементов множества X могут иметь один образ в множестве Y. Для любого $Y' \subset Y$ введем

$$\phi^{-1}(Y') = \{x \in X\colon \exists y \in Y', \text{ для которого } \phi(x) = y\}.$$

Вещественнозначное отображение мы обычно будем называть *функцией* (то есть отображение $f: X \to \mathbb{R}$. Для некоторого произвольного множества X). Мы будем обозначать функции строчными буквами. Для отображений, принимающих значения на множестве множеств (то есть $F : X \to \mathcal{P}(Z)$ для некоторого множества Z), мы будем использовать термин «соответствие». Такое отображение каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие некоторое подмножество множества Z. Мы будем обозначать соответствия заглавными буквами. Так как они играют важную роль в последующем анализе, мы будем использовать следующее стандартное обозначение для соответствий: $F\colon X \rightrightarrows Z$. Если множество Z является вещественной прямой, то естественно $F\colon X \rightrightarrows \mathbb{R}$.

Определение А.6. *Рассмотрим метрическое пространство* (X, d). *Отображение* ϕ, *заданное на множестве натуральных чисел* $\mathbb{N}$ *и принимающее значения в* X, *будем называть* последовательностью *и обозначать как* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *(или просто* $\{x_n\}$*).*

Областью определения отображения, задающего последовательность, является множество натуральных чисел и поэтому она является бесконечным счетным множеством. Нетрудно обобщить понятие последовательности до понятия *сети*, которое используется в оптимизации в непрерывном времени. Рассмотрим *упорядоченное множество* A (то есть множество, на котором задано рефлексивное и транзитивное отношение $\succeq$, такое, что для любых $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ существует $a \in A$, такой, что $a \succeq a_1$ и $a \succeq a_2$. Например, множество вещественных чисел с отношением «больше или равно» ($\geq$) является упорядоченным множеством.

Определение А.7. *Рассмотрим метрическое пространство* (X, d) *и упорядоченное множество* A. Сетью $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *назовем отображение с областью определения* A *и множеством значений* X.

Если сети и последовательности являются вещественнозначными, то подразумеваемым метрическим пространством является пространство $(\mathbb{R}, d)$, где d — стандартная евклидова метрика $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{|x-y|^2}$.

Пример А.6. Множество $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, такое, что $x_n = 1/n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ является последовательностью, а множество $\{x_a\}_{a\in A}$, такое, что $x_a = 1/a$ для всех $\alpha \in (0, 1]$ является сетью. ■

Определение А.8. *Рассмотрим возрастающую последовательность положительных натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *(то есть если* $k > k'$ *то* $n_k\, n_{k'}$*). Тогда для любой последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *назовем последовательность* $\{x_{n_k}\}$ *ее подпоследовательностью.*

Подсеть может быть определена аналогичным способом.

Определение А.9. *Рассмотрим метрическое пространство* (X, d). *Будем называть последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходящейся *в* X *к пределу* $x \in X$, *если для любого вещественного* $\varepsilon > 0$ *существует* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *такой, что для всех* $n \geq N(\varepsilon)$ *выполняется неравенство* $d(x_n, x) < \varepsilon$. *Будем записывать это как* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = x$ *или просто как* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$.

Определение А.10. *Рассмотрим сеть* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *в метрическом пространстве* (X, d). *Будем называть сеть* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ сходящейся *в* X *к пределу* x PR X, *если для любого вещественного* $\varepsilon > 0$ *существует* $\bar{\alpha}(\varepsilon) \in A$, *такой, что для всех* $\alpha \geq \bar{\alpha}(\varepsilon)$ $x_\alpha \in \mathcal{N}_\varepsilon(x)$.

Факт А.2. *Если последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *или сеть* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *сходятся в метрическом пространстве* X, *то они обладают единственным пределом* $x \in X$.

Доказательство. См. упражнение А.6. ■

Факт А.3. *Последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является сходящейся в метрическом пространстве* (X, d), *если и только если сходящейся является любая ее подпоследовательность.*

Доказательство. См. упражнение А.7. ■

Пример А.7. Заметим, однако, что из сходимости подпоследовательности (или подсети) не следует сходимость исходной последовательности (сети). Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, такую, что $x_n = (-1)^n$. Нетрудно увидеть, что эта последовательность не является сходящейся. Однако выбирая последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, состоящую из четных элементов, мы получаем подпоследоваетельность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к единице. ■

Рассмотрим расширенную вещественную прямую $\overline{\mathbb{R}}$, то есть $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\bigcup\{-\infty\}\bigcup\{+\infty\}$. Зададим на ней метрику $\bar{d}$ следующим образом: $\bar{d}(x, y) = d(x, y)/(1+d(x, y))$, где $d(x, y)$ является стандартной евклидовой метрикой в $\overline{\mathbb{R}}$, которой позволено принимать бесконечное значение (при соглашении, что $\bar{d}(x, y) = 1$, если $d(x, y) = \infty$). Нетрудно убедиться, что пара $(\overline{\mathbb{R}}, \bar{d})$ является метрическим пространством.

Факт А.4. *Рассмотрим последовательность* $\{x_n\}$ *или сеть в метрическом пространстве* $\overline{\mathbb{R}}$ *(с метрикой* $\bar{d}$*). Если последовательность* $\{x_n\}$ *монотонна (не убывающая или не возрастающая), то она сходится и имеет предел.*

Доказательство. См. упражнение А.8. ■

Определение А.11. *Рассмотрим множество* $X \subset \mathbb{R}$. Точной верхней гранью *множества* X *назовем наименьший элемент* $\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$, *такой, что для всех* $x \in X$ *выполняется неравенство* $\bar{x} \geq x$. *Обозначим точную верхнюю грань как* $\sup X$. *Если такого* $\bar{x} \in \mathbb{R}$ *не существует, то примем, что* $\sup X = \infty$. *Аналогично,* точной нижней гранью *множества* X, *которую обозначим как* $\inf X$, *назовем наибольший элемент* $\underline{x} \in \overline{\mathbb{R}}$, *такой, что* *для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\underline{x} \le x$, где также возможно равенство* $\inf X = -\infty$. *Если $\overline{x} = \sup X \in X$, то будем называть $\overline{x}$* максимальным элементом *множества X и обозначать его как $\overline{x} = \max X$. Аналогично, если $\underline{x} = \inf X \in X$, то будем называть $\underline{x}$* минимальным элементом *множества X и обозначать его как $\underline{x} = \min X$.*

Так как множество X может быть последовательностью чисел, точные верхняя и нижняя грань могут быть определены для последовательностей. В частности, для вещественной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ построим последовательности $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{x''_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом: $x'_n = \sup\limits_{k \ge n} x_k$ и $x''_n = \inf\limits_{k \ge n} x_k$. Очевидно, что последовательность $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ является монотонно невозрастающей, а последовательность $\{x''_n\}_{n=1}^{\infty}$ является монотонно неубывающей. Тогда из факта А.4 следует, что последовательность $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел $\lim\limits_{n \to \infty} x'_n$. Обозначим его как $\lim \sup x_n$. Аналогично существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} x''_n$, который мы обозначим как $\lim \inf x_n$. Аналогичные пределы можно построить и для сетей.

Факт А.5. *Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ или сеть в $\overline{\mathbb{R}}$.*

1. *Пределы* $\inf_n x_n$, $\lim \inf x_n$, $\lim \sup x_n$ *и* $\sup_n x_n$ *существуют и удовлетворяют неравенству*

$$\inf_n x_n \le \lim \inf x_n \le \lim \sup x_n \le \sup_n x_n.$$

2. *Последовательность $\{x_n\}$ сходится, если и только если*

$$\lim \inf x_n = \lim \sup x_n,$$

и в этом случае мы будем обозначать оба этих предела как $\lim x_n = x$.

3. *Рассмотрим последовательность $\{y_n\}$, такую, что $x_n \le y_n$ для всех n. Тогда*

$$\lim \inf x_n \le \lim \inf y_n \text{ и } \lim \sup x_n \le \lim \sup y_n$$

и, более того, $\lim x_n \le \lim y_n$, *если эти пределы существуют.*

4. *Если* $\lim x_n y_n = 0$, *то*

$$\lim x_n |y_n| = \lim |x_n| y_n = \lim |x_n||y_n| = 0.$$

Более того, тогда $\lim x_n = 0$ *или* $\lim y_n = 0$.

5. *Имеют место неравенства*

$$\lim \inf (x_n + y_n) \ge \lim \inf x_n + \lim \inf y_n,$$
$$\lim \inf (x_n - y_n) \ge \lim \inf x_n - \lim \inf y_n.$$

Доказательство. См. упражнение А.12. ■

Факт А.6. *Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ или сеть в $\overline{\mathbb{R}}$. Если все сходящиеся подпоследовательности или подсети $\{x_n\}$ сходятся к одному пределу $x^* \in \overline{\mathbb{R}}$, то последовательность $\{x_n\}$ также сходится к x^*.*

Доказательство. Если все сходящиеся подпоследовательности или подсети $\{x_n\}$ сходятся к одному пределу $x^* \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \inf x_n = \lim \sup x_n = x^*$ и утверждение следует из факта А.5(2). ■

Факт А.7. *Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ в $\mathbb{R}$ и определим последовательность $\{y_n\}$ следующим образом: $y_n = \sum_{j=0}^{n} x_n$. Назовем ряд y_n абсолютно сходящимся, если последовательность $\sum_{j=0}^{n} | x_n |$ сходится к некоторому $\overline{y}^* \in \mathbb{R}$. Если ряд y_n сходится абсолютно, то он сходится и условно, то есть существует некоторый $y^* \in \mathbb{R}$, такой, что $\{y_n\} \to y^*$.*

Определение А.12. *Рассмотрим метрическое пространство (X, d). Назовем последовательность $\{x_n\}$ в X* последовательностью Коши, *если для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $m, n \geq M(\varepsilon)$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Лемма А.1. *Рассмотрим метрическое пространство (X, d) и сходящуюся в нем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда она является последовательностью Коши.*

Доказательство. Рассмотрим любое $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда из неравенства треугольника следует, что для любых x_n и x_m выполняется неравенство

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x). \tag{A.1}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, из определения А.5 следует, что существует $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n \geq M(\varepsilon)$ $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Подставляя это неравенство в неравенство (А.1), получаем $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, что завершает доказательство леммы. ■

Утверждение, обратное к лемме А.1, не верно, что показано в следующем примере.

Пример А.8. Положим $X = (0, 1]$ и $d(x, y) = |x - y|$. Рассмотрим последовательность $x_n = 1/n$. Нетрудно увидеть, что она является последовательностью Коши, но она не сходится ни к одной точке в пространстве X. ■

Определение А.13. *Назовем метрическое пространство* (X, d) полным, *если любая последовательность Коши сходится в нем.*

Примерами полных метрических пространств являются любое замкнутое множество в евклидовом пространстве и метрическое пространство непрерывных ограниченных (вещественнозначных) функций с метрикой равномерной сходимости $(\mathbf{C}(X), d_\infty)$, введенное в примере А.1 (см. упражнение А.9). Важность понятия полного метрического пространства следует из теоремы о сжимающем отображении (теорема 6.7), которая представлена в параграфе 6.4. Следующий факт очевиден.

Факт А.8. *Рассмотрим полное метрическое пространство* (X, d). *Замкнутое подмножество* $X' \subset X$ *также является полным метрическим пространством.*

Далее мы кратко остановимся на непрерывности отображений и функций в метрических пространствах.

Определение А.14. *Рассмотрим метрические пространства* (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *и отображение* $\phi\colon X \to Y$. *Назовем отображение* ϕ непрерывным *в точке* $x \in X$, *если для любого вещественного* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *такое, что если* $d_X(x, x') < \delta$, *то* $d_Y(\phi(x), \phi(x')) < \varepsilon$. *Назовем отображение* ϕ непрерывным *на множестве* X, *если оно непрерывно в каждой точке* $x \in X$.

Факт А.9. *Отображение* $\phi\colon X \to Y$ *непрерывно в точке* $x \in X$, *если для любой последовательности, сходящейся к* x $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$, *справедливо утверждение* $\{\phi(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \to \phi(x)$.

Факт А.10. *Рассмотрим метрические пространства* (X, d_X), (Y, d_Y) *и* (Z, d_Z) *и отображения* $\phi : X \to Y$ *и* $\gamma : Y \to Z$. *Если отображение* ϕ *непрерывно в точке* $x' \in X$ *и отображение* γ *непрерывно в точке* $\phi(x') \in Y$, *то отображение* $\gamma \circ \phi = \gamma(\phi(x))$ *также непрерывно в точке* x'.

Доказательство. См. упражнение А.13. ■

Сумма и произведения непрерывных отображений также непрерывны. Отношение вещественнозначных функций непрерывно, если знаменатель не обращается в ноль.

Следующая теорема важна не только сама по себе, но и как основа для несколько более общей теоремы о непрерывных отображениях из следующего параграфа.

Теорема А.2. О непрерывности и открытых множествах I. *Рассмотрим метрические пространства* (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *и отображение* $\phi\colon X \to Y$. *Отображение* ϕ *непрерывно, если и только если для любого открытого* *в пространстве Y множества $Y' \subset Y$ его прообраз $\phi^{-1}(Y')$ открыт в пространстве X.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Допустим, что отображение ϕ непрерывно и множество Y' открыто в Y. Далее рассмотрим любую точку $x \in \phi^{-1}(Y')$. Так как множество Y' открыто, существует вещественное $\varepsilon > 0$, такое, что из неравенства $d_Y(\phi(x), y) < \varepsilon$ следует, что $y \in Y'$. Так как отображение ϕ непрерывно в точке x, для того же $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех x', удовлетворяющих неравенству $d_X(x, x') < \delta$, выполняется неравенство $d_Y(\phi(x), \phi(x')) < \varepsilon$. Тогда $\phi(x') \in Y'$ и, следовательно, множество $\phi^{-1}(Y')$ открыто в пространстве X.

($\Leftarrow$) Допустим, что множество $\phi^{-1}(Y')$ открыто в пространстве X для любого множества $Y' \subset Y$. При заданных $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ положим $Y' = \mathcal{N}_\varepsilon(\phi(x))$ (то есть $Y' = \{y \in Y\colon d_Y(\phi(x), y) < \varepsilon\}$. Очевидно, что это множество открыто. Поэтому множество $\phi^{-1}(Y')$ открыто в пространстве X. Следовательно, существует вещественное $\delta > 0$, такое, что если $d_X(x, x') < \delta$, то $\phi(x') \in Y'$, что завершает доказательство теоремы. ■

Теорема А.3. О промежуточном значении. *Рассмотрим непрерывную вещественнозначную функцию на отрезке $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Допустим, что $f(a) \neq f(b)$. Тогда для любого c, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$ (то есть $c \in (f(a), f(b))$, если $f(a) < f(b)$), существует $x^* \in (a, b)$, такой, что $f(x^*) = c$.*

Доказательство. Образ отрезка $[a, b]$ при непрерывном отображении f является связным множеством в том смысле, что множество $f([a, b])$ не может быть представлено как объединение двух непересекающихся открытых множеств. W, W' (то есть $f([a, b]) \neq W \cup W'$ для любых открытых W, W', таких, что $W \cap W' = \varnothing$). Допустим, что это не так. Тогда существуют два непересекающихся множества V, V', такие, что $f([a, b]) \subset V \cup V'$. Однако по теореме А.2 отсюда следует, что множества $f^{-1}(V)$ и $f^{-1}(V')$ открыты в $[a, b]$, а из того, что $f([a, b]) \subset V \cup V'$ следует, что $[a, b] \subset f^{-1}(V) \cup f^{-1}(V')$, то есть отрезок $[a, b]$ не является связным множеством, что ведет к противоречию. Теорема А.3 следует отсюда непосредственно, так как множество $f([a, b])$ связно, поэтому содержит все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. ■

Теорема о промежуточном значении является самой простой из ряда теорем о неподвижной точке, используемых экономистами (см. теоремы А.18 и А.19 далее как примеры более общих теорем о неподвижной точке). Теоремы о неподвижной точке описывают условия, необходимые для того, чтобы для отображения $\phi\colon X \to Y$ существовала точка $x^* \in X$, такая, что $x^* = \phi(x^*)$. Основная польза таких теорем в том, что они позволяют описать равновесие, потому что много задач такого типа могут быть сформулированы как задача поиска неподвижной точки некоторого отображения. Нетрудно заметить, что неподвижная точка является «нулем» некоторого другого отображения. В частности, рассмотрим отображение $\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - x$. Тогда неподвижная точка отображения ϕ будет нулем отображения $\tilde{\phi}$. Возможно наиболее важным приложением теоремы о промежуточном значении является случай, когда $\tilde{\phi}(a) < 0$ и $\tilde{\phi}(b) > 0$ (или $\tilde{\phi}(a) > 0$ и $\tilde{\phi}(b) < 0$). В этом случае теорема утверждает, что непрерывная функция $\tilde{\phi}$ обращается в ноль на интервале (a, b), то есть существует некоторое значение $x^* \in (a, b)$, такое, что $\tilde{\phi}(x^*) = 0$. Тогда функция ϕ имеет неподвижную точку.

А.3. Введение в общую топологию: непрерывность и компактность*

Из теоремы А.2 следует, что свойство непрерывности отображения описывается только с помощью структуры множества открытых множеств. Это наблюдение является мотивацией для краткого введения в общую топологию. Топология изучает открытые множества в топологических пространствах и их свойства. Основной задачей данного введения является знакомство читателя с понятием *компактности*. Несмотря на то что это понятие может быть описано в рамках теории метрических пространств, для некоторых утверждений о бесконечномерной оптимизации необходим более общий подход к определению и свойствам компактных множеств.

Определение А.15. *Определим* топологию $\tau = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *на непустом множестве X как множество его подмножеств $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$, удовлетворяющее свойствам:*

1) $\varnothing \in \tau$ *и* $X \in \tau$,
2) *для любого* $A' \subset A$ $\bigcup_{\alpha \in A'} V_\alpha$ *лежит в* τ *и*
3) *для любого конечного* $A' \subset A$ $\bigcap_{\alpha \in A'} V_\alpha$ *лежит в* τ.

При заданной топологии на множестве X назовем множество V открытым *в пространстве X, если $V \in \tau$ и назовем его* замкнутым *в пространстве X, если $X \backslash V \in \tau$. Пара (X, τ) называется топологическим пространством.*

Параллель между определением и свойствами объединений и пересечений открытых множеств, описанных в теореме А.1, очевидна. Иногда топология задается не прямым перечислением всех открытых множеств, а другим более удобным способом. Обычно используются два следующих стандартных подхода. Во-первых, любое метрическое пространство может рассматриваться как топологическое пространство. В частности, так как топологическое пространство (X, τ) определяется как набор открытых множеств в некотором множестве X, а в метрическом пространстве (X, d) определено понятие открытого множества, оно также является топологическим пространством с топологией, *индуцированной* метрикой d. Во-вторых, вместо описания всех открытых множеств топология может быть задана описанием меньшего набора множеств, называемого *базой топологии.*

Определение А.16. *Рассмотрим топологическое пространство* (X, τ). *Семейство множеств* $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ *называется* базой топологии *пространства* (X, τ), *если для любого открытого множества* $V \in \tau$ *существует* $A' \subset A$, *такое, что* $V = \bigcup_{\alpha \in A''} W_\alpha$.

Если множество $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ является базой топологии в пространстве (X, τ), то мы будем говорить, что топология τ *порождена* базой $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A'}$.

Пример А.9.

1. В любом множестве $X \subset \mathbb{R}^K$ определим набор открытых множеств (в смысле определения А.3) в соответствии с семейством метрик $d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{K} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$ при $1 \le p < \infty$ и $d_\infty(x, y) = \max_{i=1,\dots,K}|x_i - y_i|$. Обозначим его как τ_p, где $p \in [1, \infty]$. Тогда пара (X, τ_p) является топологическим пространством. Топологию на пространстве (X, τ_2) часто называют евклидовой топологией, однако, так как все другие метрики эквивалентны метрике d_2 (см. упражнение А.11), не будет ошибкой называть евклидовой топологией топологию на любом из пространств (X, τ_p).
2. Дискретная топология на любом непустом множестве X индуцируется дискретной метрикой из примера А.1 или, эквивалентно, с помощью определения открытыми всех подмножеств множества X.
3. В тривиальной топологии τ' на множестве X открытыми являются лишь пустое множество $\varnothing$ и все пространство X.
4. Рассмотрим метрическое пространство непрерывных ограниченных вещественнозначных функций на множестве X с равномерной метрикой $(\mathbf{C}(X), d_\infty)$. Определим набор открытых множеств на $(\mathbf{C}(X)\ \tau_\infty)$, индуцированных метрикой d_∞. Тогда пара $(\mathbf{C}(X), \tau_\infty)$ является топологическим пространством.
5. Рассмотрим множество бесконечных последовательностей вещественных чисел $\ell \subset \mathbb{R}^\infty$ и семейство метрик на этом множестве $d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$ при $1 \le p < \infty$ и $d_\infty(x, y) = \sup_i|x_i - y_i|$ (как и ранее, в предположении о том, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ сходится для всех $x \in \ell$ в первом случае и $\sup_i|x_i| < \infty$ во втором случае). Метрика d_p индуцирует топологию τ_p на множестве ℓ для всех $p \in [1, \infty]$, и пара (ℓ, τ_p) является топологическим пространством, которое иногда обозначают так же, как и соответствующее метрическое пространство ℓ_p. ■

Как можно заметить из приведенных выше примеров, многие интересующие нас топологические пространства порождаются соответствующими им метрическими пространствами. В таком случае мы будем говорить, что топологическое пространство *метризуемо* и на практике мы можем рассматривать топологическое пространство как метрическое пространство.

Определение А.17. *Назовем топологическое пространство* (X, τ) метризуемым*, если на множестве X существует метрика d, такая, что любое множество $V \in \tau$ также является открытым множеством в метрическом пространстве (X, d) (в смысле определения* А.3).

Факт А.11. *Если топологическое пространство является метризуемым метрикой d, то в нем определены понятия сходимости и непрерывности, такие же, как и в метрическом пространстве (X, d).*

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из того, что множества открытых множеств в пространствах (X, τ) и (X, d) совпадают. ■

Однако не все топологические пространства обладают хорошими свойствами метрических пространств. К счастью, это не связано со свойствами топологических пространств, связанных с понятиями непрерывности и компактности, которым посвящен этот параграф. Несмотря на это, необходимо отметить, что наиболее важным свойством абстрактных топологических пространств является *хаусдорфовость,* которая требует, чтобы две различные точки x и y топологического пространства (X, τ) были отделены друг от друга, то есть в хаусдорфовом топологическом пространстве существуют открытые множества $V_x \in \tau$ и $V_y \in \tau$, такие, что $x \in V_x$. $y \in V_y$ и $V_x \cap V_y = \varnothing$. Очевидно, что любое метрическое пространство является хаусдорфовым топологическим пространством (см. упражнение А.14). В последующем изложении хаусдорфовость не является необходимым требованием.

Возвращаясь к общим топологическим пространствам, мы можем ввести понятия сходимости последовательностей, подпоследовательностей, сетей и подсетей в абстрактном топологическом пространстве. Здесь мы дадим лишь определения понятий сходимости последовательности и сети (сходимость подпоследовательностей и подсетей определяется аналогичным образом).

Определение А.18. *Рассмотрим топологическое пространство (X, τ). Назовем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$) в пространстве X* сходящейся к пределу *$x \in X$, если для любого множества $V \in \tau$, такого, что $x \in V$ существует натуральное $n \in \mathbb{N}$ (существует некоторое*

$\tilde{\alpha} \in A$), такое, что для всех $n \geq N$ $x_n \in V$ (для всех $\alpha \geq \tilde{\alpha}$ $x_\alpha \in V$). Мы будем записывать сходимость последовательности как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = x$ или как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$.

Непрерывность определяется аналогичным образом.

Определение А.19. *Рассмотрим топологические пространства (X, τ_X) и (Y, τ_Y) и отображение ϕ: $X \to Y$. Назовем отображение ϕ* непрерывным *в точке $x \in X$, если для любого множества $U \in \tau_Y$, такого, что $\phi(x) \in U$ существует множество $V \in \tau_X$, такое, что $x \in V$ и $\phi(V) \subset U$. Отображение ϕ называется* непрерывным *на множестве X, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.*

Параллель между этим определением и эквивалентным определением непрерывности отображения в метрических пространствах (определение А.14) очевидна. Из нее вытекает следующая теорема.

Теорема А.4. Об открытых множествах и непрерывности II. *Рассмотрим топологические пространства (X, τ_X) и (Y, τ_Y) и отображение ϕ: $X \to Y$. Отображение ϕ непрерывно, если и только если для любого открытого множества $Y' \subset Y$ в пространстве Y его прообраз $\phi^{-1}(Y') \subset X$ открыт в пространстве X.*

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы А.2 и поэтому мы его не приводим.

В абстрактном топологическом пространстве сходимость последовательностей недостаточна для проверки непрерывности отображения, однако сходимость сетей оказывается достаточной для этого.

Теорема А.5. О непрерывности и сходимости сетей. *Рассмотрим топологические пространства (X, τ_X) и (Y, τ_Y). Отображение ϕ: $X \to Y$ непрерывно в точке $x \in X$, если и только если для любой сходящейся к ней сети $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \to x$ выполняется условие $\{\phi(x_\alpha)\}_{\alpha \in A} \to \phi(x)$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Допустим, что отображение ϕ непрерывно в точке $x \in X$, и рассмотрим любую сходящуюся к ней сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \to x$. Рассмотрим множество $U \in \tau_Y$, такое, что $\phi(x) \in U$, $\phi^{-1}(U) \in \tau_X$ и $x \in \phi^{-1}(U)$. Тогда для некоторого $\bar{\alpha} \in A$ имеем, что из неравенства $\alpha \geq \bar{\alpha}$ следует включение $x_\alpha \in \phi^{-1}(U)$ и, следовательно, $\phi(x_\alpha) \in U$, откуда следует сходимость $\{\phi(x_\alpha)\}_{\alpha \in A} \to \phi(x)$.

($\Leftarrow$) Допустим, что отображение ϕ не является непрерывным в точке $x \in X$. Тогда существует множество $U \in \tau_Y$, такое, что $\phi(x) \in U$ и при этом $\phi^{-1}(U) \notin \tau_X$. Рассмотрим окрестность $V \in \mathcal{N}(x)$ точки x в пространстве X (то есть $V \in \tau_X$ и $x \in V$). Так как существует множество $U \in \tau_Y$, такое, что $\phi(x) \in U$ и при этом $\phi^{-1}(U) \notin \tau_X$, для каждой окрестности $V \in \mathcal{N}(x)$ существует точка $x_V \in X$, такая, что $\phi(x_V) \notin U$.

Упорядочим окрестности в множестве $\mathcal{N}(x)$ порядком включения (то есть $V' \geq V$, если и только если $V' \not\subset V$). Тогда по построению множество $\{x_V\}_{V \in \mathcal{N}(x)}$ является сетью, сходящейся к точке x, однако $\{\phi(x_V)\}_{V \in \mathcal{N}(x)} \not\to \phi(x)$, что приводит к противоречию и завершает доказательство теоремы. ■

Факт А.12. *Рассмотрим функцию $f: X \to \mathbb{R}$ и предположим, что множество X наделено дискретной топологией. Тогда функция f непрерывна на нем.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из того, что в дискретной топологии любое подмножество $X' \subset X$ открыто в пространстве X. ■

Определение А.20. *Рассмотрим топологическое пространство (X, τ), где $\tau = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и множество $X' \subset X$. Набор открытых множеств $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ для некоторого множества $A' \subset A$ назовем* открытым покрытием *множества X', если $X' \subset \bigcup_{\alpha \in A'} V_\alpha$.*

Факт А.13. *Любое множество $X' \subset X$ обладает открытым покрытием.*

Доказательство. Из определения А.15 следует, что $X \in \tau$, и поэтому множество $\{X\}$ является открытым покрытием X'. ■

Определение А.21. *Назовем подмножество X' топологического пространства (X, τ) (включая случай $X' = X$)* компактным, *если любое открытое покрытие X' содержит* конечное подпокрытие, *то есть для любого отрытого покрытия множества X' $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ существует конечное множество $A'' \subset A'$, такое, что $X' \subset \bigcup_{\alpha \in A''} V_\alpha$.*

Компактность множества является очень важным свойством, так как компактные множества обладают широким рядом хороших свойств, некоторые из них будут использованы нами далее. Наиболее простой характеристикой обладают компактные множества в евклидовых пространствах, она приведена в следующей широко известной теореме.

Теорема А.6. Теорема Гейне—Бореля. *Рассмотрим евклидово пространство $X \subset \mathbb{R}^K$ (с евклидовой метрикой или топологией в нем). Тогда множество $X' \subset X$ компактно, если и только если оно является замкнутым и ограниченным в пространстве $\mathbb{R}^K$.*

Доказательство этой теоремы можно найти в любом учебнике по вещественному математическому анализу, и мы не будем повторять его здесь. Основным ее следствием является утверждение о том, что K-мерный отрезок $\prod_{i=1}^{K}[a_i, b_i]$, где $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ и $a_i \leq b_i$ является компактом[2].

[2] Прямое произведение множеств также обозначают как $\times_i[a_i, b_i]$ вместо $\Pi_i[a_i, b_i]$.

Предположение о том, что пространство X является евклидовым пространством, является существенным предположением в теореме А.6, что показано в следующем примере.

Пример А.10. Рассмотрим топологическое пространство (ℓ, τ), где ℓ является множеством бесконечных вещественных последовательностей и топология τ индуцирована дискретной метрикой в нем. Определим множество $\ell' = \left\{ x \in \{0, 1\}^\infty : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = 1 \right\}$. Нетрудно убедиться, что множество ℓ' замкнуто и ограничено в пространстве ℓ, однако не все его открытые покрытия содержат конечное подпокрытие. В частности, заметим, что каждая точка множества ℓ' имеет вид $\upsilon_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$, $\upsilon_2 = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$, $\upsilon_3 = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ и так далее. Так топология τ дискретна, $\upsilon_n \in \tau$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и, более того, набор $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \upsilon_n$ является открытым покрытием множества ℓ'. Однако такое открытое покрытие не содержит конечного подпокрытия. Аналогично последовательность $\{\upsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ не содержит сходящейся подпоследовательности. Аналогичная конструкция является примером некомпактного, замкнутого и ограниченного множества для множества $\ell_2' = \left\{ x \in [0, 1]^\infty : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \le 1 \right\}$ в пространстве бесконечных вещественных последовательностей ℓ_2 с метрикой $d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$. Это множество является замкнутым и ограниченным, однако последовательности $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$, построенные выше, являются его элементами, и последовательность $\{\upsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ не содержит сходящуюся подпоследовательность. ■

Несмотря на это, существует важная связь между замкнутыми множествами и компактными множествами.

Лемма А.2. *Рассмотрим топологическое пространство (X, τ) и компактное подмножество в нем $X' \subset X$. Тогда*

1) *любое его замкнутое подмножество $X'' \subset X'$ также компактно (и, следовательно, множество X' замкнуто);*
2) *для любого замкнутого множества $X'' \subset X$ множество $X'' \cap X'$ компактно.*

Доказательство. См. упражнение А.15. ■

Следующая теорема является одним из важнейших следствий понятия компактности множества.

Теорема А.7. Теорема Больцано—Вейерштрасса. *Рассмотрим метрическое пространство (X, d) и последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в нем. Тогда если пространство X компактно, то последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Будем вести доказательство методом от противного. Чтобы получить противоречие, допустим, что такой сходящейся подпоследовательности не существует. Тогда каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью V_x, в которой содержится не более одного элемента последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Очевидно, что семейство множеств $\{V_x\}_{x\in X}$ составляет открытое покрытие пространства X, которое не содержит конечного подпокрытия. Таким образом, приходим к противоречию с предположением о компактности пространства X, что завершает доказательство теоремы. ■

Утверждение, эквивалентное теореме А.7, также верно для сетей и подсетей, однако оно не понадобится нам в дальнейшем. Здесь читатель вправе задать вопрос о том, будет ли утверждение, эквивалентное теореме А.7, иметь место в любом топологическом пространстве. К сожалению, это не так (однако такое утверждение справедливо для хаусдорфовых топологических пространств со счетной базой топологии, см. учебник [Kelly 1955].

Теорема А.8. О непрерывном образе компакта. *Рассмотрим топологические пространства (X, τ_X) и (Y, τ_Y) и отображение $\phi : X \to Y$. Тогда если отображение ϕ непрерывно и множество $X' \subset X$ компактно, то множество $\phi(X') \subset Y$ также компактно.*

Доказательство. Рассмотрим любое открытое покрытие множества $\phi(X')$ $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A'}$. Из теоремы А.4 следует, что для каждого α множество $\phi^{-1}(V_\alpha) \subset X$ открыто в пространстве X. Так как множество X' компактно, каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие и, следовательно, существует конечное множество $A'' \subset A'$, такое, что $X' \subset \bigcup_{\alpha\in A''} \phi^{-1}(V_\alpha)$. Так как по определению для любого множества $Y'' \subset Y$ выполняется $\phi(\phi^{-1}(Y'') \subset Y'')$, имеем включение

$$\phi(X') \subset \bigcup\nolimits_{\alpha\in A''} (V_\alpha),$$

и поэтому семейство множеств $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A''}$ является конечным подпокрытием в покрытии $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A'}$, что завершает доказательство теоремы. ■

Теорема А.8, несмотря на свою простоту, имеет значительное число фундаментальных приложений. Наиболее значительным из них является теорема Вейерштрасса[3]. Напомним, что для любой вещественнозначной функции $f: X \to \mathbb{R}$ символы $\max_{x\in X} f(x)$ и $\min_{x\in X} f(x)$ обозначают максимальное и минимальное значения функции f на множестве X. Заметим, что

[3] На самом деле существует несколько теорем, которые называются теоремой Вейерштрасса, включая теорему о равностепенной непрерывности семейства функций и теоремы об аппроксимации непрерывных функций многочленами. Однако, так как эти теоремы нечасто используются в экономических приложениях, у читателя не должно возникнуть путаницы в связи с названием теоремы А.9 теоремой Вейерштрасса.

они могут не существовать. Если они существуют, то определим два следующих непустых множества: $\arg\max_{x\in X} f(x) = \{x' \in X\colon f(x') = \max_{x\in X} f(x)\}$ и $\arg\min_{x\in X} f(x) = \left\{x' \in X\colon f(x') = \min_{x\in X} f(x)\right\}$.

Теорема А.9. Теорема Вейерштрасса. *Рассмотрим топологическое пространство* (X, τ) *и функцию* $f : X \to \mathbb{R}$ *на нем. Если множество* $X' \subset X$ *компактно в пространстве* (X, τ), *то* $\max_{x\in X'} f(x)$ *и* $\min_{x\in X'} f(x)$ *существуют и множества* $\arg\max_{x\in X'} f(x) = \{x' \in X\colon f(x') = \max_{x\in X'} f(x)\}$ *и* $\arg\min_{x\in X'} f(x) = \left\{x' \in X\colon f(x') = \min_{x\in X'} f(x)\right\}$ *не пусты.*

Доказательство. Из теоремы А.8 следует, что множество $f(X')$ компактно. Компактное подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}$ содержит минимум и максимум, поэтому $\max_{x\in X'} f(x)$ и $\min_{x\in X'} f(x)$ существуют. Непустота множеств $\arg\max_{x\in X'} f(x)$ *и* $\arg\min_{x\in X'} f(x)$ непосредственно вытекает из этого наблюдения. ■

Из теоремы А.9 следует, что если мы сможем сформулировать задачу оптимизации как задачу нахождения максимума вещественнозначной функции на множестве ограничений, которое является компактным подмножеством топологического пространства, то это гарантирует существование решения этой задачи и непустоту множества точек, на которых достигается максимум целевой функции. Во многих приложениях также используется одно непосредственное следствие из теоремы А.9. Назовем вещественнозначную функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$ *ограниченной* на множестве X, если существует вещественное $M < \infty$, такое, что $|f(x)| < M$ для всех $x \in X$.

Следствие А.1. *Рассмотрим топологическое пространство* (X, τ). *Если вещественнозначная функция* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *непрерывна на множестве* X *и множество* X *компактно, то функция* f *ограничена на множестве* X.

В некоторых случаях используется более сильное определение понятия непрерывности вещественнозначной функции (например, в теореме 7.15 из главы 7).

Определение А.22. *Рассмотрим метрическое пространство* (X, d). *Тогда назовем вещественнозначную функцию* $f\colon X \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывной *на множестве* x, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *такое, что для любых* $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, *таких, что* $d(x_1, x_2) < \delta$ *имеет место неравенство* $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Отметим различие понятий непрерывности в некоторой точке $x \in X$ (то есть определения А.14) и равномерной непрерывности. В первом случае значения δ могут различаться для различных точек x, а при равномерной непрерывности одно и то же значение δ используется для всех точек $x \in X$.

Теорема А.10. О равномерной непрерывности на компактном множестве. *Рассмотрим метрические пространства (X, d_X) и (Y, d_Y) и отображение $f: X \to Y$. Если пространство (X, d_X) компактно и функция f непрерывна на нем, то она равномерно непрерывна на множестве X.*

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного. Чтобы получить противоречие, допустим, что функция $f: X \to Y$ непрерывна на компактном метрическом пространстве (X, d_X), однако не является равномерно непрерывной на нем. Тогда для любого вещественного $\varepsilon > 0$ и для всех $n = 1, 2, \ldots$ существуют точки $x_n \in X$, $x'_n \in X$, такие, что

$$d_X(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}, \tag{A.2}$$

$$d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon. \tag{A.3}$$

Далее рассмотрим в пространстве (X, d_X) последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Так как множество X компактно, из теоремы А.7 следует, что существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к точке $x \in X$. Тогда из неравенства (А.2) следует, что подпоследовательность $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x'_{n_k}\}$, также сходится к той же точке $x \in X$. Из неравенства (А.3) для любого n_k имеем следующее неравенство:

$$\varepsilon \leq d_Y\left(f\left(x_{n_k}\right), f\left(x'_{n_k}\right)\right) \leq d_Y\left(f(x), f\left(x'_{n_k}\right)\right) + d_Y\left(f(x), f\left(x_{n_k}\right)\right),$$

где второе неравенство следует из неравенства треугольника. Тогда верно, что $d_Y\left(f(x), f\left(x'_{n_k}\right)\right) \geq \varepsilon/2$, или что $d_Y\left(f(x), f\left(x_{n_k}\right)\right) \geq \varepsilon/2$, или выполняются оба этих неравенства. Однако это противоречит непрерывности функции f на множестве X. Это противоречие ведет к равномерной непрерывности функции f на множестве X. ■

Теорема, обратная к теореме А.10, тривиальна, так как каждая равномерно непрерывная на множестве функция непрерывна в каждой его точке.

А.4. Топология прямого произведения пространств*

Одна из основных причин, по которой мы здесь исследуем топологические пространства, вместо того чтобы ограничить анализ лишь метрическими пространствами, состоит в том, что на топологических пространствах можно ввести *топологию прямого произведения*. Топология прямого произведения особенно важна в решении задач оптимизации в бесконечномерных пространствах, так как, например, мы можем рассматривать пространство последовательностей l как счетное произведение вещественных прямых $\mathbb{R}^{\infty}$. Какими топологическими свойствами обладает такое произведение пространств? Ответ на этот вопрос дает знаменитая теорема Тихонова. Прежде чем перейти к ней, нам нужно ввести ряд новых понятий. Во-первых, введем отношение порядка на множестве топологий в топологическом пространстве, говорящее о том, насколько «слаба» или «сильна» заданная топология.

Определение А.23. *Рассмотрим две топологии τ и τ' на множестве X. Будем говорить, что топология τ* слабее, *чем топология τ' (топология τ' сильнее, чем топология τ), если любое открытое в топологии τ множество V_α также открыто в топологии τ'.*

Определение А.24. *Рассмотрим набор топологических пространств $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$.* Топология прямого произведения *на произведении пространств $\tau = \prod\limits_{\alpha\in A}\tau_\alpha$ — это самая слабая топология, в которой все множества вида $\bigcup_{j\in J} V^j$ открыты, где $V^j = \prod\limits_{\alpha\in A} V_\alpha^j$, $V_\alpha^j \in \tau_\alpha$ и для всех α кроме конечного множества $V_\alpha^j = X_\alpha$.*

Другой способ определения топологии прямого произведения пространств состоит в задании базы топологии как множества $V^j = \prod\limits_{\alpha\in A} V_\alpha^j$, где $V_\alpha^j \in \tau_\alpha$ и $V_\alpha^j = X_\alpha$ для всех α кроме конечного множества (см. определение А.16).

Определение А.25. *Рассмотрим произведение топологических пространств $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Определим* отображение проекции $\mathrm{P}_\alpha\colon X \to X_\alpha$ *для каждого α следующим образом: $P_\alpha(x) = x_\alpha$.*

Теорема А.11 (о непрерывности проекции в топологии прямого произведения пространств). *Топология прямого произведения является самой слабой топологией, в которой все отображения проекции P_α непрерывны.*

Доказательство. Рассмотрим топологию прямого произведения τ и другую топологию τ', в которой все отображения проекции непрерывны. Тогда для любого α и для любого открытого в пространстве X_α множества $V_\alpha \in X_\alpha$ его прообраз $P_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ открыт в X в топологии τ' (то есть $P_\alpha^{-1}(V_\alpha) \in \tau'$). Тогда любое конечное пересечение всех множеств вида $P_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ также лежит в топологии τ', и, следовательно, все открытые в топологии τ множества лежат в топологии τ'. Тогда топология τ' будет сильнее топологии τ, откуда следует утверждение теоремы о том, что топология прямого произведения является слабейшей топологией, в которой непрерывны все отображения проекции. ■

Топологию прямого произведения пространств также называют *топологией поточечной сходимости*. Такое название вытекает из следующего факта.

Факт А.14. *Последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *или сеть* $\{x_j\}_{j\in J}$ *в прямом произведении пространств* $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *сходятся к некоторой точке* $\overline{x} \in X$ *в топологии прямого произведения, если и только если проекция* $P_\alpha(x_n)$ *или* $P_\alpha(x_j)$ *сходится к* $P_\alpha(\overline{x})$ *в пространстве* X_α *для любого* $\alpha \in A$.

Поэтому топология прямого произведения во многих случаях является подходящим инструментом для анализа сходимости бесконечных последовательностей. Альтернативой топологии прямого произведения является *коробочная топология*, которая определяется аналогично, однако в ее *определении отсутствует требование «для всех* α *кроме конечного множества* $V_\alpha^j = X_\alpha$». Таким образом, коробочная топология имеет намного больше открытых множеств и является более сильной, чем топология прямого произведения. Следовательно, в коробочной технологии очень сложно добиться компактности некоторого множества. Дальнейшему анализу этого вопроса посвящено упражнение А.16.

Одним из следствий из теоремы А.11 является утверждение о том, что отображение $\phi\colon Y \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ будет непрерывным в топологии прямого произведения, если отображения $P_\alpha \circ \phi\colon Y \to X_\alpha$ непрерывны для всех $\alpha \in A$. Топология прямого произведения в особенности важна в анализе задач динамической оптимизации (в дискретном времени) вследствие следующей теоремы.

Теорема А.12 (о непрерывности дисконтированной функции полезности в топологии прямого произведения пространств). *Предположим, что функции* $f_n\colon X_n \to \mathbb{R}$ *непрерывны, пространства* X_n *являются компактными метрическими пространствами для всех* $n \in \mathbb{N}$, *множество функций* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *равномерно ограничено (в том смысле, что существует вещественное* $M \in \mathbb{R}$, *такое, что* $|f_n(x_n)| \le M$ *для всех* $x_n \in X_n$ *и для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\beta < 1$. *Тогда функция* $f = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n f_n\colon \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \to \mathbb{R}$ *непрерывна в топологии прямого произведения.*

Доказательство. Вначале заметим, что из равномерной ограниченности семейства функций $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ следует, что функция f

определена надлежащим образом для всех $x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Из теоремы А.5 следует, что функция f будет непрерывной в топологии прямого произведения тогда и только тогда, когда для любой точки $x^\infty \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ и для любой сходящейся в топологии прямого произведения сети $\{x_j\}_{j\in J}$, такой, что $\{x_j\}_{j\in J} \to x^\infty$ сеть $\{f(x_j)\}_{j\in J}$ сходится к $f(x^\infty)$, $\{f(x_j)\}_{j\in J} \to$ $\to f(x^\infty)$. Далее рассмотрим такую сеть $\{x_j\}_{j\in J} \to x^\infty$. Из факта А.14 следует, что она сходится в топологии прямого произведения, если и только если сети $\left\{x_n^j\right\}_{j\in J}$ сходятся к x_n^∞ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда из непрерывности функций f_n следуют пределы $\left\{f_n\left(x_n^j\right)\right\}_{j\in J} \to f_n\left(x_n^\infty\right)$.

Зафиксируем вещественное $\varepsilon > 0$ и выберем натуральное $\bar{n}$, такое, что $2M\beta^{\bar{n}}/(1-\beta) < \varepsilon/2$. Так как $\left\{f_n\left(x_n^j\right)\right\}_{j\in J} \to f_n\left(x_n^\infty\right)$ для всех $n < \bar{n}$, существует $\bar{j} \in J$, такой, что

$$\left|f_n\left(x_n^j\right) - f_n\left(x_n^\infty\right)\right| \le \varepsilon(1-\beta)/2$$

для всех $n < \bar{n}$ и $j \ge \bar{j}$. Следовательно, для всех $\bar{j} \in J$, таких, что $j \ge \bar{j}$ имеем следующие неравенства:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n f_n\left(x_n^j\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\beta^n f_n\left(x_n^\infty\right)\right| \le \sum_{n=1}^{\bar{n}-1}\beta^n \left|f_n\left(x_n^j\right) - f_n\left(x_n^\infty\right)\right| + 2M\sum_{n=\bar{n}}^{\infty}\beta^n \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\bar{n}-1}\beta^n \frac{\varepsilon(1-\beta)}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

где в первом неравенстве используется неравенство треугольника и равномерная ограниченность семейства функций $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, а во втором неравенстве используется определение $\bar{j} \in J$. Из этих неравенств следует предел $\{f(x^j)\}_{j\in J} \to f(x^\infty)$, откуда вытекает непрерывность функции f. ■

Предположение о дисконтировании является существенным условием предыдущей теоремы. Это демонстрируется в следующем примере.

Пример А.11. Рассмотрим семейство непрерывных функций $f_n : X \to \mathbb{R}$ на компактном метрическом пространстве X и построим функцию $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n : X^\infty \to \mathbb{R}$. Нетрудно убедиться, что функция f не является непрерывной и расходится к бесконечности для всех $\left\{x^j\right\}_{j=1}^{\infty} \to x^*$, таких, что $f_n(x_n) > \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$ при некотором вещественном $\varepsilon > 0$. ■

Теорема А.13 (теорема Тихонова). *Рассмотрим множество $A \subset \mathbb{R}$ и семейство топологических пространств $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$. Если каждое пространство X_α компактно, то произведение пространств $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ также компактно в топологии прямого произведения, то есть пространство (X, τ) компактно в топологии $\tau = \prod_{\alpha \in A} \tau_\alpha$.*

Доказательство теоремы Тихонова может быть найдено в учебниках [Kelly 1955; Royden 1994].

Из теоремы Тихонова и теоремы А.12 следует, что целевая функция в стандартных для динамического экономического анализа задачах максимизации дисконтированной функции полезности непрерывна в топологии прямого произведения. Тогда для того, чтобы убедиться в том, что множество ограничений компактно (в топологии прямого произведения), мы можем применить теорему Тихонова. В этом случае из теоремы Вейерштрасса (теоремы А.9) будет следовать существование решения задачи максимизации (см., например, главы 6 и 16).

А.5. Абсолютная непрерывность и равностепенная непрерывность семейства функций

В этом параграфе мы остановимся на нескольких более глубоких результатах, используемых для доказательства существования решения в задачах оптимального управления в параграфе 7.6 из главы 7. Некоторые из утверждений, представленных в этом параграфе, обычно выводятся в рамках теории меры. Однако так как мы на протяжении всей книги избегали использования понятий из теории меры, мы обойдемся без них и в этом параграфе.

Определение А.26. *Рассмотрим множество $X \subset \mathbb{R}$. Тогда назовем функцию $f : X \to \mathbb{R}$* абсолютно непрерывной, *если для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для любого набора непересекающихся интервалов (a_k, b_k), таких, что $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, имеет место неравенство:*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

В этом определении возможен случай $X = \mathbb{R}$, то есть функция может быть абсолютно непрерывной на всей вещественной прямой. Понятие абсолютной непрерывности естественным образом возникает в контексте интегрирования по Лебегу. В частности очевидны и иллюстративны следующие утверждения, в которых понятие абсолютной непрерывности играет важную роль.

Факт А.15. *Пусть* $f(x) = \int_0^x g(s)ds$ *для всех* $x \in X$. *Если функция* $g(s)$ *кусочно-непрерывна на множестве* X, *то функция* $f(x)$ *абсолютно непрерывна на множестве* X.

Интеграл здесь может интерпретироваться как стандартный интеграл Римана (см. приложение В). Однако это утверждение верно и для интеграла Лебега, если функция $g(s)$ является интегрируемой по Лебегу (вместо предположения о кусочной непрерывности).

Факт А.16. *Если функция* $f: X \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на множестве* X, *то она равномерно непрерывна на множестве* X *(и, следовательно, непрерывна в каждой его точке).*

Факт А.17. *Если функция* $f: X \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на множестве* X, *то она абсолютно непрерывна на множестве* X.

Далее введем несколько понятий, которые используются для проверки компактности подмножеств в пространстве $\mathbf{C}(X)$. Напомним, что $\mathbf{C}(X)$ — это пространство всех непрерывных ограниченных вещественнозначных функций, определенных на множестве X, и в дальнейшем мы будем предполагать, что X является компактным евклидовым пространством (компактным подмножеством евклидова пространства).

Определение А.27. *Рассмотрим метрическое пространство* (X, d). *Для* $\varepsilon > 0$ *назовем множество* $A \subset X$-сетью *на множестве* $X' \subset X$, *если для любого* $x \in X'$ *существует* $a \in A$, *такой, что* $d(a, x) \le \varepsilon$.

Определение А.28. *Рассмотрим метрическое пространство* (X, d). *Назовем множество* $X' \subset X$ вполне ограниченным, *если для каждого вещественного* $\varepsilon > 0$ *существует конечное множество* $A_\varepsilon \subset X$, *которое является* ε*-сетью (конечной* ε*-сетью) на множестве* X'.

В этом определении мы без ограничения общности можем положить $A_\varepsilon \subset X'$. Аналогично можно определить вполне ограниченность всего пространства X как подмножества самого себя.

Следующая теорема, которую мы приведем без доказательства, является критерием компактности в метрическом пространстве (читатель может найти доказательство, например, в учебнике [Kolmogorov, Fomin, 1970, p. 100–102; Колмогоров, Фомин 1976].

Теорема А.14. Критерий компактности в метрическом пространстве. *Метрическое пространство* (X, d) *компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и вполне ограниченно.*

Определение А.29. *Рассмотрим компактное евклидово пространство X. Назовем множество функций $\mathcal{F}$ в пространстве* C(X) равномерно ограниченными, *если существует вещественное $K > 0$, такое, что $|f(x)| < K$ для всех $x \in X$ и для всех $f \in \mathcal{F}$.*

Определение А.30. *Рассмотрим компактное евклидово пространство X. Назовем множество функций $\mathcal{F}$ в пространстве* C(X) равностепенно непрерывным, *если для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$ и для всех f $\mathcal{F}$ имеет место неравенство*:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема А.15. Теорема Арцела—Асколи. *Рассмотрим компактное Евклидово пространство X и семейство функций $\mathcal{F}$ в пространстве* C(X). *Замыкание множества $\mathcal{F}$ $\bar{\mathcal{F}}$ компактно в пространстве* C(X), *если и только если множество $\mathcal{F}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Другими словами, если множество $\mathcal{F}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то для любой последовательности функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_n \in \mathcal{F}$, существует сходящаяся в $\bar{\mathcal{F}}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \{f_{n_k}\} \to f \in \bar{\mathcal{F}}$.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Допустим, что множество $\bar{\mathcal{F}}$ компактно в пространстве C(X). Тогда из теоремы А.14 и определения А.28 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ на множестве $\mathcal{F}$ существует конечная $\varepsilon/3$-сеть $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{F}$ существует $i \in \{1, \ldots, n\}$, такое, что

$$\sup_{x \in X} | f(x) - f_i(x) | \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{А.4}$$

Более того, каждая функция f_i ограниченная, так как она непрерывна на компактном множестве (см. следствие А.1). Поэтому для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует вещественное $K_i < \infty$, такое, что

$$|f_i(x)| \le K_i \text{ для всех } x \in X.$$

Положим $K = \max\{K_1, \ldots, K_n\} + \varepsilon/3$ и запишем неравенство (А.4) с помощью неравенства треугольника в следующем виде:

$$|f(x)| \le |f_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \le K_i + \frac{\varepsilon}{3} \le K$$

для всех $x \in X$, откуда следует, что семейство функций $\mathcal{F}$ равномерно ограниченное. Более того, каждая функция f_1, ..., f_n равномерно непрерывна (это следует из теоремы А.10, так как каждая функция f_i и пространство X компактно). Следовательно, для всех $i \in \{1, ..., n\}$ и для всех $\varepsilon > 0$ существует $\delta_i > 0$, такое, что

$$|f_i(x) - f_i(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех $x \in X$, $x' \in X$, таких, что $|x - x'| < \delta_i$. Положим $\delta = \max\{\delta_1, ..., \delta_n\}$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{F}$ выберем такое $i \in \{1, ..., n\}$, что выполняется неравенство (А.4) и, снова используя неравенство треугольника, запишем для всех $x \in X$, $x' \in X$, таких, что $|x - x'| < \delta$

$$|f(x) - f(x')| \le |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x')| + |f_i(x') - f(x')| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

откуда следует равностепенная непрерывность семейства функций $\mathcal{F}$.

($\Rightarrow$) Зафиксируем вещественное $\varepsilon > 0$. Так как семейство функций $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно, существует $\delta > 0$, такое, что

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{4}$$

для всех $f \in \mathcal{F}$ и $x' \in \mathcal{N}_\delta(x)$ (лежащих в открытой δ-окрестности точки x). Так как множество X компактно, любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие (см. определение А.21), поэтому мы можем выбрать множество $X' = \{x_1, ..., x_n\}$ так, что $X = \bigcup_{x_i \in X'} \mathcal{N}_\delta(x_i)$.

Более того, так как каждая функция $f \in \mathcal{F}$ ограничена на множестве X (см. следствие А.1) и множество $\{f(x_i): f \in \mathcal{F}$ и $i = 1, ..., n\}$ является вполне ограниченным подмножеством в $\mathbf{C}(X)$. Тогда по определению А.28 на множестве $X'' = \{f(x_1), ..., f(x_n)\}$ существует конечная $(\varepsilon/4)$-сеть $A = \{g_1, ..., g_m\} \subset \mathcal{F}$. Далее рассмотрим множество функций F_A, таких, что $F_A = \{f: X' \to A\}$. Так как оба множества X' и A конечны, конечно и множество F_A. Положим

$$\mathcal{F}_\phi = \left\{ f \in \mathcal{F}: |f(x_i) - \phi(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ при } i = 1, ..., n \right\}.$$

Так как A является конечной $(\varepsilon/4)$-сетью на множестве X'' $\bigcup_{\phi \in F_A} \mathcal{F}_\phi = \mathcal{F}$. Для любого $\phi \in F_A$ рассмотрим $f, g \in \mathcal{F}_\phi$ и заметим, что из неравенства треугольника следует неравенство

$$|f(x_i) - g(x_i)| \le |f(x_i) - \phi(x_i)| + |\phi(x_i) - g(x_i)| \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $x_i \in X'$. Так как $X = \bigcup_{x_i \in X'} \mathcal{N}_\delta(x_i)$, для любого $x \in X$ найдется $i \in \{1, ..., n\}$, такое, что $x \in \mathcal{N}_\delta(x_i)$, и, следовательно, для любого $x \in X$ имеет место неравенство:

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Таким образом, семейство функций $\mathcal{F}$ является вполне ограниченным. Более того, так как пространство C(X) полно, пространство $\bar{\mathcal{F}}$ также является полным метрическим пространством (см. факт А.8), поэтому множество $\bar{\mathcal{F}}$ компактно, что завершает доказательство достаточности в теореме.

Заметим, что из утверждения о достаточности в теореме следует, что если $f^n \in \mathcal{F}$ при $n = 1, 2, ...$, то в последовательности $\left\{f^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ существует сходящаяся подпоследовательность $\left\{f^{n_k}\right\}$, такая, что $\left\{f^{n_k}\right\} \to f \in \bar{\mathcal{F}}$. ■

Доказательство второго следствия во многом повторяет доказательство теоремы А.15.

Следствие А.2. *Рассмотрим компактное евклидово пространство X и множество $\mathcal{F}$ в пространстве* C(X), *состоящее из абсолютно непрерывных вещественнозначных функций на множестве X. Допустим, что семейство функций $\mathcal{F}$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. Тогда если $f^n \in \mathcal{F}$ при $n = 1, 2, ...$, то в последовательности $\left\{f^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ существует сходящаяся подпоследовательность $\left\{f^{n_k}\right\}$,* такая, что $\left\{f^{n_k}\right\} \to f \in \bar{\mathcal{F}}$.

А.6. Соответствия и теорема Бержа о максимуме

В этом параграфе мы приведем и докажем одну из наиболее важных теорем, используемых в математической экономике, теорему Бержа о максимуме. Эта теорема не только считается ключевой в динамической оптимизации, но и играет важную роль в теории общего равновесия, теории игр, политической экономии, теории государственных финансов и в теории отраслевых рынков. На самом деле достаточно трудно выбрать раздел экономики, в котором эта теорема не играет важной роли. Однако, несмотря на свою огромную важность, теорема Бержа зачастую не включается в стандартные курсы математики для экономистов и учебники по ним. Это является основной причиной тщательности и детальности изложения материала в этом параграфе. Первый шаг на пути к доказательству теоремы состоит в кратком обзоре понятия соответствия, которое было определено ранее.

В этом и следующих трех параграфах мы будем рассматривать лишь метрические пространства. Напомним, что F называется соответствием между метрическими пространствами (X, d_X) и (Y, d_Y), если каждой точке $x \in X$ оно сопоставляет подмножество пространства Y. Мы будем обозначать его как

$$F : X \rightrightarrows Y \text{ или } F : X \to \mathcal{P}(Y) \backslash \varnothing,$$

где символ $\mathcal{P}(Y)$ обозначает множество всех подмножеств множества Y и пустое множество $\varnothing$ исключено из него явным образом, то есть оно не может быть значением соответствия.

Наш интерес к понятию соответствия продиктован тремя фундаментальными причинами. Во-первых, даже если вещественнозначное отображение f: $X \to \mathbb{R}$ является гладкой функцией, обратное к нему отображение f^{-1} в общем случае не будет однозначным, поэтому является соответствием. Во-вторых, в большинстве экономических задач оптимизации основной интерес для нас представляет множество «arg max», определенное выше, которое состоит из элементов некоторого множества X, на которых целевая функция достигает максимума. В простых экономических задачах оно задает значения потребления, инвестиций и индексов цен, при которых функция полезности потребителя достигает максимума. Наконец соответствия также используются при описании свойств точек максимума в теореме Бержа о максимуме.

Для соответствия F: $X \rightrightarrows Y$, также как и для функций, мы будем использовать символ $F(X')$ для задания образа множества X' при соответствии F. То есть $F(X')$ определен следующим образом: $F(X') = \{y \in Y\colon \exists x \in X'$, такой, что $y \in F(x)\}$.

Определение А.31. *Рассмотрим метрические пространства (X, d_X) и (Y, d_Y) и соответствие F: $X \rightrightarrows Y$ между ними. Обозначим окрестность точки x в пространстве X как $\mathcal{N}_\varepsilon(x)$. Тогда*

1. *Назовем соответствие F* полунепрерывным сверху *в точке $x \in X$, если для любого открытого в пространстве Y подмножества $Y' \subset Y$, такого, что $F(x) \subset Y'$ существует вещественное $\varepsilon > 0$, такое, что $F(\mathcal{N}_\varepsilon(x)) \subset Y'$, (мы будем говорить, что соответствие F* полунепрерывно сверху *на множестве X, если оно полунепрерывно сверху во всех точках $x \in X$).*
2. *Назовем соответствие F* полунепрерывным снизу *в точке $x \in X$, если для любого открытого в пространстве Y подмножества $Y' \subset Y$, такого, что $F(x) \cap Y' \neq \varnothing 7$, существует вещественное $\varepsilon > 0$, та-*

кое, что $F(x') \cap Y' \neq \varnothing$ для всех $x' \in \mathcal{N}_\varepsilon(x)$ (мы будем говорить, что соответствие F полунепрерывно снизу *на множестве X, если оно полунепрерывно снизу во всех точках $x \in X$), и*

3. *Назовем соответствие F* непрерывным *в точке $x \in X$, если и только если оно одновременно полунепрерывно сверху и полунепрерывно снизу в точке $x \in X$ (мы будем говорить, что соответствие F* непрерывно *на множестве X, если оно непрерывно во всех точках $x \in X$).*

Эти понятия более просто интерпретируются для случая евклидовых пространств. Во-первых, мы будем говорить, что соответствие $F: X \rightrightarrows Y$ *принимает замкнутые значения (компактные значения)*, если для любого $x \in X$ множество $F(x)$ замкнуто (компактно) в пространстве Y. Для евклидовых пространств следующее определение эквивалентно определению А.31, в более общем случае определение А.31 следует из него (см. упражнение А.18 и факт А.18).

Определение А.32. *Рассмотрим множества $X \subset \mathbb{R}^{K_X}$ и $Y \subset \mathbb{R}^{K_Y}$, где $K_X \in \mathbb{N}$, $K_Y \in \mathbb{N}$ и соответствие $F: X \rightrightarrows Y$, принимающее компактные значения. Тогда*

1. *Назовем соответствие F* полунепрерывным сверху в точке $x \in X$, *если для каждой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$ в пространстве X и для каждой последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $y^n \in F(x^n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ в пространстве Y существует сходящаяся подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, такая, что $\{y_{n_k}\} \to y \in F(x)$, и*

2. *Назовем соответствие F* полунепрерывным снизу *в точке $x \in X$, если соответствие $F(x)$ принимает непустые значения и для каждой точки $y \in F(x)$ и каждой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$ существует некоторое $n \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая, что $y_n \in F(x_n)$ для всех $n \geq N$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \to y$.*

Рис. А.1 изображает эти понятия графически. На нем соответствие $F(x)$ полунепрерывно сверху и снизу (и, следовательно, непрерывно) в точке x_1, полунепрерывно сверху, но не полунепрерывно снизу в точке x_2, и полунепрерывно снизу, но не полунепрерывно сверху в точке x_3.

В случае общих метрических пространств из определения полунепрерывности сверху и полунепрерывности снизу в соответствии с определением А.32 следует определение этих понятий в соответствии с определением А.31.

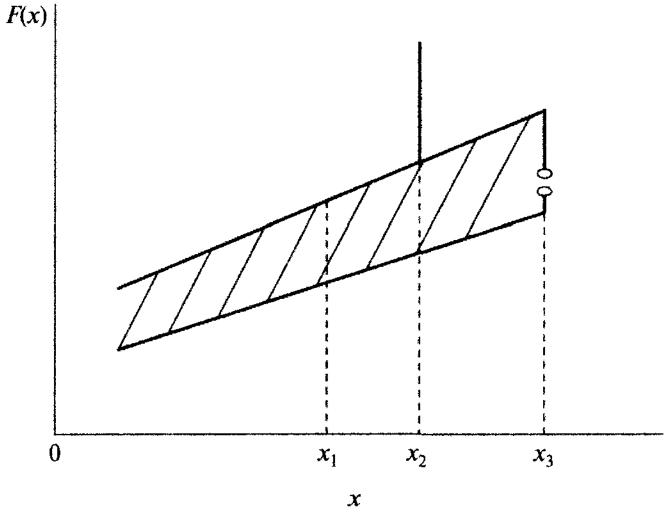

Рис. А.1. Полунепрерывность сверху и полунепрерывность снизу

Факт А.18. *Рассмотрим метрические пространства* (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *и соответствие* $F: X \rightrightarrows Y$ *между ними. Если соответствие* F *полунепрерывно сверху (полунепрерывно снизу) в точке* $x \in X$ *в соответствии с определением* А.32, *то оно полунепрерывно сверху (полунепрерывно снизу) в точке* $x \in X$ *в соответствии с определением* А.31.

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного. Чтобы получить противоречие, допустим, что часть 1 определения А.32 выполняется, но соответствие F не является полунепрерывным сверху в точке $x \in X$. Тогда в пространстве Y существует открытое множество $Y' \subset Y$, такое, что $F(x) \subset Y'$, однако $F(\mathcal{N}_\varepsilon(x))$ не является подмножеством множества Y' ни при каком $\varepsilon > 0$. Тогда для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существуют точки $x_\varepsilon \in \mathcal{N}_\varepsilon(x)$ и $y_\varepsilon \in F(x_\varepsilon)$, такие, что $y_\varepsilon \notin Y'$. Построим последовательность $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, такую, что пара (x_n, y_n) удовлетворяет этому свойству при $\varepsilon = 1/n$. Очевидно, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$. Следовательно, по предположению, существует сходящаяся подпоследовательность $\{y_{n_k}\} \to y \in F(x)$. Так как множество Y' открыто в пространстве Y, множество $Y \backslash Y'$ замкнуто в нем, поэтому из того, что $y_{n_k} \in Y \setminus Y'$ для всех n_k, следует, что предел подпоследовательности y также лежит в замкнутом множестве $Y \backslash Y'$. Однако условия $y \in Y \backslash Y'$ и $y \in F(x)$ противоречат друг другу, так как $F(x) \subset Y'$, что завершает доказательство первой части утверждения.

Далее для того, чтобы получить противоречие, предположим, что вторая часть определения А.32 выполняется в точке x, однако соответствие F не является полунепрерывным снизу. Тогда в пространстве Y существует открытое множество $Y' \subset Y$, такое, что $F(x) \cap Y' \neq \varnothing$, однако для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in F(\mathcal{N}_\varepsilon(x))$, такая, что $F(x_\varepsilon) \cap Y' = \varnothing$. Рассмотрим сходящуюся последовательность $\{x_n\} \to x$, положим $\varepsilon = 1/n$ и предположим, что эта последовательность обладает таким свойством (то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in F(\mathcal{N}_\varepsilon(x))$, такая, что $F(x_\varepsilon) \cap Y' = \varnothing$). Также положим $y \in F(x) \cap Y'$. Из второй части определения А.32 следует, что существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ и натуральное $N \geq 1$, такие, что $y_n \in F(x_n)$ для всех $n \geq N$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \to y$. Однако по построению последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $y_n \notin Y'$. Но из того, что множество $Y \backslash Y'$ замкнуто, следует, что предел y также лежит в замкнутом множестве $Y \backslash Y'$. Это противоречит условию $y \in F(x) \cap Y'$, что завершает доказательство второй части утверждения. ■

Определение А.33. *Рассмотрим метрические пространства* (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *и соответствие* $F\colon X \rightrightarrows Y$ *между ними. Тогда соответствие* F обладает замкнутым графиком *(замкнуто) в точке* $x \in X$*, если для каждой последовательности* $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \to (x, y)$*, такой, что* $y_n \in F(x_n)$ *для всех* n *также выполняется условие* $y \in F(x)$*. Мы будем говорить, что соответствие* F *обладает замкнутым графиком на множестве* X*, если оно замкнуто во всех точках* $x \in X$*.*

Следующий факт является простым следствием определения А.32.

Факт А.19. *Рассмотрим множества* $X \subset \mathbb{R}^{K_X}$ *и* $Y \subset \mathbb{R}^{K_Y}$*, где* $K_X \in \mathbb{N}$, $K_Y \in \mathbb{N}$ *и полунепрерывное сверху соответствие* $F\colon X \rightrightarrows Y$ *между ними. Если множество* $F(X)$ *замкнуто в* Y *(то есть соответствие* F принимает замкнутые значения*) для всех* $x \in X$*, то соответствие* F *обладает замкнутым графиком на множестве* X*.*

Доказательство. См. упражнение А.20. ■

В конечномерных пространствах соответствия, обладающие замкнутым графиком, являются полунепрерывными сверху при условии, что они удовлетворяют простому требованию об ограниченности.

Факт А.20. *Рассмотрим множества* $X \subset \mathbb{R}^{K_X}$ *и* $Y \subset \mathbb{R}^{K_Y}$*, где* $K_X \in \mathbb{N}$, $K_Y \in \mathbb{N}$ *и соответствие* $F\colon X \rightrightarrows Y$ *между ними. Предположим, что соответствие* F *обладает замкнутым графиком в точке* $x \in X$ *и существует ее окрестность* V_x*, такая, что множество* $F(V_x)$ *является ограниченным. Тогда соответствие* F *полунепрерывно сверху в точке* $x \in X$*.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, такие, что $y_n \in F(x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$. Тогда по определению существует натуральное $N \in \mathbb{N}$, такое, что $x_n \in V_x$ для всех $n \geq N$, где V_x является окрестностью, заданной в условии утверждения, удовлетворяющей свойству, что множество $F(V_x)$ ограниченное. Тогда в силу того, что пространство Y евклидово, замыкание множества V_x компактно. Тогда из теоремы А.7 следует, что последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к некоторой точке $y \in Y$. Следовательно, подпоследовательность $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке (x, y). Более того, так как соответствие F обладает замкнутым графиком в точке x $y \in F(x)$, откуда следует, что оно является полунепрерывным сверху в точке $x \in X$ в смысле определения А.32. Тогда из факта А.18 следует, что оно является полунепрерывным сверху в точке $x \in X$ и в смысле определения А.31. ■

Требование о существовании окрестности V_x, такой, что множество $F(V_x)$ ограниченное, является существенным условием в факте А.20. Это иллюстрирует следующий пример.

Пример А.12. Рассмотрим соответствие F: $[0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}$, заданное следующим образом: $F(x) = \{0\}$, если $x = 0$ и $F(x) = \{\log x, 0\}$, если $x \in (0, 1]$. Тогда соответствие F обладает замкнутым графиком, но не является полунепрерывным сверху в точке $x = 0$. Нетрудно убедиться, что соответствие F не удовлетворяет требованию о существовании окрестности V_x, такой, что множество $F(V_x)$ ограничено в точке $x = 0$. ■

Следующий факт используется в анализе непрерывных соответствий в задачах динамической оптимизации.

Факт А.21. *Рассмотрим метрическое пространство (X, d_X) и непрерывную вещественнозначную вогнутую функцию g: $Y \to \mathbb{R}$. Тогда множественнозначное отображение $G(x) = \{y \in Y: y \leq g(x)\}$ задает непрерывное соответствие G: $X \rightrightarrows Y$.*

Доказательство. См. упражнение А.21. ■

Теорема А.16. Теорема Бержа о максимуме. *Рассмотрим метрические пространства (X, d_X) и (Y, d_Y) и следующую задачу максимизации:*

$$\sup_{y \in Y} f(x, y)$$

при условии

$$y \in G(x),$$

где $G: X \rightrightarrows Y$ и $f: X \times Y \to \mathbb{R}$. Предположим, что функция f непрерывна и соответствие G непрерывно и принимает компактные значения. Тогда

1) *отображение* $M(x) = \max\limits_{y \in Y}\{f(x, y): y \in G(x)\}$ *существует и непрерывно в точке $x \in X$, и*
2) *соответствие* $\Pi(x) = \arg\max\limits_{y \in Y}\{f(x, y): y \in G(x)\}$ *принимает непустые компактные значения, полунепрерывно сверху и обладает замкнутым графиком в точке $x \in X$.*

Доказательство. Основываясь на факте А.18, мы будем использовать определение А.32. Существование отображения $M(x)$ и непустота значения соответствия $\Pi(x)$ следуют из теоремы А.9. Рассмотрим последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \to y$, такую, что $y_n \in \Pi(x)$ для всех натуральных n. Так как множество $G(x)$ замкнуто, $y \in G(x)$. Более того, по определению $f(x, y_n) = M(x)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Из непрерывности функции f следует равенство $f(x, y) = M(x)$. Следовательно, $y \in \Pi(x)$ и поэтому множество $\Pi(x)$ замкнуто. Так как множество $\Pi(x)$ является замкнутым подмножеством компактного множества $G(x)$, мы можем использовать лемму А.2 и заключить, что множество $\Pi(x)$ компактно и соответствие $\Pi(x)$ принимает компактные значения.

Далее рассмотрим последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ со сходящейся подпоследовательностью $\{y_{n_k}\} \to y$, такие, что $y_n \in G(x_n)$ для всех натуральных n. Так как соответствие $G(x)$ полунепрерывно сверху, $y \in G(x)$. Рассмотрим любую точку $z \in G(x)$. Так как соответствие $G(x)$ непрерывно и поэтому полунепрерывно снизу, существует подпоследовательность $\{z_{n_k}\} \to z$, такая, что $z_{n_k} \in G(x_{n_k})$ для всех n_k. Так как $y_{n_k} \in \Pi(x_{n_k})$, $M(x_{n_k}) = f(x_{n_k}, y_{n_k}) \geq f(x_{n_k}, z_{n_k})$. Более того, так как функция f непрерывна, из факта А.5 следует, что $M(x) = f(x, y) \geq f(x, z)$. Так как это условие выполняется для всех $z \in G(x)$, $y \in \Pi(x)$, соответствие $\Pi(x)$ полунепрерывно сверху. Применяя еще раз факт А.19, заключаем, что соответствие $\Pi(x)$ также обладает замкнутым графиком.

Для завершения доказательства теоремы нам остается показать, что отображение $M(x)$ непрерывно. Это утверждение следует из того, что соответствие $\Pi(x)$ полунепрерывно сверху. Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$, и последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, такую, что $y_n \in \Pi(x_n)$ для всех натуральных n. Так как соответствие $\Pi(x)$ полунепрерывно сверху, из определения А.32 следует, что существует подпоследовательность $\left\{y_{n_k}\right\}$, сходящаяся к точке $y \in F(x)$. Из непрерывности отображения f следует, что $M\left(x_{n_k}\right)= = f\left(x_{n_k}, y_{n_k}\right) \to f(x, y) = M(x)$, откуда следует непрерывность отображения $M(x)$ в точке $x \in X$. ■

Заметим, что мы записали задачу максимизации в виде задачи поиска точной верхней грани, а не максимума. Формулировка задачи в терминах поиска максимума не ограничивает общность, так как в теореме утверждается, что максимум достигается. Однако использование точной верхней грани является более подходящим, так как нам заранее неизвестно, достигает ли максимума целевая функция.

A.7. Выпуклость, вогнутость, квазивогнутость и неподвижные точки

В теореме А.16 утверждается, что мы можем быть уверены в некоторых хороших свойствах множества точек максимума в большом количестве задач динамической оптимизации в экономике. Однако она не позволяет утверждать единственность точки максимума или связность множества точек максимума (вместо этого в ней утверждается полунепрерывность сверху). В этом параграфе мы покажем, как эта теорема может быть усилена в случае, когда целевая функция задачи вогнута, а множество ограничений выпукло, а затем приведем несколько примеров, где этот усиленный результат может быть использован. Далее в этом приложении мы будем использовать символ V для обозначения *векторного пространства* (или линейного пространства), то есть, если $x \in V$, $y \in V$ и λ вещественное число, то $x + y \in V$ и $\lambda x \in V$. Множества X и Y будут подмножествами в пространстве V. Свойства векторных пространств более подробно описаны в параграфе А.10.

Определение А.34. *Назовем множество X выпуклым, если для любого вещественного $\lambda \in [0, 1]$ и всех точек $x \in X$, $y \in X$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$.*

Определение А.35. *Будем говорить, что соответствие $G : X \rightrightarrows Y$ принимает выпуклое значение в точке $x \in X$, если множество $G(x)$ выпукло (в множестве Y).*

Определение А.36. *Рассмотрим выпуклое множество X, вещественнозначную функцию $f : X \to \mathbb{R}$ и вещественное $\lambda \in (0, 1)$. Допустим, что значения $f(x)$, $f(y)$ и $f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ определены. Тогда*

1. *Функция f называется* вогнутой, *если $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ для всех $\lambda \in (0, 1)$ и для всех $x \in X$, $y \in X$ (функция f*

называется строго выпуклой, *если для всех $x \neq y$ выполняется строгое неравенство).*

2. *Функция f называется* выпуклой, *если $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ для всех $\lambda \in (0, 1)$ и для всех $x \in X$, $y \in X$ (функция f называется* строго вогнутой, *если для всех $x \neq y$ выполняется строгое неравенство).*
3. *Функция f называется* квазивогнутой, *если $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$ для всех $\lambda \in (0, 1)$ и для всех $x \in X$, $y \in X$ (функция f называется* строго квазивыпуклой, *если для всех $x \neq y$ выполняется строгое неравенство), и*
4. *Функция f называется* квазивыпуклой, *если $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ для всех $\lambda \in (0, 1)$ и для всех $x \in X$, $y \in X$ (функция f называется* строго квазивогнутой, *если для всех $x \neq y$ выполняется строгое неравенство).*

Естественно, все эти понятия могут быть определены и на подмножестве X' области определения функции f X, то есть функция может быть вогнутой на некотором множестве, а не на всей своей области определения.

Следующая теорема является усилением теоремы А.16 при некоторых дополнительных предположениях.

Теорема А.17 (свойства множества точек максимума). *Рассмотрим следующую задачу максимизации:*

$$\sup_{y \in Y} f(x, y)$$

при условии

$$y \in G(x),$$

где $G : X \rightrightarrows Y$ и f: $X \times Y \to \mathbb{R}$. Предположим, что функция f непрерывна и соответствие G непрерывно и принимает компактные выпуклые значения и непрерывно в точке $x \in X$. Тогда

1. *Если функция f квазивогнута, то соответствие $\Pi(x) = \arg\max_{y \in Y}\{f(x, y) \colon y \in G(x)\}$ принимает непустые компактные значения, полунепрерывно сверху. Оно обладает замкнутым графиком и принимает выпуклое значение в точке $x \in X$.*
2. *Если функция f строго квазивогнута в окрестности точки $x \in X$, то соответствие $\Pi(x)$ однозначно.*
3. *Если функция f удовлетворяет условию части 2 во всех точках $x \in X$, то соответствие $\Pi(x)$ является непрерывной однозначной функцией на множестве X.*

Доказательство. (Часть 1) Большинство утверждений в этой части следуют из теоремы А.16. Нам осталось лишь показать, что соответствие $\Pi(x)$ принимает выпуклые значения. Проведем доказательство методом от противного. Для того чтобы получить противоречие, допустим, что это не так. Тогда в множестве $\Pi(x)$ лежат y и $y' \neq y$, такие, что для некоторого $\lambda \in (0, 1)$ $y'' = \lambda y + (1 - \lambda)y' \notin \Pi(x)$. Однако в силу того, что соответствие $G(x)$ принимает выпуклые значения, $y'' \in G(x)$. Тогда из квазивогнутости функции f следует неравенство $f(\lambda y + (1 - \lambda)y') \geq \min\{f(y), f(y')\}$. Но тогда из того, что $y \in \Pi(x)$, $y' \in \Pi(x)$, $f(y) = f(y')$ и поэтому $f(\lambda y + (1 - \lambda)y') \geq f(y) = f(y')$, следует, что $y'' = \lambda y + (1 - \lambda)y' \in \Pi(x)$. Имеем противоречие, из которого следует, что соответствие $\Pi(x)$ принимает выпуклые значения.

(Часть 2) Проведем доказательство методом от противного. Чтобы получить противоречие, допустим, что в множестве $\Pi(x)$ лежат y и $y' \neq y$. Так как соответствие $G(x)$ принимает выпуклые значения, $y'' = \lambda y + (1 - \lambda)y' \in G(x)$ для всех $\lambda \in (0, 1)$. Более того, из строгой квазивогнутости функции f следует неравенство $f(\lambda y + (1 - \lambda)y') > \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(y')$. Как и в первой части $y \in \Pi(x)$, $y' \in \Pi(x)$, $f(y) = f(y')$, поэтому $f(\lambda y + (1 - \lambda)y') > f(y) = f(y')$, что противоречит предположению о том, что $y \in \Pi(x)$, $y' \in \Pi(x)$, и ведет к доказательству утверждения.

(Часть 3) Из части 2 следует, что соответствие $\Pi(x)$ везде однозначно, а из части 1 — то, что оно полунепрерывно сверху. Тогда по определению А.31 для любой сходящейся в множестве X последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$ и для любой последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, такой, что $y_n = \Pi(x_n)$ для всех натуральных n, последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, такую, что $\{y_{n_k}\} \to y = \Pi(x)$. Если соответствие $\Pi(x)$ однозначно, отсюда следует его непрерывность в точке x (см. факт А.9). ■

Очевидно, что это утверждение может быть обобщено и для задач минимизации (с заменой квазивогнутости на квазивыпуклость) с помощью применения теоремы А.16 к функции $-f$.

Следующая широко известная важная теорема демонстрирует важность выпуклости значений соответствия.

Теорема А.18. Теорема Какутани о неподвижной точке. *Рассмотрим непустое, компактное и выпуклое множество $X \subset \mathbb{R}^K$ (где $K \in \mathbb{N}$) и соответствие $F\colon X \rightrightarrows X$, которое принимает непустые выпуклые значения и полунепрерывно сверху. Тогда соответствие F имеет* неподвижную точку, *то есть существует $x^* \in X$, такое, что $x^* \in F(x^*)$.*

Доказательство этой теоремы может быть найдено в книгах: [Berge 1963; Aliprantis, Border 1999; Ok 2007]. В упражнении A.22 показано, что предположение о выпуклости значений существенно, а в упражнении A.23 демонстрируется использование теоремы A.18 для доказательства существования равновесия по Нэшу в чистых стратегиях в игре в нормальной форме.

Несмотря на то что иногда первым шагом доказательства теоремы Какутани является доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке, теорема Брауэра является простым следствием теоремы A.18.

Теорема A.19. Теорема Брауэра о неподвижной точке. *Рассмотрим не пустое, компактное и выпуклое множество* $X \subset \mathbb{R}^K$ *(где* $K \in \mathbb{N}$*) и непрерывное отображение*

$$\phi : X \to X.$$

Тогда отображение ϕ *имеет* неподвижную точку, *то есть существует* $x^* \in X$, *такое, что* $x^* = \phi(x^*)$.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы A.18 и части 3 теоремы A.17, в которой утверждается, что непрерывное отображение является полунепрерывным сверху соответствием, принимающим не пустые и выпуклые значения. ■

A.8. Дифференциальное исчисление, ряд Тейлора и теорема Лагранжа о среднем значении

В этом и следующем параграфах мы кратко остановимся на понятии дифференцирования и некоторых важных результатах, связанных с ним, которые используются в основной части книги. Читатель должен быть знаком с материалом, представленным в этом параграфе, поэтому обзор в нем будет более кратким, чем в других параграфах этого приложения. В этом параграфе мы будем исследовать вещественнозначные функции одной переменной $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Следующий параграф посвящен функциям нескольких переменных и векторнозначным функциям.

Напомним, что производная (функция) функции f определяется следующим образом. Рассмотрим точку $x \in X'$ в открытом множестве X', лежащем в области определения функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда, если следующий предел существует (и конечен), производная функции f в точке x равна:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{A.5}$$

Нетрудно понять, что при достаточно малом h слагаемое $f(x + h)$ определено, так как точка x лежит в открытом множестве X'. Более того, предел в точке x существует, только если функция f непрерывна в точке $x \in X'$.

В целом это свойство состоит в том, что из дифференцируемости функции в точке следует ее непрерывность в этой точке (см. факт А.22). Используя элементарные свойства предела функции, мы можем привести уравнение (А.5) к следующему виду:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-L(x)h}{h}=0, \tag{А.6}$$

где $L(x)=f'(x)$. Такая запись подразумевает, что мы можем рассматривать производную функции $f(x)$ в точке x $f'(x)$ как *линейный оператор* в касательном пространстве. На самом деле производная $f'(x)$ может быть определена как *линейный оператор* (x), который удовлетворяет уравнению (А.6). Заметим, что оператор $f'(x)$ линеен по приращению h, а не по x. В общем случае производная функция не будет линейной по x, но она задает линейную функцию из множества X' (открытом подмножестве области определения функции $f(X)$ в вещественную прямую $\mathbb{R}$, которая каждому значению h, такому, что $x + h \in X'$ ставит в соответствие значение $f'(x)h$. Такой подход к определению производной в особенности будет полезен в следующем параграфе.

Определение А.37. *Будем говорить, что функция* $f(x)$ дифференцируема *в точке x, если в ней существует предел $f'(x)$. Если $f'(x)$ существует во всех точках $x \in X''$ некоторого множества $X'' \subset X$, то функция $f(x)$* дифференцируема *на всем множестве X''. Если, в дополнение, функция $f'(x)$ является непрерывной функцией от x на множестве X'', то будем называть функцию $f(x)$* непрерывно дифференцируемой.

Если множество X' замкнуто, то определим понятие дифференцируемости и непрерывной дифференцируемости функции $f(x)$ на множестве X' следующим образом: $f(x)$ дифференцируема или непрерывно дифференцируема на внутренности множества X' и производная функция $f'(x)$ может быть *продолжена* (или непрерывно продолжена) на границу множества X'. Несколько более сильное требование, из которого следует дифференцируемость (непрерывная дифференцируемость) $f(x)$ на множестве X' состоит в том, что существует открытое множество $X'' \supset X'$, такое, что функция $f(x)$ дифференцируема (непрерывно дифференцируема) на множестве X''. Если функция $f(x)$ не дифференцируема в точке x (то есть предел $f'(x)$ не существует), то она может обладать *односторонней производной*, например левой или правой. Эти производные определяются следующим образом:

$$f^-(x)=\lim_{h\uparrow 0}\left[f(x+h)-f(x)\right]/h \text{ и } f^+(x)=\lim_{h\downarrow 0}\left[f(x+h)-f(x)\right]/h.$$

Эти пределы могут существовать даже когда предел (А.5) не существует. Односторонние производные используются во втором варианте доказательства теоремы 6.6 из главы 6. В следующем примере показана простая функция, обладающая левой и правой производной, но не являющаяся дифференцируемой функцией.

Пример А.13. Определим функцию $f(x)$ следующим образом: $f(x) = x$ при $x \geq 0$ и $f(x) = -x$ при $x < 0$. Тогда $f(x)$ имеет правую и левую производную в точке $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке. ■

Дифференцируемость функции является более строгим требованием, чем непрерывность.

Факт А.22. *Рассмотрим множество $X \subset \mathbb{R}$ и вещественнозначную функцию $f: X \to \mathbb{R}$ на нем. Если она дифференцируема в точке $x \in X$, то она также непрерывна в этой точке.*

Доказательство. См. упражнение А.24. ■

Заметим также, что из дифференцируемости функции на некотором множестве X' не следует ее непрерывная дифференцируемость на этом множестве. Такая ситуация показана в следующем примере.

Пример А.14. Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную следующим образом: $f(x) = x^2\sin(1/x)$ при всех $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Нетрудно убедиться, что $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$, ее производная равна $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ при $x \neq 0$ и $f'(0) = 0$. Однако производная $f'(x)$ разрывна в точке $x = 0$: $\lim_{x \downarrow 0} f'(x) \neq 0$. ■

Производные более высокого порядка определяются аналогичным образом. Рассмотрим вещественнозначную функцию $f(x)$ и предположим, что она имеет непрерывную производную $f'(x)$. Зафиксируем некоторое множество X', на котором определена производная $f'(X')$ и зададим на нем вторую производную функции $f(x)$, которую будем обозначать как $f''(x)$, следующим образом:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Производные следующих порядков определяются таким же способом. Если вещественнозначная функция $f(x)$ имеет первые n непрерывных производных на некотором множестве X', то мы будем говорить, что она принадлежит классу C^n на множестве X'. Если функция $f(x)$ принадлежит классу C^1, то мы будем называть ее непрерывно дифференцируемой функцией. Бесконечно дифференцируемые функции класса C^∞ имеют непрерывные производные всех порядков (которые могут быть константой, как, например, в случае, если функция $f(x)$ — многочлен).

Следующее простое утверждение связывает первую и вторую производные с вогнутостью функции (эквивалентный результат имеет место и для выпуклых функций).

Факт А.23. *Рассмотрим множество $X \subset \mathbb{R}$ и дифференцируемую на нем функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$. Тогда*

1. *Функция $f(x)$ вогнута на множестве X тогда и только тогда, когда для всех $x \in X$, $y \in X$ имеет место неравенство*

$$f(y) - f(x) \le f'(x)(y - x). \tag{A.7}$$

2. *Функция $f(x)$ вогнута на множестве X тогда и только тогда, когда производная $f'(x)$ не возрастает по x на всем множестве X.*
3. *Кроме того, если функция $f(x)$ дважды дифференцируема, то $f(x)$ вогнута на множестве X тогда и только тогда, когда $f''(x) \le 0$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. (Часть 1) Допустим, что функция $f(x)$ вогнута, и без ограничения общности предположим, что $y > x$. Тогда $f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \ge \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x)$ для всех $\lambda \in (0, 1)$. Преобразуем это неравенство к следующему виду:

$$f(y)-f(x) \le \frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda(y-x)}(y-x).$$

Положим $\varepsilon = \lambda(y - x)$ и заметим, что это неравенство верно для всех $\lambda \in (0, 1)$ и, следовательно, для всех $\varepsilon \ge 0$ в некоторой окрестности нуля. Тогда получаем неравенство

$$f(y)-f(x) \le \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}(y-x) \le$$
$$\le f'(x)(y-x),$$

где второе неравенство следует из перехода к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$ и использования того, что из дифференцируемости функции $f(x)$ следует, что этот предел определяет значение $f'(x)$ единственным образом.

С другой стороны, предположим, что верно неравенство (А.7). Тогда для любого вещественного $\lambda \in (0, 1)$ имеем неравенства

$$f(y) - f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \le (1 - \lambda)f'(\lambda y + (1 - \lambda)x)(y - x)$$

и

$$f(x) - f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \le -\lambda f'(\lambda y + (1 - \lambda)x)(y - x).$$

Умножая первое неравенство на λ, второе — на $(1 - \lambda)$ и складывая их, получаем, что для всех $\lambda \in (0, 1)$

$$f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \ge \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x).$$

(Часть 2) Предположим, что функция $f(x)$ вогнута (или, что эквивалентно, выполняется неравенство (А.7)). Тогда для всех $y > x$ получаем неравенство

$$f'(x) \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq f'(y),$$

где последнее неравенство следует из предположения о том, что $x-y<0$.

С другой стороны, если $y > x$ и $f'(x) < f'(y)$, то из предыдущей цепочки неравенств следует, что $f'(x)(y-x) < f(y) - f(x)$ или $f'(y) \times (x-y) > f(x) - f(y)$, что противоречит неравенству (А.7).

(Часть 3) Для дважды дифференцируемой функции $f(x)$ это утверждение непосредственно следует из части 2. ■

Следующие три теоремы очень часто используются в различных экономических задачах. Первая из них является обобщением теоремы о промежуточном значении (теорема А.3) для дифференцируемых функций.

Теорема А.20 (теорема Лагранжа о среднем значении). *Рассмотрим непрерывно дифференцируемую на отрезке $[a, b]$ (где $b > a$) вещественнозначную функцию $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда существует $x^* \in [a, b]$, такое, что*

$$f'(x^*) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Более того, если $f'(a) \neq f'(b)$, то для любого числа c, лежащего между $f'(a)$ и $f'(b)$, существует x^{**}, такое, что $f'(x^{**}) = c$.

Доказательство. См. упражнение А.25. ■

Наибольшие трудности при вычислении пределов функций возникают для пределов вида $\lim\limits_{x\to x^*} f(x)/g(x)$, где непрерывные вещественнозначные функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к нулю при $x \to x^*$. Следующая теорема, которую называют правилом Лопиталя, описывает один из способов вычисления таких пределов.

Теорема А.21. *Рассмотрим две дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ вещественнозначные функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ и $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Допустим, что $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$, и зафиксируем некоторое $c \in (a, b)$. Если предел функции*

$$\lim_{x\uparrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

существует и

$$\lim_{x\uparrow c} f(x) = \lim_{x\uparrow c} g(x) = 0 \text{ или } \lim_{x\uparrow c} f(x) = \lim_{x\uparrow c} g(x) = \infty,$$

то

$$\lim_{x\uparrow c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\uparrow c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогичное утверждение верно и для предела при $x \downarrow c$.

Доказательство. См. упражнение А.26. ■

Последней теоремой в данном параграфе является теорема Тейлора, описывающая аппроксимацию дифференцируемых вещественнозначных функций с помощью ряда Тейлора. Далее обозначим n-тую производную вещественнозначной функции $f(x)$ как $f^{(n)}(x)$ (то есть $f'(x) = f^{(1)}(x)$ и так далее).

Теорема А.22 (Теорема Тейлора I). *Рассмотрим вещественнозначную функцию* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, *лежащую в классе* C^{n-1}. *Допустим, что ее* n*-тая производная* $f^{(n)}(x)$ *существует во всех точках* $x \in (a, b)$. *Тогда для всех* x *и всех* $y \neq x$ *на отрезке* $[a, b]$ *существует вещественное число* z, *лежащее между* x *и* y, *такое, что*

$$f(y) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(y-x)^n.$$

Доказательство. Без ограничения общности допустим, что $y > x$. Для доказательства теоремы требуется показать, что существует $z \in (x, y)$, такое, что

$$f^{(n)}(z) = n!(y-x)^{-n}\left(f(y) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k\right).$$

Положим

$$g(t) = f(t) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k - \\ -\frac{(t-x)^n}{(y-x)^n}\left(f(y) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k\right).$$

Очевидно, что функция $g(t)$ дифференцируема n раз. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что существует $z \in (x, y)$, такое, что $g^{(n)}(z) = 0$. Нетрудно убедиться, что $g^{(k)}(x) = 0$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и что $g(x) = g(y) = 0$. Тогда из теоремы Лагранжа о среднем значении (теорема А.20) следует, что существует некоторое $z_1 \in (x, y)$, такое, что $g^{(1)}(z_1) = 0$. Так как $g^{(1)}(x) = g^{(1)}(z_1) = 0$, теперь из теоремы А.20 следует, что существует $z_2 \in (x, z_2)$, такое, что $g^{(2)}(z_2) = 0$. Повторяя такие рассуждения еще $n - 2$ раза, приходим к заключению о том, что существует $z \in (x, y)$, такое, что $g^{(n)}(z_1) = 0$. ■

Следствие А.3

1. *Рассмотрим вещественнозначную функцию f: $[a, b] \to \mathbb{R}$, лежащую в классе C^n. Тогда*

$$f(y) = f(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k + o(|y-x|^n)$$

где напомним, что $o(k)/k \to 0$ при $k \to 0$.

2. *Допустим, что вещественнозначная функция f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ лежит в классе C^n и предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k$ существует. Тогда*

$$f(y) = f(x) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k.$$

Доказательство. См. упражнение А.27. ■

Следствие А.4. *Рассмотрим дважды дифференцируемую вогнутую вещественнозначную функцию f: $[a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда для всех $x \in [a, b]$, $y \in [a, b]$ выполняется неравенство $f(y) \le f(x) + f'(x)(y - x)$.*

Доказательство. Из теоремы А.22 следует, что $f(y) = f(x) + f'(x) \times (y - x) + f''(z)(y - x)^2/2$ при некотором z, лежащем между x и y. Из факта А.23 и вогнутости функции $f(x)$ следует, что $f''(z) \le 0$, откуда вытекает утверждение следствия. ■

А.9. Функции нескольких переменных и теоремы об обратной и о неявной функциях

В этом параграфе мы ограничимся анализом в евклидовых пространствах, то есть будем рассматривать отображения вида

$$\phi: X \to Y,$$

где $X \in \mathbb{R}^{K_X}$, $Y \in \mathbb{R}^{K_Y}$ и $K_X \in \mathbb{N}$, $K_Y \in \mathbb{N}$. Далее в тексте в том случае, когда это необходимо сделать из контекста, мы будем называть такие отображения *векторными* функциями или *векторнозначными* функциями на множестве $X \in \mathbb{R}^{K_X}$, так как $\phi(x) \in \mathbb{R}^{K_Y}$ (для $x \in X$).

Теория дифференциального исчисления и представленные далее теоремы могут быть выведены в более общем, чем для еклидовых пространств, случае. Например, в классической книге по общей теории динамической оптимизации [Luenberger 1969] пространства X и Y являются банаховыми пространствами (полными нормированными векторными пространствами, в которых естественным образом вводится понятие *линейного оператора*, см. параграф А.10). Однако для результатов, представленных здесь, предположение о конечномерности пространств X и Y не ограничивает общность и позволяет сократить доказательства и избежать их ненужных усложнений.

Случай $K_X = K_Y = 1$ рассмотрен в предыдущем параграфе. Основываясь на результатах и интуиции, представленных в нем, перейдем к более общим отображениям. Для отображения ϕ: $X \to Y$ (где $X \in \mathbb{R}^{K_X}$, $Y \in \mathbb{R}^{K_Y}$) эквивалентом понятия производной будет линейный оператор $J(X)$: $X \to Y$. В частности, по аналогии с условием (А.6), сформулируем следующее определение дифференцируемости[4]. Рассмотрим вектор $h \in X$ и обозначим его евклидову норму как $\|h\|$. Тогда для любого вектора $x \in X'$, где множество X' открыто в пространстве X и образ $\phi(X') \subset Y$ определен, отображение ϕ дифференцируемо, если предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| \phi(x+h) - \phi(x) - J(x)h \|}{\| h \|} = 0 \tag{А.8}$$

существует и равен нулю. Тогда он единственным образом задает линейный оператор $J(x)$ (отображение из $\mathbb{R}^{K_X}$ в $\mathbb{R}^{K_Y}$). В этом случае оператор $J(x)$ называют производной отображения ϕ. Как и ранее, производная является линейным оператором, потому что каждому вектору h в пространстве $\mathbb{R}^{K_X}$, такому, что $x + h \in X'$ он сопоставляет вектор $J(x)h$ в пространстве $\mathbb{R}^{K_Y}$.

Мы будем называть оператор $J(x)$ *матрицей Якоби* (или просто *якобианом*) отображения ϕ в точке x и часто обозначать его как $D\phi(x)$. Такое обозначение более удобно, чем $J(x)$, так как в нем указывается о производной какой функции идет речь. Далее мы увидим, что якобиан, в том случае, когда он существует, является матрицей, состоящей из частных производных отображения ϕ. Мы также будем обозначать матрицу частных производных отображения ϕ как $D_{x_1}\phi(x_1, x_2)$ при $x_1 \in \mathbb{R}^{K_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{K_2}$ и $K_1 \in \mathbb{N}$, $K_2 \in \mathbb{N}$.

[4] Более точно, это определение *дифференцируемости по Фреше*. Другим, более слабым, понятием является понятие *дифференцируемости по Гато*, которое также используется в различных приложениях (см., например, учебник [Luenberger 1969]). В наших целях необходимость различать эти два понятия производной отсутствует, так как в конечномерных пространствах они эквивалентны.

Факт А.24. *Рассмотрим множества $X \subset \mathbb{R}^{K_X}$, $Y \subset \mathbb{R}^{K_Y}$ (где $K_X \in \mathbb{N}$, $K_Y \in \mathbb{N}$) и отображение ϕ: $X \to Y$. Если отображение ϕ дифференцируемо в точке $x \in X$, то оно также непрерывно в этой точке.*

Рассмотрим множество $X \subset \mathbb{R}^{K_X}$ и отображение ϕ: $X \to \mathbb{R}$, которое мы будем называть *функцией нескольких переменных*. Ее частные производные по каждому аргументу в пространстве X определяются как производные вещественнозначной функции одной переменной (рассматривая все остальные переменные как константы). Положим $x = (x_1, \ldots, x_{K_X})$ и предположим, что функция ϕ дифференцируема по k-му элементу вектора x. Тогда k-ая частная производная отображения ϕ определяется следующим образом:

$$\frac{\partial\phi(x_1, \ldots, x_{K_X})}{\partial x_k} = \phi_k(x),$$

где

$$\phi_k(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\phi(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \ldots, x_{K_X})}{h} - \right.$$
$$\left. - \frac{\phi(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{K_X})}{h}\right].$$

Далее, если отображение ϕ имеет частные производные по всем аргументам x_k при $k = 1, \ldots, K_X$, то его якобиан в этом случае является вектором-строкой

$$J(x) = \left(\phi_1(x), \ldots, \phi_{K_X}(x)\right).$$

В общем случае мы можем рассматривать отображение ϕ: $X \to Y$, где множество $Y \subset \mathbb{R}^{K_Y}$ лежит в многомерном евклидовом пространстве, как состоящее из K_Y вещественнозначных функций нескольких переменных $\phi^1(x), \ldots, \phi^{K_Y}(x)$. Мы можем определить частные производные каждой из этих функций аналогичным образом и обозначить их как $\phi_k^j(x)$. Тогда якобиан отображения ϕ имеет следующий вид:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \phi_1^1(x) & \cdots & \phi_{K_X}^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{K_Y}(x) & \cdots & \phi_{K_X}^{K_Y}(x) \end{pmatrix}.$$

Производные более высоких порядков могут быть определены аналогичным образом. Якобиан отображения ϕ: $X \to X$ $J(x)$ является квадратной матрицей размера $K_X \times K_X$, и в этом случае мы можем задать себе вопрос о том, будет ли она обратима (существует ли в точке x обратное отображение $J^{-1}(x)$). Это свойство играет важную роль в теореме об обратной функции и в теореме о неявной функции, которые мы рассмотрим далее.

Если матрица частных производных отображения ϕ существует, то мы называем ее якобианом отображения, но из ее существования в общем случае не следует дифференцируемость отображения ϕ. В следующем примере показано подобное отображение.

Пример А.15. Рассмотрим функцию нескольких переменных $\phi(x_1, x_2)$, заданную на всей вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$ следующим образом: $\phi(x_1, x_2) = 0$, если $x_1 = x_2 = 0$, и

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{(x_1 + x_2)^2}$$

в противном случае. Частные производные этой функции равны:

$$\frac{\partial\phi(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2^3}{(x_1 + x_2)^2}$$

и

$$\frac{\partial\phi(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{x_1^2 x_2^2 + 2x_1^3 x_2}{(x_1 + x_2)^2}.$$

Нетрудно убедиться, что частные производные функции ϕ определены везде в $\mathbb{R}^2$ и, в частности, $\partial\phi(0, 0)/\partial x_1 = \partial\phi(0, 0)/\partial x_2 = 0$. Однако также нетрудно заметить, что функция ϕ разрывна в точке $x_1 = x_2 = 0$ (положим $x = x_1 = x_2$ и вычислим предел функции при $x \to 0$ с помощью правила Лопиталя: $\lim_{x\to 0}\phi(x, x) = 2$). Тогда из факта А.24 следует, что функция ϕ не дифференцируема в нуле. В этом можно также убедиться напрямую из определения дифференцируемости выше и анализа соответствующего предела. ■

Ситуация, описанная в примере А.15, достаточно важна, потому что в нем показано, что существование у отображения определенной матрицы частных производных не гарантирует его дифференцируемость. Поэтому в общем случае мы вынуждены провести различия между линейным оператором $J(x)$, определенным выше, и якобианом отображения $D\phi(x)$, состоящим из частных производных отображения ϕ. Несмотря на это, в данной книге необходимость проводить такое различие отсутствует и далее мы будем везде обозначать якобиан отображения ϕ как $D\phi(x)$ (то есть как матрицу его частных производных).

Непрерывная дифференцируемость определяется аналогичным для одномерного случая способом.

Определение А.38. *Отображение ϕ: $X \to Y$ лежит в классе C^n (n раз непрерывно дифференцируемых отображений) на некотором множестве $X' \subset X$, если оно имеет n непрерывных производных.*

Факт А.25. *Отображение ϕ: $X \to Y$, где $X \subset \mathbb{R}^{K_X}$, $Y \subset \mathbb{R}^{K_Y}$ (где $K_X \in \mathbb{N}$, $K_Y \in \mathbb{N}$) и множество X открыто в $\mathbb{R}^{K_X}$, лежит в классе C^1, если его частные производные $\phi_k^j(x)$ при $k = 1, ..., K_X$ и $j = 1, ..., K_Y$ существуют и являются непрерывными функциями x для всех $x \in X$.*

В случае когда значительный уровень общности анализа отсутствует, мы будем требовать, чтобы все функции полезности и производственные функции в задаче были непрерывно дифференцируемы (лежали в классе C^1) или даже будем накладывать более жесткое ограничение о том, чтобы они были дважды дифференцируемы.

Теорема Тейлора и следствия из нее могут быть обобщены для случая отображений в многомерных пространствах. Мы приведем теорему для случая вещественнозначной функции нескольких переменных ϕ: $X \to \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}^{K_X}$. Обозначим вектор первых производных и якобиан отображения ϕ как $D\phi$ и $D^2\phi$ соответственно, евклидову норму K_X-мерного вектора $y - x$ как $\|y - x\|$, а вектор, транспонированный к вектору z, как z^T. Далее приведен простой вариант теоремы Тейлора для функции нескольких переменных, аналогичный следствию А.3. Мы не будем приводить ее доказательство, так как оно схоже с доказательством теоремы А.22.

Теорема А.23. Теорема Тейлора II. *Допустим, что функция ϕ: $X \to \mathbb{R}$ лежит в классе C^1 и имеет вторую производную $D^2\phi(x)$ во всех точках $x \in X$. Тогда для всех точек x и $y \neq x$, лежащих в множестве X:*

$$\phi(y) = \phi(x) + D\phi(x)^T(y - x) + o(\|y - x\|).$$

Кроме того, если функция ϕ: $X \to \mathbb{R}$ лежит в классе C^2 и имеет третью производную $D^3\phi(x)$ во всех точках $x \in X$, то

$$\phi(y) = \phi(x) + D\phi(x)^T(y - x) + (y - x)^T D^2\phi(x)(y - x) + o(\|y - x\|^2). \blacksquare$$

Следующие две теоремы лежат в основе большинства результатов по сравнительной статике в экономике. Поэтому они являются одними из наиболее важных математических утверждений, используемых в экономическом анализе. Рассмотрим отображение ϕ: $X \to X$, определенное на множестве $X \subset \mathbb{R}^{K_X}$. Зачастую одним из основных вопросов анализа является существование обратного отображения $\phi^{-1}: X \to X$. Если соответствие ϕ на некотором подмножестве $X' \subset X$ однозначно и имеет обратное отображение ϕ^{-1} (которое также однозначно), то мы будем называть его *взаимно однозначным соответствием.*

Теорема А.24. Теорема об обратной функции. *Рассмотрим отображение $\phi: X \to X$, где $X \subset \mathbb{R}^{K_X}$, лежащее в классе C^1. Допустим, что якобиан отображения ϕ $J(x)$ обратим в некоторой внутренней точке множества $X x^*$. Тогда существуют открытые в пространстве X множества X' и X'', такие, что $x^* \in X'$, $\phi(x^*) \in X''$, и отображение ϕ является взаимно однозначным соответствием между множествами X' и $X'' = \phi(X')$. Более того, $\phi^{-1}(\phi(x)) = x$ для всех $x \in X'$ и отображение ϕ^{-1} также лежит в классе C^1.*

Доказательство теоремы об обратной функции может быть найдено в любом учебнике по вещественному математическому анализу, и мы не приводим его здесь в целях экономии.

Теорема А.25. Теорема о неявной функции. *Рассмотрим отображение ϕ: $X \to Y$, где $X \subset \mathbb{R}^{K_X}$, $Y \subset \mathbb{R}^{K_Y}$ (где $K_X \in \mathbb{N}$, $K_Y \in \mathbb{N}$), лежащее в классе C^1. Пусть для некоторой точки $(x^*, y^*) \in X \times Y$; $\phi(x^*, y^*) = 0$, все элементы якобиана отображения ϕ $D_{(x,y)}\phi(x^*, y^*)$ по (x, y) конечны в этой точке и линейный оператор $D_y\phi(x^*, y^*)$ обратим. Тогда существует открытое множество $X' \subset X$, содержащее точку x^* и единственное отображение, лежащее в классе C^1 γ: $X' \to Y$, такое, что $\gamma(x^*) = y^*$ и*

$$\phi(x, \gamma(x)) = 0 \tag{A.9}$$

для всех $x \in X'$. ■

Эта теорема называется теоремой о неявной функции, потому что отображение γ в ней задается неявным образом. Доказательство этой теоремы в одном частном случае содержится в упражнении 6.5 из главы 6. В общем случае доказательство теоремы может быть сделано с помощью метода, использованного в этом упражнении. Другой способ доказательства опирается на теорему об обратной функции. В силу того что первый способ доказательства уже описан ранее, а второй содержится в большинстве учебников по вещественному математическому анализу, мы не будем приводить доказательства здесь.

Основная польза теоремы о неявной функции состоит в том, что, так как отображения ϕ и γ лежат в классе C^1 и равенство (А.9) выполняется в некоторой окрестности точки x^*, его можно продифференцировать по x и определить, каким образом ведет себя решение системы уравнений $\phi(x, y) = 0$ y как функция от переменной x. Если мы будем рассматривать вектор x как некоторый набор параметров, а вектор y — как набор некоторых эндогенных экономических переменных, динамика которых задается системой уравнений (А.9), то такая процедура позволяет выяснить, каким образом эндогенные переменные реагируют на изменения структуры экономики, описываемой набором параметров x. В основной части книги мы неоднократно пользовались этим методом.

А.10. Теоремы об отделимости*

В этом параграфе мы кратко остановимся на отделении выпуклых непересекающихся множеств с помощью линейных функционалов (или гиперплоскостей). Такие утверждения лежат в основе второй теоремы экономики благосостояния (теорема 5.7). Они также формируют базу для доказательства многих важных результатов в теории оптимизации с ограничениями (см. параграф А.11).

В этом параграфе пространство X будет *векторным пространством* (линейным пространством). Напомним, что в линейном пространстве для всех $x \in X$, $y \in X$ и для любого вещественного $\lambda \in \mathbb{R}$ $x + y \in X$ и $\lambda x \in X$ (см. параграф А.7). Элемент пространства X, обладающий свойством $\lambda x = x$ для всех вещественных $\lambda \in \mathbb{R}$ называется нулевым вектором, и мы будем обозначать его как θ.

Определение А.39. *Вещественнозначная неотрицательная функция* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ *называется* нормой *в векторном пространстве X, если для всех $x \in X$, $y \in X$ и для любого вещественного $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняются следующие условия*:

1) *(неотрицательность)* $\|x\| \geq 0$ *и* $\|x\| = 0$, *если и только если* $x = \theta$;
2) *(линейность)* $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, *и*
3) *(неравенство треугольника)* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Векторное пространство, наделенное нормой, называется нормированным векторным пространством. *Полное нормированное пространство называется* банаховым пространством. ■

Функция $p : X \to \mathbb{R}_+$, которая удовлетворяет требованию неотрицательности и неравенству треугольника, но не удовлетворяет условию линейности, называется *полунормой* в векторном пространстве.

Многие метрические пространства, перечисленные в примере А.1, также являются нормированными векторными пространствами с подходящим образом заданной на них нормой. На самом деле наиболее простым способом задания нормы во многих случаях является использование функции расстояния d до нулевого вектора θ : $\|x\| = d(x, \theta)$. Заметим, однако, что такой способ работает не всегда, так как метрика не всегда удовлетворяет условию линейности из определения А.39.

Пример А.16. Первые четыре пространства являются нормированными векторными пространствами, пятое пространство не является таковым.

1. В любом множестве $X \subset \mathbb{R}^K$ обозначим i-ую компоненту вектора $x \in X$ как x_i. Тогда K-мерное евклидово пространство является нормированным векторным пространством с нормой, заданной как $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{K} |x_i|^2\right)^{1/2}$.

2. Рассмотрим множество $X \subset \mathbb{R}^K$ и пространство непрерывных ограниченных вещественнозначных функций на нем $\mathbf{C}(X)$. Тогда пространство $\mathbf{C}(X)$ является нормированным векторным пространством с нормой, заданной как $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.
3. Множество $\ell \subset \mathbb{R}^\infty$ является нормированным векторным пространством с нормами $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$ при $1 \le p < \infty$ и $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$. Такое нормированное векторное пространство называется пространством ℓ_p для всех $p \in [1, \infty]$. Наибольший интерес для нас представляет пространство ℓ_∞.
4. Рассмотрим множество $\mathbf{c} \subset \mathbb{R}^\infty$, состоящее из всех бесконечных последовательностей вещественных чисел, все элементы которых равны нулю, начиная с некоторого места (то есть последовательностей вида $(x_1, ..., x_M, 0, 0, ...)$, где $M \in \mathbb{N}$). Зададим на множестве $\mathbf{c}$ норму равномерной сходимости $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$. Тогда пространство $\mathbf{c}$ является нормированным векторным пространством.
5. Рассмотрим не пустое множество X и дискретную метрику на нем $d(x, y) = 1$, если $x \ne y$ и $d(x, y) = 0$, если $x = y$. Тогда метрическое пространство (X, d) не является нормированным векторным пространством. ■

Если существование нормы в пространстве X подразумевается неявным образом, то мы будем называть такое пространство нормированным векторным пространством.

Определение А.40. *Рассмотрим нормированное векторное пространство X. Тогда назовем функцию ϕ: $X \to \mathbb{R}$* линейным функционалом *на пространстве X, если для всех $x \in X$, $y \in X$ и для всех вещественных чисел $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\mu \in \mathbb{R}$*

$$\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\phi(x) + \mu\phi(y).$$

Линейные функционалы в нормированных векторных пространствах обладают рядом хороших свойств. Например, если пространство $X \subset \mathbb{R}^K$ конечномерно, то любой линейный функционал в нем может быть представлен как *скалярное произведение* вектора x и другого K-мерного вектора η, то есть

$$\phi(x) = \eta \cdot x = \sum_{i=1}^{K} \eta_i x_i,$$

где $\eta = (\eta_1, ..., \eta_K) \in \mathbb{R}^K$. Следовательно, в евклидовых пространствах линейные функционалы соответствуют скалярному произведению. Некоторые важные свойства линейных функционалов приведены в следующей теореме.

Теорема А.26. О непрерывности линейного функционала. *Рассмотрим нормированное векторное пространство X. Тогда*

1) *линейный функционал ϕ: $X \to \mathbb{R}$ непрерывен в пространстве X тогда и только тогда, когда он непрерывен в нулевом векторе Θ, и*

2) *линейный функционал ϕ: $X \to \mathbb{R}$ непрерывен в пространстве X тогда и только тогда, когда он ограничен в том смысле, что существует вещественное $M \in \mathbb{R}$, такое, что $|\phi(x)| \le M\|x\|$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. (Часть 1) Нам необходимо доказать утверждение лишь в одну сторону (если линейный функционал ϕ непрерывен в нулевом векторе θ, то он непрерывен на всем пространстве X). Рассмотрим произвольный вектор $x \in X$ и сходящуюся к нему последовательность $\{x_n\}$ в пространстве X. Из линейности функционала ϕ следует, что

$$|\phi(x_n) - \phi(x)| = |\phi(x_n - x + \theta) - \phi(\theta)|.$$

Из того, что $x_n \to x$, следует, что $x_n - x + \theta \to \theta$, и, так как функционал ϕ непрерывен в точке θ, мы имеем предел $\phi(x_n - x + \theta) \to \phi(\theta)$. Таким образом, $|\phi(x_n) - \phi(x)| \to 0$, откуда вытекает непрерывность функционала ϕ в произвольной точке $x \in X$.

(Часть 2) Для доказательства прямого утверждения предположим, что функционал ϕ ограничен. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к нулевому вектору θ. Так как $\phi(x_n) \le M\|x_n\|$ и $x_n \to \theta$, имеем $|\phi(x_n)| \to 0$, откуда следует непрерывность функционала ϕ в точке θ. Тогда из части 1 следует, что функционал ϕ непрерывен на всем пространстве X.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что функционал ϕ непрерывен в точке θ. Зафиксируем вещественное $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta > 0$, такое, что для всех $x \le \delta$ $|\phi(x_n)| \le \varepsilon$. Заметим, что для всех $x \ne 0$ норма вектора $\delta x/\|x\|$ равна δ. Следовательно,

$$|\phi(x)| = \left|\phi\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right)\right| \cdot \frac{\|x\|}{\delta} \le \varepsilon \cdot \frac{\|x\|}{\delta} = M\|x\|,$$

где $M = \varepsilon/\delta$, что завершает доказательство теоремы. ■

Наименьшее значение M, которое удовлетворяет неравенству $|\phi(x)| \le M\|x\|$ для всех $x \in X$, называется нормой линейного функционала ϕ и обозначается как $\|\phi\|$. Таким образом, в теореме А.26 утверждается, что непрерывный линейный функционал имеет конечную норму.

Определение А.41. *Рассмотрим нормированное векторное пространство X. Тогда нормированное пространство всех непрерывных линейных функционалов на пространстве X называется* сопряженным пространством *и обозначается как X^*.*

У сопряженных пространств есть ряд интересных свойств.

Факт А.26. *Рассмотрим нормированное векторное пространство X. Тогда сопряженное пространство X^* является банаховым пространством.*

В следующем примере описаны пространства, сопряженные с некоторыми часто используемыми нормируемыми пространствами.

Пример А.17.

1. Для любого $K \in \mathbb{N}$ пространство $\mathbb{R}^K$ сопряжено с самим собой, то есть $\mathbb{R}^{K*} = \mathbb{R}^K$.
2. Для любого $p \in (1, \infty)$ пространство ℓ_q, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, сопряжено с пространством ℓ_p, $\ell_p^* = \ell_q$. ■

Следующий факт менее очевиден. Рассмотрим пространство

$$\mathbf{c} = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}.$$

Факт А.27

1. *Пространство ℓ_1 не является пространством, сопряженным с пространством ℓ_∞ (оно содержится в нем), $\ell_\infty^* \supset \ell_1$.*
2. *Пространство ℓ_1 сопряжено с пространством $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}^* = \ell_1$.*

Сопряженные пространства часто используются в экономических приложениях. В частности, если пространство X является множеством товаров, то сопряженное пространство X^* будет пространством «ценовых функционалов» на нем. Например, как мы отметили ранее, для пространства $X \subset \mathbb{R}^K$ сопряженное пространство $X^* \subset \mathbb{R}^K$ действительно состоит из функционалов вида $\phi(x) = \sum_{i=1}^{K} \eta_i x_i$. В некотором смысле мы можем интерпретировать элементы вектора η как цены вектора товаров x, и тогда значение функционала ϕ равно стоимости вектора x при ценах η. Важность такого построения в экономическом анализе вытекает из следующей широко известной теоремы. Назовем линейный функционал в нормированном векторном пространстве X *нетривиальным,* если он не равен тождественно нулю при всех $x \in X$.

Теорема А.27. Геометрическая теорема Хана—Банаха. *Рассмотрим нормированное векторное пространство X и множества $X^1 \subset X$, $X^2 \subset X$ в нем. Допустим, что множества X^1 и X^2 выпуклы, $\operatorname{Int}(X^1) \neq \varnothing$ и $X^2 \cap \operatorname{Int}(X^1) = \varnothing$. Тогда на пространстве X существует нетривиальный непрерывный линейный функционал ϕ, такой, что*

$$\phi(x^1) \le c \le \phi(x^2)$$

при всех $x^1 \in X^1$, $x^2 \in X^2$ и некотором вещественном $c \in \mathbb{R}$.

Эта теорема следует из теоремы Хана—Банаха. В последней утверждается то, что если линейный функционал ϕ непрерывен на множестве $M \subset X$ в нормированном векторном пространстве X и ограничен на нем некоторой полунормой $p(x)$ (то есть $\phi(x) \leq p(x)$ для всех $x \in M$), то на пространстве X существует линейный непрерывный функционал Φ, который является продолжением функционала ϕ на все пространство X, то есть $\Phi(x) = \phi(x)$ для всех $x \in M$ и $\Phi(x) \leq p(x)$ для всех $x \in X$. Таким образом, из теоремы Хана—Банаха следует, что на нормированных векторных пространствах существует «достаточно много» непрерывных линейных функционалов. Ее доказательство не представляет интереса в рамках этой книги, и мы не приводим его здесь (см. книги: [Luenberger 1969; Kolmogorov, Fomin 1970; Conway 1990].

Заметим, что в условии теоремы Хана—Банаха стоит не интуитивное требование $\mathrm{Int}(X^1) \neq \varnothing$, которое значит, что множество X^1 содержит хотя бы одну внутреннюю точку. Это условие не является обязательным, если множество X лежит в евклидовом пространстве (на самом деле, в этом случае оно даже не является необходимым). Однако в некоторых часто используемых бесконечномерных пространствах, например в пространствах ℓ_p при $p < \infty$ ряд их подмножеств, которые несут экономический смысл, например множество ℓ_p^+, состоящее из последовательностей с неотрицательными элементами, не содержат внутренних точек (это утверждение не очевидно, см. упражнение А.30, где показано, что это так). Это ограничение может привести к затруднениям, если мы будем моделировать распределение ресурсов в экономике (то есть последовательности значений потребления и запаса капитала) в бесконечномерном пространстве как элементы множества ℓ_p^+. Однако если мы остановимся на экономически более содержательном пространстве последовательностей распределений ресурсов ℓ_∞, то это ограничение не имеет значения, так как множество ℓ_∞^+ содержит внутренние точки (см. упражнение А.31). Единственное усложнение, возникающее при переходе к пространству ℓ_∞, состоит в том, что в этом пространстве не все линейные функционалы представимы в виде скалярного произведения, поэтому имеют экономический смысл как набор цен (см. факт А.27). Эта проблема может быть решена с помощью более сильных ограничений на вид функции полезности и технологии, которые гарантируют, что требуемый линейный функционал на пространстве ℓ_∞ может быть представлен в виде скалярного произведения. Именно поэтому мы наложили дополнительные ограничения на предпочтения агентов и технологии во второй теореме экономики благосостояния (теорема 5.7).

Непосредственное следствие из теоремы А.27 представляет отдельный интерес.

Теорема А.28. Теорема об опорной (разделяющей) гиперплоскости. *Рассмотрим множество $X \subset \mathbb{R}^K$ и его подмножества $X^1 \subset X$, $X^2 \subset X$. Допустим, что множества X^1, X^2 выпуклы и $X^2 \cap \operatorname{Int}(X^1) = \varnothing$. Тогда в $\mathbb{R}^K$ существует гиперплоскость*

$$H = \left\{ x \in X : \sum_{i=1}^{K} \eta_i x_i = c, \text{ где } \eta \in \mathbb{R} \text{ и } \eta \neq 0 \right\},$$

такая, что она разделяет множества X^1 и X^2, то есть

$$\eta \cdot x_1 \le c \le \eta \cdot x_2$$

для всех $x^1 \in X^1, x^2 \in X^2$ и, напомним, $\eta \cdot x = \sum_{i=1}^{K} \eta_i x_i$.

Заметим, что в условии этой теоремы отсутствует требование о непустоте внутренности множества X^1 $\operatorname{Int}(X^1) \neq \varnothing$, так оба множества X^1 и X^2 лежат в евклидовом пространстве. Более того, в теореме не утверждается то, что гиперплоскость H является нетривиальной (аналогично утверждению теоремы А.27 о линейном функционале), так как понятие гиперплоскости включает в себя это требование.

А.11. Условная оптимизация

Многие задачи, которые мы рассмотрели в этой книге, формулируются как задачи условной оптимизации. Главы 6, 7 и 16 посвящены методам решения динамических (бесконечномерных) задач условной оптимизации. Из теорем об отделимости, приведенных в предыдущем параграфе, следует ряд дополнительных свойств решений таких задач. Для иллюстрации этого рассмотрим следующую задачу бесконечномерной оптимизации.

$$\sup_{x \in X} f(x) \tag{A.10}$$

при условии

$$g(x) \le 0,$$

где множество $X \subset \mathbb{R}^K$ является открытым подмножеством пространства $\mathbb{R}^K, f\colon X \to \mathbb{R}, g\colon X \to \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{N}$.

Задача условной максимизации удовлетворяет условию *Слейтера*, если существует $x' \in X$, такой, что $g(x') < 0$ (это значит, что каждый элемент вектора $g(x')$ имеет отрицательное значение). Это условие эквивалентно требованию о том, что множество $G = \{x\colon g(x) \le 0\}$ имеет внутренние точки. Будем говорить, что отображение $g(x)$ выпукло, если выпукла каждая компонента этого отображения. Тогда множество G также выпукло (заметим, что обратное утверждение в общем случае не верно, см. упражнение А.32). Как обычно, зададим функцию Лагранжа следующим образом:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda \cdot g(x),$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^N_+$. Вектор λ называется *множителем Лагранжа*, а $\lambda \cdot g(x)$ соответствует скалярному произведению двух векторов (в данном случае вектора λ и значения векторнозначной функции $g(\cdot)$ в точке x). Это скалярное произведение является вещественным числом. Далее приведена основная теорема теории условной оптимизации.

Теорема А.29. Теорема о седловой точке. *Допустим, что в задаче* (А.10) *функция $f(x)$ вогнута, функция $g(x)$ выпукла и выполняется условие* Слейтера. *Тогда*

1. *Если x^* является решением задачи* (А.10), *то существует вектор $\lambda^* \in \mathbb{R}^N_+$, такой, что*

$$\mathcal{L}(x, \lambda^*) \le \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) \le \mathcal{L}(x^*, \lambda) \text{ для всех } x \in X \text{ и } \lambda \in \mathbb{R}^N_+. \quad (А.11)$$

В этом случае пара (x^*, λ^*) удовлетворяет условию дополнительной нежесткости

$$\lambda^* \cdot g(x^*) = 0. \quad (А.12)$$

2. *Если пара $(x^*, \lambda^*) \in X \times \mathbb{R}^N_+$ удовлетворяет условиям $g(x^*) \le 0$ и* (А.11), *то x^* является решением задачи* (А.10).

Доказательство. (Часть 1) Рассмотрим пространство $Y = \mathbb{R}^{N+1}$ и следующие множества в нем

$$Y^1 = \{(a, b) \in Y: a > f(x^*) \text{ и } b < 0\}$$

и

$$Y^2 = \{(a, b) \in Y: \exists x \in X, \text{ такой что } a \le f(x) \text{ и } b \ge g(x)\},$$

где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^N$ и $b < 0$, что значит, что каждый элемент N-мерного вектора $b \in \mathbb{R}^N$ отрицателен. Очевидно, что множество Y^1 выпукло. Более того, из вогнутости функции f и выпуклости функции g следует выпуклость множества Y^2.

Так как по условию теоремы x^* является решением задачи (А.10), два этих множества не пересекаются. Тогда из теоремы А.28 следует, что существует гиперплоскость, разделяющая эти множества. Другими словами, существует ненулевой вектор $\eta \in \mathbb{R}^{N+1}$, такой, что

$$\eta \cdot y^1 \le c \le \eta \cdot y^2$$

для всех $y^1 \in Y^1$ и $y^2 \in Y^2$. Более того, это утверждение верно для всех $y^1 \in \overline{Y^1}$ и $y^2 \in \overline{Y^2}$. Тогда положим $\eta = (\rho, \lambda)$, где $\rho \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{R}^N$, такие, что

$$\rho a^1 + \lambda \cdot b^1 \le \rho a^2 + \lambda \cdot b^2 \text{ для всех } (a^1, b^1) \in Y^1,\ (a^2, b^2) \in \overline{Y^2}. \quad (A.13)$$

Для точки $(f(x^*),\ 0) \in \overline{Y^2}$ имеем:

$$\rho a^1 + \lambda \cdot b^1 \le \rho f(x^*) \quad (A.14)$$

для всех $(a^1, b^1) \in \overline{Y^1}$. Далее положим $a^1 = f(x^*)$ и $b^1 < 0$. Тогда $\lambda \ge 0$ (допустим, что один из компонентов вектора λ отрицателен, тогда для вектора b^1, у которого все остальные компоненты равны нулю, условие (A.14) не выполняется). Аналогично положим $b^1 = 0$ и $a^1 > f(x^*)$. Тогда $\rho \le 0$. Более того, по определению гиперплоскости ρ отрицательно или один из компонентов вектора λ строго положителен.

Далее, из оптимальности вектора x^* следует, что для любого вектора $x \in X(f(x),\ g(x)) \in \overline{Y^2}$. Так как $(f(x^*),\ 0) \in \overline{Y^1}$, из условия (A.13) следует, что

$$\rho f(x^*) \le \rho f(x) + \lambda \cdot g(x) \quad (A.15)$$

для всех $x \in X$. Далее для того, чтобы прийти к противоречию, положим $\rho = 0$. Тогда из условия Слейтера следует, что существует вектор $x \in X$, такой, что $g(x') < 0$, поэтому $\lambda \cdot g(x') < 0$ для любого ненулевого вектора λ, что противоречит неравенству (A.15). Следовательно, $\lambda = 0$. Однако это противоречит утверждению о том, что разделяющая гиперплоскость ненулевая (поэтому мы не можем иметь одновременно $\rho = 0$ и $\lambda = 0$). Следовательно, $\rho < 0$. Далее определим

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{\rho} \ge 0.$$

Тогда условие дополнительной нежесткости непосредственно следует из неравенства (A.15). В частности вычислим его правую часть в точке $x^* \in X$. Тогда имеем $\lambda \cdot g(x^*) \ge 0$. Так как $\lambda \ge 0$ и $g(x^*) \le 0$, должно выполняться равенство

$$\lambda \cdot g(x^*) = -\rho(\lambda^* \cdot g(x^*)) = 0.$$

Тогда из условия дополнительной нежесткости, условия (A.15) и неравенства $\rho < 0$ для всех $x \in X$ имеем неравенство

$$\mathcal{L}(x, \lambda^*) = f(x) - \lambda^* g(x) \le f(x^*) = \mathcal{L}(x^*, \lambda^*),$$

откуда следует первое неравенство в условии (A.11). Чтобы доказать второе неравенство, еще раз воспользуемся условием дополнительной нежесткости и неравенством $g(x^*) \leq 0$. Из них следует, что для всех $\lambda \in \mathbb{R}^N_+$

$$\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = f(x^*) \leq f(x^*) - \lambda \cdot g(x^*) = \mathcal{L}(x^*, \lambda),$$

что завершает доказательство первой части теоремы.

(Часть 2) Проведем доказательство методом от противного. Чтобы получить противоречие, предположим, что условие (А.11) выполняется, но x^* не является решением задачи (А.10). Тогда существует вектор $x' \in X$, такой, что $g(x') \leq 0$ и $f(x') > f(x^*)$. Тогда из того, что $\lambda^* \cdot g(x^*) = 0$ и $\lambda^* \cdot g(x') \leq 0$ (так как $\lambda^* \geq 0$ и $g(x') \leq 0$) следует:

$$f(x') - \lambda \cdot g(x') > f(x^*) - \lambda^* \cdot g(x^*).$$

Однако это неравенство противоречит условию (А.11), что завершает доказательство второй части теоремы. ■

Задачу максимизации, в которой, как в теореме А.29, функция f является вогнутой, а функция g — выпуклой, часто называют *вогнутой задачей оптимизации*.

В упражнении А.33 показано, что условие Слейтера является существенным условием в теореме А.29. Дополнительные ограничения, такие как условие Слейтера или условие о линейной независимости в следующей теореме, несмотря на свою важность, зачастую явно не указываются в экономических приложениях. Это связано с тем, что в большинстве задач они выполняются естественным образом. Несмотря на это, читателю необходимо помнить о том, что эти условия необходимы и их игнорирование может в некоторых случаях привести к вводящим в заблуждение результатам.

Непосредственным следствием из первого неравенства в условии (А.11) является утверждение о том, что если $x^* \in \mathrm{Int}(X)$ и функции f и g дифференцируемы, то

$$D_x f(x^*) = \lambda^* \cdot D_x g(x^*), \tag{А.16}$$

где, как обычно, обозначения $D_x f$ и $D_x g$ задают якобианы отображений f и g. Уравнение (А.16) представляет собой стандартное необходимое условие первого порядка для внутреннего условного максимума. В этом случае в силу того, что задача максимизации является вогнутой задачей, условие (А.16) вместе с неравенством $g(x^*) \leq 0$ также являются достаточными условиями максимума.

Следующее утверждение представляет собой знаменитую теорему Куна—Такера, в которой утверждается, что условие (А.16) является необходимым условием внутреннего максимума (при условии, что функции f и g дифференцируемы), даже если предположения о выпуклости и вогнутости функций не выполняются.

Теорема А.30. Теорема Куна—Такера. *Рассмотрим следующую задачу условной максимизации*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^K} f(x)$$

при условии

$$g(x) \leq 0 \text{ и } h(x) = 0,$$

где $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}^N$ *и* $h: X \to \mathbb{R}^M$ *(при некоторых* $K \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}$*). Пусть вектор* $x^* \in \mathrm{Int}(X)$ *является решением задачи максимизации и предположим, что* $N_1 \leq N$ *неравенств в ограничении являются* активными *в том смысле, что в точке* x^* *они выполняются как равенства. Определим отображение* $\bar{h}: X \to \mathbb{R}^{M+N_1}$ *как эти* N_1 *активных ограничений вместе с отображением* $h(x)$ *(так что* $h(x^*) = 0$*). Допустим, что выполняется следующее дополнительное ограничение: ранг матрицы якобиана отображения* $\bar{h}$ $D_x\bar{h}(x^*)$ *равен* $N_1 + M$. *Тогда имеет место следующее условие Куна—Такера: существуют множители Лагранжа* $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^N$ *и* $\mu^* \in \mathbb{R}^M$, *такие, что*

$$D_x f(x^*) - \lambda^* \cdot D_x g(x^*) - \mu^* \cdot D_x h(x^*) = 0 \tag{A.17}$$

и выполняется условие дополнительной нежесткости:

$$\lambda^* \cdot g(x^*) = 0.$$

Доказательство (набросок). Из ограничения на ранг якобиана следует существование $N_1 + M$-мерного многообразия, заданного равенствами $h(x) = 0$ и активными ограничениями в системе $g(x) \leq 0$. Так как функции g и h дифференцируемы, это многообразие является гладким в точке x^*. Обозначим доступное при малом векторе $\varepsilon \in \mathbb{R}^K$ направление на многообразии как υ_ε (такое, что точка $x^* \pm \varepsilon\upsilon_\varepsilon(x^* + \varepsilon)$ остается на многообразии и поэтому удовлетворяет условию $D_x\bar{h}(x^*)\cdot\varepsilon\upsilon_\varepsilon(x^* + \varepsilon) = 0$). $N - N_1$ неактивных неравенств продолжают выполняться при достаточно малом ε, поэтому $x^* \pm \varepsilon\upsilon_\varepsilon(x^* + \varepsilon)$ доступна. Если $D_x h(x^*) \cdot \varepsilon\upsilon_\varepsilon(x^* + \varepsilon) \neq 0$, то

$$f(x^* + \varepsilon\upsilon_\varepsilon(x^* + \varepsilon)) > f(x^*) \text{ или } f(x^* + \varepsilon\upsilon_\varepsilon(x^* - \varepsilon)) > f(x^*),$$

откуда следует, что вектор x^* не может быть локальным (а поэтому и глобальным) максимумом в задаче. Далее рассмотрим $(M + N_1 + 1) \times K$-мерную матрицу A, в первом ряду которой стоит производная $D_x f(x^*)^T$, а во всех остальных — якобиан $D_x(\bar{h}(x^*))$. Из приведенных выше рассуждений следует, что для любого ненулевого вектора $\varepsilon \in \mathbb{R}^K$, такого, что $D_x\bar{h}(x^*)\cdot\varepsilon\upsilon_\varepsilon(x^* + \varepsilon) = 0$, также выполняется равенство $A \cdot (\varepsilon + \varepsilon\upsilon_\varepsilon(x^* + \varepsilon)) = 0$. Следовательно, матрицы $D_x\bar{h}(x^*)$ и A имеют равный ранг, который по условию теоремы равен $N_1 + M$. Так как матрица A имеет $M + N_1 + 1$ строк, ее первая строка будет линейной комбинацией оставшихся $M + N_1$ строк, что эквивалентно утверждению о том, что существует $M + N_1$-мерный вектор $\bar{\mu}$, такой, что $D_x f(x^*) = \bar{\mu} D_x \bar{h}(x^*)$. Приравнивая множители перед всеми неактивными ограничениями к нулю, получаем эквивалент условия (А.17). Отсюда непосредственно следует условие дополнительной нежесткости, так как множители перед всеми неактивными ограничениями равны нулю, а для активных ограничений выполняется равенство $g_j(x^*) = 0$. ■

Ограничение на ранг матрицы якобиана, которое требует, чтобы все активные ограничения были линейно независимы, играет роль, схожую с условием Слейтера в теореме А.29. В упражнении А.34 показано, что ограничение на ранг матрицы якобиана является существенным условием теоремы (хотя вместо требования о полном ранге могут использоваться более слабые условия).

Условие дополнительной нежесткости является центральным элементом теоремы А.30. Оно много раз использовалось в тексте книги как необходимое условие максимума.

Мы закончим это приложение широко известной и очень часто используемой теоремой об огибающей.

Теорема А.31. Теорема об огибающей. *Рассмотрим следующую задачу условной максимизации:*

$$\upsilon(p) = \max_{x \in X} f(x, p)$$

при условии

$$g(x, p) \leq 0 \text{ и } h(x, p) = 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^K$, $p \in \mathbb{R}$ *и* $f: X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *и* $h: X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$ — *дифференцируемые отображения* ($K \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}$). *Пусть вектор* $x^*(p) \in \operatorname{Int} X$ *является решением задачи максимизации. Обозначим множители Лагранжа перед ограничениями в виде неравенств и равенств как* $\lambda^* \in \mathbb{R}^N_+$ *и* $\mu^* \in \mathbb{R}^M$ *соответственно. Также допустим, что функция* $\upsilon(\cdot)$ *дифференцируема в точке* $\bar{p}$. *Тогда имеет место равенство*

$$\frac{\partial \upsilon(\bar{p})}{\partial p} = \frac{\partial f(x^*(\bar{p}), \bar{p})}{\partial p} - \lambda^* \cdot D_p g(x^*(\bar{p}), \bar{p}) - \mu^* \cdot D_p(x^*(\bar{p}), \bar{p}). \quad \text{(А.18)}$$

Доказательство. Так как вектор $x^*(p)$ является решением задачи максимизации, имеем равенство:

$$\upsilon(\bar{p}) = f(x^*(\bar{p}), \bar{p}). \quad \text{(А.19)}$$

Функция $\upsilon(\cdot)$ дифференцируема в $\bar{p}$ по условию теоремы, поэтому производная $\partial\upsilon(\bar{p})/\partial p$ существует. Более того, применяя теорему о неявной функции к необходимому условию максимума из теоремы А.30, также имеем дифференцируемость функции $x^*(\cdot)$ в точке $\bar{p}$. Следовательно, из уравнения (А.19) вытекает следующее равенство:

$$\frac{\partial\upsilon(\bar{p})}{\partial p}=\frac{\partial f(x^*(\bar{p}),\bar{p})}{\partial p}+D_x f(x^*(\bar{p}),\bar{p})\cdot D_p x^*(\bar{p}), \qquad (A.20)$$

где, как и ранее, выражение $D_x f(x^*(\bar{p}),\bar{p})\cdot D_p x^*(\bar{p})$ является скалярным произведением векторов и поэтому вещественным числом. Обозначим $N_1 \le N$ активных ограничений в неравенствах как $\tilde{g}\colon X\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_1}$. Дифференцируя активные ограничения в виде неравенств и ограничения в виде равенств, получаем уравнения:

$$-D_p\tilde{g}(x^*(\bar{p}),\bar{p})=D_x\tilde{g}(x^*(\bar{p}),\bar{p})\cdot D_p x^*(\bar{p})$$

и

$$-D_p h(x^*(\bar{p}),\bar{p})=D_x h(x^*(\bar{p}),\bar{p})\cdot D_p x^*(\bar{p}).$$

Из условия, эквивалентного условию (А.17) для данной задачи (см. теорему А.30), следует, что

$$D_x f(x^*(\bar{p}),\bar{p})-\lambda^*\cdot D_x g(x^*(\bar{p}),\bar{p})-\mu^*\cdot D_x(x^*(\bar{p}),\bar{p})=0.$$

Объединяя это условие с двумя предыдущими равенствами и замечая, что множители Лагранжа перед неактивными ограничениями равны нулю, получаем равенство:

$$D_x f(x^*(\bar{p}),\bar{p})\cdot D_p x^*(\bar{p})=-\lambda^*\cdot D_p g(x^*(\bar{p}),\bar{p})-\mu^*\cdot D_p(x^*(\bar{p}),\bar{p}).$$

Подставляя это равенство в уравнение (А.20), имеем условие (А.18). ■

Отметим один частный случай теоремы об огибающей для задачи безусловной максимизации. Тогда условие (А.18) приобретает более простой вид:

$$\frac{\partial\upsilon(\bar{p})}{\partial p}=\frac{\partial f(x^*(\bar{p}),\bar{p})}{\partial p}.$$

А.12. Упражнения

***А.1.** **(a)** Докажите *неравенство Минковского:* для всех $x = (x_1, ..., x_K) \in \mathbb{R}^K$ и $y = (y_1, ..., y_K) \in \mathbb{R}^K$, где $K \in \mathbb{N}$ и для всех $p \in [1, \infty)$ имеет место неравенство:

$$\left(\sum_{k=1}^{K} | x_k + y_k |^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{K} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{K} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(b) Сформулируйте и докажите обобщение этого неравенства для случая $K = \infty$.

А.2. С помощью неравенства Минковского (упражнение А.1) докажите, что метрика в метрическом пространстве в примере А.1 часть 1 удовлетворяет неравенству треугольника.

А.3. Покажите, что *метрика равномерной сходимости* $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} | f(x) - g(x) |$ в пространстве $\mathbf{C}(X)$ в примере А.1 удовлетворяет неравенству треугольника.

А.4. С помощью определения эквивалентных метрик (определение А.4) покажите, что если метрики d и d' эквивалентны в метрическом пространстве X и подмножество X' открыто в X как объединение множества окрестностей в метрике d, то оно открыто и в метрике d' (является объединением множества окрестностей в метрике d').

А.5. Докажите, что в метрическом пространстве (X, d) множество $X' \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда любая сходящаяся последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в множестве X' имеет предельную точку $x \in X'$, лежащую в нем.

А.6. Докажите факт А.2.

А.7. Докажите факт А.3.

А.8. Докажите факт А.4. [Подсказка: используйте теорему А.7.]

А.9. Докажите, что метрическое пространство $(\mathbf{C}(X), d_\infty)$ из примера А.1 полно.

А.10. Используйте рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства теоремы А.3, и покажите, что если (X, d) является метрическим пространством и отображение $\phi: X \to Y$ непрерывно на нем, то для любого связного множества $X' \subset X$ в пространстве (X, d) множество $f(X') \subset Y$ является связным подмножеством в пространстве Y.

А.11. Докажите, что в евклидовом пространстве все метрики в семействе метрик d_p из примера А.1 эквивалентны между собой в смысле определения А.4.

А.12. Докажите факт А.5.

А.13. Докажите факт А.10.

А.14. Покажите, что любое метрическое пространство является хаусдорфовым топологическим пространством.

А.15. Докажите лемму А.2.

А.16. **(a)** Покажите, что если $X = \prod_{\alpha=1}^{K} X_\alpha$ (то есть топологическое пространство X является конечномерным прямым произведением топологических пространств X_α), то коробочная топология и топология прямого произведения эквивалентны в нем в том смысле, что они задают равные множества открытых подмножеств в X (см. определение А.4 для эквивалентных метрик, которое может быть использовано и для топологических пространств).

(b) Покажите, что если топологическое пространство X является бесконечномерным прямым произведением, то коробочная топология и топология прямого произведения не эквивалентны.

(c) Покажите, что отображение проекции всегда непрерывно в коробочной топологии.

***А.17.** Рассмотрите набор метрических пространств X_α, где $\alpha \in A$. Покажите, что их прямое произведение $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, наделенное топологией прямого произведения, является хаусдорфовым топологическим пространством.

А.18. Докажите, что если пространства X и Y евклидовы, то из свойств полунепрерывности сверху и снизу в определении А.31 следуют свойства этих понятий в определении А.32.

А.19. **(a)** Покажите, что соответствие $G(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: xy \le 0\}$ не является непрерывным соответствием.

(b) Покажите, что если соответствия $G_1(x)$ и $G_2(x)$ непрерывны, то их непустое пересечение $G_1(x) \cap G_2(x)$ может не быть непрерывным соответствием. [Подсказка: рассмотрите соответствия $G_1(x) = (-\infty, x]$ и $G_2(x) = \{a, b\}$ при некоторых вещественных $a \ne b$.]

А.20. Докажите факт А.19.

А.21. Докажите факт А.21.

А.22. Постройте пример полунепрерывного сверху соответствия из отрезка $[0, 1]$ в отрезок $[0, 1]$, которое не является принимающим выпуклые значения и не обладает неподвижной точкой.

А.23. Рассмотрите игру в нормальной форме между N участниками. Обозначьте стратегии игрока i как $a_i \in A_i$ и его вещественнозначную функцию выигрыша как $u_i(a_1, \dots, a_N)$.

(a) Используйте теоремы А.16, А.17 и А.18 и докажите, что если все множества A_i не пусты, компактны и выпуклы и все функции u_i непрерывны по всем аргументам a_j, где $j \neq i$ и квазивогнуты по аргументу a_i, то существует набор стратегий $\left(a_1^*, \ldots, a_N^*\right)$, который является равновесием по Нэшу в чистых стратегиях.

(b) Приведите контрпримеры, показывающие, что каждое из предположений (1) компактность множеств A_i, (2) выпуклость множеств A_i, (3) непрерывность функций u_i, (4) квазивогнутость функций u_i по собственной стратегии являются существенными условиями в предыдущей части.

A.24. Докажите факт А.22.

A.25. Докажите теорему А.20.

A.26. Докажите теорему А.21. [Подсказка: воспользуйтесь теоремой А.20.]

A.27. Докажите следствие А.3.

A.28. Покажите, что четыре первых пространства в примере А.16 являются нормируемыми векторными пространствами, в то время когда пятое пространство не является таковым. [Подсказка: в каждом случае проверьте, выполняются ли неравенство треугольника и свойство линейности.]

A.29. Докажите утверждение из примера А.17.

A.30. Рассмотрите подпространство ℓ_p^+ в пространстве ℓ_p, состоящее из последовательностей, элементы которых являются неотрицательными вещественными числами. Предположите, что $1 \leq p < \infty$. Далее рассмотрите в нем последовательность $x \in \ell_p^+$ и ее ε-окрестность в пространстве ℓ_p $N_\varepsilon(x)$. Покажите, что для любой $x \in \ell_p^+$ и для любого вещественного $\varepsilon > 0$ $N_\varepsilon(x) \not\subseteq \ell_p^+$. [Подсказка: зафиксируйте $\varepsilon > 0$ и последовательность $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p^+$. Так как $x \in \ell_p$, для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное $N \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n \geq N$ $|x_n| <$ $< \varepsilon/2$. Затем постройте последовательность z таким образом, что $z_n = x_n$ для всех $n \neq N$ и $z_N = x_N - \varepsilon/2$. Покажите, что $z \in N_\varepsilon(x)$, но $z \notin \ell_p^+$.]

A.31. Покажите, что последовательность $x = (1, 1, 1, \ldots)$ является внутренней точкой множества ℓ_∞^+. [Подсказка: рассмотрите последовательность $z_\varepsilon = (1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon, \ldots)$ и покажите, что $z_\varepsilon \in N_\varepsilon(x) \subset \ell_\infty^+$.]

A.32. Рассмотрите отображение $g: X \to \mathbb{R}^N$, заданное на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}^K$, и постройте множество $G = \{x: g(x) \leq 0\}$. Покажите, что множество G может быть выпуклым, даже если не каждая компонента отображения g является выпуклой функцией.

А.33. Рассмотрите задачу максимизации величины x при ограничении $x^2 \leq 0$. Покажите, что эта задача имеет единственное решение, однако множитель Лагранжа в ней не определен. Покажите, что это является следствием того, что задача не удовлетворяет условию Слейтера.

А.34. Рассмотрите следующую задачу условной максимизации: $\max\limits_{x_1, x_2} -x_1$ при ограничениях $x_1^2 \leq x_2$ и $x_2 = 0$. Покажите, что она имеет единственное решение $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Покажите, что у нее нет вектора множителей Лагранжа (λ, μ), при которых точка $(0, 0)$ удовлетворяет условию (А.17). Объясните, как это связано с невыполнением условия на ранг матрицы якобиана.

Приложение В
Обзор теории обыкновенных дифференциальных уравнений

В этом приложении содержится краткий обзор основных результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и несколько более сложных теорем о свойствах их решений. Мы ограничимся лишь утверждениями, которые имеют отношение к материалу, представленному в основном тексте книги. В частности, мы приведем результаты, на которых основаны доказательства основных теорем об устойчивости решения дифференциального уравнения (теоремы 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.7, 2.18 и 2.19), которые приведены и многократно используются в книге. Мы также представим несколько основных теорем о существовании, единственности и непрерывности решения обыкновенного дифференциального уравнения. Бóльшая часть материала из этого приложения может быть найдена в базовых учебниках по дифференциальным уравнениям, например в учебнике [Boyce, DiPrima 1977]. Отметим также прекрасную книгу [Luenberger 1979], в которой разностные и дифференциальные уравнения анализируются в рамках единого подхода. Теоремы о существовании, единственности и непрерывности решения обыкновенного дифференциального уравнения могут быть найдены в более продвинутых учебниках, например таких как [Walter 1991; Peko 2001]. Прежде чем перейти к теоремам теории обыкновенных дифференциальных уравнений, мы остановимся на понятиях собственных значений и собственных векторов линейного оператора и нескольких основных теоремах интегрального исчисления. Мы предполагаем, что читатель знаком с основами линейной алгебры и математического анализа.

В.1. Собственные значения и собственные вектора

Рассмотрим вещественную (то есть состоящую из вещественных чисел) квадратную $n \times n$ матрицу $\mathbf{A}$. Назовем квадратную $n \times n$ матрицу $\mathbf{D}$ *диагональной*, если все ее недиагональные элементы равны нулю, то есть

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & d_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Назовем квадратную диагональную $n \times n$ матрицу $n \times n$ $\mathbf{I}$ *единичной*, если все ее диагональные элементы равны единице, то есть

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом приложении для обозначения матриц и векторов мы будем использовать жирный шрифт, то есть символ $\mathbf{0}$ обозначает нулевой вектор или нулевую матрицу, а символ 0 — вещественное число ноль.

Вещественное значение определителя матрицы $\mathbf{A}$ будем обозначать как $\det\mathbf{A}$. Назовем матрицу $\mathbf{A}$ *невырожденной,* или *обратимой*, если ее определитель не равен нулю, $\det\mathbf{A} \neq 0$. В этом случае уравнение

$$\mathbf{Av} = \mathbf{0}$$

имеет единственное решение $n \times 1$ вектор-столбец $\mathbf{v} = (0, ..., 0)^T$. Если матрица $\mathbf{A}$ обратима, то существует обратная к ней матрица $\mathbf{A}^{-1}$, такая, что

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

С другой стороны, если уравнение $\mathbf{Av} = 0$ имеет ненулевое решение или если $\det\mathbf{A} = 0$, то матрица $\mathbf{A}$ вырождена и не имеет обратной.

Рассмотрим вещественные числа $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ и введем мнимое число i, такое, что $i^2 = -1$, то есть $i = \pm\sqrt{-1}$. В этом приложении без ограничения общности мы положим $i = \sqrt{-1}$. Тогда назовем число $\chi = a + bi$ *комплексным числом*. Комплексное число ξ назовем *собственным значением* матрицы $\mathbf{A}$, если

$$\det(\mathbf{A} - \xi\mathbf{I}) = 0.$$

Если матрица $\mathbf{A}$ обратима, то ни одно из ее собственных значений не равно нулю. $n \times 1$ ненулевой вектор-столбец $\mathbf{v}_\xi$ назовем собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$, соответствующим собственному значению ξ, если

$$(\mathbf{A} - \xi\mathbf{I})\mathbf{v}_\xi = 0.$$

Очевидно, что если вектор $\mathbf{v}_\xi$ удовлетворяет этому уравнению, то вектор $\lambda\mathbf{v}_\xi$ также будет собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$ для любого вещественного $\lambda \in \mathbb{R}$. Линейное пространство $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}: (\mathbf{A} - \xi\mathbf{I})\mathbf{v} = 0\}$ иногда называют *собственным пространством* матрицы $\mathbf{A}$. Одним из основных применений собственных чисел и собственных векторов является их использование в процессе диагонализации недиагональной квадратной матрицы $\mathbf{A}$. В частности предположим, что $n \times n$ квадратная матрица $\mathbf{A}$ имеет *n различных* вещественных собственных значений. В одной из основных теорем линейной алгебры утверждается, что матрица

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$$

является диагональной с собственными значениями $\xi_1, ..., \xi_n$ на диагонали, где матрица $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_{\xi_1}, \dots, \mathbf{v}_{\xi_n})$ составлена из собственных векторов матрицы **A**, соответствующих ее собственным числам. Мы будем использовать эту теорему далее при доказательстве теорем В.5 и В.14.

Заметим, что собственные числа вещественной матрицы **A** могут оказаться комплексными числами (соответствующими комплексным корням характеристического многочлена $\det(\mathbf{A} - \xi\mathbf{I}) = 0$). Более того, характеристический многочлен $\det(\mathbf{A} - \xi\mathbf{I}) = 0$ может иметь кратные корни, то есть $n \times n$ матрица **A** может иметь повторяющиеся (то есть не различные) собственные значения. Обе эти возможности приводят к некоторым трудностям в процессе диагонализации матрицы **A**. Эти трудности и способы их преодоления обсуждаются в большинстве учебников по линейной алгебре, матричному анализу и дифференциальным уравнениям, мы не будем подробно останавливаться на них в этом приложении.

В.2. Некоторые основные теоремы *интегрального исчисления*

Прежде чем перейти к методам решения дифференциальных уравнений, приведем обзор ряда основных теорем интегрального исчисления. В этом параграфе мы будем говорить об интеграле Римана. В частности зафиксируем вещественные числа $b > a$ и рассмотрим непрерывную вещественнозначную функцию f: $[a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда интеграл Римана от функции f на отрезке $[a, b]$, который мы будем обозначать как $\int_a^b f(x)dx$, определяется следующим образом. Во-первых, создадим разбиение отрезка $[a, b]$, то есть разделим его на N интервалов вида $[a, x_1)$, $[x_1, x_2)$, ..., $[x_{N-1}, b]$, где положим $a = x_0$ и $b = x_N$. Далее внутри каждого из этих интервалов выберем N чисел ξ_1, $\xi_2, ..., \xi_N$ соответственно. Зафиксируем вектор $X_N = (x_1, x_2, ..., x_{N-1}, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_N)$. Определим *сумму Римана* на заданном разбиении X_N следующим образом:

$$\mathbf{R}(X_N) = \sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_j)(x_{j-1} - x_j).$$

Далее перейдем к пределу при $N \to \infty$ $\lim_{N\to\infty} \mathbf{R}(X_N)$, который соответствует значению этого выражения при переходе ко все более мелким разбиениям отрезка $[a, b]$, то есть при увеличении числа N интервалов в нем. Если этот предел существует и не зависит от разбиения X_N, то его называют *интегралом Римана от функции f* на отрезке $[a, b]$ и обозначают как

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{B.1}$$

Например, если интеграл Римана существует, то он равен пределу сумм Римана на симметричных разбиениях отрезка $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(a + j\frac{b-a}{N}\right).$$

Предположение о непрерывности функции f не является необходимым для существования интеграла Римана (например, интеграл Римана можно определить для монотонных разрывных функций). Однако для многих разрывных функций интеграл Римана не существует. По этой причине во многих случаях предпочтительнее оказывается рассмотрение более общих видов интегралов, например интеграла Лебега. Несмотря на то что в основном тексте книги мы использовали интеграл Лебега, здесь в целях упрощения изложения мы остановимся только на интеграле Римана. Если оба эти интеграла существуют, то интеграл Римана и интеграл Лебега равны между собой. Если интеграл Римана от функции f определен на отрезке $[a, b]$, то такая функция называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a, b]$.

Следующие четыре простые теоремы очень часто используются в экономических приложениях. Их доказательства читатель может найти в любом стандартном учебнике по вещественному математическому анализу, и мы не будем их повторять здесь.

Теорема В.1. Фундаментальная теорема интегрального исчисления I. *Рассмотрим интегрируемую по Риману на отрезке $[a, b]$ функцию $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Для всех $x \in [a, b]$ определим функцию (интеграл с переменным верхним пределом)*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Тогда функция $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если функция f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция F дифференцируема в этой точке и ее производная равна

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Теорема В.2. Фундаментальная теорема интегрального исчисления II. *Рассмотрим непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда существует дифференцируемая на этом отрезке* первообразная функция *$F: [a, b] \to \mathbb{R}$ (дифференцируемая слева в точке a и дифференцируемая справа в точке b), такая, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Более того, для любой такой функции*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Теорема В.3. Об интегрировании по частям. *Рассмотрим непрерывные на отрезке* $[a, b]$ *функции* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *и* $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ *и их дифференцируемые первообразные функции* $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ *и* $G: [a, b] \to \mathbb{R}$, *такие, что* $F'(x) = f(x)$ *и* $G'(x) = g(x)$ *для всех* $x \in [a, b]$. *Тогда произведения функций* Fg *и* Gf *также интегрируемы по Риману и имеет место равенство:*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)f(x)dx.$$

Теорема В.4. Правило Лейбница. *Рассмотрим непрерывную по аргументу* x *на отрезке* $[a, b]$ *и дифференцируемую по аргументу* y *в точке* y_0 *функцию* $f(x, y)$ *и предположим, что функции* $a(y)$ *и* $b(y)$ *дифференцируемы в точке* y_0 *и их производные равны* a' *и* b'. *Тогда имеет место равенство:*

$$\left.\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx\right|_{y=y_0} =$$

$$= \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y}dx + b'(y_0)f(b(y_0), y_0) - a'(y_0)f(a(y_0), y_0).$$

Интеграл Римана в уравнении (В.1), в котором заданы нижний и верхний пределы интегрирования, называют *определенным интегралом Римана*. Мы также можем ввести *неопределенный интеграл Римана* $\int f(x)dx$, который просто представляет собой множество первообразных функций $F(x)$, таких, что $F'(x) = f(x)$ (это действительно множество функций, так как если некоторая функция $F(x)$ удовлетворяет этому свойству, то ему удовлетворяет и функция $F(x) + c$, где c — любая вещественная константа). Поэтому неопределенный интеграл (первообразную) иногда называют *антипроизводной*. Определенный интеграл может быть определен и в случаях $a = -\infty$ и/или $b = \infty$ как предел при $a \to -\infty$ и/или $b \to \infty$, если этот предел существует. Такой интеграл называют несобственным интегралом Римана.

В.3. Линейные дифференциальные уравнения

Напомним причину, по которой мы исследуем дифференциальные уравнения при решении динамических экономических задач, которую мы привели в главе 2. В частности рассмотрим функцию $x: T \to \mathbb{R}$, где область определения T — некоторый интервал на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Рассмотрим при заданном вещественном числе Δt приращение

$$x(t + \Delta t) - x(t) = G(x(t), t, \Delta t),$$

где $G(x(t), t, \Delta t)$ — вещественнозначная функция. Далее разделим обе части этого уравнения на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Допустим, что предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} G(x(t), t, \Delta t)/\Delta t$ существует и положим

$$g(x(t), t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{G(x(t), t, \Delta t)}{\Delta t}.$$

Рассматривая этот предел, мы переходим к следующему *дифференциальному уравнению*:

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}(t) = g(x(t), t). \tag{B.2}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение, ***разрешенное относительно производной***. Под этим термином мы понимаем то, что производная функции x отделена в левой части уравнения. Другим, более общим, типом дифференциальных уравнений являются *неявные* уравнения вида:

$$H(\dot{x}(t), x(t), t) = 0.$$

В этом приложении мы остановимся лишь на уравнениях, разрешенных относительно производной, потому что в экономических приложениях чаще встречаются именно такие уравнения.

Дифференциальное уравнение называется автономным, если оно может быть записано в следующем виде:

$$\dot{x}(t) = g(x(t)),$$

или, более просто,

$$\dot{x}(t) = g(x),$$

то есть в автономном уравнении производная функции x не зависит от времени явным образом. С другой стороны, если дифференциальное уравнение не может быть представлено в таком виде, оно называется *неавтономным* дифференциальным уравнением. Помимо дифференциальных уравнений первого порядка, мы также можем рассмотреть уравнения второго или более высокого порядка n, например

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = g\left(\frac{dx(t)}{dt}, x(t), t\right)$$

или

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n} = g\left(\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}, \ldots, \frac{dx(t)}{dt}, x(t), t\right). \tag{B.3}$$

Однако, так как уравнения более высоких порядков всегда могут быть сведены к системе дифференциальных уравнений первого порядка (см. упражнение В.3), мы остановимся лишь на уравнениях первого порядка.

Наиболее часто встречающимся типом дифференциальных уравнений является *задача Коши*. В ней дифференциальное уравнение вида (В.2) дополнено начальным условием для функции x вида $x(0) = x_0$. Задача Коши часто встречается в основном тексте книги. Однако много важных экономических задач не являются задачей Коши, так как некоторые граничные условия в них имеют вид *условий трансверсальности*, то есть в задаче накладывается ограничение на значение решения уравнения $x(t)$ в некоторый конечный момент времени $T < \infty$ или $T = \infty$.

Допустим, что дифференциальное уравнение (В.2) определено для всех $t \in \mathcal{D}$, где множество $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ является некоторым интервалом на вещественной прямой, и задано начальное условие $x(0) = x_0$. *Решением* задачи Коши на множестве $\mathcal{D}$ назовем некоторую функцию $x : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет уравнению (В.2) для всех $t \in \mathcal{D}$ и начальному условию $x(0) = x_0$. Иногда множество функций $\mathcal{X} = \{x : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, таких что $x(t)$ удовлетворяет уравнению (В.2) для всех $x \in \mathcal{D}\}$, называют *общим решением* дифференциального уравнения, а элемент множества $\mathcal{X}$, удовлетворяющий начальному условию $x(0) = x_0$, — частным решением дифференциального уравнения[1].

В.4. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Вначале обратимся к линейным дифференциальным уравнениям первого порядка. Они являются хорошей начальной точкой в нашем анализе, потому что они часто встречаются в экономических приложениях и потому что метод их решения достаточно прост. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка в общем виде выглядит следующим образом:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t). \tag{В.4}$$

Если при этом $b(t) = 0$, то такое дифференциальное уравнение называется *однородным уравнением*. Если $a(t) = a$ и $b(t) = b$, то такое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением *с постоянными коэффициентами*.

Мы начнем с самого простого случая однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\dot{x}(t) = ax(t). \tag{В.5}$$

[1] Такая терминология иногда может привести в замешательство, так как термины «общее решение» и «частное решение» в других контекстах имеют другой смысл. В этой книге другой смысл этих выражений не встречается и поэтому их использование не создает путаницу.

Решение такого уравнения найти достаточно просто. Мы можем предположить вид решения, а затем проверить, что оно действительно удовлетворяет дифференциальному уравнению (В.5). Мы также можем разделить обе части уравнения (В.5) на $x(t)$, проинтегрировать полученное уравнение по переменной t и воспользоваться неопределенными интегралами:

$$\int \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \log|x(t)| + c_0$$

и

$$\int a dt = at + c_1,$$

где константы c_0 и c_1 являются вещественными константами интегрирования. Далее, экспонируя обе части уравнения, приходим к общему решению уравнения (В.5) в следующем виде:

$$x(t) = c\exp(at), \tag{B.6}$$

где константа c является функцией от констант интегрирования c_0 и c_1 (более точно, $c = \pm\exp(c_1 - c_0)$). Нетрудно убедиться, что дифференцирование функции (В.6) приводит к уравнению (В.5), поэтому она действительно является его общим решением. Если уравнение (В.5) дополнено начальным условием, то мы имеем дополнительное ограничение, которое без ограничения общности может быть записано как: в момент времени $t = 0$ $x(0) = x_0$. Это граничное (в данном случае — начальное) условие позволяет единственным образом найти значение константы интегрирования c. В частности, так как $\exp(a \times 0) = 1$, $c = x_0$. Следовательно, частное решение при заданном начальном условии имеет вид:

$$x(t) = x_0\exp(at).$$

Далее рассмотрим немного более общее линейное однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t), \tag{B.7}$$

заданное на интервале $t \geq 0$ с начальным условием $x(0) = x_0$. Как и ранее, разделим обе части уравнения (В.7) на $x(t)$, проинтегрируем полученное уравнение по переменной t и возьмем экспоненту от обеих частей уравнения. Тогда получаем:

$$x(t) = c\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right). \tag{B.8}$$

Уравнение (В.8) следует из того, что интеграл от ограниченной функции $a(t)$ имеет простой вид $\int_0^t a(s)ds + c_1$. Так как

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t a(s)ds = \int_0^0 a(s)ds = 0$$

значение константы интегрирования, как и ранее, находится из начального условия, то есть $c = x_0$. Дифференцируя уравнение (В.8) и используя теоремы В.1 и В.4, нетрудно убедиться, что функция (В.8) является решением дифференциального уравнения (В.7).

Далее рассмотрим автономное неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b. \tag{B.9}$$

Аналогичным образом находим его общее решение:

$$x(t) = -\frac{b}{a} + c\exp(at). \tag{B.10}$$

Вывод уравнения (В.10): Чтобы найти решение уравнения (В.9), сделаем следующую простую замену переменных. Положим

$$y(t) = x(t) + b/a.$$

Нетрудно заметить, что $\dot{y}(t) = \dot{x}(t)$ (просто продифференцировав обе части уравнения по переменной t). Далее перепишем уравнение, подставив в (В.9) функцию $y(t)$. Тогда получаем уравнение:

$$\dot{y}(t) = ay(t).$$

Далее воспользуемся общим решением (В.5), найденным выше. Тогда получаем $y(t) = c\exp(at)$, где c — подходящая константа интегрирования. Делая обратное преобразование, находим общее решение для функции $x(t)$ в виде (В.9). ■

Наконец, заметим, что для выполнения начального условия $x(0) = x_0$ константа интегрирования должна иметь вид $c = x_0 + b/a$. Следовательно, частное решение при заданном начальном условии выглядит как

$$x(t) = -\frac{b}{a} + \left(x_0 + \frac{b}{a}\right)\exp(at). \tag{B.11}$$

Это уравнение позволяет нам перейти к простому анализу вопроса устойчивости решения дифференциального уравнения. Напомним, что в основном тексте книги *стационарным решением* уравнения (В.9) мы называли решение, удовлетворяющее требованию $\dot{x}(t) = 0$ для всех t. Очевидно, что в этом случае решение

$$x(t) = x^* \equiv -\frac{b}{a}$$

является единственным стационарным решением. Анализ уравнения (В.11) показывает, что если $a < 0$, то решение $x(t)$ сходится к стационарной точке x^* при $t \to \infty$, а если $a > 0$, то решение $x(t)$ расходится к бесконечности при $t \to \infty$. Такая динамика естественным образом вытекает из теоремы 2.4, в которой утверждается, что стационарное состояние асимптотически устойчиво при $a < 0$.

Наконец рассмотрим наиболее общий случай линейного дифференциального уравнения первого порядка, заданный уравнением (В.4). Общее решение уравнения (В.4) выглядит как:

$$x(t) = \left[c + \int_0^t b(s)\left(\exp\int_0^s a(\upsilon)d\upsilon\right)^{-1} ds\right]\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right). \tag{В.12}$$

Дифференцируя функцию (В.12) и используя теорему В.4, нетрудно проверить, что она действительно является общим решением уравнения (В.4) (см. упражнение В.4). Как и ранее, константа интегрирования $c = x_0$ может быть найдена из начального условия $x(0) = x_0$. Однако заметим, что в этом случае уравнение (В.4) может не иметь стационарного решения, удовлетворяющего требованию $\dot{x}(t) = 0$, так как из условия $\dot{x}(t) = 0$ следует, что $x(t) = -a(t)/b(t)$, а эта дробь в общем случае не является постоянной величиной.

Вывод уравнения (В.12): Поиск решения уравнения (В.4) в общем случае требует рассуждений, несколько отличных от использованных при поиске решений в частных случаях, рассмотренных выше. Перепишем уравнение (В.4) в виде $\dot{x}(t) - a(t)x(t) = b(t)$ и умножим обе его части на *интегральный множитель* $\exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right)$. Тогда получаем уравнение:

$$\dot{x}(t)\exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right) - a(t)x(t)\exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right) = b(t)\exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right).$$

Нетрудно убедиться, что левая часть этого уравнения является производной функции $x(t)\exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right)$. Следовательно, интегрируя обе его части, получаем равенство:

$$x(t)\exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right)=\int_0^t b(s)\exp\left(-\int_0^s a(\upsilon)d\upsilon\right)ds+c,$$

где константа c является константой интегрирования. Деление обеих частей этого равенства на $\exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right)$ ведет к уравнению (В.12). ■

Этот вывод явным образом демонстрирует существование и единственность решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка. Это наблюдение является частным случаем теоремы В.8, приведенной далее.

В.5. Системы линейных дифференциальных уравнений

Утверждение о существовании решения линейного дифференциального уравнения первого порядка и явный его вывод могут быть продолжены на случай системы линейных дифференциальных уравнений. Прежде чем перейти к теореме В.6, в которой описано решение в общем случае, рассмотрим следующую простую систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{B.13}$$

где вектор $\mathbf{x}(t)\in\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$ и $\mathbf{A}$ — квадратная $n\times n$ вещественная матрица. Как и ранее, в качестве граничного условия рассмотрим требование о начальном значении $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$. В этой системе уравнений отсутствует константа, поэтому *стационарное решение имеет вид* $\mathbf{x}^*=\mathbf{0}$. *Мы опустили* константу для нормализации, это не ограничивает общность, потому что, как показано выше, неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами может быть приведено к однородному уравнению простой заменой переменных. Задача Коши для этой системы дифференциальных уравнений всегда имеет единственное решение (это утверждение следует из теоремы В.6 или из теоремы В.10, см. упражнение В.5). При этом, если матрица $\mathbf{A}$ имеет n различных вещественных собственных значений, решение системы (В.13) имеет в особенности простой вид. Он описан в следующей теореме.

Теорема В.5. Решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. *Допустим, что матрица* $\mathbf{A}$ *имеет* n *различных вещественных собственных значений* $\xi_1, \ldots, \xi_n$. *Тогда единственное решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений* (В.13) *с начальным условием* $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$ *выглядит как:*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \exp(\xi_j t)\mathbf{v}_{\xi_j},$$

где векторы $\mathbf{v}_{\xi_1}, \ldots, \mathbf{v}_{\xi_n}$ являются собственными векторами матрицы **A**, *соответствующими собственным значениям $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и константы $c_1, \ldots, c_n$ являются константами интегрирования.*

Доказательство. Доказательство следует из диагонализации матрицы **A**. В частности, так как она имеет n различных вещественных собственных значений, матрица $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ является диагональной матрицей с собственными значениями $\xi_1, \ldots, \xi_n$ на диагонали, где матрица $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_{\xi_1}, \ldots, \mathbf{v}_{\xi_n})$ составлена из собственных векторов матрицы **A**, соответствующих этим собственным значениям. Положим $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$. Тогда имеем

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Ax}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz}(t) = \mathbf{Dz}(t). \qquad (B.14)$$

Так как матрица **D** является диагональной, из равенства (B.14) следует, что элементы вектора $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t))$ имеют вид $z_1(t) = c_1\exp(\xi_1 t), \ldots, z_n(t) = c_n\exp(\xi_n t)$, где константы $c_1, \ldots, c_n$ являются константами интегрирования. Далее, так как $\mathbf{x}(t) = \mathbf{Pz}(t)$, утверждение теоремы следует из умножения матрицы $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_{\xi_1}, \ldots, \mathbf{v}_{\xi_n})$ на вектор решений $\mathbf{z}(t)$. ■

Если матрица **A** имеет кратные или комплексные собственные значения, то явный вид решения системы (B.13) также может быть найден, однако оно имеет более сложный вид. Поэтому вместо описания этого решения далее в теореме B.6 мы приведем более общее утверждение. Важными следствиями теоремы B.5 являются теоремы 2.4 и 7.18 в основном тексте книги. В частности, из теоремы B.5 следует, что стационарное решение, в данном случае $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, является устойчивым, только если все собственные значения матрицы **A** отрицательны. Более того, если $m < n$ собственных значений матрицы **A** отрицательны, то в $\mathbb{R}^n$ существует m-мерное подпространство, такое, что решение системы (B.13) сходится на бесконечности к стационарному значению, только если начальное значение лежит в этом подпространстве.

Далее рассмотрим более общий вид системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t), \qquad (B.15)$$

где вектор $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$ — квадратные $n \times n$ вещественные матрицы при всех t. Предположим, что каждый элемент матриц $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$ *является интегрируемой функцией.*

Далее мы в два этапа опишем решение системы уравнений (В.15). Во-первых, введем *матрицу переходов состояний* $\Phi(t, s)$, соответствующую матрице $\mathbf{A}(t)$ как квадратную $n \times n$ дифференцируемую по первому аргументу матричную функцию, являющуюся единственным решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, s) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, s), \text{ где } \Phi(t, t) = \mathbf{I} \text{ для всех } t \text{ и } s. \qquad (B.16)$$

Матрица переходов состояний позволяет найти решение однородной системы уравнений и затем выразить решение системы уравнений (В.15) через решение однородной системы. В частности, если вектор $\hat{\mathbf{x}}(t)$ является решением однородной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \qquad (B.17)$$

то нетрудно убедиться, что (см. упражнение В.6)

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t, s)\hat{\mathbf{x}}(s) \text{ для всех } t \text{ и } s. \qquad (B.18)$$

Далее зададим *множество фундаментальных решений* системы уравнений (В.17). Квадратная $n \times n$ матрица $\mathbf{X}(t)$ называется множеством фундаментальных решений системы уравнений (В.17), если ее столбцы $\mathbf{x}^1(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t)$ являются векторнозначными функциями-решениями системы уравнений (В.17) и линейно независимы между собой. В этом случае, очевидно

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t).$$

Тогда нетрудно убедиться, что (см. упражнение В.7)

$$\Phi(t, s) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(s)^{-1}. \qquad (B.19)$$

Теперь мы можем описать вид единственного решения системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка в общем виде (В.15).

Теорема В.6. Решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка в общем виде. *Решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений* (В.15) *с начальным условием* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *имеет следующий вид:*

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t, 0)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t, s)\mathbf{B}(s)ds, \qquad (B.20)$$

где матрица $\Phi(t, s)$ *является матрицей переходов состояний, соответствующая матрице* $\mathbf{A}(t)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо лишь убедиться в том, что функция (В.20) является решением системы уравнений (В.15). Дифференцируя уравнение (В.20) по времени и используя теоремы В.4, получаем равенство:

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t,\ 0)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \frac{d}{dt}\Phi(t,\ s)\mathbf{B}(s)ds + \Phi(t,\ t)\mathbf{B}(t).$$

Из определения матрицы переходов состояний (В.16) следует, что $\Phi(t, t) = \mathbf{I}$, и

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,\ s) = \mathbf{A}(t)\Phi(t,\ s).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t,\ 0)\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}(t)\int_0^t \Phi(t,\ s)\mathbf{B}(s)ds + \mathbf{B}(t) = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}(t),$$

что завершает проверку того, что функция (В.20) является решением задачи Коши для системы уравнений (В.15) с начальным условием $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. ■

В.6. Локальный анализ и устойчивость решения нелинейных дифференциальных уравнений

Анализ решений системы нелинейных дифференциальных уравнений обычно ведется в окрестности стационарного решения с помощью теоремы Тейлора (теорема А.23). В частности, рассмотрим систему нелинейных автономных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)), \tag{В.21}$$

где, как и ранее, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ и отображение $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ везде непрерывно дифференцируемо. Предположим, что система дифференциальных уравнений (В.21) имеет стационарное решение $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$, и рассмотрим вектор $\mathbf{x}(t)$ в окрестности точки $\mathbf{x}^*$. Тогда по теореме Тейлора имеем:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = D\mathbf{G}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) + o(\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2),$$

где, напомним,

$$o(\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2)/\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2 \to \mathbf{0} \text{ при } \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \to 0$$

(то есть при $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^*$). Будем называть стационарное состояние $\mathbf{x}^*$ *гиперболическим*, если матрица $D\mathbf{G}(\mathbf{x}^*)$ не имеет нулевых собственных значений (или комплексных собственных значений с нулевой вещественной частью). Тогда, если стационарное состояние $\mathbf{x}^*$ гиперболическое, то динамика решения системы (В.21) $\mathbf{x}(t)$ в окрестности такого стационарного состояния может быть аппроксимирована решением системы линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = D\mathbf{G}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*).$$

Это утверждение лежит в основе теорем 2.5 и 7.19. Следующая теорема формализует этот результат и обобщает теоремы 2.5 и 7.19. Ее строгое доказательство может быть найдено в учебнике [Walter 1991, p. 305–317].

Теорема В.7. Теорема Гробмана—Хартмана. *Предположим, что* $\mathbf{x}^*$ *является стационарным решением системы дифференциальных уравнений* (В.21) *и что отображение* $\mathbf{G}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *везде непрерывно дифференцируемо. Тогда если* $\mathbf{x}^*$ *гиперболическая, то существует открытое множество траекторий системы дифференциальных уравнений* (В.21) *U в окрестности* $\mathbf{x}^*$ *и открытое множество траекторий системы линейных дифференциальных уравнений* $\dot{\mathbf{x}}(t) = D\mathbf{G}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*)$ *V в окрестности* $\mathbf{x}^*$, *такие, что существует взаимно-однозначное соответствие* h: $U \to V$, *которое сохраняет направления траекторий во множествах U и V.*

Следствия из теоремы В.7 проиллюстрированы на рис. В.1. На нем множества N_c и N_d соответствуют сходящемуся и расходящемуся многообразиям двухмерной нелинейной системы со стационарным решением (x^*, y^*). Множества E_c и E_d являются сходящимся и расходящимся многообразиями соответствующей линеаризованной системы дифференциальных уравнений.

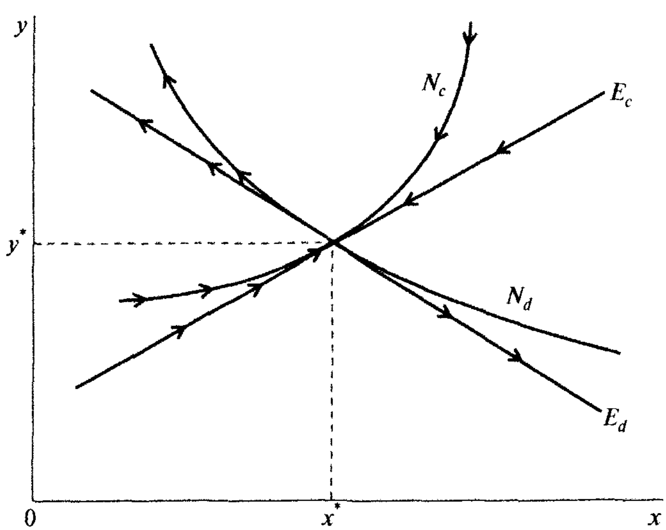

Рис. В.1. Связь между сходящимся и расходящимся многообразиями нелинейной и линеаризованной систем дифференциальных уравнений

В.7. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и уравнения в полных дифференциалах являются важными частными случаями, в которых часто возможно нахождение решения в явном виде. Дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = g(x(t), t) \tag{B.22}$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если функция g имеет вид:

$$g(x(t), t) \equiv f(x)h(t).$$

В этом случае уравнение (В.22) может быть записано в виде:

$$\frac{dx(t)}{f(x(t))} = h(t)dt.$$

Интегрируя обе части этого уравнения, получаем уравнение:

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int h(t)dt.$$

Такое уравнение часто позволяет найти решение в явном виде. Следующий пример иллюстрирует процедуру решения таких уравнений.

Пример В.1. Дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = \frac{4t^3 + 3t^2 + 2t + 1}{2x(t)}$$

с начальным условием $x(0) = 1$ на первый взгляд кажется достаточно сложным. Однако, заметив, что оно является уравнением с разделяющимися переменными, мы можем записать его как $2xdx = (4t^3 + 3t^2 + 2t + 1)dt$ и, проинтегрировав его, получить уравнение $x^2(t) = t^4 + t^3 + t^2 + t + c$, где константа c является разностью двух констант интегрирования. Подставляя решение в начальное условие, получаем $c = 1$. Следовательно, решение задачи Коши выглядит как $x(t) = \sqrt{t^4 + t^3 + t^2 + t + 1}$, где мы отбросили отрицательный корень, потому что он не удовлетворяет начальному условию $x(0) = 1$. Этот пример связан с экономической задачей, представленной в упражнении В.9. ■

Далее еще раз вернемся к дифференциальному уравнению вида (В.22) и предположим, что функция g имеет следующий вид:

$$g(x(t), t) = \frac{G_1(x(t), t)}{G_2(x(t), t)},$$

где

$$G_1(x(t),\ t) = \frac{\partial F(x(t),\ t)}{\partial t} \text{ и } G_2(x(t),\ t) = -\frac{\partial F(x(t),\ t)}{\partial x}.$$

Тогда уравнение (В.22) называется *уравнением в полных дифференциалах*. В частности, в этом случае мы можем записать

$$\dot{x}(t) = \frac{G_1(x(t),\ t)}{G_2(x(t),\ t)} = -\frac{\partial F(x(t),\ t)/\partial t}{\partial F(x(t),\ t)/\partial x}$$

или

$$\dot{x}(t)\frac{\partial F(x(t),\ t)}{\partial x} + \frac{\partial F(x(t),t)}{\partial t} = 0.$$

Положим $\hat{x}(t)$ решением этого дифференциального уравнения. Тогда получаем равенство:

$$\frac{d}{dt}F\left(\hat{x}(t),\ t\right) = 0, \qquad \text{(B.23)}$$

где символ d/dt обозначает полную производную функции F по аргументу t. Тогда из уравнения (В.23) следует, что

$$F(\hat{x}(t),\ t) = c, \qquad \text{(B.24)}$$

где константа c представляет собой константу интегрирования. Уравнение (В.24) неявным образом задает решение уравнения (В.22) $\hat{x}(t)$.

После проведения идентификации решение уравнений в полных дифференциалах не представляет труда. Далее приведен простой пример такого уравнения.

Пример В.2. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = -\frac{2x(t)\log x(t)}{t}$$

с начальным условием $x(1) = \exp(1)$. Несмотря на то что на первый взгляд это уравнение представляется достаточно сложным, заметим, что мы можем переписать его в следующем виде:

$$\dot{x}(t) = -\frac{2t\log x(t)}{t^2/x(t)} = -\frac{\partial(t^2\log(x(t)))/\partial t}{\partial(t^2\log(x(t)))/\partial x},$$

и поэтому оно является уравнением в полных дифференциалах. Таким образом, его решение $\hat{x}(t)$ задается уравнением $t^2\log(\hat{x}(t)) = c$, откуда следует, что $\hat{x}(t) = \exp(ct^{-2})$ является общим решением. Начальное условие $x(1) = \exp(1)$ позволяет найти значение константы интегрирования $c = 1$. ■

В.8. Существование и единственность решения задачи Коши

В общем случае мы можем сформулировать теорему о существовании и единственности решения задачи Коши при достаточно слабых предположениях. На самом деле существует большое количество связанных между собой теорем о существовании решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Мы приведем одну из основных теорем существования, которая является обобщением оригинальной теоремы Пикара. Рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\dot{x}(t) = g(x(t),\ t) \tag{B.25}$$

где функция $x(t)$ задана на некотором интервале $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ (то есть во всех точках $t \in \mathcal{D}$). Далее в этом параграфе мы везде будем предполагать, что точка 0 является внутренней точкой интервала $\mathcal{D}$. Введем следующее условие Липшица.

Определение В.1. *Дифференциальное уравнение первого порядка* (В.25) *удовлетворяет* условию Липшица *на множестве* $S = \mathcal{X} \times \mathcal{D}$, *если существует вещественное число* $L < \infty$, *такое, что для всех* $x \in \mathcal{X}$, $x' \in \mathcal{X}$ *и для всех* $t \in \mathcal{D}$ *выполняется неравенство*

$$|g(x, t) - g(x', t)| \le L|x - x'|.$$

Нетрудно убедиться, что если функция $g\colon S \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица, то она является непрерывной по аргументу x (см. упражнение В.8).

Теорема В.8. Теорема Пикара I. *Допустим, что функция* $g\colon \mathcal{X} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *непрерывна по обоим своим аргументам и удовлетворяет условию Липшица из определения* В.1. *Тогда существует вещественное* $\delta > 0$, *такое, что задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения* (В.25) *с начальным условием* $x(0) = x_0 \in \mathcal{X}$ *имеет единственное решение* $x(t)$ *на отрезке* $[-\delta, \delta] \subset \mathcal{D}$.

Из этой теоремы следует существование единственного решения дифференциального уравнения (В.25) в окрестности начального значения x_0. Если множество $\mathcal{D}$ является компактным, то имеет место более сильная версия теоремы В.8.

Теорема В.9. О существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения на компактном множестве. *Допустим, что функция* $g\colon \mathcal{X} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *непрерывна по обоим своим аргументам и удовлетворяет условию Липшица из определения* В.1 *и множество* $\mathcal{D}$ *компактно. Тогда у задачи Коши для обыкновенного дифференциально-*

го уравнения (В.25) *с начальным условием* $x(0) = x_0 \in \mathcal{X}$ *существует единственное решение* $x(t)$ *на всем множестве* $\mathcal{D}$.

У этих теорем несколько различных доказательств. В упражнениях 6.3 и 6.4 содержатся доказательства, основанные на теореме о сжимающем отображении (теорема 6.7).

Эти теоремы без труда могут быть продолжены на случай системы дифференциальных уравнений первого порядка. Предположим, что $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, отображение $\mathbf{G}$: $\mathcal{X} \times \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ и следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t),\ t). \tag{B.26}$$

Определение В.2. *Система дифференциальных уравнений первого порядка* (В.26) *удовлетворяет* условию Липшица *на множестве* $S = \mathcal{X} \times \mathcal{D}$, *если существует вещественное число* $L < \infty$, *такое, что для всех* $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ *и для всех* $t \in \mathcal{D}$ *выполняется неравенство*

$$\| \mathbf{G}(\mathbf{x},\ t) - \mathbf{G}(\mathbf{x}',\ t) \| \le \| \mathbf{x} - \mathbf{x}' \|.$$

Теорема В.10. Теорема Пикара II. *Допустим, что отображение* $\mathbf{G}$: $\mathcal{X} \times \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ *непрерывно по обоим своим аргументам и удовлетворяет условию Липшица из определения* В.2. *Тогда существует вещественное* $\delta > 0$, *такое, что задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (В.26) *с начальным условием* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ *имеет единственное решение* $\mathbf{x}(t)$ *на отрезке* $[-\delta,\ \delta] \subset \mathcal{D}$.

Теорема В.11. О существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений на компактном множестве. *Допустим, что отображение* $\mathbf{G}$: $\mathcal{X} \times \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ *непрерывно по обоим своим аргументам и удовлетворяет условию Липшица из определения* В.2 *и множество* $\mathcal{D}$ *компактно. Тогда задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (В.26) *с начальным условием* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ *имеет единственное решение* $\mathbf{x}(t)$ *на всем множестве* $\mathcal{D}$.

Доказательство этих теорем может быть найдено в учебнике [Walter *1991*, p. 108–110).

В.9. Непрерывность и дифференцируемость решения задачи Коши

Один из интересных вопросов о свойства решения дифференциального уравнения заключается в том, будет ли оно непрерывно по параметрам уравнения или по начальному условию (то есть будет ли решение изменяться незначительно при незначительном изменении параметров уравнения). В следующей теореме содержатся условия, необходимые для непрерывности решения дифференциального уравнения (ее доказательство приведено в учебнике [Walter 1991, p. 145–146]).

Теорема В.12. О непрерывности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. *Допустим, что функция* $g : \mathcal{X} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *непрерывна по обоим своим аргументам и множество* $\mathcal{D}$ *компактно. Пусть функция* $x(t)$ *является решением задачи Коши для дифференциального уравнения* (В.25) *с начальным условием* $x(0) = x_0 \in \mathcal{X}$. *Тогда для любого вещественного* $\varepsilon > 0$, *любой точки* $x_0 \in \mathcal{X}$ *и любой функции* $\tilde{g} : \mathcal{X} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *существует вещественное* $\delta > 0$, *такое, что если*

$$\tilde{g}(x, t) - g(x, t) < \delta \text{ для всех } (x, t) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D} \text{ и } |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta,$$

то любое решение модифицированной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = \tilde{g}(x(t), t) \text{ при } x(0) = \tilde{x}_0$$

$\tilde{x}(t)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon \text{ для всех } t \in \mathcal{D}.$$

Эта теорема может быть продолжена для случая системы дифференциальных уравнений. Более того, при несколько более сильных предположениях решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений является гладкой функцией от параметров уравнения и его начального условия.

Теорема В.13. О дифференцируемости решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. *Допустим, что функция* $g : \mathcal{X} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *дифференцируема по обоим своим аргументам и множество* $\mathcal{D}$ *компактно. Пусть функция* $x(t)$ *является решением задачи Коши для дифференциального уравнения* (В.25) *с начальным условием* $x(0) = x_0 \in \mathcal{X}$. *Тогда для любого вещественного* $\varepsilon > 0$ *и любой точки* $x_0 \in \mathcal{X}$ *существует вещественное* $\delta > 0$, *такое, что если*

$$|x_0' - x_0| < \delta \text{ для всех } (x, t) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D},$$

то любое решение $x'(t)$ *модифицированной задачи Коши*

$$\dot{x}(t) = g(x(t), t) \text{ при } x(0) = x_0'$$

удовлетворяет неравенству

$$|\dot{x}'(t) - \dot{x}(t)| < \varepsilon \text{ для всех } t \in \mathcal{D}.$$

В. 10. Разностные уравнения

Разностное уравнение первого порядка определяется по аналогии с дифференциальным уравнением следующим образом:

$$x(t + 1) = g(x(t), t),$$

где функция g: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Разностные уравнения более высоких порядков и системы разностных уравнений определяются аналогичным образом.

Решения разностных уравнений обладают множеством свойств, схожих со свойствами решений дифференциальных уравнений. Например, простое разностное уравнение вида:

$$x(t+1) = ax(t) + b$$

имеет решение, схожее с решением линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами. В частности, если мы зададим начальное условие $x(0) = x_0$, после рекуррентных подстановок получаем:

$$x(1) = ax_0 + b,$$
$$x(2) = a^2x_0 + ab + b$$

и так далее. Следовательно, общее решение такого разностного уравнения имеет следующий вид:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + bt, & \text{если } a = 1, \\ a^t\left(x_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Читатель может убедиться в том, что решение $x^* \equiv b/(1-a)$ является стационарным решением (если $a \neq 1$). Более того, из вида решения очевидно, что если $|a| < 1$, то первое слагаемое в решении сходится к нулю при $t \to \infty$, и $x(t) \to x^*$ при $t \to \infty$, что по существу означает устойчивость решения разностного уравнения. С другой стороны, если $|a| > 1$, то решение уравнения расходится от стационарного решения x^*.

Далее рассмотрим систему линейных разностных уравнений первого порядка

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{B.27}$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{A}$ — квадратная $n \times n$ вещественная матрица. Если матрица $\mathbf{A}$ обладает n различными вещественными собственными значениями, то решение системы разностных уравнений (B.27) очень схоже с решением системы дифференциальных уравнений, описанным в теореме B.5.

Теорема B.14. Решение системы линейных разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. *Предположим, что матрица* $\mathbf{A}$ *имеет* n *различных вещественных собственных значений* $\xi_1, \ldots, \xi_n$. *Тогда единственное решение системы разностных уравнений* (B.27) *с начальным значением* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ *имеет следующий вид:*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \xi_j^t \mathbf{v}_{\xi_j},$$

где векторы $\mathbf{v}_{\xi_j}$, ..., $\mathbf{v}_{\xi_n}$ *являются собственными векторами матрицы* **A**, *соответствующими собственным значениям* $\xi_1, ..., \xi_n$, *а значения констант* $c_1, ..., c_n$ *определяются из начального условия* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Доказательство. Доказательство теоремы следует из диагонализации матрицы **A**. Напомним, что, так как у нее n различных вещественных собственных значений, имеет место равенство $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$, где матрица **D** является диагональной матрицей с собственными значениями $\xi_1, ..., \xi_n$ на диагонали, а матрица $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_{\xi_j}, \dots, \mathbf{v}_{\xi_n})$ состоит из столбцов собственных векторов матрицы **A**, соответствующих этим собственным значениям. Положим $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$ и заметим, что

$$\mathbf{z}(t+1) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Ax}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz}(t) = \mathbf{Dz}(t). \qquad (B.28)$$

Представим вектор $\mathbf{z}(t)$ как $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), ..., z_n(t))$. Тогда, так как матрица **D** диагональная, из уравнения (B.28) следует, что $z_1(t) = c_1\xi_1^t, \dots, z_n(t) = c_n\xi_n^t$. Тогда, так как $\mathbf{x}(t) = \mathbf{Pz}(t)$, утверждение теоремы следует из умножения матрицы $(\mathbf{v}_{\xi_j}, \dots, \mathbf{v}_{\xi_n})$ на вектор решений $\mathbf{z}(t)$. ■

Для разностных уравнений также можно сформулировать аналог теоремы B.6. Матрица фундаментальных решений разностного уравнения $\mathbf{X}(t)$ определяется аналогично матрице фундаментальных решений дифференциального уравнения. Матрица переходов состояний также удовлетворяет условию $\Phi(t, s) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(s)^{-1}$ и $\Phi(t, t) = \mathbf{I}$. Далее рассмотрим следующую систему разностных уравнений первого порядка:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t). \qquad (B.29)$$

Решение такой системы разностных уравнений описано в следующей теореме.

Теорема B.15. Общее решение системы разностных уравнений первого порядка. *Решение системы разностных уравнений* (B.29) *с начальным условием* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ *имеет следующий вид:*

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t,\ 0)\mathbf{x}_0 + \sum_{s=0}^{t-1}\Phi(t,\ s+1)\mathbf{B}(s).$$

Доказательство. См. упражнение B.10. ■

Линеаризация системы нелинейных разностных уравнений ведет к аналогу теоремы B.7. Наконец, существование и единственность решения системы разностных уравнений доказывается несколько проще, чем для системы дифференциальных уравнений.

Теорема В.16. О существовании и единственности решения системы разностных уравнений первого порядка. *Рассмотрим следующую систему нелинейных разностных уравнений первого порядка:*

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)), \tag{B.30}$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ *и отображение* $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *выбрано произвольно. Допустим, что начальное условие задано как* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. *Тогда у системы разностных уравнений* (В.30) *существует единственное решение для всех* $t \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Значение $\mathbf{x}(1)$ при заданном значении $\mathbf{x}_0$ определяется единственным образом как $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)$. Действуя далее аналогичным образом, мы можем определить единственное значение $\mathbf{x}(t)$, которое удовлетворяет уравнению (В.30) для всех $t \in \mathbb{N}$. ■

Используя для разностных уравнений такой же метод перехода от уравнений высших порядков к системе уравнений первого порядка, что и для дифференциальных уравнений (см. упражнение В.3), приходим к теореме о существовании и единственности решения разностных уравнений высших порядков в том случае, если заданы подходящие начальные условия (см. упражнение В.11).

В.11. Упражнения

В.1. С помощью интегрирования по частям, использованного в теореме В.3, найдите значение интеграла $\int_a^b \log x dx$.

В.2. Рассмотрите домохозяйство с предпочтениями, заданными следующим образом:

$$U(0) = \int_0^\infty \exp(-\rho t) \log C(t) dt.$$

Предположите, что $C(0) = C_0$ и потребление $C(t)$ растет экспоненциально с постоянным темпом g, то есть $C(t) = \exp(gt)C(0)$. Найдите значение полезности домохозяйства $U(0)$.

В.3. Покажите, что дифференциальное уравнение порядка n (уравнение (В.3)) может быть приведено к системе n дифференциальных уравнений первого порядка. [Подсказка: положите $z_j(t) = d^j x(t)/dt^j$ для всех $j = 1, ..., n$.]

В.4. Покажите, что уравнение (В.12) задает общее решение дифференциального уравнения первого порядка (В.4).

В.5. Убедитесь в том, что система линейных дифференциальных уравнений (В.13) удовлетворяет условиям теоремы В.10.

В.6. Докажите уравнение (В.18).

В.7. Докажите уравнение (В.19).

В.8. Покажите, что если функции $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица в определении В.1, то $g(x, t)$ непрерывна по x.

В.9. В этом упражнении вам предстоит использовать метод решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными для того, чтобы описать семейство функций полезности с постоянным коэффициентом относительного неприятия риска. В частности, напомним, что мера относительного неприятия риска (Эрроу—Пратта) для дважды дифференцируемой функции полезности u задается следующим образом:

$$\mathcal{R}_u(c) = -\frac{u''(c)c}{u'(c)}.$$

Предположите, что $\mathcal{R}_u(c) = r > 0$, и положите $v(c) = u'(c)$. Тогда получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{\upsilon'(c)}{\upsilon(c)} = -\frac{r}{c}.$$

Решите это дифференциальное уравнение и опишите семейство функций полезности с постоянным коэффициентом относительного неприятия риска.

В.10. Докажите теорему В.15.

В.11. Рассмотрите следующее разностное уравнение порядка n:

$$x(t+n) = H(x(t+n-1), \ldots, x(t)),$$

где функция $H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Докажите, что если начальные значения $x(0), x(1), \ldots, x(n-1)$ заданы, то это уравнение имеет единственное решение для всех $t \in \mathbb{N}$.

Приложение C
Краткий обзор теории динамических игр

Это приложение посвящено краткому обзору основных определений, результатов и обозначений, используемых в теории повторяющихся динамических игр на бесконечном горизонте планирования. Мы предполагаем, что читатель уже знаком с основами теории игр и понятиями равновесия по Нэшу и равновесия по Нэшу, совершенного по подыграм. Обзор этих понятий, а также большей части материала, изложенного в этом приложении, может быть найден в любом учебнике по теории игр продвинутого уровня, например в книгах: [Myerson 1991, Fudenberg, Tirole 1994; Osborne, Rubinstein 1994]. В этом приложении мы остановимся на играх с полной информацией (или на так называемых играх *с совершенным мониторингом*). Игры такого типа мы рассматривали в параграфе 14.4, а также в главах 22 и 23.

C.1. Основные определения

Мы будем рассматривать следующий класс динамических игр на бесконечном горизонте планирования. Рассмотрим некоторое множество участников $\mathcal{N}$. Будем считать, что это множество конечно, а в том случае, когда оно бесконечно (в особенности если оно более чем счетно), на его структуру наложен ряд ограничений, которые позволяют игре оставаться несложной, поэтому варианты теорем, представленных далее, имеют место и в этом случае. В частности во многих экономических приложениях (в особенности в рассмотренных в главах 22 и 23) существует континуум игроков, но они разделены на конечное множество групп, поэтому игра может рассматриваться как игра между этим конечных числом групп. Поэтому мы остановимся на случае, когда множество $\mathcal{N}$ конечно и состоит из N игроков. У каждого игрока $i \in \mathcal{N}$ в каждый момент времени множество стратегий $A_i(k) \subset \mathbb{R}^{n_i}$ (где $n_i \in \mathbb{N}$), и в дополнение вектор $k \in K \subset \mathbb{R}^n$ является вектором состояния (где $n \in \mathbb{N}$), чье значение в момент времени t мы обозначим как $k(t)$. Обозначим общий элемент множества $A_i(k)$ в момент времени t как $a_i(t)$ и положим вектор $a(t) = (a_1(t), ..., a_N(t))$ *активным профилем* в момент времени t:

$$a(t) \in A(k(t)) = \prod_{i=1}^{n} A_i(k(t)).$$

Для обозначения вектора действий всех агентов, кроме агента i, мы будем использовать стандартное обозначение $a_{-i}(t) = (a_1(t), ..., a_{i-1}(t), a_{i+1}(t), ..., a_N(t))$. Тогда, немного злоупотребляя обозначениями, мы можем записать $a(t) = (a_i(t), a_{-i}(t))$. В соответствии с типом моделей, рассмотренных в основной части книги, множество действий каждого агента $A_i(k)$ является функцией лишь от переменной состояния k, но не зависит от момента времени.

Каждый участник игры обладает моментальной функцией полезности $u_i(k(t), a(t))$, где функция

$$u_i\colon K \times A \to \mathbb{R}$$

является непрерывной и ограниченной на всей области определения. Такое обозначение подчеркивает, что размер выигрыша каждого игрока зависит от действий всех игроков в текущем периоде времени (и не зависит от их прошлых действий) и от значения вектора переменных состояния, который мы обозначаем как $k(t)$. Действия агентов в прошлом влияют на текущий выигрыш только посредством их воздействия на значение вектора переменных состояния.

Как обычно предположим, что задача каждого агента в периоде времени t состоит в максимизации его дисконтированного выигрыша

$$U_i[t] = \mathbb{E}_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u_i(k(t+s),\ a(t+s)), \tag{C.1}$$

где норма дисконтирования $\beta \in (0, 1)$ и символ $\mathbb{E}_t$ обозначает условное математическое ожидание на информационном множестве периода времени t. Игры, которые мы рассмотрим в этом приложении, содержат возможную неопределенность о будущей динамике переменной состояния и стратегическую неопределенность, связанную с возможностью использования смешанных стратегий. При этом они не являются играми с *асимметричной информацией,* так как мы не рассматриваем в этой книге динамических игр с неполной или асимметричной информацией. Поэтому оператор математического ожидания $\mathbb{E}_t$ в уравнении (C.1) не содержит индекса i.

Динамика вектора переменных состояния $k(t)$ задается следующей марковской функцией перехода:

$$q(k(t+1) \mid k(t), a(t)), \tag{C.2}$$

которая описывает функцию плотности распределения вектора переменных состояния $k(t + 1)$ в следующем периоде времени, если в периоде t действия всех игроков были $a(t) \in \mathrm{A}(k(t))$ и вектор переменных состояния был равен $k(t) \in K$. Мы будем называть функцию перехода марковской, так как она зависит только от текущих действий игроков и текущего значения вектора переменных состояния. Очевидно, что она удовлетворяет следующему условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(k \mid k(t),\ a(t))dk = 1$$

для всех $k(t) \in K$ и для всех $a(t) \in A(k(t))$.

Далее опишем структуру информационных множеств, доступных участникам игры. Мы анализируем игры с совершенной возможностью наблюдения или с совершенным мониторингом, поэтому индивиды наблюдают реализацию всех прошлых действий. Тогда информационное множество в периоде времени t, доступное в это время всем участникам игры, имеет вид $h^t = (a(0), k(0), ..., a(t), k(t))$. Если мы допускаем использование смешанных стратегий, то история естественным образом включает в себя лишь реализацию смешанных стратегий, а не чистые стратегии. Далее обозначим множество всех возможных историй вплоть до периода времени t как H^t. Нетрудно увидеть, что любой элемент этого множества $h^t \in H^t$ соответствует некоторой подыгре данной игры[1].

Положим чистой стратегией игрока i в периоде времени t отображение

$$\sigma_i(t)\colon H^{t-1} \times K \to A_i,$$

то есть отображение, которое определяет выбор игрока при заданных полной истории h^{t-1} и текущем значении вектора переменных состояния $k(t) \in K$. Такая спецификация выглядит естественной, так как набор h^{t-1} и $k(t)$ полностью задают подыгру.

Смешанной стратегией игрока i в периоде времени t положим отображение

$$\sigma_i(t)\colon H^{t-1} \times K \to \Delta(A_i),$$

где множество $\Delta(A_i)$ состоит из всех распределений вероятности на множестве A_i, и для упрощения обозначений мы используем единый символ σ для чистых и смешанных стратегий. Рассмотрим набор стратегий игроков в бесконечной игре $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_N)$ и положим вектор $\sigma_i(t) = (\sigma_1(t), ..., \sigma_N(t))$ *набором стратегий, начиная с периода времени* t, индуцированным множеством стратегий в бесконечной игре σ. Рассмотрим множество всех доступных игроку I стратегий в бесконечной игре S_i и положим множество $S = \prod_{i=1}^{N} S_i$ множеством всех доступных наборов стратегий. Мы также будем

[1] Иногда полезно различать календарное время и этапы развития игры. В этом случае мы можем использовать символ h^t для обозначения истории вплоть до начала периода времени t и некоторую другую переменную, например, $j^t \in J^t$ для обозначения действий на этапе игры в периоде времени t. В этом случае полная история вплоть до периода t задается элементом множества $H^t \times J^t$. Однако в играх, рассмотренных здесь, такое различие не требуется.

использовать символ $S_i(t)$ для обозначения множества всех стратегий игрока i начиная с периода времени t. Очевидно, что $S(t)=\prod_{i=1}^{N} S_i(t)$ и $S_{-i}(t)=\prod_{j\neq i} S_j(t)$.

Определим соответствие наилучшего ответа стандартным образом:

$$BR(\sigma_{-i}(t)\mid h^{t-1}, k(t)) = \{\sigma_i(t) \in S_i(t):$$

функция (С.1) достигает максимума при заданном $\sigma_{-i}(t) \in S_{-i}(t)\}$.

Определение С.1. *Назовем* совершенным по подыграм равновесием (СПР) *набор стратегий* $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_N^*) \in S$, *такой, что* $\sigma_i^*(t) \in$ $\in BR(\sigma_{-i}^*(t)\mid h^{t-1}, k(t))$ *для всех* $(h^{t-1}, k(t)) \in H^{t-1} \times K$, *для всех* $i \in \mathcal{N}$ *и для всех* $t = 0, 1, \ldots$.

Таким образом, СПР требует, чтобы стратегии игроков были наилучшими ответами друг на друга при всех возможных реализациях истории, что является минимальным требованием. «Сильным» (или, в зависимости от контекста, «слабым») требованием к понятию СПР считается условие о том, что стратегии игроков являются отображениями из всего множества историй. Следовательно, во многих бесконечно повторяющихся играх существует значительное число СПР. Эта множественность иногда делает СПР привлекательным объектом анализа равновесия в игре. Одна из возможностей состоит в поиске стационарных СПР, такой выбор мотивируется тем, что исходная игра является стационарной (то есть выигрыши игроков не зависят от времени). Другая возможность состоит в поиске наилучших СПР (то есть тех равновесий, которые находятся на границе Парето для экономики).

Другим наиболее популярным типом равновесия в динамических играх является совершенное марковское равновесие (СМР). СМР отличается от СПР тем, что в нем стратегии зависят только от переменных, влияющих на выигрыш агентов. Такой выбор концепции равновесия связан с подходом, используемым в динамическом программировании, где, как мы увидели в главах 6 и 16, оптимальный выбор является отображением из множества векторов переменных состояния в множество векторов переменных управления. СМР можно рассматривать как расширение этого подхода для теоретико-игровых задач. Преимущество СМР перед СПР состоит в том, что в общем случае многие бесконечные игры имеют меньшее число СМР по сравнению с СПР. С другой стороны, недостатком является то, что в анализе, направленном на поиск СМР, многие интересные с экономической точки зрения СПР не учитываются.

Мы можем определить историю, связанную с выигрышами агентов, в периоде времени t как минимальное (самое приблизительное) разбиение $\mathcal{P}^t$ множества H^t, такое, что любые два элемента множества $\mathcal{P}^t$ ведут к различным выигрышам и выбору стратегии хотя бы для одного участника игры при фиксированном наборе стратегий всех остальных игроков.

В этом случае очевидно, что при заданной марковской функции перехода (С.2) любой $k(t) \in K(t)$ является состоянием, связанным с выигрышем агентов. Тогда определим чистую марковскую стратегию следующим образом:

$$\hat{\sigma}_i\colon K \to A_i,$$

и смешанную марковскую стратегию как

$$\hat{\sigma}_i\colon K \to \Delta(A_i).$$

Определим множество марковских стратегий игрока i как $\hat{S}_i$. Тогда очевидно, что $\hat{S} = \prod_{i=1}^{N} \hat{S}_i$.

Заметим, что мы отбросили зависимость от времени t, так как время не является частью состояния, связанной с выигрышами. Это свойство — следствие того, что игра ведется на бесконечном горизонте планирования. Если горизонт планирования конечен, то время является частью состояния, связанной с выигрышами. Мы также можем рассмотреть более общую игру на бесконечном горизонте планирования, в которой функция выигрыша имеет вид $u_i(t, k(t), a_i(t))$. В этом случае время является частью состояния, связанной с выигрышем.

Заметим также, что отображения $\hat{\sigma}_i$ и σ_i определены на разных множествах. В частности отображение $\hat{\sigma}_i$ связывает действие (или вероятностное распределение на множестве действий) с каждым состоянием $k \in K$, а отображение σ_i делает это для каждой подыгры, то есть для всех $(h^{t-1}, k(t)) \in H^{t-1} \times K$ и для всех t. Для сравнения марковских и немарковских стратегий (в частности стратегий с немарковскими отклонениями) удобно рассмотреть *продолжение* марковской стратегии на область определения отображения σ_i. В частности положим отображение $\hat{\sigma}'_i$ продолжением отображения $\hat{\sigma}_i$, если

$$\hat{\sigma}'_i\colon K \times H^{t-1} \to \Delta(A_i)$$

и $\hat{\sigma}'_i(k, h^{t-1}) = \hat{\sigma}_i(k)$ для всех $h^{t-1} \in H^{t-1}$ и для всех $k(t) \in K$. Определим множество продолженных марковских стратегий для игрока i как $\hat{S}'_i$ и положим $\hat{S}' = \prod_{i=1}^{N} \hat{S}'_i$. Более того, как и ранее, обозначим стратегию игрока i, индуцированную стратегией $\hat{\sigma}'_i$, начиная с периода t, как $\hat{\sigma}'_i(t)$ и набор стратегий всех остальных участников игры, индуцированный их марковскими стратегиями $\hat{\sigma}'_{-i}$ как $\hat{\sigma}'_{-i}(t)$. Далее мы будем называть марковскими стратегиями как отображение $\hat{\sigma}_i$, так и его продолжение $\hat{\sigma}'_i$.

Определение С.2. *Назовем* совершенным марковским равновесием (СМР) *набор марковских стратегий $\hat{\sigma}^* = \left(\hat{\sigma}_1^*, \ldots, \hat{\sigma}_N^*\right) \in \hat{S}$, такой, что продолжения этих стратегий удовлетворяют условию $\hat{\sigma}_i'^*(t) \in \in BR(\hat{\sigma}'^*_{-i}(t) \mid h^{t-1}, k(t))$ для всех $(h^{t-1}, k(t)) \in H^{t-1} \times K$, для всех $i \in \mathcal{N}$ и для всех $t = 0, 1, \ldots$.*

Таким образом, единственное отличие СМР от СПР заключается в том, что первое из них состоит из марковских стратегий. Здесь важно отметить, что отклонения не обязаны быть марковскими. Это свойство неявно следует из продолжения марковских стратегий до $\hat{\sigma}_i'^* \in \hat{S}_i'$ и из требования $\hat{\sigma}_i'^*(t) \in BR(\hat{\sigma}'^*_{-i}(t) \mid h^{t-1}, k(t))$ (в котором наилучший ответ формируется при истории h^{t-1}). В частности в СМР марковская стратегия $\hat{\sigma}_i^*$ должна быть наилучшим ответом на набор стратегий $\hat{\sigma}'^*_{-i}$ среди всех стратегий $\sigma_i(t)$: $H^{t-1} \times K \to \Delta(A_i)$, доступных в периоде времени t.

Нетрудно увидеть, что любое СМР является СПР, так как продолжения марковских стратегий удовлетворяют условию $\hat{\sigma}_i'^*(t) \in BR(\hat{\sigma}'^*_{-i}(t) \mid h^{t-1}, k(t))$, откуда следует, что стратегия $\hat{\sigma}_i'^*$ является наилучшим ответом на набор стратегий $\hat{\sigma}'^*_{-i}$ во всех подыграх, то есть для всех $(h^{t-1}, k(t)) \in H^{t-1} \times K$ и для всех $t = 0, 1, \ldots$.

С. 2. Некоторые основные результаты

Напомним, что $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \ldots, \sigma_N(t))$ обозначает игру для участника i начиная с периода t и, следовательно, $\sigma_i(t) = (a_i(t), \sigma_i^*(t+1))$ определяет стратегию, включающую в себя действие $a_i(t)$ в периоде времени t и игру, заданную стратегией $\sigma_i^*(t+1)$ впоследствии.

Теорема С.1. Принцип одношаговых отклонений. *Предположим, что моментальные функции выигрышей всех участников игры равномерно ограничены, то есть существует вещественное $M < \infty$, такое, что*

$$\sup_{k \in K, a \in A(k)} u_i(a, k) < M$$

для всех $i \in \mathcal{N}$. Тогда набор стратегий $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_N^*) \in S$ является СМР (набор стратегий $\hat{\sigma}^* = (\hat{\sigma}_1^*, \ldots, \hat{\sigma}_N^*) \in \hat{S}$ является СМР), если и только если для всех $i \in \mathcal{N}$, $(h^{t-1}, k(t)) \in H^{t-1} \times K$ в любом периоде времени t и для всех $a_i(t) \in A(k(t))$ стратегия

$$\sigma_i^*(t) = (a(t), \sigma_i^*(t+1))$$

$[\hat{\sigma}'_i(t) = (a_{it}, \hat{\sigma}'^*_i(t+1))]$ *не приносит игроку i большего выигрыша, чем стратегия* $\sigma^*_i(t)$ $[\hat{\sigma}'^*_i(t)]$.

Доказательство (набросок). Зафиксируем набор стратегий всех игроков, кроме игрока i. Тогда его задача эквивалентна некоторой задаче динамической оптимизации. Так как для всех $\{k(t+s),\ a(t+s)\}_{s=0}^{T}$ и для всех t

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{s=T}^{\infty}\beta^s u_i(k(t+s),\ a(t+s)) = 0$$

(этот предел следует из равномерной ограниченности моментальных функций выигрыша и неравенства $\beta < 1$), мы можем применить модификацию принципа оптимальности (теорема 16.2). В частности, используя рассуждения, аналогичные рассуждениям при доказательстве теоремы 16.2, из предположения о равномерной ограниченности получаем, что оптимальный план для индивида i при фиксированном наборе стратегий всех остальных участников игры должен оставаться оптимальным для игры, начиная со следующего периода времени, при оптимальном выборе текущего действия. Более того, любой неоптимальный план в некотором периоде времени не будет удовлетворять принципу оптимальности. ■

Из этой теоремы следует, что мы можем проверить, является ли стратегия игрока лучшим ответом на набор стратегий всех остальных участников игры, анализируя лишь одноепериодные отклонения и оставляя все остальные элементы стратегии отклоняющегося игрока неизменными. Предположение о равномерной ограниченности моментальных функций выигрыша может быть ослаблено до требования об их непрерывности на бесконечности, которое по существу означает, что дисконтированный выигрыш сходится к нулю на любой истории.

Лемма С.1. *Допустим, что набор стратегий* $\hat{\sigma}'^*_{-i}$ *является марковским (то есть продолжением марковского набора стратегий* $\hat{\sigma}^*_{-i}$*) и что для всех* $h^{t-1} \in H^{t-1}$ *и* $k(t) \in K$ $BR(\hat{\sigma}'^*_{-i} \mid k(t),\ h^{t-1}) \neq \varnothing$. *Тогда существует марковская стратегия* $\hat{\sigma}'^*_i \in BR(\hat{\sigma}'^*_{-i} \mid k(t),\ h^{t-1})$.

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного. Допустим, что набор стратегий $\hat{\sigma}'^*_{-i}$ является марковским. Чтобы получить противоречие, предположим, что существует немарковская стратегия σ^*_i, приносящая игроку i в ответ на $\hat{\sigma}'^*_{-i}$ строго больший выигрыш, чем любая марковская стратегия. Тогда по теореме С.1 существуют t, $\tilde{t} > t$, $k \in K$, $h^{t-1} \in H^{t-1}$, и $\tilde{h}^{t-1} \in \tilde{H}^{t-1}$, такие, что продолжения игры на этих двух историях при заданном $k \in K$ не совпадают, то есть

$$\sigma_i^*[t](k,\ h^{t-1}) \in BR(\hat{\sigma}_{-i}'^* \mid k, h^{t-1}),\ \sigma_i^*[\tilde{t}](k,\ \tilde{h}^{\tilde{t}-1}) \in BR(\hat{\sigma}_{-i}'^* \mid k, \tilde{h}^{\tilde{t}-1})$$

$$\text{и } \sigma_i^*[t](k,\ h^{t-1}) \neq \sigma_i^*[\tilde{t}](k,\ \tilde{h}^{\tilde{t}-1}),$$

где $\sigma_i^*[t](k,\ h^{t-1})$ обозначает стратегию игрока i начиная с периода времени t, при векторе переменных состояния k и истории h^{t-1}. Далее построим стратегию $\hat{\sigma}_i'^*[\tilde{t}]$, такую, что $\hat{\sigma}_i'^*[\tilde{t}](k,\ \tilde{h}^{\tilde{t}-1}) = \sigma_i^*[t](k,\ h^{t-1})$. Так как набор стратегий $\hat{\sigma}_{-i}'^*$ марковский, $\hat{\sigma}_{-i}'^*[t]$ не зависит от h^{t-1} и $\tilde{h}^{\tilde{t}-1}$, и, следовательно

$$\hat{\sigma}_i'^*[t](k,\ h^{t-1}) = \hat{\sigma}_i'^*[t](k,\ \tilde{h}^{\tilde{t}-1}) \in BR(\hat{\sigma}_{-i}'^* \mid k,\ h^{t-1}) \ \cap \ BR\left(\hat{\sigma}_{-i}'^* \mid k,\ \tilde{h}^{\tilde{t}-1}\right).$$

Повторяя эти рассуждения для всех случаев, когда стратегия σ_i^* не является марковской, получаем, что марковская стратегия $\hat{\sigma}_i'^*$ является лучшим ответом на набор стратегий $\hat{\sigma}_{-i}'^*$. ■

В этой лемме утверждается, что если другие игроки используют марковские стратегии, то для каждого игрока существует марковская стратегия, которая является лучшим ответом. Это не значит, что других лучших ответов не существует, но так как среди них имеется марковская стратегия, эта лемма позволяет нам надеяться на существование СМР.

Теорема С.2. О существовании совершенного марковского равновесия. *Предположим, что множества K и $A_i(k)$ конечны при всех $k \in K$. Тогда в динамической игре существует СМР $\hat{\sigma}^* = \left(\hat{\sigma}_1^*,\ \ldots,\ \hat{\sigma}_N^*\right)$.*

Доказательство (набросок). Рассмотрим продолжение игры, в котором множеством игроков являются элементы множества $\mathcal{N} \times K(i, k)$, функции выигрыша заданы функциями выигрыша в исходной игре для игрока i в состоянии k и множество стратегий равно $A_i(k)$. Тогда множество $\mathcal{N} \times K$ конечно, и так как все $A_i(k)$ также конечны, множеством смешанных стратегий $\Delta(A_i(k))$ для игрока $(i,\ k)$ является симплекс на множестве $A_i(k)$. Следовательно, мы можем использовать стандартное доказательство существования равновесия по Нэшу, основанное на теореме Какутани о неподвижной точке (теорема А.18) и заключить, что в этом расширении игры существует равновесие $\left(\hat{\sigma}_{(i,k)}^*\right)_{(i,k)\in\mathcal{N}\times K}$.

Далее, возвращаясь к исходной игре, построим для каждого игрока $i \in \mathcal{N}$ стратегию $\hat{\sigma}_i^*$, так, что $\hat{\sigma}_i^*(k) = \hat{\sigma}_{(i,k)}^*$, то есть $\hat{\sigma}_i^*: K \to \Delta(A_i)$. Такой набор стратегий является марковским. Рассмотрим, как и ранее, продолжение стратегий $\hat{\sigma}^*$ до $\hat{\sigma}'^*$, то есть положим $\hat{\sigma}'^*(k,\ h^{t-1}) = \hat{\sigma}^*(k)$ для всех $h^{t-1} \in H^{t-1}$, $k(t) \in K$, $i \in \mathcal{N}$ и для всех t. Тогда по построению при заданном наборе стратегий $\hat{\sigma}'^{*}_{-i}$ стратегию $\hat{\sigma}'^{*}_{i}$ невозможно улучшить с помощью отклонения ни в одном состоянии $k \in K$. В этом случае из теоремы С.1 следует, что стратегия $\hat{\sigma}'^{*}_{i}$ является лучшим ответом на набор стратегий $\hat{\sigma}'^{*}_{-i}$ среди всех марковских стратегий. Тогда из леммы С.1 следует, что ни для одного игрока $i \in \mathcal{N}$ не существует немарковской стратегии, приносящей в ответ на $\hat{\sigma}'^{*}_{-i}$ строго больший выигрыш, чем стратегия $\hat{\sigma}'^{*}_{i}$. Отсюда следует, что множество стратегий $\hat{\sigma}'^{*}$ составляет СМР в этой игре. ■

Аналогичная теорема о существовании марковского равновесия может быть доказана для счетных множеств K и $A_i(k)$, а также для бесконечных несчетных множеств. При этом в последнем случае необходим ряд дополнительных ограничений, которые являются техническими по своей природе. Однако так как они не играют роли в дальнейшем изложении материала, мы не будем на них останавливаться.

Для формулировки следующей теоремы построим множества всех стратегий в СМР $\hat{\Sigma} = \{\hat{\sigma}^* \in \hat{S}\colon \hat{\sigma}^*$ — СМР$\}$ и всех стратегий в СПР $\Sigma^* = \{\sigma \in S\colon \sigma^*$ — СПР$\}$. Положим $\hat{\Sigma}'$ расширением множества $\hat{\Sigma}$ включающим в себя продолжения на множество историй. В частности напомним, что $\hat{\sigma}'_i\colon K \times H^{t-1} \to \Delta(A_i)$, так, что $\hat{\sigma}'_i(k, h^{t-1}) = \hat{\sigma}'_i(k)$ для всех $h^{t-1} \in H^{t-1}$ *и для всех* $k(t) \in K$, *и положим*

$$\hat{\Sigma}' = \left\{ \begin{matrix} \hat{\sigma}' \in S\colon \hat{\sigma}'_i(k, h^{t-1}) = \hat{\sigma}'_i(k) \quad \text{для всех} \quad h^{t-1} \in H^{t-1}\ k(t) \in K, \\ \text{и для всех } i \in \mathcal{N} \text{ и } \textit{СМР } \hat{\sigma} \end{matrix} \right\}.$$

Теорема С.3. О совершенных марковских и совершенных по подыграм равновесиях. $\hat{\Sigma}' \subset \Sigma^*$.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из наблюдения о том, что если набор стратегий $\hat{\sigma}^*$ составляет СМР, то для продолжения этого набора $\hat{\sigma}'^{*}$ стратегия $\hat{\sigma}'^{*}_{i}$ является лучшим ответом на набор стратегий $\hat{\sigma}'^{*}_{-i}$ для всех $h^{t-1} \in H^{t-1}$ $k(t) \in K$ и для всех $i \in \mathcal{N}$. Тогда набор стратегий $\hat{\sigma}'^{*}_{i}$ является равновесием, совершенным по подыграм. ■

Из этой теоремы следует, что каждый набор стратегий в СМР соответствует набору стратегий в СПР и каждая равновесная траектория игры, поддерживаемая СМР, может быть поддержана СПР.

Теорема С.4. О существовании совершенного по подыграм равновесия. *Предположим, что множества K и $A_i(k)$ конечны при всех $k \in K$. Тогда в динамической игре существует СПР $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_N^*)$.*

Доказательство. В теореме С.2 утверждается существование СМР. Тогда, так как по теореме С.3 любое СМР является СПР, отсюда следует существование СПР. ■

Если множества K и $A_i(k)$ несчетны, то существование СПР в чистых стратегиях может быть достигнуто с помощью предположения о компактности и выпуклости множеств K и $A_i(k)$ и квазивогнутости функций $U_i[t]$ и $\sigma_i[t]$ для всех $i \in \mathcal{N}$ (в дополнение к предположениям о непрерывности выше). Если множества K и $A_i(k)$ не выпуклы или функции $U_i[t]$ не являются квазивогнутыми, то существование равновесия в смешанных стратегиях может быть достигнуто с помощью других мягких дополнительных ограничений.

Наконец, широко известная теорема о СПР в повторяющихся играх может быть продолжена на случай динамической игры. Обозначим распределение вероятностей на равновесной траектории, индуцированной набором стратегий σ как $p(a|\sigma)$ со стандартным условием $\int_{a \in A} p(a \mid \sigma)da = 1$ для всех $\sigma \in S$, где множество A является множеством всех доступных действий. Немного злоупотребляя обозначениями, мы будем называть $p(a, \sigma)$ действием на равновесной траектории, индуцированным набором стратегий σ. Тогда положим максимальный выигрыш игрока $i \in \mathcal{N}$ при $k(t) = k$ и $k(t + s)$ заданным функцией переходов (С.2)

$$U_i^M(k) = \min_{\sigma_{-i} \in \sum_{-i}} \max_{\sigma_i \in \sum_i} \mathbb{E}\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u_i(k(t+s),\, a(t+s))$$

и минимальный выигрыш игрока $i \in \mathcal{N}$ в СПР при начальном состоянии $k \in K$

$$U_i^N(k) = \min_{\sigma \in \sum} \mathbb{E}\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u_i(k(t+s),\, a(t+s)). \tag{C.3}$$

Другими словами, уравнение (С.3) определяет выигрыш игрока i в том равновесии, в котором он принимает минимальное значение (начиная с состояния k).

Теорема С.5. О потерях в худшем равновесии. *Допустим, что набор стратегий $\sigma^* \in S$ является СПР в чистых стратегиях с распределением действий на равновесной траектории $p(a \mid \sigma^*)$. Тогда существует СПР $\sigma^{**} \in S$, такое, что $p(a \mid \sigma^*) = p(a \mid \sigma^{**})$ и в нем выигрыш игрока i начиная с периода времени t после реализации истории $h^{t-1} \in H^{t-1}$, в том случае, когда он первым отклоняется от стратегии σ^{**}, равен $U_i^N(k)$, если состояние в следующем периоде $k(t + 1) = k$.*

Доказательство. Если набор стратегий σ^* является СПР, то ни один игрок не желает отклоняться от них. Допустим, что игрок i отклоняется от σ^* в периоде времени t после реализации истории $h^{t-1} \in H^{t-1}$ в состоянии $k(t) = k$. Обозначим выигрыш начиная с периода t при состоянии $k(t)$ и истории h^{t-1} как $U_i^d[t](k(t), h^{t-1} \mid \sigma^*)$. Также обозначим равновесный выигрыш при стратегиях σ^* как $U_i^c[t]\left(k(t), h^{t-1} \mid \sigma^*\right)$. Тогда набор стратегий σ^* может быть СПР только в том случае, если

$$U_i^c[t](k(t), h^{t-1} \mid \sigma^*) \geq$$
$$\geq \max_{a_i(t) \in A_i(k)} \mathbb{E}\left\{u_i(a_i(t), a_{-i}(\sigma^*_{-i}) \mid k(t), h^{t-1}) + \right.$$
$$\left. +\beta U_i^d[t+1](k(t+1), h^t \mid \sigma^*)\right\},$$

где $u_i(a_i(t), a_{-i}(\sigma^*_{-i}) \mid k(t), h^{t-1}, \sigma^*)$ составляет моментальный выигрыш индивида i, если он выбирает действие $a_i(t)$ в состоянии $k(t)$ после реализации истории h^{t-1} и другие участники игры выбирают действия (возможно смешанные), индуцированные набором стратегий σ^*_{-i} (которые мы обозначили как $a_{-i}(\sigma^*_{-i})$). Напомним, что выигрыш начиная с периода времени t после отклонения равен $U_i^d[t+1](k(t+1), h^t \mid \sigma^*)$, где состояние $k(t+1)$ определяется функцией переходов $q(k(t+1) \mid k(t), a_i(t), a_{-i}(\sigma^*_{-i}))$ и история h^t включает в себя действия $a_i(t)$, $a_{-i}(\sigma^*_{-i})$. Продолжение игры после отклонения является СПР, так как набор стратегий σ^*_{-i} задает действия в СПР для всех игроков, кроме игрока i, во всех подыграх, и лучшим выбором игрока i является равновесная стратегия.

Из определений СПР и минимального равновесного выигрыша игрока i имеем:

$$U_i^d[t+1](k(t+1), h^t \mid \sigma^*) \geq U_i^N(k(t+1)).$$

Из двух предыдущих неравенств следует, что

$$U_i^c[t](k(t), h^{t-1} \mid \sigma^*) \geq$$
$$\geq \max_{a_i(t) \in A_i(k)} \mathbb{E}\left\{u_i(a_i(t), a_{-i}(\sigma^*_{-i}) \mid k(t), h^{t-1}) + \beta U_i^N(\mathrm{k}(\mathrm{t}))\right\}.$$

Следовательно, мы можем построить набор стратегий σ^{**}, которые совпадают с σ^* во всем, кроме того что после отклонения игрока i от σ^* после реализации истории $h^{t-1} \in H^{t-1}$ мы заменяем $U_i^d[t+1](k(t+1), h^t \mid \sigma^*)$ на $U_i^N(k(t+1))$. Так как $U_i^N(k(t+1))$ является выигрышем в СПР, набор стратегий σ^{**} также составляет СПР. ■

В этой теореме утверждается, что при описании равновесных выигрышей в СПР мы можем ограничить внимание лишь наборами стратегий с наибольшими равновесными потерями. Далее приведен более сильный вариант этой теоремы.

Теорема С.6. О потерях при минимакс выигрышах. *Допустим, что набор стратегий $\sigma^* \in S$ является СПР в чистых стратегиях с распределением действий на равновесной траектории $p(a \mid \sigma^*)$. Тогда если норма дисконтирования β достаточно близка к единице, то в динамической игре существует СПР $\sigma^{**} \in S$ (возможно совпадающий с σ^*), в котором $p(a \mid \sigma^*) = p(a \mid \sigma^{**})$ и выигрыш игрока i начиная с периода t в том случае, если он первый отклоняется от σ^{**}, в этом периоде времени после реализации истории $h^{t-1} \in H^{t-1}$ в состоянии $k(t) = k$ будет $U_i^M(k)$.*

Доказательство. Доказательство схоже с доказательством теоремы С.5, однако в нем вместо функции $U_i^N(k)$ используется $U_i^M(k)$. Если норма дисконтирования β достаточно велика, то минимальный выигрыш игрока i $U_i^M(k)$ может быть реализован в СПР (см. работы: [Abreu 1988; Fudenberg, Tirole 1994]). ■

С.3. Приложение: повторяющиеся игры с совершенной информацией

Описание СПР и СМР в повторяющихся играх с совершенной информацией выглядит достаточно просто. Допустим, что одна и та же игра повторяется бесконечное число раз, то есть

$$U_i[t] = \mathbb{E}_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u_i(a(t+s)),$$

что отличается от функции (С.1) лишь тем, что в этом случае моментальная функция выигрыша не зависит от переменной состояния $k(t)$. Будем называть игру $\{u_i(a),\ a \in A\}$ *этапом игры*. Определим минимальный выигрыш игрока i на этом этапе игры как $m_i = \min_{a_{-i}} \max_{a_i} u_i(a)$. Рассмотрим множество $V \subset \mathbb{R}^N$ векторов всех возможных выигрышей N игроков, где элемент v_i соответствует выигрышу игрока i (то есть дисконтированный выигрыш равен $\upsilon_i/(1-\beta)$).

Теорема С.7. «Народная» теорема для повторяющихся игр. *Предположим, что все множества $\{A_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ компактны. Тогда для любого вектора $v \in V$, такого, что $v_i > m_i$ для всех $i \in \mathcal{N}$, существует $\bar{\beta} \in [0, 1)$, такое, что для всех $\beta > \bar{\beta}$ вектор v может быть реализован как вектор равновесных выигрышей в СПР.*

Доказательство (набросок). Построим следующие стратегии наказания для любого отклонения: первый игрок i, который отклоняется, получает минимакс выигрыш (который может быть реализован в СПР) m_i. Тогда выигрыш при любом отклонении $a \in A_i$ равен

$D_i(a \mid \beta) \le d_i + \beta m_i/(1-\beta)$, где d_i составляет максимальный выигрыш, который может получить игрок i при отклонении. Он конечен, так как функция u_i непрерывна, поэтому ограничена на компактном множестве A_i. Тогда v_i может быть реализован, если

$$\frac{\upsilon_i}{1-\beta} \ge d_i + \beta \frac{m_i}{(1-\beta)}.$$

Так как d_i конечно и $v_i > m_i$, существует $\bar{\beta}_i \in [0, 1)$, такое, что для всех $\beta > \bar{\beta}_i$ это неравенство верно. Тогда положим $\bar{\beta} = \max_{i \in \mathcal{N}} \bar{\beta}_i$, что завершает доказательство теоремы. ■

Теорема С.8. О единственном совершенном марковском равновесии в повторяющихся играх. *Предположим, что на этапе игры существует единственное равновесие a^*. Тогда в повторяющейся игре существует единственное марковское равновесие, в котором в каждом периоде времени реализуется a^*.*

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно, так как множество K состоит из единственного элемента и этап игры обладает единственным равновесием. ■

Последняя теорема очевидна, но она является очень важной. В повторяющихся играх отсутствует вектор переменных состояния и стратегии не могут зависеть от чего-либо. Следовательно, при поиске СМР мы можем выбирать лишь стратегии, которые являются лучшими ответами на этапе игры.

Пример С.1. Дилемма заключенного. Рассмотрим следующую стандартную игру, которую называют дилеммой заключенного. Заметим, что она имеет множество приложений в политической экономии.

	D	C
D	(0, 0)	(4, −1)
C	(−1, 4)	(2, 2)

Этап игры обладает единственным равновесием, в данном случае (D, D). Далее предположим, что игра повторяется бесконечное число раз и норма дисконтирования обоих агентов равна β. Тогда единственным СМР в такой игре будет пара стратегий (D, D) в каждом периоде времени.

С другой стороны, если $\beta \ge 1/2$, то пара стратегий (C, C) в каждом периоде времени может быть реализована как СПР. Чтобы убедиться в этом, напомним, что нам достаточно рассмотреть лишь минимакс наказание, которым в данном случае является $(0, 0)$. Выбор стратегий (C, C) ведет к выигрышу $2/(1-\beta)$ для каждого участника игры, а лучшее отклонение позволяет получить выигрыш 4 в текущем периоде времени и 0 впоследствии. Следовательно, условие $\beta \geq 1/2$ достаточно для того, чтобы следующий угрожающий выбор действий приводил к стратегиям (C, C) в каждом периоде времени: каждый из участников играет стратегию C, если история h^t включает в себя лишь пары (C, C), и стратегию D в противном случае.

Нетрудно понять, почему такой выбор «вечной кары» не является СМР. Такой выбор действий зависит от того, отклоняется ли один из игроков в некотором периоде времени в прошлом. Эта история не связана с выигрышами на будущих этапах игры при заданном наборе действий остальных участников игры. ■

С.4. Упражнения

С.1. Простым приложением материала этого приложения является анализ *игр с общими ресурсами*. Рассмотрите общество, состоящее из $N + 1 < \infty$ индивидов, каждый из которых наделен в периоде времени t функцией выигрыша $\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \log(c_i(t+s))$, где $\beta \in (0, 1)$ и переменная $c_i(t)$ обозначает потребление игрока $i \in \mathcal{N}$ в периоде времени t. Общество владеет общими ресурсами, которые можно рассматривать как запас капитала в периоде t. Обозначим их как $K(t)$. Динамика капитала определяется следующим нестохастическим законом:

$$K(t+1) = AK(t) - \sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(t),$$

где $A > 0$, значение $K(0)$ задано и в каждом периоде времени выполняется неравенство $K(t) \geq 0$. Этап игры выглядит следующим образом: в каждом периоде времени все участники игры одновременно выбирают потребление $\{c_i(t)\}_{i \in \mathcal{N}}$. Если $\sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(t) \leq AK(t)$, то каждый индивид потребляет $c_i(t)$. $\sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(t) > AK(t)$, то $AK(t)$ распределяется поровну между всеми $N + 1$ участниками игры.

(а) Вначале предположите, что значения потребления $\{c_i(t)\}_{i \in \mathcal{N}}$ выбираются беневолентным центральным планировщиком, который максимизирует общий дисконтированный выигрыш всех индивидов

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \log(c_i(t+s)).$$

Сформулируйте задачу динамического программирования в этом случае и покажите, что функция стоимости планировщика $V(K)$ при заданном значении капитала K определена единственным образом, непрерывна, вогнута и дифференцируема при $S \in (0, AK)$. Также покажите, что объем сбережений как функция от капитала имеет вид $\pi(K) = \beta AK$, и выведите уравнение для функции стоимости $V(K)$ в явном виде.

(b) Далее рассмотрите СМР в этой игре. Вначале покажите, что выбор потребления $c_i(0) = AK(0)$ всеми участниками игры является СМР. Затем остановитесь на непрерывном и симметричном СМР, в котором каждый агент выбирает стратегию потребления $c^N(K)$, если запас капитала в экономике равен K. Из соображений симметрии следует, что если все агенты выбирают такую стратегию и игрок i выбирает потребление c, то совокупные сбережения равны $S = AK - Nc^N(K) - c$. Используя это наблюдение, покажите что функция стоимости индивида имеет следующий вид:

$$V^N(K) = \max_{S \le AK - Nc^N(K)} \left\{ \log(AK - Nc^N(K) - S) + \beta V^N(S) \right\}. \quad (C.4)$$

Предположите, что все функции дифференцируемы и выведите необходимое условие первого порядка для задачи максимизации (C.4). Покажите, что в игре существует симметрическое равновесие, в котором равновесный уровень сбережений в экономике равен

$$\pi(K) = \frac{\beta A}{1 + N - \beta N} K.$$

Убедитесь в том, что это единственное решение задачи максимизации (C.4). Как оно изменяется при увеличении параметра N?

(c) Покажите, что если $\beta A > 1 > \beta A/(1 + N - \beta N)$, то в решении задачи для агента экономика растет во времени, а в СМР количество ресурсов сокращается во времени.

(d) Затем покажите, что при любой норме дисконтирования β в этой игре всегда существует СПР, в котором реализуются индивидуальные решения агентов. Объясните этот результат.

(e) Далее предположите, что $\beta A = 1$ и снова остановитесь на поиске СМР. Предположите, что игра стартует с начальным значением капитала $K(0)$ и рассмотрите следующий набор разрывных марковских стратегий:

$$c_i(K) = \begin{cases} \dfrac{\beta AK}{1+N}, & \text{если} \quad K \ge K(0), \\ K, & \text{если} \quad K < K(0). \end{cases}$$

Покажите, что если все участники игры, кроме игрока i', выбирают такую стратегию, то эта стратегия также является лучшим ответом для игрока i' и на равновесной траектории реализуются индивидуальные решения агентов. Покажите, что если $\beta A \neq 1$, то это утверждение не верно. Объясните почему.

Приложение D
Список теорем

В этом приложении для справки приведен список теорем, представленных в различных главах. Многие из этих теорем содержат математические результаты, использованные в различных частях книги. Некоторые из них содержат экономические результаты, которые являются более общими и более часто применяемыми, чем результаты, которые в тексте книги называются утверждениями. В целях экономии места мы не приводим дополнительный список математических утверждений, содержащихся в леммах, следствиях и фактах.

Глава 2

2.1. Теорема Эйлера

2.2. Теорема об устойчивости решения системы линейных дифференциальных уравнений.

2.3. Теорема о локальной устойчивости решения системы нелинейных дифференциальных уравнений.

2.4. Теорема об устойчивости решения линейного дифференциального уравнения.

2.5. Теорема о локальной устойчивости решения нелинейного дифференциального уравнения.

2.6. Теорема Узавы I.

2.7. Теорема Узавы II.

Глава 5

5.1. Теорема Дебре—Мантеля—Зонненштайна.

5.2. Теорема Гормана об агрегировании.

5.3. Теорема о существовании нормативного репрезентативного домохозяйства.

5.4. Теорема о репрезентативной фирме.

5.5. Первая теорема экономики благосостояния I: экономика с конечным числом домохозяйств.

5.6. Первая теорема экономики благосостояния I: экономика с бесконечным числом домохозяйств.

5.7. Вторая теорема экономики благосостояния.

5.8. Теорема об эквивалентности последовательной и непоследовательной торговли с ценными бумагами Эрроу.

Глава 6

6.1. Теорема об эквивалентности последовательной и рекурсивной формулировок.

6.2. Принцип оптимальности в задаче динамического программирования.

6.3. Теорема о существовании решения задачи динамического программирования.

6.4. Теорема о вогнутости функции стоимости.

6.5. Теорема о монотонности функции стоимости.

6.6. Теорема о дифференцируемости функции стоимости.

6.7. Теорема о сжимающем отображении.

6.8. Приложения теоремы о сжимающем отображении.

6.9. Достаточные условия Блэквелла для сжимающего отображения.

6.10. Уравнение Эйлера и условие трансверсальности.

6.11. Теорема о существовании решения нестационарной задачи.

6.12. Уравнение Эйлера и условие трансверсальности для нестационарной задачи.

Глава 7

7.1. Необходимые условия I внутреннего оптимума при свободных граничных точках.

7.2. Необходимые условия II внутреннего оптимума при фиксированных граничных точках.

7.3. Необходимые условия III внутреннего оптимума при граничных точках, заданных неравенствами.

7.4. Упрощенный вариант принципа максимума Понтрягина.

7.5. Достаточные условия оптимума Мангасаряна.

7.6. Достаточные условия оптимума Эрроу.

7.7. Принцип максимума Понтрягина для задачи с несколькими переменными.

7.8. Достаточные условия оптимума для задачи с несколькими переменными.

7.9. Принцип максимума Понтрягина для задачи с бесконечным горизонтом планирования.

7.10. Уравнение Гамильтона—Якоби—Беллмана.

7.11. Достаточные условия оптимума для задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом планирования.

7.12. Условие трансверсальности для задачи с бесконечным горизонтом планирования.

7.13. Принцип максимума для задачи с бесконечным горизонтом планирования с дисконтированием.

7.14. Достаточные условия оптимума для задачи с бесконечным горизонтом планирования с дисконтированием.

7.15. Теорема о существовании решения задачи оптимального управления.

7.16. Теорема о вогнутости функции стоимости в задаче оптимального управления.

7.17. Теорема о дифференцируемости функции стоимости в задаче оптимального управления.

7.18. Теорема о седловой устойчивости для системы линейных дифференциальных уравнений.

7.19. Теорема о седловой устойчивости для системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Глава 10

10.1. Теорема об отделении для инвестиций в человеческий капитал.

Глава 16

16.1. Теорема об эквивалентности итеративной и рекурсивной формулировок.

16.2. Принцип оптимальности для стохастической задачи динамического программирования.

16.3. Теорема о существовании решения стохастической задачи динамического программирования.

16.4. Теорема о вогнутости функции стоимости.

16.5. Теорема о монотонности функции стоимости по переменным состояния.

16.6. Теорема о дифференцируемости функции стоимости.

16.7. Теорема о монотонности функции стоимости по стохастическим переменным.

16.8. Уравнение Эйлера и условие трансверсальности.

16.9. Теорема о существовании решения задачи для задачи с марковским процессом.

16.10. Теорема о непрерывности функции стоимости для задачи с марковским процессом.

16.11. Теорема о вогнутости функции стоимости для задачи с марковским процессом.

16.12. Теорема о монотонности функции стоимости для задачи с марковским процессом.

16.13. Теорема о дифференцируемости функции стоимости для задачи с марковским процессом.

Глава 22

22.1. Теорема о медианном избирателе.

22.2. Теорема о медианном избирателе при стратегическом голосовании.

22.3. Теорема Даунса о сходимости политики.

22.4. Расширенная теорема о медианном избирателе.

22.5. Расширенная теорема Даунса о сходимости политики.

22.6. Теорема о вероятностном голосовании.

Приложение А

А.1. Теорема о свойствах открытых и замкнутых в метрических пространствах.

А.2. Теорема об открытых множествах и непрерывности в метрических пространствах.

А.3. Теорема о промежуточном значении.

А.4. Теорема об открытых множествах и непрерывности в топологических пространствах.

А.5. Теорема о непрерывности и сходимости сетей в топологических пространствах.

А.6. Теорема Гейне—Бореля.

А.7. Теорема Больцано—Вейерштрасса.

А.8. Теорема об образе компакта при непрерывном отображении в топологических пространствах.

А.9. Теорема Вейерштрасса.

А.10. Теорема о равномерной непрерывности на компакте.

А.11. Теорема о непрерывности проекции в топологии прямого произведения.

А.12. Теорема о непрерывности дисконтированной функции полезности в топологии прямого произведения.

А.13. Теорема Тихонова.

А.14. Критерий компактности в метрическом пространстве.

А.15. Теорема Арцела—Асколи.

А.16. Теорема Бержа о максимуме.

A.17. Теорема о свойствах множества точек максимума.

A.18. Теорема Какутани о неподвижной точке.

A.19. Теорема Брауэра о неподвижной точке.

A.20. Теорема Лагранжа о среднем значении.

A.21. Правило Лопиталя.

A.22. Теорема Тейлора I.

A.23. Теорема Тейлора II для функций нескольких переменных.

A.24. Теорема об обратной функции.

A.25. Теорема о неявной функции.

A.26. Теорема о непрерывности линейного функционала в нормированном векторном пространстве.

A.27. Геометрическая теорема Хана—Банаха.

A.28. Теорема о разделяющей гиперплоскости.

A.29. Теорема о седловой точке.

A.30. Теорема Куна—Такера.

A.31. Теорема об огибающей.

Приложение B

B.1. Фундаментальная теорема интегрального исчисления I.

B.2. Фундаментальная теорема интегрального исчисления II.

B.3. Теорема об интегрировании по частям.

B.4. Правило Лейбница.

B.5. Теорема о решении системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

B.6. Теорема о решении системы линейных дифференциальных уравнений в общем виде.

B.7. Теорема Гробмана—Хартмана об устойчивости решения системы нелинейных дифференциальных уравнений.

B.8. Теорема Пикара I: о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

B.9. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения на компактном множестве I.

B.10. Теорема Пикара II: о существовании и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

B.11. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений на компактном множестве II.

B.12. Теорема о непрерывности решения дифференциального уравнения.

B.13. Теорема о дифференцируемости решения дифференциального уравнения.

В.14. Теорема о решении системы линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

В.15. Теорема об общем решении системы линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

В.16. Теорема о существовании и единственности решения разностного уравнения.

Приложение C

C.1. Принцип одношаговых отклонений.

C.2. Теорема о существовании совершенного марковского равновесия в конечной динамической игре.

C.3. Теорема о совершенных марковских и совершенных по подыграм равновесиях.

C.4. Теорема о существовании совершенного по подыграм равновесия в конечной динамической игре.

C.5. Теорема о потерях в худшем равновесии.

C.6. Теорема о потерях при минимакс выигрышах.

C.7. «Народная» теорема для повторяющихся игр.

C.8. Теорема о единственности совершенного марковского равновесия в повторяющихся играх.

Библиография

Бланшар О., Фишер С. (2014). *Лекции по макроэкономике.* М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС.

Бродель Ф. (2006–2007). *Материальная цивилизация, экономика и капитализм, XV–XVIII вв.* Т. 1–3. М.: Весь мир.

Вебер М. (1990). Протестантская этика и дух капитализма // Вебер М. Избранные произведения. М.: Прогресс.

Даймонд Д. (2012). *Ружья, микробы и сталь. Судьбы человеческих обществ.* М.: АСТ.

Колмогоров А., Фомин С. (1976). *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука.

Мальтус Т. (1993). Опыт о законе народонаселения // *Антология экономической классики.* М.: Эконов, Ключ.

Маршалл А. (1993). *Принципы экономической науки.* Т. 1–3. М.: Прогресс.

Мас-Колелл А., Уинстон М., Грин Д. (2016). *Микроэкономическая теория.* М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС.

Мокир Д. (2014). *Рычаг богатства. Технологическая креативность и экономический прогресс.* М.: Изд-во Института Гайдара.

Норт Д. (1997). *Институты, институциональные изменения и функционирование экономики.* М.: Фонд экономической книги «Начала».

Обстфельд М., Рогофф К. (2015). *Основы международной макроэкономики.* М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС.

Патнэм Р. (1996). *Чтобы демократия сработала: гражданские традиции в современной Италии.* М.: Ad Marginem.

Померанц К. (2017). *Великое расхождение: Китай, Европа и создание современной мировой экономики.* М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС.

Ромер Д. (2015). *Высшая макроэкономика.* М.: Издательский дом Высшей школы экономики.

Хелпман Э. (2012). *Загадка экономического роста.* М.: Издательство Института Гайдара.

Шумпетер Й. (1982). *Теория экономического развития.* М.: Прогресс.

Шумпетер Й. (1995). *Капитализм, социализм и демократия.* М.: Экономика.

Эрроу К. Дж. (2004). *Коллективный выбор и индивидуальные ценности.* М.: ГУ — ВШЭ.

Abernathy, William J. (1978) *The Productivity Dilemma: Roadblock to Innovation in the Automotive Industry.* Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Abraham, Kathrine G., and Jon Haltiwanger (1995) "Real Wages and the Business Cycle." *Journal of Economic Literature* 33: 1215–1264.

Abramowitz, Moses (1957) "Resources on Output Trends in the United States since 1870." *American Economic Review* 46: 5–23.

Abreu, Dilip (1988) "On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting." *Econometrica* 56: 383–396.

Acemoglu, Daron (1995) "Reward Structures and the Allocation of Talent." *European Economic Review* 39: 17–33.

—— (1996) "A Microfoundation for Social Increasing Returns in Human Capital Accumulation." *Quarterly Journal of Economics* 111: 779–804.

—— (1997a) "Training and Innovation in an Imperfect Labor Market." *Review of Economic Studies* 64(2): 445–464.

—— (1997b) "Matching, Heterogeneity and the Evolution of Income Distribution." *Journal of Economic Growth* 2(1): 61–92.

—— (1998) "Why Do New Technologies Complement Skills? Directed Technical Change and Wage Inequality." *Quarterly Journal of Economics* 113: 1055–1090.

—— (2002a) "Directed Technical Change." *Review of Economic Studies* 69: 781–809.

—— (2002b) "Technical Change, Inequality and the Labor Market." *Journal of Economic Literature* 40(1): 7–72.

—— (2003a) "Patterns of Skill Premia." *Review of Economic Studies* 70: 199–230.

—— (2003b) "Labor- and Capital-Augmenting Technical Change." *Journal of European Economic Association* 1(1): 1–37.

—— (2003c) "Why Not a Political Coase Theorem?" *Journal of Comparative Economics* 31: 620–652.

—— (2005) "Politics and Economics inWeak and Strong States."*Journal of Monetary Economics* 52: 1199–1226.

—— (2007a) "Equilibrium Bias of Technology." *Econometrica* 75(5): 1371–1410.

—— (2007b) "Modeling Inefficient Institutions." In *Advances in Economic Theory, Proceedings of World Congress 2005*, Richard Blundell, Whitney Newey, and Torsten Persson (editors). Cambridge: Cambridge University Press, pp. 341–380.

—— (2008a) "Oligarchic versus Democratic Societies." *Journal of the European Economic Association* 6: 1–44.

—— (2008b) "Innovation by Incumbents and Entrants." MIT Economics Department-Working Paper. Massachusetts Institute of Technology.

Acemoglu, Daron, and Ufuk Akcigit (2006) "State Dependent IPR Policy." NBERWorking Paper 12775. National Bureau of Economic Research.

Acemoglu, Daron, and Joshua D. Angrist (2000) "HowLarge Are Human Capital Externalities? Evidence from Compulsory Schooling Laws." *NBER Macroeconomics Annual* 2000: 9–59.

Acemoglu, Daron, and Veronica Guerrieri (2008) "Capital Deepening and Non-Balanced Economic Growth." *Journal of Political Economy* 116: 467–498.

Acemoglu, Daron, and Simon Johnson (2005) "Unbundling Institutions." *Journal of Political Economy* 113: 949–995.

—— (2007) "Disease and Development." *Journal of Political Economy* 115: 925–985.

Acemoglu, Daron, and Joshua Linn (2004) "Market Size in Innovation: Theory and Evidence from the Pharmaceutical Industry." *Quarterly Journal of Economics* 119: 1049–1090.

Acemoglu, Daron, and James A. Robinson (2000a) "Why Did the West Extend the Franchise? Democracy, Inequality and Growth in Historical Perspective." *Quarterly Journal of Economics* 115: 1167–1199.

—— (2000b) "Political Losers as a Barrier to Economic Development."*American Economic Review* 90: 126–130.

—— (2006a) *Economic Origins of Dictatorship and Democracy.* New York: Cambridge University Press.

—— (2006b) "Economic Backwardness in Political Perspective." *American Political Science Review* 100: 115–131.

—— (2008) "Persistence of Power, Elites and Institutions." NBER Working Paper 12108. National Bureau of Economics Research. Forthcoming in *American Economic Review* 98: 267–293.

Acemoglu, Daron, and Jaume Ventura (2002) "The World Income Distribution." *Quarterly Journal of Economics* 117: 659–694.

Acemoglu, Daron, and Fabrizio Zilibotti (1997) "Was Prometheus Unbound by Chance? Risk, Diversification and Growth." *Journal of Political Economy* 105: 709–751.

—— (1999) "Information Accumulation in Development." *Journal of Economic Growth* 1999(4): 5–38.

—— (2001) "Productivity Differences." *Quarterly Journal of Economics* 116: 563–606.

Acemoglu, Daron, Philippe Aghion, and Fabrizio Zilibotti (2006) "Distance to Frontier, Selection, and Economic Growth." *Journal of the European Economic Association* 4(1): 37–74.

Acemoglu, Daron, Pol Antras, and Elhanan Helpman (2007) "Contracts and Technology Adoption." *American Economic Review* 97: 916–943.

Acemoglu, Daron, Simon Johnson, and James A. Robinson (2001) "The Colonial Origins of Comparative Development: An Empirical Investigation." *American Economic Review* 91: 1369–1401.

—— (2002) "Reversal of Fortune: Geography and Institutions in the Making of the Modern World Income Distribution." *Quarterly Journal of Economics* 117: 1231–1294.

—— (2005a) "Institutions as a Fundamental Cause of Long-Run Growth." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 384–473.

—— (2005b) "The Rise of Europe: Atlantic Trade, Institutional Change and Growth." *American Economic Review* 95: 546–579.

Aczel, J. (1966) *Lectures on Functional Equations and Their Applications.* New York: Academic Press.

Aghion, Philippe, and Patrick Bolton (1997) "A Theory of Trickle-Down Growth and Development." *Review of Economic Studies* 64: 151–172.

Aghion, Philippe, and Peter Howitt (1992) "A Model of Growth through Creative Destruction." *Econometrica* 60: 323–351.

—— (1994) "Growth and Unemployment."*Review of Economic Studies* 61: 477–494.

—— (1998) *Endogenous Growth Theory.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

—— (2008) *The Economics of Growth.* Cambridge, Mass: MIT Press, forthcoming.

Aghion, Philippe, Peter Howitt, and Gianluca Violante (2004) "General Purpose Technology and Wage Inequality." *Journal of Economic Growth* 7: 315–345.

Aghion, Philippe, Christopher Harris, Peter Howitt, and John Vickers (2001) "Competition, Imitation, and Growth with Step-by-Step Innovation." *Review of Economic Studies* 68: 467–492.

Aghion, Philippe, Nick Bloom, Richard Blundell, Rachel Griffith, and Peter Howitt (2005) "Competition and Innovation: An Inverted-U Relationship." *Quarterly Journal of Economics* 120: 701–728.

Aiyagari, S. Rao (1993) "Uninsured Indiosyncratic Risk and Aggregate Saving." Federal Reserve Bank of Minneapolis Working Paper 502.

—— (1994) "Uninsured Indiosyncratic Risk and Aggregate Saving." *Quarterly Journal of Economics* 109: 659–684.

Alesina, Alberto, and Dani Rodrik (1994) "Distributive Politics and Economic Growth." *Quarterly Journal of Economics* 109: 465–490.

Alfaro, Laura, Sebnem Kalemli-Ozcan, and Vadym Volosovych (2005) "Why Doesn't Capital Flow from Rich to Poor Countries? An Empirical Investigation." University of Houston, mimeo.

Aliprantis, Charalambos, and Kim Border (1999) *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide.* New York: Springer-Verlag.

Allen, Franklin, and Douglas Gale (1991) "Arbitrage, Short Sales and Financial Innovation." *Econometrica* 59: 1041–1068.

Allen, Robert C. (2004) "Agriculture during the Industrial Revolution: 1700–1850." In *Cambridge Economic History of Modern Britain,* Roderick Floud and Paul A. Johnson (editors). Cambridge: Cambridge University Press, pp. 96–116.

Andreoni, James (1989) "Giving with Impure Altruism: Applications to Charity and Ricardian Equivalence." *Journal of Political Economy* 97: 1447–1458.

Angrist, Joshua D. (1995) "The Economic Returns to Schooling in the West Bank and Gaza Strip." *American Economic Review* 85: 1065–1087.

Angrist, Joshua D., Victor Lavy, and Analia Schlosser (2006) "NewEvidence on the Causal Link between the Quantity and Quality of Children." Massachusetts Institute of Technology, mimeo.

Antras, Pol (2005) "Incomplete Contracts and the Product Cycle." *American Economic Review* 95: 1054–1073.

Apostol, Tom M. (1975) *Mathematical Analysis,* 2nd edition. Reading, Mass: Addison-Wesley.

Araujo, A., and Jose A. Scheinkman (1983) "Maximum Principle and Transversality Condition for Concave Infinite Horizon Economic Models." *Journal of Economic Theory* 30: 1–16.

Armington, Paul S. (1969) "A Theory of Demand for Products Distinguished by Place and Production." *International Monetary Fund Staff Papers* 16: 159–178.

Arrow, Kenneth J. (1951) *Social Choice and Individual Values.* New York: Wiley.

—— (1962) "The Economic Implications of Learning by Doing." *Review of Economic Studies* 29: 155–173.

—— (1964) "The Role of Security in Optimal Allocation of Risk Bearing." *Reviewof Economic Studies* 31: 91–96.

—— (1968) "Applications of Control Theory to Economic Growth." In *Mathematics of Decision Sciences,*George B. Dantzig and Arthur F. Veinott (editors). Providence, R.I.: American Mathematical Society.

Arrow, Kenneth J., and Mordecai Kurz (1970) *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy.* Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Arrow, Kenneth J., Hollis B. Chenery, Bagicha S. Minhas, and Robert Solow (1961) "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency." *Review of Economics and Statistics* 43: 225–250.

Ashton, Thomas Southcliffe (1969) *The Industrial Revolution: 1760–1830.* Oxford: Oxford University Press.

Atkeson, Andrew (1991) "International Lending with Moral Hazard and Risk of Repudiation." *Econometrica* 59: 1069–1089.

Atkeson, Andrew, and Ariel Burstein (2007) "Innovation, Firm Dynamics and International Trade." University of California, Los Angeles, mimeo.

Atkeson, Andrew, and Patrick Kehoe (2002) "Paths of Development for Early and Late Boomers in a Dynamic Heckscher-Ohlin Model." Federal Reserve Bank of Minneapolis, mimeo.

Atkinson, Anthony, and Joseph Stiglitz (1969) "A New View of Technological Change." *Economic Journal* 79: 573–578.

Aumann, Robert J., and Lloyd S. Shapley (1974) *Values of Non-Atomic Games.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Austen-Smith, David, and Jeffrey S. Banks (1999) *Positive Political Theory I: Collective Preference.* Ann Arbor: University of Michigan Press.

Autor, David, Lawrence Katz, and Alan Krueger (1998) "Computing Inequality: Have Computers Changed the Labor Market?" *Quarterly Journal of Economics* 113: 1169–1214.

Azariadis, Costas (1993) *Intertemporal Macroeconomics.* London: Blackwell.

Azariadis, Costas, and Allan Drazen (1990) "Threshold Externalities in Economic Development." *Quarterly Journal of Economics* 105: 501–526.

Backus, David, Patrick J. Kehoe, and Timothy J. Kehoe (1992) "In Search of Scale Effects in Trade and Growth." *Journal of Economic Theory* 58: 377–409.

Baily, Martin N., Charles Hulten, and David Campbell (1992) "The Distribution of Productivity in Manufacturing Plants." *Brookings Papers on Economic Activity: Microeconomics* 187–249.

Bairoch, Paul (1988) *Cities and Economic Development: From the Dawn of History to the Present,* translated by Christopher Braider. Chicago: University of Chicago Press.

Bairoch, Paul, Jean Batou, and Pierre Chèvre (1988) *La Population des villes Européennes de 800 a 1850: Banque de Données et Analyse Sommaire des Résultats.* Geneva: Centre d'histoire économique Internationale de l'Universite de Genève, Libraire Droz.

Banerjee, Abhijit V., and Esther Duflo (2003) "Inequality and Growth: What Can the Data Say?" *Journal of Economic Growth* 8: 267–299.

—— (2005) "Economic Growth through the Lenses of Development Economics." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 384–473.

Banerjee, Abhijit V., and Andrew Newman (1991) "Risk Bearing and the Theory of Income Distribution." *Review of Economic Studies* 58: 211–235.

—— (1993) "Occupational Choice and the Process of Development." *Journal of Political Economy* 101: 274–298.

—— (1998) "Information, the Dual Economy and Development." *Review of Economic Studies* 65: 631–653.

Banfield, Edward C. (1958) *The Moral Basis of a Backward Society.* Chicago: University of Chicago Press.

Barro, Robert J. (1974) "Are Government Bonds Net Wealth?" *Journal of Political Economy* 81: 1095–1117.

—— (1991) "Economic Growth in a Cross Section of Countries." *Quarterly Journal of Economics* 106: 407–443.

—— (1997) *Determinants of Economic Growth: A Cross Country Empirical Study.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

—— (1999) "Determinants of Democracy." *Journal of Political Economy* 107: S158–S183.

Barro, Robert J., and Gary S. Becker (1989) "Fertility Choice in a Model of Economic Growth." *Econometrica* 57: 481–501.

Barro, Robert J., and Jong-Wha Lee (2001) "International Data on Educational Attainment: Updates and Implications." *Oxford Economic Papers* 53: 541–563.

Barro, Robert J., and Rachel McCleary (2003) "Religion and Economic Growth." NBER-Working Paper 9682. National Bureau of Economics Research.

Barro, Robert J. and Xavier Sala-i-Martin (1991) "Convergence across States and Regions." *Brookings Papers on Economic Activity* 1: 107–182.

—— (1992) "Convergence." *Journal of Political Economy* 100: 223–251.

—— (2004) *Economic Growth.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Bartelsman, Eric J., and Mark Doms (2000) "Understanding Productivity: Lessons from Longitudinal Microdata." *Journal of Economic Literature* 38: 569–594.

Basu, Susanto, and David Weil (1998) "Appropriate Technology and Growth." *Quarterly Journal of Economics* 113: 1025–1054.

Baum, R. F. (1976) "Existence Theorems for Lagrange Control Problems with Unbounded Time Domain." *Journal of Optimization Theory and Applications* 19: 89–116.

Baumol, William J. (1967) "Macroeconomics of Unbalanced Growth: The Anatomy of Urban Crisis." *American Economic Review* 57: 415–426.

—— (1986) "Productivity Growth, Convergence, and Welfare: What the Long-Run Data Show." *American Economic Review* 76: 1072–1085.

Baxter, Marianne, and Mario J. Crucini (1993) "Explaining Saving-Investment Correlations." *American Economic Review* 83: 416–436.

Becker, Gary S. (1965) "A Theory of the Allocation of Time." *Economic Journal* 75: 493–517.

—— (1981) *A Treatise on the Family.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Becker, Gary S., and Robert J. Barro (1988) "A Reformulation of the Economic Theory of Fertility." *Quarterly Journal of Economics* 103: 1–25.

Becker, Robert, and John Harvey Boyd (1997) *Capital Theory, Equilibrium Analysis and Recursive Utility.* Oxford: Blackwell.

Becker, Gary S., Kevin M. Murphy, and Robert Tamura (1990) "Human Capital, Fertility, and Economic Growth." *Journal of Political Economy* 98(part 2): S12–S37.

Bellman, Richard (1957) *Dynamic Programming.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Benabou, Roland (1996) "Heterogeneity, Stratification, and Growth: Macroeconomic Implications of Community Structure and School Finance." *American Economic Review* 86: 584–609.

—— (2000) "Unequal Societies: Income Distribution and the Social Contract." *American Economic Review* 90: 96–129.

—— (2005) "Inequality, Technology and the Social Contract" In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 1595–1638.

Bencivenga, Valerie, and Bruce Smith (1991) "Financial Intermediation and Endogenous Growth." *Review of Economic Studies* 58: 195–209.

Benhabib, Jess, and Mark M. Spiegel (1994). "The Role of Human Capital in Economic Development: Evidence from Aggregate Cross-Country Data." *Journal of Monetary Economics* 34: 143–173.

Ben-Porath, Yoram (1967) "The Production of Human Capital and the Life Cycle of Earnings." *Journal of Political Economy* 75: 352–365.

Benveniste, Lawrence M., and Jose A. Scheinkman (1979) "On the Differentiability of theValue Function in Dynamic Models of Economics." *Econometrica* 47: 727–732.

—— (1982) "Duality Theory for Dynamic Organization Models of Economics: The Continuous Time Case." *Journal of Economic Theory* 27: 1–19.

Berge, Claude (1963) *Topological Spaces.* New York: MacMillan.

Bernard, Andrew, and Bradford Jensen (2004) "Why Some Firms Export." *Review of Economics and Statistics* 86: 561–569.

Bernard, Andrew, Jonathan Eaton, Bradford Jensen, and Samuel Kortum (2003) "Plants and Productivity in International Trade." *American Economic Review* 93: 1268–1290.

Bewley, Truman F. (1977) "The Permanent Income Hypothesis: A Theoretical Formulation." *Journal of Economic Theory* 16: 252–292.

—— (1980) "The Optimum Quantity of Money." In *Models of Monetary Economies,* John H. Kareken and Neil Wallace (editors). Minneapolis, Minn., Federal Reserve Bank of Minneapolis, pp. 169–210.

—— (2007) *General Equilibrium, Overlapping Generations Models, and Optimal Growth Theory*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Billingsley, Patrick (1995) *Probability and Measure,* 3rd edition. New York: Wiley.

Bils, Mark J. (1985) "Real Wages over the Business Cycle: Evidence from Panel Data." *Journal of Political Economy* 93: 666–689.

Black, Duncan (1948) *The Theory of Committees and Elections.* London: Cambridge University Press.

Black, Sandra E., and Lisa Lynch (2005) "Measuring Organizational Capital in the New Economy." University of California, Los Angeles, mimeo.

Black, Sandra E., Paul J. Devereux, and Kjell Salvanes (2005) "The More the Merrier? The Effect of Family Size and Birth Order on Education." *Quarterly Journal of Economics* 120: 669–700.

Blackwell, David (1965) "Discounted Dynamic Programming."*Annals of Mathematical Statistics* 36: 226–235.

Blanchard, Olivier J. (1979) "Speculative Bubbles, Crashes and Rational Expectations." *Economics Letters* 3: 387–389

—— (1985) "Debt, Deficits, and Finite Horizons." *Journal of Political Economy* 93: 223–247.

—— (1997) "The Medium Run" *Brookings Papers on Economic Activity* 2: 89–158.

Blanchard, Olivier J., and Stanley Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Bloom, David E., and Jeffrey D. Sachs (1998) "Geography, Demography, and Economic Growth in Africa." *Brookings Papers on Economic Activity* 2: 207–295.

Blundell, Richard, Rachel Griffith, and Jon Van Reenen (1999) "Marketshare, Market Value, and Innovation in a Panel of British Manufacturing Firms." *Review of Economic Studies 56: 529–554.*

Boldrin, Michele, and David K. Levine (2003) "Innovation and the Size of the Market." University of Minnesota and University of California, Los Angeles, mimeo.

Boserup, Ester (1965) *The Conditions of Agricultural Progress.* Chicago: Aldine.

Bourguignon, Fraŋcois, and Christian Morrison (2002) "Inequality amongWorld Citizens: 1820–1992." *American Economic Review* 92: 727–744.

Bourguignon, Fraŋcois, and Thierry Verdier (2000) "Oligarchy, Democracy, Inequality and Growth." *Journal of Development Economics* 62: 285–313.

Boyce, William E., and Richard C. DiPrima (1977) *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 3rd edition. New York: Wiley.

Braudel, Fernand (1973). *Capitalism and Material Life: 1400–1800* translated by Miriam Kochan. New York: Harper and Row.

Broadberry, Stephen, and Bishnupriya Gupta (2006) "The Early Modern Great Divergence:Wages, Prices and Economic Development in Europe and Asia 1500–1800." CEPR Discussion Paper 4947. Centre for Economic Policy Research.

Brock, William A., and Leonard J. Mirman (1972) "Optimal Economic Growth under Uncertainty: Discounted Case." *Journal of Economic Theory* 4: 479–513.

Browning, Martin, and Thomas F. Crossley (2001) "The Lifecycle Model of Consumption and Saving." *Journal of Economic Perspectives* 15: 3–22.

Bryant, Victor (1985) *Metric Spaces, Iteration and Application.*Cambridge: Cambridge University Press.

Buera, Francisco, and Joseph Kaboski (2006) "The Rise of the Service Economy." Northwestern University, mimeo.

Bulow, Jeremy I., and Kenneth Rogoff (1989a) "A Constant Recontracting Model of Sovereign Debt." *Journal of Political Economy* 97: 155–178.

—— (1989b) "Sovereign Debt: Is to Forgive to Forget?" *American Economic Review* 79: 43–50.

Caballero, Ricardo J. (1990) "Consumption Puzzles and Precautionary Savings." *Journal of Monetary Economics* 25: 113–136.

—— (1999) "Aggregate Investment." In *Handbook of Macroeconomics,* volume 1, John B. Taylor and Michael Woodford (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 813–862.

Caballero, Ricardo J., and Mohammad Hammour (1999) "Jobless Growth: Appropriability, Factor Substitution and Unemployment." *Carnegie-Rochester Conference Proceedings* 48: 51–94.

Caputo, Michael (2005) *Foundations of Dynamic Economic Analysis: Optimal Control Theory and Applications.* Cambridge: Cambridge University Press.

Card, David (1999) "The Causal Effect of Education on Earnings." In *Handbook of Labor Economics,* volume 3A, Orley Ashenfelter and David Card (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 1801–1863.

Carter, Susan B., Scott Sigmund Gartner, Michael R. Haines, Alan L. Olmstead, Richard Sutch, and Gavin Wright, editors (2006) *Historical Statistics of the United States Earliest Times to the Present: Millennial Edition.* New York: Cambridge University Press.

Caselli, Francesco (1999) "Technological Revolutions." *American Economic Review* 87: 78–102.

—— (2005) "Accounting for Cross-Country Income Differences." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 680–743.

Caselli, Francesco, andWilbur John Coleman (2001a) "Cross-Country Technology Diffusion: The Case of Computers." *American Economic Review* 91: 328–335.

—— (2001b) "The U.S. Structural Transformation and Regional Convergence: A Reinterpretation." *Journal of Political Economy* 109: 584–616.

—— (2005) "The World Technology Frontier." *American Economic Review* 96: 499–522.

Caselli, Francesco, and James Feyrer (2007) "The Marginal Product of Capital." *Quarterly Journal of Economics* 123: 535–568.

Caselli, Francesco, and Jaume Ventura (2000) "A Representative Household Theory of Distribution." *American Economic Review* 90: 909–926.

Caselli, Francesco, Gerard Esquivel, and Fernando Lefort (1996) "Reopening the Convergence Debate: A New Look at Cross-Country Growth Empirics." *Journal of Economic Growth* 40: 363–389.

Cass, David (1965) "Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation." *Review of Economic Studies* 32: 233–240.

—— (1972) "On Capital Overaccumulation in the Aggregate Neoclassical Model of Economic Growth: A Complete Characterization." *Journal of Economic Theory* 4: 200–223.

Ceruzzi, Paul E. (2003) *A History of Modern Computing.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Cesari, Lamberto (1966) "Existence Theorems for Weak and Usual Optimal Solutions in Lagrange Problems with Unilateral Constraints. I." *Transactions of the American Mathematical Society* 124: 369–412.

Chamberlain, Gary, and Charles A. Wilson (2000) "Optimal Intertemporal Consumption under Uncertainty." *Review of Economic Dynamics* 3: 365–395.

Chamberlin, Edward (1933) *The Theory on Monopolistic Competition.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Chandler, Tertius (1987) *Four Thousand Years of Urban Growth: An Historical Census.* Lewiston, N.Y.: St. David's University Press.

Chari, V. V., and Patrick J. Kehoe (1990) "Sustainable Plans." *Journal of Political Economy* 98: 783–802.

Chari, V. V., Patrick J. Kehoe and Ellen McGrattan (1997) "The Poverty of Nations: A Quantitative Exploration." Federal Reserve Bank of Minneapolis, mimeo.

Chenery, Hollis (1960) "Patterns of Industrial Growth," *American Economic Review* 5: 624–654.

Chiang, Alpha C. (1992) *Elements of Dynamic Optimization.* New York: McGraw-Hill.

Chirinko, Robert S., and Debdulal Mallick (2007) "The Marginal Product of Capital: A Persistent International Puzzle." Camry University, mimeo.

Ciccone, Antonio, and Giovanni Peri (2006) "Identifying Human Capital Externalities: Theory with Applications." *Review of Economic Studies* 73: 381–412.

Coatsworth, John H. (1993) "Notes on the Comparative Economic History of Latin America and the United States." In *Development and Underdevelopment in America: Contrasts in Economic Growth in North and Latin America in Historical Perpsective,* Walter L. Bernecker and Hans Werner Tobler (editors). New York: Walter de Gruyter.

Collier, Ruth B. (2000) *Paths towards Democracy: The Working Class and Elites in Western Europe and South America.* New York: Cambridge University Press.

Conrad, Jon M. (1999) *Resource Economics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Conway, John B. (1990) *A Course in Functional Analysis,* 2nd edition. New York: Springer-Verlag.

Cooley, Thomas F., editor (1995) *Frontiers of Business Cycle Research.* Princeton N.J.: Princeton University Press,

Coughlin, Peter J. (1992) *Probabilistic Voting Theory.* New York: Cambridge University Press.

Cunat, Alejandro, and Marco Maffezoli (2001) "Growth and Interdependence under Complete Specialization." Universita Bocconi, mimeo.

Curtin, Philip D. (1989) *Death by Migration: Europe's Encounter with the Tropical World in the Nineteenth Century.* New York: Cambridge University Press.

—— (1998) *Disease and Empire: The Health of European Troops in the Conquest of Africa.* New York: Cambridge University Press.

Dasgupta, Partha, and Geoffrey Heal (1979) *Economic Theory and Exhaustible Resources.* Cambridge: Cambridge University Press.

Dasgupta, Partha, and Joseph Stiglitz (1980) "Uncertainty, Industrial Structure, and the Speed of R&D." *Bell Journal of Economics* 11: 1–28.

David, Paul A. (1975) *Technical Choice, Innovation and Economic Growth: Essays on American and British Experience in the Nineteenth Century.* London: Cambridge University Press.

Davis, Ralph (1973) *The Rise of the Atlantic Economies.* Ithaca, N.Y.: Cornell University Press.

Davis, Steven, and John Haltiwanger (1991) "Wage Dispersion between and within U.S. Manufacturing Plants, 1963–86." *Brookings Papers on Economic Activity: Microeconomics* 115–200.

Davis, Y. Donald, and David E. Weinstein (2001) "An Account of Global Factor Trade." *American Economic Review* 91: 1423–1453.

Deaton, Angus S. (1992) *Understanding Consumption.* New York: Oxford University Press.

—— (2005) "Measuring Poverty in a GrowingWorld (or Measuring Growth in a PoorWorld)." *Review of Economics and Statistics* 87: 1–19.

Deaton, Angus S., and John Muellbauer (1980) *Economics and Consumer Behavior.* Cambridge: Cambridge University Press.

Debreu, Gerard (1954) "Valuation Equilibrium and Pareto Optimum." *Proceedings of the National Academy of Sciences,* USA 40: 588–592.

—— (1959) *Theory of Value.* New York: Wiley.

—— (1974) "Excess Demand Functions." *Journal of Mathematical Economics* 1: 15–23.

De La Croix, David, and Philippe Michel (2002) *A Theory of Economic Growth: Dynamics and Policy in Overlapping Generations.* Cambridge, Mass.: Cambridge University Press.

Denardo, Eric V. (1967) "Contraction Mappings in the Theory Underlying Dynamic Programming." *SIAM Review* 9: 165–177.

Diamond, Jared M. (1997) *Guns, Germs and Steel: The Fate of Human Societies.* New York: W.W. Norton.

Diamond, Peter (1965) "National Debt in a Neoclassical Growth Model." *American Economic Review* 55: 1126–1150.

Dinopoulos, Elias, and Peter Thompson (1998) "Schumpterian Growth without Scale Effects." *Journal of Economic Growth* 3: 313–335.

Dixit, Avinash K., (2004) *Lawlessness and Economics: Alternative Modes of Economic Governance.* Gorman Lectures. Princeton, N.J.: Princeton University Press,

Dixit, Avinash K., and Victor Norman (1980) *Theory of International Trade:ADual, General Equilibrium Approach.* Cambridge: Cambridge University Press.

Dixit, Avinash K., and Robert S. Pindyck (1994) *Investment under Uncertainty.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Dixit, Avinash K., and Joseph E. Stiglitz (1977) "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity." *American Economic Review* 67: 297–308.

Doepke, Matthias (2004) "Accounting for the Fertility Decline during the Transition to Growth." *Journal of Economic Growth* 9: 347–383.

Dollar, David (1992) "Outward-Oriented Developing Economies Really Do Grow More Rapidly: Evidence from 95 LDCs, 1976–1985." *Economic Development and Cultural Change* 40: 523–544.

Domar, Evsey D. (1946) "Capital Expansion, Rate of Growth and Employment." *Econometrica* 14: 137–147.

Doms, Mark, and Timothy Dunne, and Kenneth Troske (1997) "Workers, Wages and Technology." *Quarterly Journal of Economics* 112: 253–290.

Dorfman, Robert (1969) "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory." *American Economic Review* 64: 817–831.

Downs, Anthony (1957) *An Economic Theory of Democracy.* New York: Harper & Row.

Drandakis, E., and Edmund Phelps (1965) "A Model of Induced Invention, Growth and Distribution." *Economic Journal* 76: 823–840.

Drazen, Allan (2001) *Political Economy in Macroeconomics.* Princeton N.J.: Princeton University Press.

Duflo, Esther (2004) "Medium-Run Effects of Educational Expansion: Evidence from a Large School Construction Program in Indonesia." *Journal of Development Economics* 74: 163–197.

Duranton, Gilles (2004) "Economics of Productive Systems: Segmentations and Skill Biased Change." *European Economic Review* 48: 307–336.

Durlauf, Steven N. (1996) "A Theory of Persistent Income Inequality." *Journal of Economic Growth* 1: 75–94.

Durlauf, Steven N., and Marcel Fafchamps (2005) "Empirical Studies of Social Capital: A Critical Survey." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 1639–1699.

Durlauf, Steven N., and Danny Quah (1999) "The NewEmpirics of Economic Growth." In *The Handbook of Macroeconomics,* John Taylor and Michael Woodruff (editors). Amsterdam: North-Holland and Elsevier, pp. 235–308.

Durlauf, Steven N., Paul A. Johnson, and Jonathan R. W. Temple (2005) "Growth Econometrics." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 555–678.

Echevarria, Cristina (1997) "Changes in Sectoral Composition Associated with Economic Growth." *International Economic Review* 38: 431–452.

Eggertsson, Thrainn (2005) *Imperfect Institutions: Possibilities and Limits of Reform.* Ann Arbor: University of Michigan Press.

Eggimann, Gilbert (1999) *La Population des Villes des Tiers-Mondes, 1500–1950.* Geneva: Centre d'Histoire Economique Internationale de l'Universitéde Genève, Librairie Droz.

Ekeland, Ivar, and Jose A. Scheinkman (1986) "Transversality Condition for Some Infinite Horizon Discrete Time Optimization Problems." *Mathematics of Operations Research* 11: 216–229.

Elliott, John H. (1963) *Imperial Spain 1469–1716.* New York: St. Martin Press.

Eltis, David (1995) "The Total Product of Barbados, 1664–1701."*Journal of Economic History* 55: 321–336.

Elvin, Mark (1973) *The Pattern of the Chinese Past.* Stanford, Calif.: Stanford University Press.

Engerman, Stanley L., and Kenneth Sokoloff (1997) "Factor Endowments, Institutions, and Differential Paths of Growth among New World Economics: A View from Economic Historians of the United States." In *How Latin America Fell Behind,* Stephen Haber (editor). Stanford, Calif.: Stanford University Press.

Epifani, Paolo, and Gino Gancia (2006) "The Skill Bias of World Trade." Universitat Pompano Fabra, mimeo.

Epstein, Larry G., and Stanley E. Zin (1989) "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework." *Econometrica* 57: 937–969.

Ertman, Thomas (1997) *Birth of the Leviathan: Building States and Regimes in Medieval and Early Modern Europe.* New York: Cambridge University Press.

Ethier, Stewart, and Thomas Kurtz (1986) *Markov Processes: Characterization and Convergence.*Hoboken, N.J.: Wiley.

Evans, Eric J. (1996) *The Forging of the Modern State: Early Industrial Britain: 1783–1870,* 2nd edition. New York: Longman.

Evans, Peter (1995) *Embedded Autonomy: States and Industrial Transformation.* Princeton N.J.: Princeton University Press.

Feinstein, Charles (2005) *An Economic History of South Africa.*Cambridge: Cambridge University Press.

Feldstein, Martin, and Charles Horioka (1980) "Domestic Savings and International Capital Flows." *Economic Journal* 90: 314–329.

Fernandez, Raquel, and Roger Rogerson (1996) "Income Distribution, Communities and the Quality of Public Education." *Quarterly Journal of Economics* 111: 135–164.

Fernandez-Villaverde, Jesus (2003) "Was Malthus Right? Economic Growth and Population Dynamics." University of Pennsylvania, mimeo.

Fields, Gary (1980) *Poverty, Inequality and Development.* Cambridge: Cambridge University Press.

Finkelstein, Amy (2004) "Static and Dynamic Effects of Health Policy: Evidence from the Vaccine Industry." *Quarterly Journal of Economics* 119: 527–564.

Fisher, Irving (1930) *The Theory of Interests.* New York: Macmillan.

Fleming, Wendell H., and Raymond W. Rishel (1975) *Deterministic and Stochastic Optimal Control.* New York: Springer-Verlag.

Foellmi, Reto, and Josef Zweimuller (2002) "Structural Change and the Kaldor Facts of Economic Growth." CEPR Discussion Paper 3300. Centre for Economic Policy Research.

Forbes, Kristen J. (2000) "AReassessment of the Relationship between Inequality and Growth." *American Economic Review* 90: 869–887.

Foster, Andrew, and Mark Rosenzweig (1995) "Learning by Doing and Learning from Others: Human Capital and Technical Change in Agriculture." *Journal of Political Economy* 103: 1176–1209.

Foster, Lucia, John Haltiwanger, and Cornell J. Krizan (2000) "Aggregate Productivity Growth: Lessons from Microeconomic Evidence."NBERWorking Paper 6803. National Bureau of Economic Research.

François, Patrick, and Joanne Roberts (2003) "Contracting Productivity Growth." *Review of Economic Studies* 70: 59–85.

Frankel, Jeffrey, and David Romer (1999) "Does Trade Cause Growth?" *American Economic Review* 89: 379–399.

Freeman, Christopher (1982) *The Economics of Industrial Innovation.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Freudenberger, Herman (1967) "State Intervention as an Obstacle to Economic Growth in the Hapsburg Monarchy." *Journal of Economic History* 27: 493–509.

Friedman, Milton (1957) *A Theory of the Consumption Function.* Princeton N.J.: Princeton University Press.

Fudenberg, Drew, and Jean Tirole (1994) *Game Theory.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Funk, Peter (2002) "Induced Innovation Revisited."*Economica* 69: 155–171.

Futia, Carl A. (1982) "Invariant Distributions and Limiting Behavioral Markovian Economic Models." *Econometrica* 50: 377–408.

Gabaix, Xavier (2000) "The Factor Content of Trade: A Rejection of the Heckscher-Ohlin-Leontief Hypothesis." Massachusetts Institute of Technology, mimeo.

Galenson, David W. (1996) "The Settlement and Growth of the Colonies: Population, Labor and Economic Development." In *The Cambridge Economic History of the United States,* Volume I, The Colonial Era, Stanley L. Engerman and Robert E. Gallman (editors). New York: Cambridge University Press.

Gallup, John Luke, and Jeffrey D. Sachs (2001) "The Economic Burden of Malaria." *American Journal of Tropical Medicine and Hygiene* 64: 85–96.

Galor, Oded (1996) "Convergence? Inference from Theoretical Models." *Economic Journal* 106: 1056–1069.

—— (2005) "From Stagnation to Growth: Unified Growth Theory." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 171–293.

Galor, Oded, and Omer Moav (2000) "Ability Biased Technology Transition, Wage Inequality and Growth." *Quarterly Journal of Economics* 115: 469–498.

—— (2002) "Natural Selection and the Origin of Economic Growth." *Quarterly Journal of Economics* 117: 1133–1192.

—— (2004) "From Physical to Human Capital Accumulation: Inequality in the Process of Development." *Review of Economic Studies* 71: 1101–1026.

Galor, Oded, and AndrewMountford (2008) "Trading Population for Productivity: Theory and Evidence." *Review of Economic Studies,* forthcoming.

Galor, Oded, and Harl E. Ryder (1989) "Existence, Uniqueness and Stability of Equilibrium in an Overlapping-Generations Model with Productive Capital." *Journal of Economic Theory* 49: 360–375.

Galor, Oded, and Daniel Tsiddon (1997) "Tecnological Progress, Mobility, and Growth." *American Economic Review* 87: 363–382.

Galor, Oded, and David N. Weil (1996) "The Gender Gap, Fertility, and Economic Growth." *American Economic Review* 86: 374–387.

—— (2000) "Population, Technology, and Growth: From Malthusian Stagnation to the Demographic Transition and Beyond." *American Economic Review* 90: 806–828.

Galor, Oded, and Joseph Zeira (1993) "Income Distribution and Macroeconomics." *Review of Economic Studies* 60: 35–52.

Galor, Oded, Omer Moav, and Dietrich Vollrath (2005) "Land Inequality and the Origin of Divergence in Overtaking in the Growth Process: Theory and Evidence." Brown University, mimeo.

Gancia, Gino (2003) "Globalization, Divergence and Stagnation." University of Pompeu Fabra, working paper.

Gancia, Gino, and Fabrizio Zilibotti (2005) "Horizontal Innovation in the Theory of Growth and Development." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 111–170.

Gans, Joshua S., and Michael Smart (1996) "Majority Voting with Single-Crossing Preferences." *Journal of Public Economics* 59: 219–237.

Geary, Robert C. (1950) "A Note on a Constant Utility Index of the Cost of Living." *Review of Economic Studies* 18: 65–66.

Geertz, Clifford (1963) *Peddlers and Princes.* Chicago: University of Chicago Press.

Gelfand I. M., and Sergei V. Fomin (2000) *Calculus of Variation,* translated by Richard A. Silverman. New York: Dover Publications.

Gerschenkron, Alexander (1962) "Economic Backwardness in Political Perspective." In *The Progress of Underdeveloped Areas,* Bert Hoselitz (editor). Chicago: University of Chicago Press.

Gikhman, I. I., and A. V. Skorohod (1974) *The Theory of Stochastic Processes,* volume I, translated by Samuel Kotz. New York: Springer-Verlag.

Gil, Richard, Casey Mulligan, and Xavier Sala-i-Martin (2004) "Do Democracies Have Different Public Policies than Nondemocracies?" *Journal of Economic Perspectives* 18: 51–74.

Gilles, Christian, and Stephen F. LeRoy (1992) "Bubbles and Charges." *International Economic Review* 33: 323–339.

Glomm, Gerhard, and B. Ravikumar (1992) "Public vs. Private Investment in Human Capital: Endogenous Growth and Income Inequality." *Journal of Political Economy* 100: 818–834.

Goldin, Claudia, and Lawrence F. Katz (1998) "The Origins of Technology-Skill Complementarity." *Quarterly Journal of Economics* 113: 693–732.

Gollin, Douglas, Stephen Parente, and Richard Rogerson (2002) "Structural Transformation and Cross-Country Income Differences." University of Illinois, Urbana-Champaign, mimeo.

Gomez-Galvarriato, Aurora (1998) "The Evolution of Prices and Real Wages in Mexico from the Porfiriato to the Revolution." In *Latin America and the World Economy since 1800,* John H. Coatsworth and Alan M. Taylor (editors). Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Goodfriend, Marvin, and John McDermott (1995) "Early Development." *American Economic Review* 85: 116–133.

Gordon, Robert J. (1990) *The Measurement of Durable Goods Prices.* Chicago: University of Chicago Press.

Gorman, W. M. (1953) "Community Preference Fields." *Econometrica* 21: 63–80.

—— (1959) "Separable Utility and Aggregation." *Econometrica* 71: 469–481.

—— (1976) "Tricks with Utility Functions." In *Essays in Economic Analysis,* Michael Artis and A. R. Nobay (editors). Cambridge: Cambridge University Press, pp. 212–243.

—— (1980) "Some Engel Curves." In *Essays in Theory and Measurement of Consumer Behavior,* Angus S. Deaton (editor). Cambridge: Cambridge University Press, pp. 7–29.

Gourinchas, Pierre-Olivier, and Olivier Jeanne (2006) "The Elusive Gains from International Financial Integration." *Review of Economic Studies* 73: 715–741.

Grandmont, Jean-Michel (1978) "Intermediate Preferences and Majority Rule." *Econometrica* 46: 317–330.

Greenwood, Jeremy, and Boyan Jovanovic (1990) "Financial Development, Growth and the Distribution of Income." *Journal of Political Economy* 98: 1076–1107.

Greenwood, Jeremy, and Mehmet Yorukoglu (1997) "1974." *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 46: 49–95.

Greenwood, Jeremy, Zvi Hercowitz, and Per Krusell (1997) "Long-Run Implications of Investment-Specific Technological Change." *American Economic Review* 87: 342–362.

Greif, Avner (1994) "Cultural Beliefs and the Organization of Society: A Historical and Theoretical Reflection on Collectivist and Individualist Societies." *Journal of Political Economy* 102: 912–950.

Griliches, Zvi (1957) "Hybrid Corn: An Exploration in the Economics of Technological Change." *Econometrica* 25: 501–522.

—— (1969) "Capital-Skill Complementarity." *Review of Economics and Statistics* 51: 465–468.

Griliches, Zvi, and Jacob Schmookler (1963) "Inventing and Maximizing." *American Economic Review* 53: 725–729.

Grossman, Gene M., and Elhanan Helpman (1991a) "Quality Ladders in the Theory of Growth." *Review of Economic Studies* 68: 43–61.

—— (1991b) *Innovation and Growth in the Global Economy.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Grossman, Herschel, and Minseong Kim (1995) "Swords or Ploughshares? A Theory of the Security of Claims to Property Rights." *Journal of Political Economy* 103: 1275–1288.

—— (1996) "Predation and Accumulation," *Journal of Economic Growth* 1: 333–350.

Guiso, Luigi, Paola Sapienza, and Luigi Zingales (2004) "Does Culture Affect Economic Outcomes?" CEPR working paper. Centre for Economic Policy Research.

Gutierrez, Hector (1986) "La Mortalite des Eveques Latino-Americains aux XVIIe et XVIII Siecles." *Annales de Demographie Historique* 53(2): 29–39.

Guvenen, Fatih, and Burhanettin Kuruscu (2006) "Understanding Wage Inequality: Ben-Porath Meets Skill Biased Technical Change." University of Texas, Austin, mimeo.

Habakkuk, H. J., (1962) *American and British Technology in the Nineteenth Century: Search for Labor-Saving Inventions.* Cambridge: Cambridge University Press.

Hakenes Hendrik, and Andreas Irmen (2006) "Something Out of Nothing: Neoclassical Growth and the Trivial Steady State." University of Heidelberg, mimeo.

Halkin, Hubert (1974) "Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizons." *Econometrica* 42: 267–272.

Hall, Robert E. (1978) "Stochastic Implications of the Life-Cycle–Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence." *Journal of Political Economy* 86: 971–988. (Reprinted in Sargent, Thomas J., and Robert E. Lucas Jr., editors (1981) *Rational Expectations and Econometric Practice.* Minneapolis, Minn.: University of Minnesota Press.)

Hall, Robert E., and Charles I. Jones (1999) "Why Do Some Countries Produce So Much More Output per Worker than Others?" *Quarterly Journal of Economics* 114: 83–116.

Haltiwanger, John C., Julia I. Lane, and James R. Spletzer (1999) "Productivity Differences across Employers: The Roles of Employer Size, Age and Human Capital." *American Economic Review* 89: 94–98.

Hammermesh, Daniel (1993) *Labor Demand.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Hansen, Gary D., and Edward C. Prescott (2002) "Malthus to Solow." *American Economic Review* 92: 1205–1217.

Harris, John, and Michael Todaro (1970) "Migration, Unemployment and Development: A Two-Sector Analysis." *American Economic Review* 60: 126–142.

Harrison, Lawrence E., and Samuel P. Huntington, editors (2000) *Culture Matters: How Values Shape Human Progress.* New York: Basic Books.

Harrod, Roy (1939) "An Essay in Dynamic Theory." *Economic Journal* 49: 14–33.

Hart, Oliver D. (1979) "On Shareholder Unanimity in Large Stockmarket Economies." *Econometrica* 47: 1057–1084.

Hassler, John, Sevi Mora, Kjetil Storesletten, and Fabrizio Zilibotti (2003) "Survival of theWelfare State." *American Economic Review* 93: 87–112.

Hassler, John, Per Krusell, Kjetil Storesletten, and Fabrizio Zilibotti (2005) "The Dynamics of Government: A Positive Analysis." *Journal of Monetary Economics* 52: 1331–1358.

Hayashi, Fumia (1982) "Tobin's Marginal *q* and Average *q*: A Neoclassical Interpretation." *Econometrica* 50: 213–234.

Heckman, James, Lance Lochner, and Christopher Taber (1998) "Tax Policy and Human Capital Formation." *American Economic Review Papers and Proceedings* 88: 293–297.

Hellwig, Martin, and Andreas Irmen (2001) "Endogenous Technical Change in a Competitive Economy." *Journal of Economic Theory* 101: 1–139.

Helpman, Elhanan (2005) *Mystery of Economic Growth.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Herbst, Jeffery I. (2000) *States and Power in Africa: Comparative Lessons in Authority and Control.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Heston, Allen, Robert Summers, and Bettina Aten (2002) *Penn World Tables Version 6.1.* Downloadable Data Set. Philadelphia: Center for International Comparisons at the University of Pennsylvania.

Hicks, John (1932) *The Theory of Wages.* London: Macmillan.

Hildenbrand, Werner, and Alan Kirman (1988) *Equilibrium Analysis: Variations on Themes by Edgeworth and Walras.* Amsterdam: Elsevier.

Hirschman, Albert (1958) *The Strategy of Economic Development.* New Haven, Conn.: Yale University Press.

Hirshleifer, Jack (2001) *The Dark Side of the Force: Economic Foundations of Conflict Theory.* New York: Cambridge University Press.

Homer, Sydney, and Richard Sylla (1991) *A History of Interest Rates.* New Brunswick, N.J.: Rutgers University Press.

Hopkins, Keith (1980) "Taxes and Trade in the Roman Empire (200 b.c.–a.d. 400)." *Journal of Roman Studies* 70: 101–125.

Hotelling, Harold (1929) "Stability in Competition." *Economic Journal* 39: 41–57.

—— (1931) "The Economics of Exhaustible Resources." *Journal of Political Economy* 31: 137–175.

Houthakker, Hendrik S. (1955) "The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis." *Review of Economic Studies* 23: 27–31.

Howard, Ronald A. (1960) *Dynamic Programming and Markov Processes.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Howitt, Peter (1999) "Steady Endogenous Growth with Population and R&D Inputs Growing." *Journal of Political Economy* 107: 715–730.

—— (2000) "Endogeous Growth and Cross–Country Income Differences." *American Economic Review* 90: 829–846.

Hsieh, Chang-Tai (2002) "What Explains the Industrial Revolution in East Asia? Evidence from the Factor Markets." *American Economic Review* 92: 502–526.

Hsieh, Chang-Tai, and Peter J. Klenow (2006) "Relative Prices and Relative Prosperity." *American Economic Review* 97: 562–585.

Imbs, Jean, and Romain Wacziarg (2003) "Stages of Diversification." *American Economic Review* 93: 63–86.

Inada, Ken-Ichi (1963) "On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization." *Review of Economic Studies* 30: 119–127.

Jacobs, Jane (1970) *The Economy of Cities.* New York: Vintage Books.

James, John A., and Jonathan S. Skinner (1985) "The Resolution of the Labor-Scarcity Paradox." *Journal of Economic History* 45: 513–540.

Jayaratne, Jay, and Philip Strahan (1996) "The Finance-Growth Nexus: Evidence from Bank Branch Deregulation." *Quarterly Journal of Economics* 111: 639–670.

Jones, Benjamin F., and Benjamin A. Olken (2005) "Do Leaders Matter? National Leadership and Growth since World War II." *Quarterly Journal of Economics* 120: 835–864.

Jones, Charles I. (1995) "R&D-Based Models of Economic Growth." *Journal of Political Economics* 103: 759–784.

—— (1997) "On the Evolution of theWorld Income Distribution." *Journal of Economic Perspectives* 11: 19–36.

—— (1998) *Introduction to Economic Growth.* New York: W. W. Norton.

—— (1999) "Growth: With or without Scale Effects." *American Economic Review* 89: 139–144.

—— *(2005) "The Shape of Production Functions and the Direction of Technical* Change." *Quarterly Journal of Economics* 2: 517–549.

Jones, Charles I., and Dean Scrimgeour (2006) "The Steady-State Growth Theorem: Understanding Uzawa (1961)." University of California, Berkeley, mimeo.

Jones, Eric (1988) *Growth Recurring.* Oxford: Oxford University Press.

Jones, Larry, and Rodolfo Manuelli (1990) "A Convex Model of Equilibrium Growth: Theory and Policy Indications." *Journal of Political Economy* 98: 1008–1038.

Jorgensen, Dale (2005) "Accounting for Growth in the Information Age." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 744–815.

Jorgensen, Dale, F. M. Gollop, and Barbara Fraumeni (1987) *Productivity and U.S. Economic Growth.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Judd, Kenneth (1985) "On the Performance of Patents." *Econometrica* 53: 567–585.

—— (1998) *Numerical Methods in Economics.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Kaldor, Nicholas (1957) "Alternative Theories of Distribution." *Review of Economic Studies* 23: 83–100.

—— (1963) "Capital Accumulation and Economic Growth." In *Proceedings of a Conference Held by the International Economics Association,* Friedrich A. Lutz and Douglas C. Hague (editors). London: Macmillan.

Kalemli-Ozcan, Sebnem (2002) "Does Mortality Decline Promote Economic Growth?" *Journal of Economic Growth* 7: 411–439.

Kamien, Morton, and Nancy Schwartz (1981) *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management.* Amsterdam: Elsevier.

Kamihigashi, Takashi (2001) "Necessity of Transversality Conditions for Infinite Horizon Problems." *Econometrica* 69: 995–1012.

—— (2003) "Necessity of Transversality Conditions for Stochastic Problems." *Journal of Economic Theory* 109: 140–149.

Karlin, Samuel (1955) "The Structure of Dynamic Programming Models." *Naval Research Logistics Quarterly* 2: 285–294.

Katz, Lawrence, and David Autor (2000) "Changes in theWage Structure and Earnings Inequality." In *The Handbook of Labor Economics,* volume III, Orley Ashenfelter and David Card (editors). Amsterdam: North-Holland.

Katz, Lawrence F., and Kevin M. Murphy (1992), "Changes in RelativeWages, 1963–1987: Supply and Demand Factors." *Quarterly Journal of Economics* 107: 35–78.

Kehoe, Patrick J., and Fabrizio Perri (2002) "International Business Cycles with Endogenous Incomplete Markets." *Econometrica* 70: 907–928.

Kelley, John (1955) *General Topology.* New York: Van Nostrand.

Kennedy, Charles (1964) "Induced Bias in Innovation and the Theory of Distribution." *Economic Journal* 74: 541–547.

Keyssar, Alexander (2000) *The Right to Vote: The Contested History of Democracy in the United States.* New York: Basic Books.

Kiley, Michael (1999 "The Supply of Skilled Labor and Skill-Biased Technological Progress." *Economics Journal* 109: 708–724.

King, Robert G., and Ross Levine (1993) "Finance, Entrepreneurship, and Growth: Theory and Evidence." *Journal of Monetary Economics* 32: 513–542.

King, Robert G. and Sergio Rebelo (1999) "Resuscitating Real Business Cycles." In *Handbook of Macroeconomics,* volume 1, John B. Taylor and Michael Woodford (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 927–1007.

Kiyotaki, Nobuhiro (1988) "Multiple Expectational Equilibria under Monopolistic Competition." *Quarterly Journal of Economics* 103: 695–713.

Klenow, Peter J., and Andres Rodriguez (1997) "The Neoclassical Revival in Growth Economics: Has It Gone Too Far?" *NBER Macroeconomics Annual* 1997: 73–103.

Klepper, Steven (1996) "Entry, Exit, Growth and Innovation over the Product Life Cycle." *American Economic Review* 86: 562–583.

Klette, Tor Jacob, and Samuel Kortum (2004) "Innovating Firms and Aggregate Innovation." *Journal of Political Economy* 112: 986–1018.

Knack, Stephen, and PhilipKeefer (1995) "Insititutions and Economic Performance: Cross-Country Tests Using Alternative Institutional Measures." *Economics and Politics* 7: 207–228.

—— (1997) "Does Social Capital Have an Economic Impact? A Cross-Country Investigation." *Quarterly Journal of Economics* 112: 1252–1288.

Kolmogorov, Andrei, and Sergei V. Fomin (1970) *Introductory Reak Analysis.* New York: Dover Press.

Kongsamut, Piyabha, Sergio Rebelo, and Danyang Xie (2001) "Beyond Balanced Growth." *Review of Economic Studies* 48: 869–882.

Koopmans, Tjalling C. (1965) "On the Concept of Optimal Economic Growth." In *The Econometric Approach to Development Planning,* Amsterdam: North-Holland, pp. 225–295.

Koren, Miklos, and Silvana Tenreyro (2007) "Volatility and Growth." *Quarterly Journal of Economics* 122: 243–287.

Kortum, Samuel (1997) "Research, Patenting and Technological Change." *Econometrica* 55: 1389–1431.

Kraay, Aart, and Jaume Ventura (2007) "Comparative Advantage and the Cross-Section of the Business Cycle." *Journal of the European Economic Association* 6: 1300–1333.

Kremer, Michael (1993) "Population Growth and Technological Change: One Million b.c. to 1990." *Quarterly Journal of Economics* 108: 681–716.

Kreps, David (1988) *Notes on the Theory of Choice.* Boulder, Colo.: Westview Press.

Kreyszig, Erwin (1978) *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: Wiley.

Krueger, Alan, and Mikael Lindahl (2001) "Education for Growth: Why and for Whom?" *Journal of Economic Literature* 39: 1101–1136.

Krugman, Paul (1979) "A Model of Innovation, Technology Transfer, and the World Distribution of Income." *Journal of Political Economy* 87: 253–266.

—— (1991) "History versus Expectations." *Quarterly Journal of Economics* 106: 651–667.

Krusell, Per and José-Victor Ríos-Rull (1996) "Vested Interests in a Theory of Stagnation and Growth." *Review of Economic Studies* 63: 301–330.

—— (1999) "On the Size of Government: Political Economy in the Neoclassical Growth Model." *American Economic Review* 89: 1156–1181.

Krusell, Per, and Anthony Smith (1998) "Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy." *Journal of Political Economy* 106: 867–896.

—— (2005) "Income and Wealth Heterogeneity, Portfolio Choice and Equilibrium Asset Returns." *Macroeconomic Dynamics* 1: 387–422.

Krusell, Per, Lee Ohanian, Victor Rios-Rull, and Giovanni Violante (1999) "Capital-Skill Complementarity and Inequality." *Econometrica* 58: 1029–1053.

Kupperman, Karen O. (1993) *Providence Island: 1630–1641: The Other Puritan Colony.* New York: Cambridge University Press.

Kuznets, Simon (1957) "Quantitative Aspects of the Economic Growth of Nations: II. Industrial Distribution of National Product and Labour Force." *Economic Development and Cultural Change* 5 (supplement): 1–111.

—— (1966) *Modern Economic Growth.* New Haven, Conn.: Yale University Press.

—— (1973) "Modern Economic Growth: Findings and Reflections." *American Economic Review* 53: 829–846.

Kydland, Finn E., and Edward C. Prescott (1982) "Time to Build and Aggregate Fluctuations." *Econometrica* 50: 1345–1370.

Lagos, Ricardo (2001) "A Model of TFP." New York University, working paper.

Laitner, John (2000) "Structural Change and Economic Growth." *Review of Economic Studies* 57: 545–561.

Landes, David S. (1998) *The Wealth and Poverty of Nations: Why Some Are So Rich and Some So Poor.* New York: W. W. Norton.

Lang, Sean (1999) *Parliamentary Reform: 1785–1928.* New York: Routledge.

Leamer, Edward (1998) "Does Natural Resource Abundance Increase Latin American Income Inequality?" *Journal of Development Economics* 59: 3–42.

Leonard, Daniel, and Ngo Van Long (1992) *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Levchenko, Andrei (2007) "Institutional Quality and International Trade." *Review of Economic Studies* 74: 791–819.

Levine, Ross (2005) "Finance and Growth," In *The Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland.

Lewis,William Arthur (1954) "Economic Development with Unlimited Supplies of Labor." *Manchester School of Economics and Social Studies* 22: 139–191.

Lindbeck, Assar, and JörgenWeibull (1987) "Balanced-Budget Redistribution as the Outcome of Political Competition." *Public Choice* 12: 272–297.

Lindert, Peter H. (2000) "Three Centuries of Inequality in Britain and America." In *Handbook of Income Distribution,* Anthony B. Atkinson and Françcois Bourguignon (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 167–216.

—— (2004) *Growing Public: Social Spending and Economics Growth since the Eighteenth Century.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lindert, Peter H., and JeffreyWilliamson (1976) "Three Centuries of American Inequality." *Research in Economic History* 1: 69–123.

Livi-Bacci, Massimo (1997) *A Concise History of World Population.* Oxford: Blackwell.

Ljungqvist, Lars, and Thomas J. Sargent (2005) *Recursive Macroeconomic Theory.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Long, John B., and Charles I. Plosser (1983) "Real Business Cycles." *Journal of Political Economy* 91: 39–69.

López-Alonso, Moramay, and Rául Porras Condey (2004) "The Ups and Downs of Mexican Economic Growth: The Biological Standard of Living in Inequality: 1870–1950." *Economics and Human Biology* 1: 169–186.

Loury, Glenn (1981) "Intergenerational Transfers and the Distribution of Earnings." *Econometrica* 49: 834–867.

Lucas, Robert E. (1978) "Asset Prices in an Exchange Economy." *Econometrica* 46: 1426–1445.

Lucas, Robert E. (1988) "On the Mechanics of Economic Development." *Journal of Monetary Economics* 22: 3–42.

—— (1990) "Why Doesn't Capital Flow from Rich to Poor Countries?" *American Economic Review* 80: 92–96.

Lucas, Robert E., and Edward C. Prescott (1971) "Investment under Uncertainty." *Econometrica* 39: 659–681.

Luenberger, David (1969) *Optimization by Vector Space Methods*. New York: Wiley.
—— (1979) *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications*. New York: Wiley.
Maddison, Angus (1991) *Dynamic Forces in Capitalist Development: A Long-Run Comparative View*. New York: Oxford University Press.
—— (2001) *The World Economy: A Millennial Perspective*. Paris: Development Centre.
—— (2003) *The World Economy: Historical Statistics*. CD-ROM. Paris: Organisation for Economic Co-operation and Development.
Magill, Michael J. P. (1981) "Infinite Horizon Programs." *Econometrica* 49: 679–712.
Makowski, Louis (1980)"Perfect Competition, the Profit Criterion and the Organization of Economic Activity."*Journal of Economic Theory* 22: 222–242.
Malthus, Thomas R. (1798) *An Essay on the Principle of Population*. London: W. Pickering.
Mangasarian, O.O. (1966) "Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems." *SIAM Journal of Control* 4: 139–152.
Mankiw, N. Gregory, David Romer, and David N. Weil (1992) "A Contribution to the Empirics of Economic Growth." *Quarterly Journal of Economics* 107: 407–437.
Mann, Charles C. (2004) *1491: New Revelations of the Americas before Columbus*. New York: Vintage Books.
Mantel, Rolf R. (1976) "Homothetic Preferences and Community Excess Demand Function." *Journal of Economic Theory* 12: 197–201.
Manuelli, Rodolfo, and Anant Seshadri (2006) "Human Capital and the Wealth of Nations." University of Wisconsin, mimeo.
Marris, Robin (1982) "How Much of the Slowdown Was Catch-Up?" In *Slower Growth in the Western World*, Ruth C. O. Matthews (editor). London: Heinemann.
Marshall, Alfred [1890] (1949) *Principles of Economics*. London: Macmillan.
Martimort, David, and Thierry Verdier (2004) "Agency Costs of Internal Collusion and Schumpeterian Growth." *Review of Economic Studies* 71: 1119–1141.
Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green (1995) *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press.
Matsuyama, Kiminori (1991) "Increasing Returns, Industrialization, and the Indeterminacy of Equilibrium." *Quarterly Journal of Economics* 106: 617–650.
—— (1992) "Agricultural Productivity, Comparative Advantage and Economic Growth." *Journal of Economic Theory* 58: 317–334.
—— (1995) "Complementarities and Cumulative Processes in Models of Monopolistic Competition." *Journal of Economic Literature* 33: 701–729.
—— (1999) "Growing through Cycles." *Econometrica* 67: 335–348.
—— (2002) "The Rise of Mass Consumption Societies." *Journal of Political Economy* 110: 1035–1070.
—— (2004) "Financial Market Globalization, Symmetry-Breaking and Endogenous Inequality of Nations." *Econometrica* 72: 853–882.
Mauro, Paolo (1995) "Corruption and Growth." *Quarterly Journal of Economics* 110: 681–712.
McCall, John (1970) "Economics of Information and Job Search." *Quarterly Journal of Economics* 84: 113–126.
McCandless, George T., and Neil Wallace (1991) *Introduction to Dynamic Macroeconomic Theory: An Overlapping Generations Approach*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
McEvedy, Colin, and Richard Jones (1978) *Atlas of World Population History*. New York: Facts on File.
Melitz, Mark (2003) "The Impact of Trade on Intra-Industry Reallocations and Aggregate Industry Productivity." *Econometrica* 71: 1695–1725.

Meltzer, Allan H., and Scott Richard (1981) "A Rational Theory of the Size of Government." *Journal of Political Economy* 89: 914–927.

Michel, Philippe (1982) "On the Transversality Condition in Infinite Horizon Optimal Problems." *Econometrica* 50: 975–985.

Migdal, Joel (1988) *Strong Societies and Weak States: State-Society Relations and State Capabilities in the Third World.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Mincer, Jacob (1974) *Schooling, Experience, and Earnings.* New York: National Bureau of Economic Research.

Minier, Jenny A. (1998) "Democracy and Growth: Alternative Approaches." *Journal of Economic Growth* 3: 241–266.

Mirman, Leonard J., and Itzak Zilcha (1975) "On Optimal Growth under Uncertainty." *Journal of Economic Theory* 11: 329–339.

Mitch, David (1983) "The Role of Human Capital in the First Industrial Revolution." In *The British Industrial Revolution: An Economic Perspective,* Joel Mokyr (editor). San Francisco:Westview Press.

Mokyr, Joel (1990) *The Lever of Riches: Technological Creativity and Economic Progress.* New York: Oxford University Press.

—— (1993) "Introduction." In *The British Industrial Revolution,* Joel Mokyr (editor). Boulder, Colo.: Westview Press, pp. 1–129.

Montesquieu, Charles de Secondat [1748] (1989) *The Spirit of the Laws.*NewYork: Cambridge University Press.

Moretti, Enrico (2004) "Estimating the External Return to Education: Evidence from Repeated Cross-Sectional and Longitudinal Data." *Journal of Econometrics* 121: 175–212.

Morris, Ian (2004) "Economic Growth in Ancient Greece." *Journal of Institutional and Theoretical Economics* 160: 709–742.

Mosse, W. E. (1992) *An Economic History of Russia, 1856–1914.* London: I. B. Taurus Press.

Mundlak, Yair (2000) *Agriculture and Economic Growth: Theory and Measurement.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Murphy, Kevin M., Andrei Shleifer, and Robert W. Vishny (1989) "Industrialization and the Big Push." *Quarterly Journal of Economics* 106: 503–530.

Myerson, Rogerson (1991) *Game Theory.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Myrdal, Gunnar (1968) *Asian Drama: An Inquiry into the Poverty of Nations,* 3 volumes. New York: Twentieth Century Fund.

Nelson, Richard R., and Edmund S. Phelps (1966) "Investment in Humans, Technological Diffusion, and Economic Growth." *American Economic Review* 56: 69–75.

Newell, Richard, Adam Jaffee, and Robert Stavins (1999) "The Induced Innovation Hypothesis and Energy-Saving Technological Change." *Quarterly Journal of Economics* 114: 907–940.

Ngai, Rachel, and Christopher Pissarides (2006) "Structural Change in a Multi-Sector Model of Growth." London School of Economics, mimeo.

Nickell, Stephen (1996) "Competition and Corporate Performance." *Journal of Political Economy* 104: 724–746.

North, Douglass C. (1990) *Institutions, Institutional Change, and Economic Performance.* New York: Cambridge University Press.

North, Douglass C., and Robert Thomas (1973) *The Rise of the Western World: A New Economic History.* Cambridge: Cambridge University Press.

North, Douglass C.,William Summerhill, and Barry R.Weingast (2000) "Order, Disorder, and Economic Change: Latin America versus North America." In *Governing for Prosperity,* Bruce Bueno de Mesquita and Hilton L. Root (editors). New Haven, Conn.: Yale University Press, pp. 17–58.

Nunn, Nathan (2006) "Relationship-Specificity, Incomplete Contracts and the Pattern of Trade." *Quarterly Journal of Economics* 123: 569–600.

Nurske, Ragnar (1958) *Problems of Capital Formation in Underdeveloped Countries.* New York: Oxford University Press.

Obstfeld, Maurice (1994) "Risk-Taking, Global Diversification, and Growth." *American Economic Review* 84: 1310–1329.

Obstfeld, Maurice, and Kenneth Rogoff (1996) *Foundations of International Macroeconomics.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Obstfeld, Maurice, and Alan M. Taylor (2002) "Globalization and Capital Markets." NBER Working Paper 8846. National Bureau of Economic Research.

Ok, Efe (2007) *Real Analysis with Economic Applications.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Osborne, Martin, and Ariel Rubinstein (1994) *A Course in Game Theory.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Overton, Mark (1996) *Agricultural Revolution in England: The Transformation of the Agrarian Economy, 1500–1850.* New York: Cambridge University Press.

Pamuk, Sevket (2004) "Institutional Change and the Longevity of the Ottoman Empire: 1500–1800." *Journal of Interdisciplinary History* 35: 225–247.

Parente, Stephen L., and Edward C. Prescott (1994) "Barriers to Technology Adoption and Development." *Journal of Political Economy* 102: 298–321.

Pavcnik, Nina (2002) "Trade Liberalization, Exit, and Productivity Improvements: Evidence from Chilean Plants." *Review of Economic Studies* 69: 245–276.

Perko, Lawrence (2001) *Differential Equations and Dynamical System,* 3rd edition. New York: Springer Verlag.

Persson, Torsten, and Guido Tabellini (1994) "Is Inequality Harmful for Growth? Theory and Evidence." *American Economic Review* 84: 600–621.

—— (2000) *Political Economics: Explaining Economic Policy.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Phelps, Edmund S. (1966) *Golden Rules of Economic Growth.* New York: W. W. Norton.

Piketty, Thomas (1997) "The Dynamics of Wealth Distribution and the Interest Rate with Credit Rationing." *Review of Economic Studies* 64: 173–190.

Piketty, Thomas, and Emmanuel Saez (2003) "Income Inequality in the United States, 1913–1998." *Quarterly Journal of Economics* 118: 1–39.

Pirenne, Henri (1937) *Economic and Social History of Medieval Europe.* New York: Routledge.

Pissarides, Christopher (2000) *Equilibrium Unemployment Theory,* 2nd edition. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Pollak, Richard (1971) "Additive Utility Functions and Linear Engel Curves." *Review of Economic Studies* 38: 401–413.

Pomeranz, Kenneth (2000) *The Great Divergence: China, Europe and the Making of the Modern World Economy.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Pontryagin, Lev S., Vladimir Boltyanskii, Kevac Giamkelidze, and Eugene Mischenko (1962) *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* New York: Interscience.

Popp, David (2002) "Induced Innovation and Energy Prices." *American Economic Review* 92: 160–180.

Postan, M. M. (1966) "Medieval Agrarian Society in its Prime: England." In *The Cambridge Economic History of Europe,* M. M. Postan (editor). London: Cambridge University Press, pp. 168–300.

Prescott, Edward C. (1986) "Theory Ahead of Business Cycle Measurement." *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review* 10: 1–22.

Pritchett, Lant (1997) "Divergence, Big Time."*Journal of Economic Perspectives* 11: 3–18.

Przeworski, Adam, and Fernando Limongi (1993) "Political Regimes and Economic Growth." *Journal of Economic Perspectives* 7: 51–69.

Puterman, Martin L. (1994) *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming.* New York: Wiley.

Putnam, Robert, with Robert Leonardi, and Raffaella Y. Nanetti (1993) *Making Democracy Work: Civic Traditions in Modern Italy.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Qian, Nancy (2007) "Quantity-Quality: The Positive Effect of Family Size on School Enrollment in China." Brown University, mimeo.

Quah, Danny (1993) "Galton's Fallacy and Tests of the Convergence Hypothesis." *Scandinavian Journal of Economics* 95: 427–443.

—— (1997) "Empirics for Growth and Distribution: Stratification, Polarization and Convergence Clubs." *Journal of Economic Growth* 2: 27–60.

Ragot, Xavier (2003) "Technical Change and the Dynamics of the Division of Labor." DELTA Working Papers 2003–09. DELTA.

Rajan, Raghuram, and Luigi Zingales (1998) "Financial Dependence and Growth." *American Economic Review* 88: 559–586.

Ramey, Garey, and Valerie Ramey (1995) "Cross-Country Evidence of the Link between Volatility and Growth." *American Economic Review* 88: 1138–1151.

Ramsey, Frank (1928) "A Mathematical Theory of Saving." *Economic Journal* 38: 543–559.

Rauch, James E. (1993), "Productivity Gains from Geographic Concentration of Human Capital: Evidence from the Cities." *Journal of Urban Economics* 34: 380–400.

Rebelo, Sergio (1991) "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth." *Journal of Political Economy* 99: 500–521.

Reinganum, Jennifer (1981) "Dynamic Games of Innovation." *Journal of Economic Theory* 25: 21–24.

—— (1985) "Innovation and Industry Evolution." *Quarterly Journal of Economics* 100: 81–100.

Ringer, Fritz (1979) *Education and Society in Modern Europe.* Bloomington: University of Indiana Press.

Rivera-Batiz, Luis A., and Paul M. Romer (1991) "Economic Integration and Endogenous Growth." *Quarterly Journal of Economics* 106: 531–555.

Roberts, Kevin W. S. (1977) "Voting over Income Tax Schedules."*Journal of Public Economics* 8: 329–340.

Robinson, James, and Jeffrey Nugent (2001) "Are Endowments Fate?" University of California, Berkeley, mimeo.

Rockefeller, Tyrell R. (1971) "Existence in Duality Theorems for Convex Problems of Bolza." *Transactions of the American Mathematical Society* 159: 1–40.

Rodriguez, Francisco, and Dani Rodrik (2000) "Trade Policy and Economic Growth: A Skeptic's Guide to the Cross-National Evidence." *NBER Macroeconomics Annual* 2000: 261–325.

Rodrik, Dani (1999) "Democracies Pay HigherWages." *Quarterly Journal of Economics* 114: 707–738.

Rogerson, Richard, Robert Shimer, and Randall Wright (2004) "Search-Theoretic Models of the Labor Market: A Survey." *Journal of Economic Literature* 43: 959–988.

Romer, David (2006) *Advanced Macroeconomics.* New York: McGraw-Hill.

Romer, Paul M. (1986a) "Increasing Returns and Long-Run Growth." *Journal of Political Economy* 94: 1002–1037.

—— (1986b) "Cake Eating, Chattering, and Jumps: Existence Results for Variational Problems." *Econometrica* 54: 897–908.

—— (1987) "Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization." *American Economic Review* 77: 56–62.

—— (1990) "Endogenous Technological Change." *Journal of Political Economy* 98(part I): S71–S102.

—— (1993) "Idea Gaps and Object Gaps in Economic Development." *Journal of Monetary Economics* 32: 543–573.

Romer, Thomas (1975) "Individual Welfare, Majority Voting and the Properties of a Linear Income Tax." *Journal of Public Economics* 7: 163–168.

Rosenberg, Nathan (1976) *Perspectives on Technology.* Cambridge: Cambridge University Press.

Rosenstein-Rodan, Paul (1943) "Problems of Industrialization of Eastern and Southeastern Europe." *Economic Journal* 53: 202–211.

Rostow, Walt Whitman (1960) *The Stages of Economic Growth: A Non-Communist Manifetso.* Cambridge, Mass.: Cambridge University Press.

Royden, Halsey (1994) *Real Analysis.* New York: Macmillan.

Rudin, Walter (1976) *Introduction to Mathematical Analysis.* New York: McGraw-Hill.

Sachs, Jeffrey (2001) "Tropical Underdevelopment." NBER Working Paper 8119. National Bureau of Economic Research.

Sachs, Jeffrey, and Andrew Warner (1995) "Economic Reform in the Process of Global Integration." *Brookings Papers on Economic Activity* 1: 1–118.

Saint-Paul, Gilles, and Thierry Verdier (1993) "Education, Democracy, and Growth." *Journal of Development Economics* 42: 399–407.

Sala-i-Martin, Xavier (2005) "World Distribution of Income: Falling Poverty and... Convergence, Period." *Quarterly Journal of Economics* 121: 351–398.

Salop, Steven (1979) "Monopolistic Competition with Outside Goods." *Bell Journal of Economics* 10: 141–156.

Salter,W.E.G. (1960) *Productivity and Technical Change,*2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press.

Samuelson, Paul A. (1958) "An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money." *Journal of Political Economy* 66: 467–482.

—— (1965) "A Theory of Induced Innovation along Kennedy-Weisäcker Lines." *Review of Economics and Statistics* 47: 343–356.

—— (1975) "Optimum Social Security in a Life–Cycle Growth Model." *International Economic Review* 16: 539–544.

Scherer, Frederick M. (1984) *Innovation and Growth: Schumpeterian Perspectives.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Schlicht, Ekkehart (2006) "A Variant of Uzawa's Theorem." *Economics Bulletin* 6: 1–5.

Schmookler, Jacob (1966) *Invention and Economic Growth.*Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Schultz, Theodore (1964) *Transforming Traditional Agriculture.* New Haven, Conn.: Yale University Press.

—— (1975) "The Value of the Ability to Deal with Disequilibria." *Journal of Economic Literature* 8: 827–846.

Schumpeter, Joseph A. (1934) *The Theory of Economic Development.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

—— (1942) *Capitalism, Socialism and Democracy.* London: Harper & Brothers.

Scotchmer, Suzanne (2005) *Innovations and Incentives.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Segerstrom, Paul S. (1998) "Endogenous Growth without Scale Effects." *American Economic Review* 88: 1290–1310.

Segerstrom, Paul S., T. C. A. Anant, and Elias Dinopoulos (1990) "A Schumpterian Model of the Product Life Cycle." *American Economic Review* 80: 1077–1091.

Seierstad, Atle, and Knut Sydsaeter (1977) "Sufficient Conditions in Optimal Control Theory." *International Economic Review* 18: 367–391.

—— (1987) *Optimal Control Theory with Economic Applications.* Amsterdam: Elsevier.

Shapley, Lloyd (1953) "A Value for *n*-Person Games." In *Contributions to the Theory of Games,* Kuhn, H. and A. Tucker, (editors). Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Shell, Karl (1971) "Notes on the Economics of Infinity." *Journal of Political Economy* 79: 1002–1011.

Simon, Carl, and Lawrence Blume (1994) *Mathematics for Economists.* New York: W. W. Norton.

Simon, Julian (1977) *The Economics of Population Growth.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Skaperdas, Stergios (1992) "Cooperation, Conflict, and Power in the Absence of Property Rights," *American Economic Review* 82: 720–739.

Solon, Gary, Robert Barsky, and Jonathan A. Parker (1994) "Measuring the Cyclicality of Real Wages: How Important Is Composition Bias?" *Quarterly Journal of Economics* 109:1–25.

Solow, Robert M. (1956) "A Contribution to the Theory of Economic Growth." *Quarterly Journal of Economics* 70: 65–94.

—— (1957) "Technical Change and the Aggregate Production Function." *Review of Economics and Statistics* 39: 312–320.

—— (1970) *Growth Theory: An Exposition.* Oxford: Clarendon Press.

Sonin, Konstantin (2003) "Why the Rich May Favor Poor Protection of Property Rights." *Journal of Comparative Economics* 31: 715–731.

Sonnenschein, Hugo (1972) "Market Excess Demand Functions." *Econometrica* 40: 549–563.

Spence, Michael (1976) "Product Selection, Fixed Costs, and Monopolistic Competition." *Review of Economic Studies* 43: 217–235.

Stewart, Frances (1977). *Technology and Underdevelopment.* London: Macmillan Press.

Stiglitz, Joseph E. (1969) "Distribution of Income and Wealth among Individuals." *Econometrica* 37: 382–397.

—— (1971) "Factor Price Equalization in a Dynamic Economy." *Journal of Political Economy* 78: 456–488.

Stokey, Nancy (1988) "Learning by Doing and the Introduction of New Goods." *Journal of Political Economy* 96: 701–717.

Stokey, Nancy, and Robert E. Lucas, with Edward C. Prescott (1989) *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Stone, Richard (1954) "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand." *Economic Journal* 64: 511–527.

Summers, Lawrence H. (1986) "Some Skeptical Observations on the Real Business Cycle Theory." *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review* 10: 23–27.

Summers, Robert, and Alan Heston (1991). "The Penn World Table (Mark 5): An Expanded Set of International Comparisons, 1950–1988." *Quarterly Journal of Economics* 106: 327–368.

Summers, Robert, Alan Heston, and Bettina Aten (2006) "Penn World Table Version 6.2." Center for International Comparisons of Production, Income and Prices, University of Pennsylvania.

Sundaram, Rangarajan (1996) *A First Course in Optimization Theory.*Cambridge: Cambridge University Press.

Swan, TrevorW. (1956) "Economic Growth and Capital Accumulation." *Economic Record* 32: 334–361.

Tabellini, Guido (2007) "Culture and Institutions: Economic Development in the Regions of Europe." University of Bocconi, mimeo.

Tamura, Robert (1991) "Income Convergence in an Endogeous Growth Model." *Journal of Political Economy* 99: 522–540.

Taylor, Alan M. (1994) "Domestic Savings and International Capital Flows." NBER-Working Paper 4892. National Bureau of Economic Research.

Thoenig, Matthias, and Thierry Verdier (2003) "Trade-Induced Technical Bias andWage Inequalities: A Theory of Defensive Innovations." *American Economic Review* 93: 709–728.

Tirole, Jean (1982) "On the Possibility of Speculation on the Rational Expectations." *Econometrica* 50: 1163–1181.

—— (1985) "Asset Bubbles and Overlapping Generations." *Econometrica* 53: 1499–1528.

—— (1988) *The Theory of Industrial Organization*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Tobin, James (1969) "A General Equilibrium Approach to Monetary Theory." *Journal of Money, Credit, and Banking* 1: 15–29.

Tornell, Aaron, and Andés Velasco (1992) "Why Does Capital Flow from Poor to Rich Countries? The Tragedy of the Commons and Economic Growth." *Journal of Political Economy* 100: 1208–1231.

Townsend, Robert (1979) "Optimal Contracts and Competitive Markets with Costly State Verification." *Journal of Economic Theory* 21: 265–293.

Trefler, Daniel (1993) "International Factor Price Differences: LeontiefWas Right!"*Journal of Political Economy* 101: 961–987.

Uhlig, Harald (1996) "A Law of Large Numbers for Large Economies." *Economic Theory* 8: 41–50.

Uzawa, Hirofumi (1961) "Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium!" *Review of Economic Studies* 28: 117–124.

—— (1964) "Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Accumulation." *Review of Economic Studies* 31: 1–24.

Véliz, Claudio (1994) *The New World of the Gothic Fox: Culture and Economy in English and Spanish America*. Berkeley: University of California Press.

Ventura, Jaume (1997) "Growth and Independence." *Quarterly Journal of Economics* 112: 57–84.

—— (2002) "Bubbles and Capital Flows." NBERWorking Paper 9304. National Bureau of Economic Research.

—— (2005) "A Global View of Economic Growth." In *Handbook of Economic Growth*, Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 1419–1498.

Vernon, Raymond (1966) "International Investment and International Trade in Product-Cycle." *Quarterly Journal of Economics* 80: 190–207.

Vogel, Ezra (2006) *Four Little Dragons: The Spread of Industrialization in East Asia*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Von Neumann, John (1945) "A Model of General Equilibrium." *Review of Economic Studies* 13: 1–9.

Wade, Robert (1990) *Governing the Market: Economic Theory and the Role of Government in East Asian Industrialization*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Wallace, Neil (1980) "The Overlapping Generations Model of Fiat Money." In *Models of Monetary Economics*, John Karaken and Neil Wallace (editors). Minneapolis, Minn.: Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Walter, Wolfgang (1991) *Ordinary Differential Equations*. New York: Springer-Verlag.

Wan, Henry, Jr. (1971) *Economic Growth.* New York: Harbrace.

Weber, Max (1930) *The Protestant Ethic and the Spirit of Capitalism.* London: Allen and Unwin.

—— (1958) *The Religion of India.* Glencoe: Free Press.

Webster, David L. (2002) *The Fall of the Ancient Maya: Solving the Mystery of the Maya Collapse.* New York: Thames & Hudson.

Weil, David N. (2005) *Economic Growth.* Boston: Addison-Wesley.

—— (2007) "Accounting for the Effect of Health on Growth." *Quarterly Journal of Economics* 122: 1265–1306.

Weil, Philippe (1987) "Confidence and the Real Value of Money in Overlapping Generation Models." *Quarterly Journal of Economics* 102: 1–22.

—— (1989) "Overlapping Families of Infinitely-Lived Agents." *Journal of Public Economics* 38: 183–198.

Weitzman, Martin L. (2003) *Income, Wealth, and the Maximum Principle.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

White, Lynn T. (1964) *Medieval Technology and Social Change.* New York: Oxford University Press.

Wiarda, Howard J. (2001) *The Soul of Latin America: The Cultural and Political Tradition.* New Haven, Conn.: Yale University Press.

Williams, David (1991) *Probability with Martingales.* Cambridge: Cambridge University Press.

Wilson, Francis (1972) *Labour in the South African Gold Mines, 1911–1969.* Cambridge: Cambridge University Press.

Wong, R. Bin (1997) *China Transformed: Historical Change and the Limits of European Experience.* Ithaca, N.Y.: Cornell University Press.

Wooldridge, Jeffery M. (2002) *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Xu, Bin (2001) "Endogenous Technology Bias, International Trade and Relative Wages." University of Florida, mimeo.

Yaari, Menahem E. (1965) "Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer." *Review of Economic Studies* 32: 137–150.

Young, Alwyn (1991) "Learning by Doing and the Dynamic Effects of International Trade." *Quarterly Journal of Economics* 106: 369–405.

—— (1992) "A Tale of Two Cities: Factor Accumulation and Technical Change in Hong Kong and Singapore." In *NBER Macroeconomics Annual* 1992: 13–54.

—— (1995) "The Tyranny of Numbers." *Quarterly Journal of Economics* 110: 641–680.

—— (1998) "Growth without Scale Effects." *Journal of Political Economy* 106: 41–63.

—— (2005) "The Gift of the Dying: The Tragedy of AIDS and the Welfare of Future African Generations." *Quarterly Journal of Economics* 120: 423–466.

Zeldes, Stephen P. (1989) "Consumption and Liquidity Constraints: An Empirical Investigation." *Journal of Political Economy* 97: 305–346.

Zilcha, Itzak (1978) "Transversality Condition in a Multisector Economy under Uncertainty." *Econometrica* 46: 515–525.

Zuleta, Hernando, and Andrew Young (2006) "Labor's Shares–Aggregate and Industry: Accounting for Both in a Model with Induced Innovation." University of Mississippi, mimeo.

Предметный указатель*

* Номера страниц для понятий, встречающихся в рисунках, отмечены символом *p*, в примечаниях — символом *n*, в таблицах — символом *m*.

Г

И

К

Л

М

П

Р

С

Я

Учебное издание

Серия «Академический учебник»

Дарон Асемоглу

Введение в теорию современного экономического роста

Книга 2

Главный редактор *В. В. Анашвили*
Заведующая редакцией *Ю. В. Бандурина*
Выпускающий редактор *Е. В. Попова*
Редактор *О. В. Черкасова*
Художник *Е. Н. Спасская*
Оригинал-макет *О. З. Элоев*
Верстка *А. И. Попов*
Корректор *Л. В. Чернова*

Подписано в печать 14.02.2018. Формат 70x108 $^1/_{16}$
Гарнитура Newton. Усл. печ. л. 64,4.
Тираж 1000 экз. Изд № 1370/1. Заказ № 4054.

Издательский дом «Дело» РАНХиГС
119571, Москва, пр-т Вернадского, 82

Отпечатано в АО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д.1
Сайт: www.chpd.ru, E-mail: sales@chpd.ru, тел. 8(499)270-73-59

Коммерческий центр — тел. (495) 433-2510, (495) 433-2502
www.ranepa.ru
delo@ranepa.ru

ISBN 978-5-7749-1263-6

9 785774 912636