РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

АКАДЕМИЧЕСКИЙ УЧЕБНИК

Дарон Асемоглу

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СОВРЕМЕННОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Книга 1

Издательский дом ДЕЛО

Daron Acemoglu

INTRODUCTION TO MODERN ECONOMIC GROWTH

Princeton University Press

СЕРИЯ АКАДЕМИЧЕСКИЙ УЧЕБНИК

Дарон Асемоглу

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СОВРЕМЕННОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Книга 1

Перевод с английского
под научной редакцией Кирилла Сосунова

Рекомендуется Российской академией народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации в качестве учебника для студентов, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям, а также для студентов бакалавриата, магистратуры, аспирантов, преподавателей экономических факультетов вузов. (Основание — приказ Министерства образования и науки №130 от 22 февраля 2012 г.)

Издательский дом ДЕЛО

Москва • 2018

УДК 339.1
ББК 65.5
А 901

Асемоглу, Дарон
А 90 Введение в теорию современного экономического роста: в 2 кн. Книга 1 / Дарон Асемоглу; пер. с англ. под науч. ред. Кирилла Сосунова. — М. : Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2018. — 928 с. — (Академический учебник).

ISBN 978-5-7749-1264-3 (общ.)
ISBN 978-5-7749-1262-9 (кн. 1)

Введение в теорию экономического роста — новаторский учебник одного из ведущих современных макроэкономистов. Дарон Асемоглу не только предоставляет студентам инструменты для анализа процесса экономического роста и связанных с ним макроэкономических задач, но и описывает широкий набор вопросов, понимание которых необходимо для применения этих инструментов в анализе современного мирового экономического роста и межстранового расхождения доходов. Автор описывает экономические и математические основания современной теории экономического роста на необходимом уровне строгости, но при этом в легко понятной форме.

В первой части книги представлены базовые основы теории динамического общего равновесия и динамической оптимизации. Затем Д. Асемоглу описывает основные модели экономического роста и переходит к темам, лежащим на рубеже текущих исследований в теории экономического роста, включая модели накопления человеческого капитала, эндогенных технологических изменений, распространения и внедрения технологий, международной торговли, экономического развития и политической экономии. Книга объединяет эти теории с эмпирическими данными и показывает, как теоретические методы могут позволить лучше понять фундаментальные причины экономического роста и богатства народов.

Для студентов старших курсов, аспирантов, исследователей.

УДК 339.1
ББК 65.5

ISBN 978-5-7749-1264-3 (общ.)
ISBN 978-5-7749-1262-9 (кн. 1)

Асу, за ее нескончаемые любовь и поддержку

Содержание

Часть V. Стохастическая теория экономического роста

Часть VI. Распространение технологий, международная торговля и межстрановые взаимосвязи

Предисловие к русскому изданию

С момента начала моей работы над учебником «Введение в современный экономический рост» прошло более 10 лет, 8 лет назад он вышел в печать. За это время в теории экономического роста был достигнут значительный прогресс. Однако задачей этого краткого предисловия является не обзор этих достижений. Я постараюсь использовать предоставленную мне возможность и еще раз остановиться на философии книги и объяснить, почему она остается полезной для студентов старших курсов, аспирантов и исследователей.

В основе философии книги лежит утверждение о том, что скрупулезный экономический анализ процесса экономического роста должен основываться на трех подходах.

1. Строгое математическое обоснование процесса экономического роста. Акцент на строгом математическом анализе объясняется тем, что количественный анализ экономического роста требует использования динамических оптимизационных моделей. Первые девять глав книги, а также главы 16 и 17 в основном посвящены построению математических оснований теории экономического роста.
2. Подробный теоретический и эмпирический анализ эндогенных технологических изменений, так как устойчивый экономический рост почти всегда является следствием технологических прорывов и эти технологические прорывы приходят не как манна небесная, а являются результатом целенаправленной деятельности фирм, работников и исследователей. Главы 10–15 книги в основном посвящены построению моделей систематического анализа эндогенных технологических изменений и могут рассматриваться как введение в обширную, быстро растущую и захватывающую литературу по эндогенным технологическим изменениям. Я уделил особое внимание вопросу о том, как технологические изменения связаны со стимулами экономических агентов и как анализ этой связи иногда ведет к интересным выводам.
3. Введение в общественный и политический контекст теории экономического роста. Последняя треть книги посвящена таким вопросам, как

структурная и общественная трансформация, которая подводит фундамент под экономический рост, и политическая экономия роста, которая формирует институты, политику и препятствия экономическому росту. Последняя треть книги является важнейшей ее частью, так как растущее число эмпирических и исторических исследований подтверждает утверждение о том, что важнейшими фундаментальными детерминантами экономических стимулов являются политические и общественные факторы. Поэтому анализ причин межстрановой дивергенции темпов роста и межстрановых различий в богатстве народов (а также региональных различий внутри стран) должен быть основан на этих политических и общественных факторах.

Эти три подхода позволяют подготовить читателя к глубокому анализу экономического роста. Более того, я всегда считал и считаю сейчас, что эти три подхода являются важнейшим элементом изучения теории роста. Второй и третий из них позволяют построить хорошее качественное и даже возможно эмпирическое описание детерминантов экономического роста, однако без первого наш анализ будет неполным. Первый и второй подходы вместе составляют основу стандартного курса по теории экономического роста, однако они не позволяют ответить на наиболее интересный и наиболее важный вопрос о том, почему некоторые страны смогли вступить на траекторию устойчивого экономического роста, а другим странам не удалось этого сделать.

В последние годы мои исследования в основном были посвящены политической экономии и общественным аспектам экономического роста. Их результатом стала написанная вместе с Джеймсом Робинсоном книга «Почему одни страны богатые, а другие бедные. Происхождение власти, процветания и нищеты», в которой представлен подход к анализу богатства и бедности народов, по большей части основанный на политической экономии. Язык написания этой книги делает ее доступной широкому кругу читателей. Она переведена на русский язык и может служить хорошим дополнением к этому учебнику, так как она более глубоко проникает в институциональные причины экономического роста и описывает, каким образом они формируют стимулы экономических агентов и их эволюцию.

Возможно, для российского читателя наиболее важной частью книги станут не математические и технологические основания экономического роста, а его политические и общественные причины, наиболее четко наблюдаемые в современном положении российской экономики и российского общества.

Экономика Российской Федерации быстро росла в период высоких цен на нефть и газ, тем самым сумев получить выгоду от своего богатства природными ресурсами. Однако этот рост экономики был достаточно однобоким и в основном принес выгоду политикам, олигархам и другим могущественным группам в обществе, а не привел к росту благосостояния всех членов общества. Падение цен природных ресурсов сделало слабость российской экономики очевидной для всех наблюдателей. Причиной этой слабости является не недостаток физического или человеческого капитала. Российская экономика обладает хорошо образованной рабочей силой (по стандартам стран со средним уровнем дохода) и современной инфраструктурой. Некоторое технологическое отставание от мировой технологической границы также не является причиной этой слабости. Россия достигла успехов во многих высокотехнологичных отраслях, в том числе в программировании. Слабость российской экономики следует из ее политической системы, коррупции и неравенства, к которым она ведет, и институциональных искажений, которые эта политическая система создает.

Я не являюсь экспертом в российской политической экономии, и эта книга не является подходящей площадкой для обсуждения этого вопроса. Однако, возвращаясь к российской экономике, я надеюсь, что философия этой книги, основанная на трех подходах, будет полезна следующему поколению экономистов, желающих изучить теорию экономического роста, несмотря на то что некоторый материал этого учебника уже устарел и новые исследования в таких областях, как институциональная экономика или человеческий капитал и технологические изменения, внесли значительный вклад в наше понимание процесса экономического роста.

Дарон Асемоглу
1 апреля 2017 г.
Уистлер, Канада

Предисловие

Научная дисциплина жива до тех пор, пока в ней есть изобилие нерешенных проблем.

Дэвид Гилберт, Париж, 1900

У этой книги две основные цели. Во-первых, и в основном, она посвящена теории экономического роста и долгосрочного развития экономики. Процесс экономического роста и причины различий в уровнях развития экономик различных стран — одни из самых интересных, важных и сложных вопросов в современных общественных науках. Основная задача этой книги — познакомить студентов и аспирантов с этими важными проблемами и теоретическими методами, необходимыми для их изучения. Для этого в книге делается упор на динамические методы анализа экономики, так как только такие методы позволяют вести серьезный анализ вопросов экономического роста и экономического развития. Я также стараюсь вести прозрачное обсуждение основных эмпирических фактов и исторических процессов, лежащих в основе современного состояния мировой экономики. Это обсуждение мотивировано моей верой в то, что для понимания того, почему некоторые страны растут, в то время когда другие не растут, экономисту требуется выйти за рамки механики моделей и сформулировать вопросы относительно фундаментальных причин экономического роста.

Во-вторых, хотя и в меньшей мере, эта книга также является введением в современную макроэкономику и методы динамического анализа экономики на уровне магистерской программы. Некоторые авторы иногда утверждают, что в макроэкономике, в отличие от микроэкономики, нет базового ядра, принимаемого всеми экономистами. Это утверждение верно лишь отчасти. Действительно, среди макроэкономистов есть разногласия относительно способов моделирования краткосрочной динамики экономики и относительно того, насколько точно макроэкономика может описать реальный мир, однако они единогласны в выборе основных моделей динамического анализа макроэкономики. Эти модели включают в себя модель роста Солоу, неоклассическую модель роста Рамсея, модель перекрывающихся поколений, модель технологического прогресса и внедрения технологий. Так как все эти модели являются моделями экономического роста, детальное изучение теории экономического роста может служить (и, возможно, должно служить) введением в базовый курс современной макроэкономики. Несмотря на то что существует целый ряд хороших учебников продвинутого (магистерского) уровня по макроэкономике, они в основном уделяют мало внимания базовому набору моделей и не показывают связи между современным макроэкономическим анализом с одной стороны и теорией общего равновесия с другой стороны. В то же время эта книга не покрывает вопросы, связанные с краткосрочной динамикой экономики, хотя дает строгое и глубокое введение в то, что я называю ядром современной макроэкономики.

Выбор основных проблем, изучаемых в данной книге, сделан так, чтобы сбалансировать две вышеописанные цели ее создания. Главы 1, 3, 4 посвящены описанию наиболее важных и заметных особенностей современного экономического роста и источников межстрановых различий в уровне экономического развития. Несмотря на то что эти главы не могут детально описать большой объем литературы, посвященной эмпирике экономического роста, они предоставляют студентам достаточную базу для понимания центральных вопросов, изучаемых теорией экономического роста, и дают платформу для дальнейшего анализа этого значительного объема литературы.

Главы 2, 8, 9 и 10 посвящены базовым моделям современной макроэкономики и традиционной теории экономического роста, в то время как в главе 11 описываются модели эндогенного роста первого поколения. Главы 12–15 покрывают материал, посвященный теории технологического прогресса, что является важнейшей частью любого курса по современной теории экономического роста.

Глава 16 обобщает методы, изложенные в главе 6 для случая наличия неопределенности. В главе 17, базируясь на этих методах, представлен ряд моделей стохастического роста, в частности неоклассическая модель роста в случае неопределенности, которая является основой современной макроэкономики (хотя она часто не представлена в курсах теории экономического роста). Также в качестве приложения в главе 17 рассмотрена каноническая модель реального делового цикла. Эта глава также покрывает другую важнейшую модель современной макроэкономики — модель неполных рынков Бьюли. Наконец, в этой главе представлен ряд других подходов к моделированию взаимодействия между неполнотой рынков и экономическим ростом, а также показано, как модели стохастического роста могут быть использованы для понимания процессов перехода из состояния застоя или медленного роста к равновесию с высоким устойчивым темпом роста.

Главы 18–21 посвящены вопросам, которые зачастую не рассматриваются в учебниках по теории экономического роста. Это модели заимствования и внедрения технологий, связи между международной торговлей и технологическим прогрессом, модели структурных изменений, демографических процессов, возможности ловушки бедности, влияния уровня неравенства на экономический рост и взаимодействия между финансовым и экономическим развитием экономики. В то же время эти вопросы очень важны для создания моста между теорией и эмпирическими фактами, которые мы наблюдаем на практике. Большинство традиционных теорий экономического роста рассматривают единственную экономику в изоляции, часто уже после того как она достигла траектории сбалансированного роста. Изучение моделей, которые включают межстрановую независимость, структурные изменения, скачки в экономическом развитии позволяет связать базовые основы экономики развития, такие как структурные и демографические изменения и ловушка бедности, с теорией экономического роста.

Главы 22 и 23 посвящены вопросу, также часто опускаемому многими учебниками по макроэкономике и теории экономического роста: политической экономии. Включение этого материала мотивировано моей верой в то, что изучение экономического роста будет очень неполным, если мы не сможем задать вопросы относительно фундаментальных причин различий между странами в их экономическом развитии. Эти вопросы неумолимо приводят нас к различиям в институтах и в методах ведения экономической политики в разных странах. Методы политической экономии позволяют нам развить модели, объясняющие, почему экономическая политика и институты разнятся между странами, и поэтому должны быть интегральной частью теории экономического роста.

Несколько слов относительно философии и организации книги, которые могут быть полезны студентам и преподавателям. Базовая философия книги состоит в том, что все представленные в ней результаты должны быть доказаны или по меньшей мере детально объяснены. Это приводит к организации, немного отличной от большинства других книг. Большинство учебников по экономике не дают доказательства многих результатов, которые в них описаны и используются, а важные для анализа математические методы зачастую предполагаются известными читателю или приводятся в приложениях. Я, с другой стороны, стараюсь привести простое доказательство почти каждого результата, полученного в книге. Оказывается, что, если отойти от ненужного уровня общности, большинство результатов может быть сформулировано и доказано способом, легко понятным студентам магистерского уровня. На самом деле я верю, что даже более длинные и сложные доказательства намного более понятны, чем общие утверждения, сделанные без какого-либо доказательства и оставляющие читателя в недоумении, почему именно они оказываются верными.

Я надеюсь, что стиль изложения, который я выбрал, не только делает книгу самодостаточной, но и позволяет студентам достичь глубокого понимания материала. В соответствии с этим подходом я ввожу основные математические методы, необходимые для развития основного материала в тексте книги. Мой собственный опыт говорит в пользу линейного подхода, где нужные математические методы вводятся по мере необходимости, что облегчает студентам задачу следования и усвоения материала. Как следствие, методы анализа стабильности динамических систем, динамического программирования в дискретном времени и оптимального управления вводятся в основном тексте книги. Это позволит студентам одновременно понять основания теории экономического роста и введет их в основные методы динамического экономического анализа, которые сейчас все чаще используются во всех подразделах экономической науки. Во всей книге технически более сложный материал, который может быть пропущен без ущерба для цельности изложения, помечен звездочкой (*). Материал, который лишь косвенно связан с основными результатами, полученными в тексте, а также материал, который должен быть известен большинству студентов магистерского уровня, отнесен к приложениям.

Я также включил в книгу большое количество упражнений. Студенты могут достичь глубокого понимания материала только через работу над упражнениями. Более сложные упражнения также отмечены звездочками.

Эта книга может быть использована рядом различных способов. Во-первых, она может быть использована как пособие для квартального или семестрового курса по теории экономического роста. Такой курс может начаться с глав 1–4, и затем, в зависимости от его цели, можно использовать главы 5–7 либо как справочный материал, либо для глубокого изучения теории общего равновесия и основных методов динамической оптимизации в теории экономического роста. Главы 8–11 посвящены традиционной теории экономического роста, главы 12–15 покрывают основу теории эндогенного экономического роста. В зависимости от количества времени и интересов преподавателя и студентов любой выбор глав с 16 по 23 может быть взят за основу заключительной части такого курса.

Во-вторых, книга может быть использована как пособие для квартального курса по макроэкономике на первом курсе магистерской программы. Глава 1 в этом случае будет опциональной. Главы 2, 5–7, 8–11, 16–17 и некоторый выбор из глав 12–15 будут в данном случае служить ядром такого курса. Этот же материал может быть покрыт и в семестровом курсе, однако в таком случае он может быть дополнен либо некоторым набором из последних глав книги, либо материалом из одного из ведущих учебников по макроэкономике магистерского уровня, посвященным краткосрочной динамике в макроэкономике, фискальной политике, теории ценообразования финансовых активов или другим разделам в динамической макроэкономике.

В-третьих, книга может быть использована как пособие для продвинутого (второй курс магистерской программы) курса по теории экономического роста и экономике развития. Такой продвинутый курс по теории роста и экономике развития может использовать главы 1–11 как базу, а затем сфокусироваться на отдельных главах с 12 по 23.

Наконец, так как книга является самодостаточной, я также надеюсь, что она может быть использована и для самообразования и самостоятельной работы.

Благодарности

Эта книга выросла из первого магистерского курса лекций по введению в макроэкономику, который я преподавал в MIT. Некоторые части книги я также использовал для преподавания курсов по макроэкономике и теории экономического роста второго года обучения. Я благодарен всем студентам, посещавшим мои лекции за их замечания, которые улучшили текст рукописи. Я выражаю особую благодарность Натану Хендрену, Дереку Ли, Монике Мартинез-Браво, Пламену Немову, Самуэлю Пиенкнагура, Анне Забай и отдельно Георгию Егорову, Майклу Питерсу и Альпу Симсеку за их прекрасную помощь в подготовке материала.

Альп заслуживает большего, чем особое упоминание. Он принимал участие в работе над каждой частью книги в течение более чем двух лет. Без помощи Альпа написание книги заняло бы намного большее время и она содержала бы намного больше ошибок. Я глубоко ему признателен.

Я также благодарю Пола Антраса, Габриелу Каролл, Франческо Каселли, Мелиссу Делл, Иисуса Фернандез-Веллаверде, Киминори Мацуяму, Джеймса Робертсона и Пьера Яреда за очень важные предложения во многих главах, а также Джорджа Марио-Ангелотеса, Беньямина Бердуго, Трумана Бьюли, Оливье Бланшара, Леопольдо Фергюссона, Питера Фанка, Одеда Галор, Хьюго Хопенхайна, Саймона Джонсона, Чэда Джонса, Христоса Коловатианоса, Омера Моава, Эдуардо Моралеза, Исмаила Саглама, Эккехарта Шлитч, Патрицию Вейгер, Луиса Зермено и Джесса Зин за полезные предложения и исправления в отдельных главах.

Наконец, я благодарен Лорен Фахи за редакторские правки во многих главах и помощь в работе над библиографией, Сиду Вестмоланду за исключительную верстку и редакторские правки, а также Сету Дитчик и его коллегам в издательстве *Princeton University Press* за поддержку и помощь в течение всего процесса работы над книгой.

Часть I
ВВЕДЕНИЕ

Глава 1
Экономический рост и экономическое развитие: вопросы

1.1. Межстрановые различия в уровне доходов

Одной из отличительных черт мировой экономики в настоящее время является значительный разброс в уровне доходов на душу населения и выпуска на одного работника в различных странах. Страны, находящиеся наверху мирового распределения уровня доходов, в 30 и более раз богаче стран, находящихся в нижней части распределения. Например, в 2000 г. валовой внутренний продукт (ВВП) на душу населения в США превысил 34 000 долл. В это же время доход на душу населения был значительно ниже во многих других странах: около 8000 долл. в Мексике, около 4000 долл. в Китае, чуть более 2500 долл. в Индии, немногим выше 1000 долл. в Нигерии и намного ниже этой цифры во многих других африканских странах, таких как Чад, Эфиопия и Мали. Все эти данные приведены в долларах США 2000 г. и скорректированы на различия в покупательной способности (ППС) с целью учесть различия в относительных ценах разных товаров и услуг в различных странах[1]. Межстрановой разрыв в уровне доходов становится намного большим, если не проводить ППС-корректировку. Например, без нее ВВП на душу населения в Китае и Индии в 2000 г. становится примерно в 4 раза меньшим приведенных выше цифр.

Рис. 1.1 поможет при первом взгляде на эти показатели. На нем показаны оценки гистограмм распределения скорректированного на ППС ВВП на душу населения для стран, по которым имеются эти данные, в 1960, 1980 и 2000 гг. Из него можно сделать ряд важных выводов. Во-первых, он показывает, что в 1960 г., через 15 лет после окончания Второй мировой войны, большинство стран имело доход на душу населения менее 1500 долл. США (в ценах 2000 г.), мода распределения примерно равна 1250 долл. США. Сдвиг распределения вправо в 1980 и 2000 г. показывает рост среднего дохода на душу населения в течение последующих сорока лет. В 2000 г. мода лишь немногим выше 3000 долл. США, но теперь появляется еще одно облако концентрации стран с доходами между

[1] Все сведения взяты из базы данных *Penn World Tables*, созданной А. Хестоном, Р. Саммерсом и Б. Атеном [Heston, Summers, Aten 2002]. Подробные сведения об источниках и информация о ППС-корректировке приведены в параграфе 1.9.

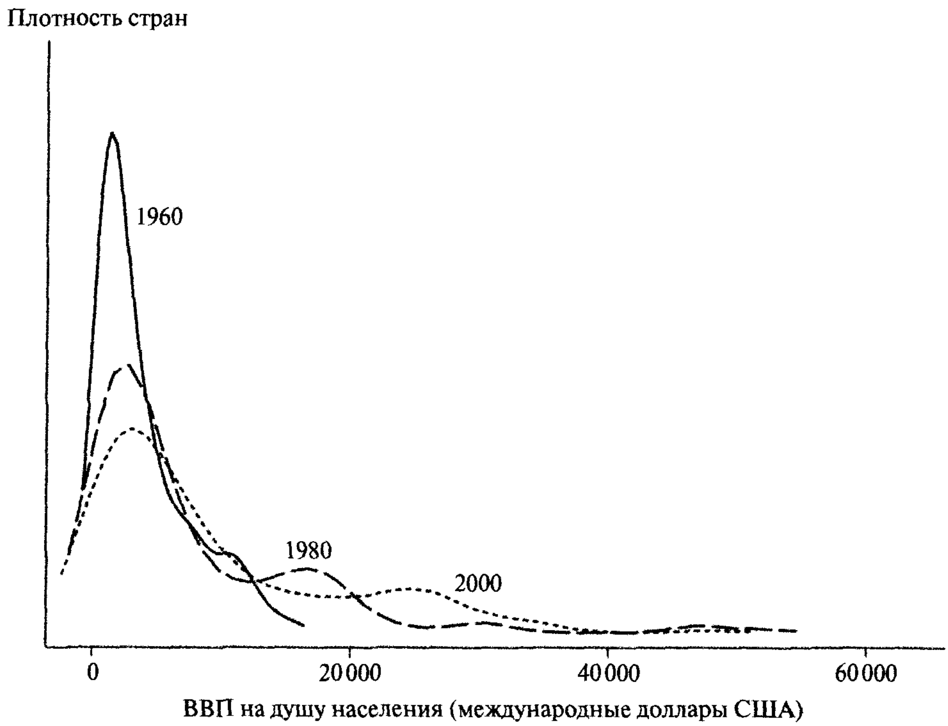


Рис. 1.1. Оценки гистограмм распределения стран в соответствии со скорректированным на ППС ВВП на душу населения в 1960, 1980 и 2000 гг.

20 000 и 30 000 долл. США. Оценка плотности распределения для 2000 г. показывает значительное неравенство в доходах на душу населения в наши дни.

Расширение гистограммы распределения в 2000 г. отчасти возникает из-за роста среднего уровня доходов. Поэтому более информативным будет взгляд на логарифм (log) дохода на душу населения.

Взгляд на логарифмы таких переменных, как доход на душу населения, является более информативным, потому что он позволяет исключить влияние их экспоненциального роста, как показывает рис. 1.8 далее. Это следует из простого наблюдения: если переменная $x(t)$ растет экспоненциально, переменная $\log x(t)$ растет линейно, если переменные $x_1(t)$ и $x_2(t)$ растут экспоненциально с одним и тем же темпом роста, переменная $\log x_1(t) - \log x_2(t)$ остается постоянной, в то время как переменная $x_1(t) - x_2(t)$ растет.

Рис. 1.2 показывает схожую картину, однако теперь расширение гистограммы со временем ограничено, так как в то время как абсолютный уровень разрыва в уровне доходов между богатыми и бедными странами значительно вырос между 1960 и 2000 г., отношение уровней доходов богатых и бедных стран увеличилось в намного меньшей степени. Несмотря на это, легко заметить, что гистограмма для 2000 г. более распределена по доходам, чем гистограмма для 1960 г. В особенности оба рисунка показывают, что между 1960 и 2000 гг. произошло значительное увеличение доходов относительно богатых стран, в то время как многие страны оставались довольно бедными. Последнее наблюдение часто связывают с таким понятием, как «стратификация», когда часть стран со средним уровнем доходов в 1960 г. перешли в категорию относительно богатых стран, а другие сохранили средний уровень дохода или даже испытали его снижение в 1960–2000 гг.

Рис. 1.1 и 1.2 показывают, что в настоящее время уровень неравенства между странами немного выше, чем в 1960 г. Однако они малоинформативны для сравнения уровней доходов отдельных домохозяйств в мировой экономике: они рассматривают каждую страну как отдельный элемент выборки в распределении независимо от размера ее населения. Альтернативный взгляд на неравенство доходов показан на рис. 1.3, где изображена гистограмма взвешенного по населению распределения стран. В этом случае такие страны, как США, Индия, Китай и Россия получают больший вес, потому что они имеют большее население. Выводы из этого рисунка значительно отличаются от приведенных выше. А именно:

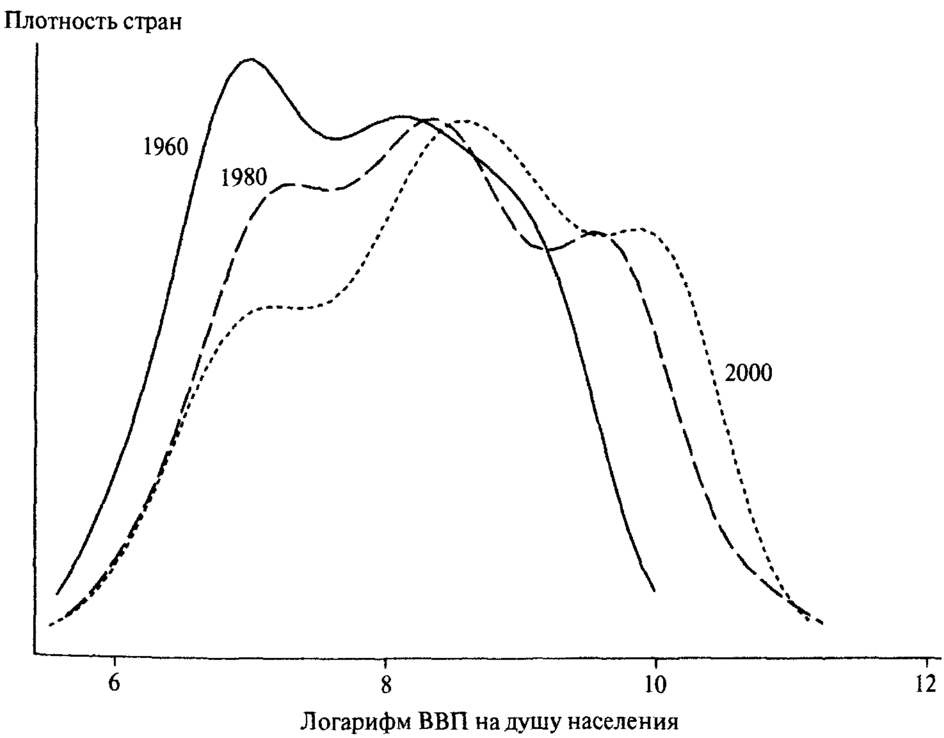


Рис. 1.2. Оценки гистограмм распределения стран в соответствии со скорректированным на ППС логарифмом ВВП на душу населения в 1960, 1980 и 2000 гг.

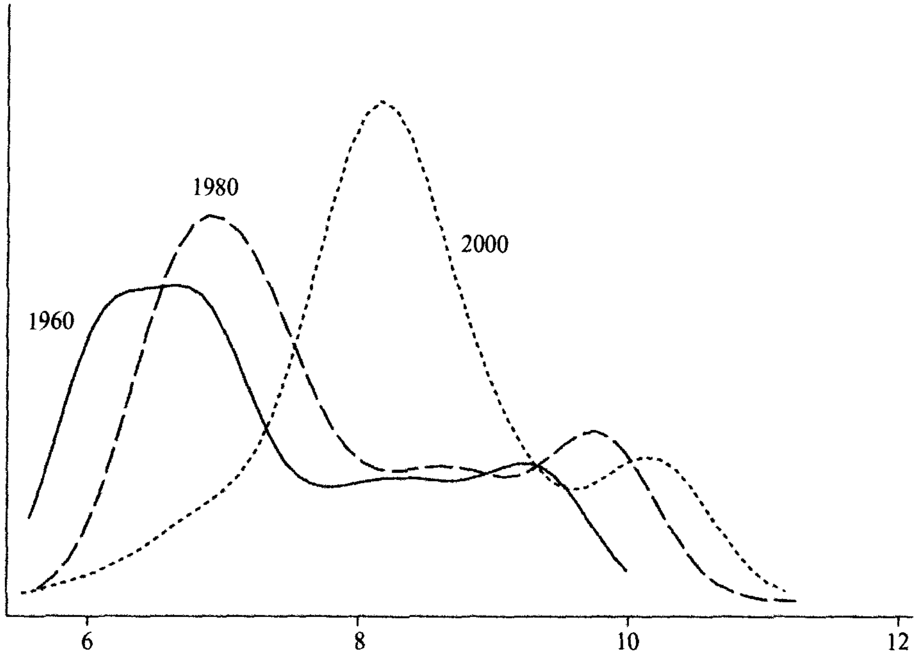


Рис. 1.3. Оценки гистограмм распределения стран в соответствии со взвешенным по населению, скорректированным на ППС ВВП на душу населения в 1960, 1980 и 2000 гг.

гистограмма в 2000 г. менее распределена по доходам и имеет более тонкие хвосты, чем в 1960 г. Это отражает тот факт, что в 1960 г. Китай и Индия были среди беднейших стран мира, в то время как их относительно быстрый рост в 1990-е гг. привел их в категорию стран с доходом ниже среднего уровня. Таким образом, рост экономик Китая и Индии был важной причиной относительного выравнивания уровня дохода между отдельными жителями планеты.

Рис. 1.1, 1.2 и 1.3 показывают распределение ВВП на душу населения. В то время как этот показатель действительно говорит об уровне благосостояния населения, теория экономического роста в основном изучает производственные возможности различных стран. Поэтому нам проще приложить теорию к данным, наблюдая выпуск (ВВП) на одного работника, а не на душу населения. Более того, основными причинами различий в уровне экономического развития стран являются различия в институтах и экономической политике. Поэтому для понимания причин различия в уровне доходов и темпов роста экономики между странами (в противоположность вопросам об уровне благосостояния населения Земли) более верным будет взгляд на невзвешенное по населению распределение. Рис. 1.4 показывает гистограмму невзвешенного по населению

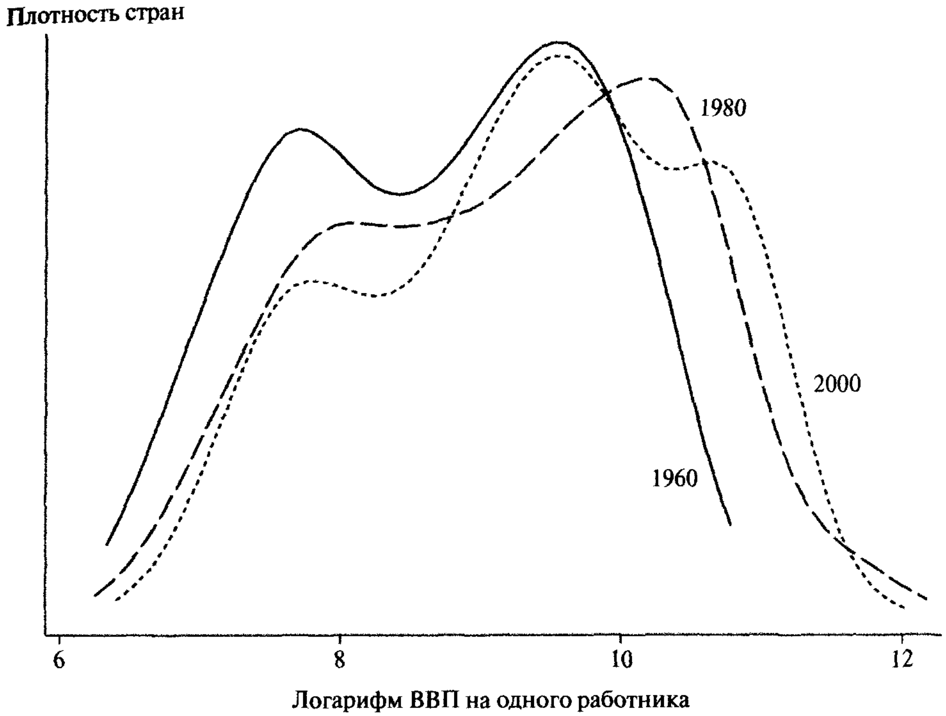


Рис. 1.4. Оценки гистограмм распределения стран в соответствии со скорректированным на ППС ВВП на одного работника в 1960, 1980 и 2000 гг.

распределения ВВП на одного работника. Под работниками тут понимается все экономически активное население (в соответствии с определением Международной организации труда). Рис. 1.4 очень схож с рис. 1.2, единственное отличие состоит в большей концентрации стран в относительно богатом правом хвосте гистограммы, в то время как левый хвост остается таким же, как и на рис. 1.2.

Наконец, рис. 1.1–1.4 иллюстрируют два важных факта: во-первых значительная дисперсия распределения говорит о большом разрыве между странами в уровне доходов на душу населения и на одного работника. Во-вторых, мы видим незначительный, но все же заметный рост в неравенстве доходов между странами (но не обязательно среди отдельных жителей Земли).

1.2. Доход и благосостояние

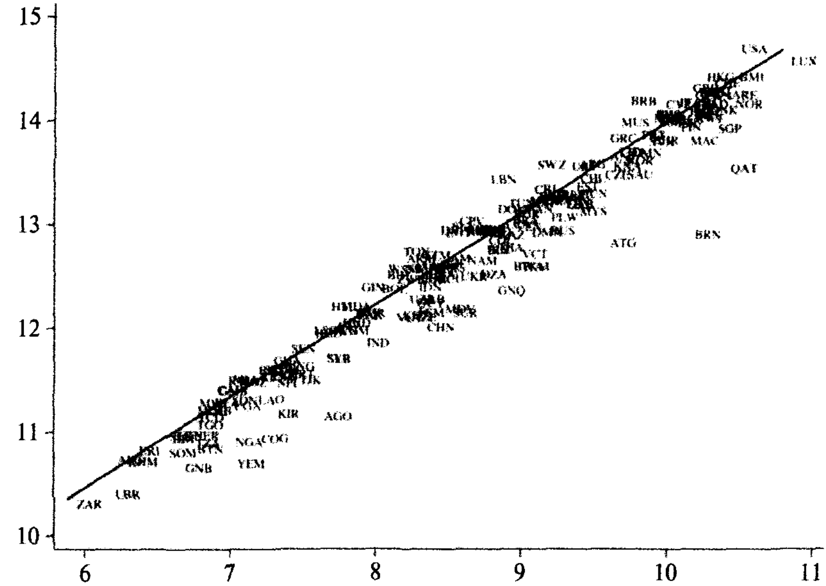
Нужно ли нам изучать причины межстрановых различий в уровне дохода? Ответ на этот вопрос очевиден: да, нужно. Высокий уровень дохода отражает высокий уровень жизни. Конечно, экономический рост иногда увеличивает уровень загрязнения окружающей среды и может увеличить потребности населения страны таким образом, что исходный набор благ уже становится недостаточным для удовлетворения потребностей людей. Однако в конце концов, когда мы сравниваем высокоразвитую богатую экономику с менее развитой, мы видим огромные различия в уровне и условиях жизни и в здоровье нации.

Рис. 1.5 и 1.6 демонстрируют эти различия и показывают связь между доходом на душу населения в 2000 г. и потреблением на душу населения и средней ожидаемой продолжительностью жизни в том же году. Учтите, что данные по доходу и потреблению скорректированы на ППС, то есть различия в уровне потребления не отражают (по меньшей мере в принципе, в силу построения) различий в стоимости одинакового набора потребительских благ в разных странах. Корректировка на ППС нивелирует эти различия и пытается измерить разницу в реальном уровне потребления. Таким образом, самые богатые страны не только производят в 30 раз больше, чем беднейшие, но и потребляют во столько же раз больше товаров и услуг. Более того, межстрановые различия в здоровье населения также очень значительны: в то время как ожидаемая продолжительность жизни в самых богатых странах достигает 80 лет, она находится между 40 и 50 годами во многих африканских странах. Эти различия демонстрируют огромную разницу в уровне благосостояния населения в разных странах мира.

Понимание причин того, почему некоторые страны настолько богаты, в то время как некоторые другие настолько бедны, является одной из самых важных, если не самой важной, задач общественных наук. Это важно и потому, что эти различия в уровне доходов имеют значительное влияние на уровень благосостояния, и потому, что изучение этих различий проливает свет на то, как устроены экономические системы в различных странах и почему в некоторых случаях они не могут функционировать надлежащим образом.

Наше повышенное внимание к уровню доходов на душу населения не означает, что этот показатель может использоваться как «достаточная статистика» уровня благосостояния рядового гражданина. Также это не означает, что он является единственным показателем, который нам интересен. Как будет показано далее, особенности рыночной экономики (такие как знаменитая первая теорема экономики благосостояния или «невидимая рука» рынка Адама Смита) не гарантируют отсутствия конфликтов между индивидами или отдельными группами общества. Экономический рост увеличивает средний показатель благосостояния нации, но в то же время он создает победителей и проигравших от его развития. Знаменитая концепция созидательного разрушения Йозефа Шумпетера говорит именно об этом аспекте экономического роста. Так как рост возникает за счет появления новых технологий и создания новых фирм, имеющиеся производственные связи, фирмы, а иногда и средства к существованию отдельных индивидов разрушаются в его процессе, на их место приходят

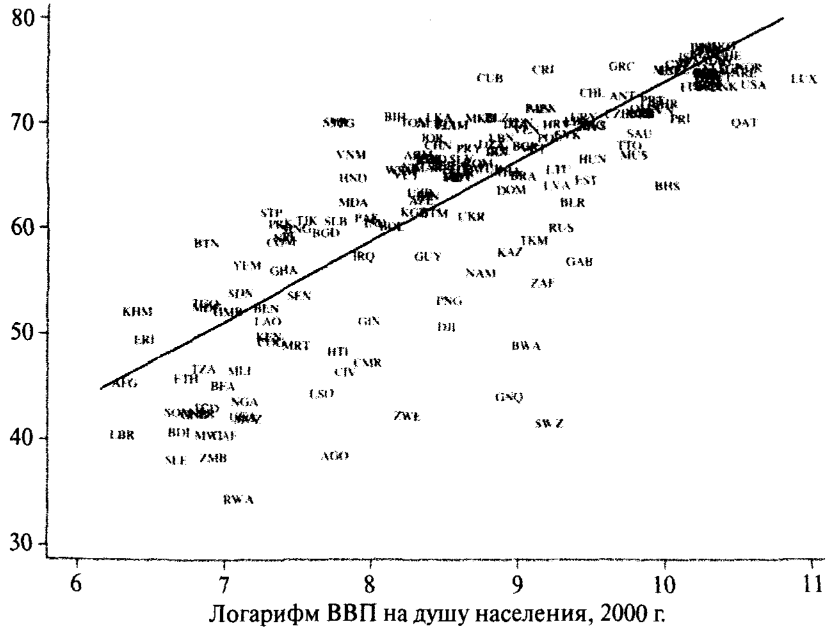
Логарифм потребления на душу населения, 2000 г.



Логарифм ВВП на душу населения, 2000 г.

Рис. 1.5. Связь между доходом на душу населения и потреблением на душу населения в 2000 г. Определения сокращений, используемых здесь и в других подобных рисунках, приведены на странице в интернете по адресу: http://unstats.un.org/unsd/methods/m49/m49alpha/htm

Ожидаемая продолжительность жизни в годах, 2000 г.



Логарифм ВВП на душу населения, 2000 г.

Рис 1.6. Связь между доходом на душу населения и ожидаемой продолжительностью жизни в 2000 г.

новые фирмы и технологии. Этот процесс естественным образом приводит к трениям в обществе, в том числе и в растущем обществе. Другая причина возникновения напряжения в обществе, связанная с экономическим ростом (и развитием), отмеченная Саймоном Кузнецом и обсуждаемая в деталях в части VII, состоит в том, что рост и развитие часто происходят на фоне значительных структурных изменений в обществе, которые также могут разрушить созданные устойчивые связи и создать ряд групп победителей и проигравших. Одна из важных задач политической экономии, подробно обсуждаемая в заключительной части книги, состоит в создании институтов и формировании экономической политики таким образом, чтобы проигравшие от экономического роста были компенсированы в достаточной степени и не стремились к созданию преград экономическому прогрессу.

Прекрасной иллюстрацией того факта, что экономический рост не всегда означает улучшение условий жизни для всего или даже для большинства населения, является Южно-Африканская Республика во время режима апартеида. Имеющиеся данные (по зарплатам на золотодобывающих шахтах) говорят о том, что с начала XX в. до падения режима апартеида ВВП на душу населения значительно вырос, однако реальные зарплаты черных южноафриканцев, составляющих большинство населения страны, скорее всего, сократились в течение этого периода времени. Это, конечно, не означает, что экономический рост в ЮАР не был полезен для общества, ЮАР остается одной из самых богатых стран Африки. В то же время это обращает наше внимание на другие аспекты экономики, а также подчеркивает потенциальную возможность возникновения конфликтов между различными группами общества в процессе экономического роста. Аналогичным образом, имеющиеся данные говорят о том, что в течение ранней фазы промышленной революции в Великобритании, которая положила начало всему современному экономическому росту в мире, условия жизни большинства рабочих могли ухудшиться или в лучшем случае остаться неизменными. Это расхождение между уровнем ВВП на душу населения и условиями жизни значительной части населения страны не только интересно само по себе, но также может объяснить нам, почему некоторые слои общества могут быть заинтересованы в политике и институтах, которые не стимулируют экономический рост.

1.3. Экономический рост и различия в уровнях доходов

Как некоторые страны могут оказаться более чем в 30 раз богаче, чем другие? Рассмотрим две страны, A и B, с одинаковым уровнем дохода в начальный момент времени. Представим себе, что страна A имела нулевой темп роста, то есть доход оставался постоянным, а в стране B доход на душу населения рос с темпом 2% в год. Через 200 лет страна В будет более чем в 52 раза богаче, чем страна А. Эти вычисления подсказывают, что США могут быть значительно богаче Нигерии, потому что экономика США имела устойчивый рост в течение длительного периода времени, в то время как экономика Нигерии не росла. Мы увидим далее, что в этом простом наблюдении имеется большая доля истины. Действительно, даже в короткий по историческим меркам послевоенный период наблюдались огромные различия в темпах экономического роста разных стран мира. Эти различия продемонстрированы на рис. 1.7, где показаны гистограммы распределения темпов роста различных экономик мира в 1960, 1980 и 2000 гг. Темп роста в 1960 г. рассчитан как (геометрическое) среднее темпов роста в 1950–1969 гг., темп роста в 1980 г. рассчитан как среднее темпов роста в 1970–1989 гг., а темп роста в 2000 г. рассчитан как среднее темпов роста в 1990–2000 гг. (во всех случаях использованы только имеющиеся данные). Рис. 1.7 показывает, что в каждом временном интервале наблюдается значительный разброс в темпах экономического роста в различных странах: межстрановое распределение простирается от отрицательных темпов роста вплоть до темпа около 10% в год. Он также показывает, что мировой экономический рост был наиболее быстрым в 1950–1960 гг.

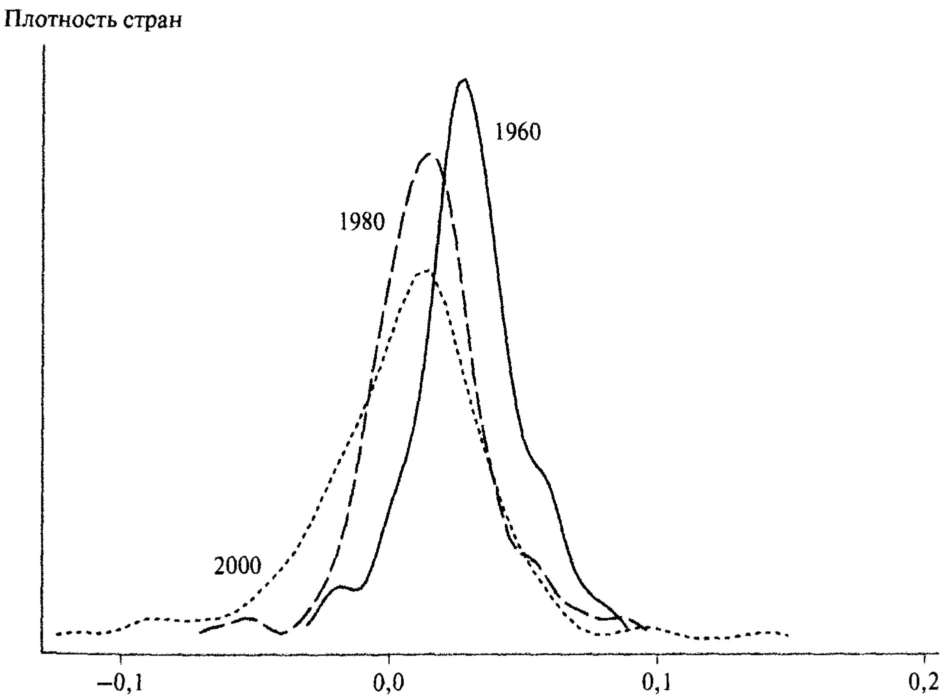


Рис. 1.7. Оценка гистограмм распределения темпов роста ВВП на душу населения (скорректированного на ППС) стран мира в 1960, 1980 и 2000 гг.

Рис. 1.8 позволяет взглянуть на различие в темпах роста различных экономик с другой стороны. На нем показаны логарифмы ВВП на душу населения в период с 1960 по 2000 г. для ряда стран (в этом случае я использую ВВП на душу населения, а не на одного работника из-за большей доступности таких данных и чтобы сделать рисунок сравнимым с другими рисунками ниже). Две верхние линии, показывающие ВВП на душу населения в США и Великобритании, растут с постоянными скоростями при чуть более быстром росте в США, так что разница логарифмов (или относительный разрыв) в 2000 г. оказывается большей, чем в 1960 г. Испания в 1960 г. была намного беднее, чем США и Великобритания, однако росла очень быстро между 1960 г. и серединой 1970-х гг., сокращая отрыв от этих двух экономик. Три страны, имеющие самые большие темпы роста на этом рисунке, — Сингапур, Южная Корея и Ботсвана. Сингапур начинает намного беднее, чем Испания и Великобритания в 1960 г., но растет очень быстро и к середине 1990-х гг. становится богаче их обеих. Южная Корея имеет похожую траекторию, хотя стартует беднее Сингапура и растет чуть медленнее, и поэтому к концу периода наблюдения она все еще беднее Испании. Другая страна, которая росла очень быстро, — это «история африканского успеха» Ботсвана, которая была очень бедной в начале периода наблюдения. При этом ее быстрый рост, в особенности

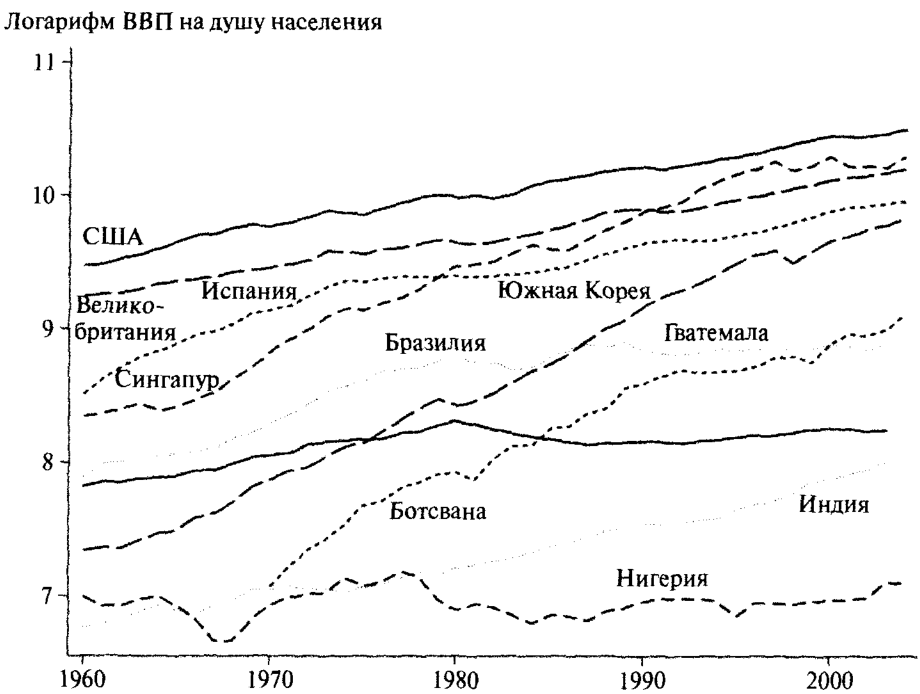


Рис. 1.8. Динамика дохода на душу населения в США, Великобритании, Испании, Сингапуре, Бразилии, Гватемале, Южной Корее, Ботсване, Нигерии и Индии

после 1970 г., позволил ей к 2000 г. войти в категорию стран со средним уровнем дохода.

Две латиноамериканские страны, представленные на рис. 1.8, Бразилия и Гватемала, демонстрируют часто обсуждаемую экономистами послевоенную латиноамериканскую болезнь роста. Бразилия стартует в 1960 г. богаче Южной Кореи и Ботсваны и имеет относительно высокие темпы роста между 1960 и 1980 гг. Однако затем в экономике Бразилии начинается застой и она оказывается беднее Южной Кореи и Ботсваны к концу периода наблюдений. Гватемала показывает схожую, но даже более бледную динамику. В отличие от случая Бразилии, экономика Гватемалы не росла ни в 1960–1980, ни в 1980–2000 гг.

Наконец, Нигерия и Индия стартуют в 1960 г. на том же уровне, что и Ботсвана, но не растут вплоть до 1980-х гг. Начиная с 1980 г. индийская экономика показывает относительно высокие темпы роста, но этого оказывается недостаточно, чтобы догнать более богатые страны на рисунке. Экономика Нигерии, также как и большинства других африканских стран, показывает отрицательные темпы роста, и к 2000 г. она оказывается беднее, чем была в 1960 г.

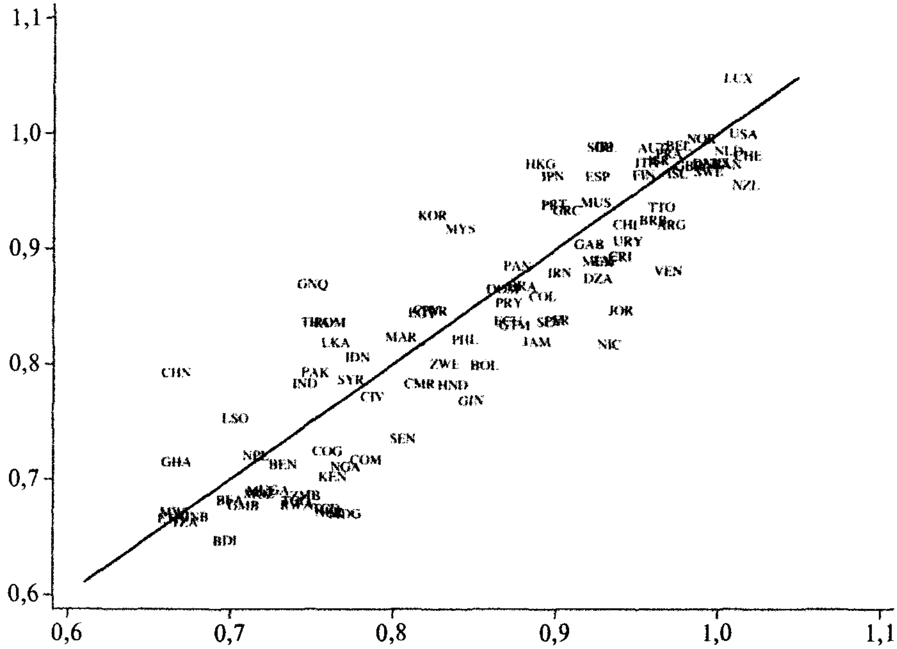
Динамика, показанная на рис. 1.8, — это именно то, что мы хотим понять и объяснить. Почему экономика США была богаче других экономик мира в 1960 г. и почему она демонстрировала устойчивый рост после этого? Каким образом Сингапур, Южная Корея и Ботсвана смогли демонстрировать относительно высокие темпы экономического роста в течение сорока лет? Почему экономика Испании росла относительно быстро в течение двадцати лет, а потом замедлилась? Почему экономики Бразилии и Гватемалы были в застое в 1980-е гг.? Какие факторы повлияли на столь плохие показатели роста экономики Нигерии?

1.4. Источники текущего различия в уровнях доходов и мирового экономического роста

Различия в темпах экономического роста разных стран, показанные на рис. 1.7. и 1.8, интересны сами по себе, а также могут в принципе быть причиной межстранового различия в уровнях доходов в настоящее время. Однако так ли это? Ответ на этот вопрос в основном отрицательный. Рис. 1.8 показывает, что уже в 1960 г. существовал огромный разрыв между экономикой США с одной стороны и экономиками Индии и Нигерии — с другой.

Рис. 1.9 позволяет увидеть это более просто. На нем на разных осях показан логарифм ВВП на одного работника в 1960 г. и логарифм ВВП на одного работника в 2000 г. (в обоих случаях относительно аналогичного показателя для США) и нанесена диагональная линия. Большинство

Отношение ВВП страны на одного работника к ВВП США на одного работника, 2000 г.



Отношение ВВП страны на одного работника к ВВП США на одного работника, 1960 г.

Рис. 1.9. *Логарифм ВВП на одного работника в 1960 г., логарифм ВВП на одного работника в 2000 г. и диагональная линия*

наблюдений оказывается рядом с ней, что говорит о том, что относительное положение стран на лестнице доходов мало изменилось между 1960 и 2000 гг. Таким образом, причины столь больших различий в уровнях доходов между странами не могут быть найдены в послевоенной истории. Несмотря на значительные различия в темпах роста разных стран в этот период времени, имеющиеся наблюдения говорят о том, что мировое распределение доходов было более-менее стабильным с небольшой тенденцией к увеличению уровня неравенства в мире со временем.

Когда образовался разрыв в уровне доходов между странами, если это произошло не в послевоенное время? Ответ на этот вопрос состоит в том, что в значительной мере расхождение между богатыми и бедными странами произошло в XIX и в начале XX в. Рис. 1.10–1.12, базируясь на данных для ВВП на душу населения вплоть до 1820 г., собранных и составленных Ангусом Мэддисоном, показывают динамику мировой экономики в этот период времени. Конечно же, эти данные менее надежны, чем *Penn World Tables* Р. Саммерса — А. Хестона так как они составлены не строго по методологии статистики национальных счетов. Более того, набор данных ограничен, и не по каждой стране имеются данные вплоть до 1820 г. Также, хотя данные и скорректированы на ППС, эта коррекция не столь точна как в *Penn World Tables*. Однако это самые лучшие данные о богатстве наций в XIX в., которые нам доступны.

Рис. 1.10. демонстрирует расхождение уровней жизни. На нем представлена динамика среднего дохода в 5 группах стран: Африке, Азии, Латинской Америке, Западной Европе и колониях европейских стран, перенявших западноевропейскую политическую систему (Австралия, Канада, Новая Зеландия и США). Он показывает относительно быстрый рост западноевропейских стран и колоний в XIX в., в это же время экономики Азии и Африки находились в застое, а темп экономического роста в Латинской Америке был очень умеренным. Таким образом, сравнительно небольшой (относительный) разрыв в доходах в 1820 г. стал намного больше к 1960 г.

Другое важное макроэкономическое наблюдение (рис. 1.10) состоит в следующем. Страны Западной Европы и колонии, принявшие их политическую систему, испытали значительное падение уровня ВВП на душу населения около 1929 г. — в знаменитую Великую депрессию. Полное восстановление их экономик от столь значительной рецессии произошло лишь к концу 1930-х гг. Одной из основных задач макроэкономики является ответ на вопрос, в чем состояли причины столь сильного сокращения выпуска и каким образом экономики смогли оправиться от такого значительного шока.

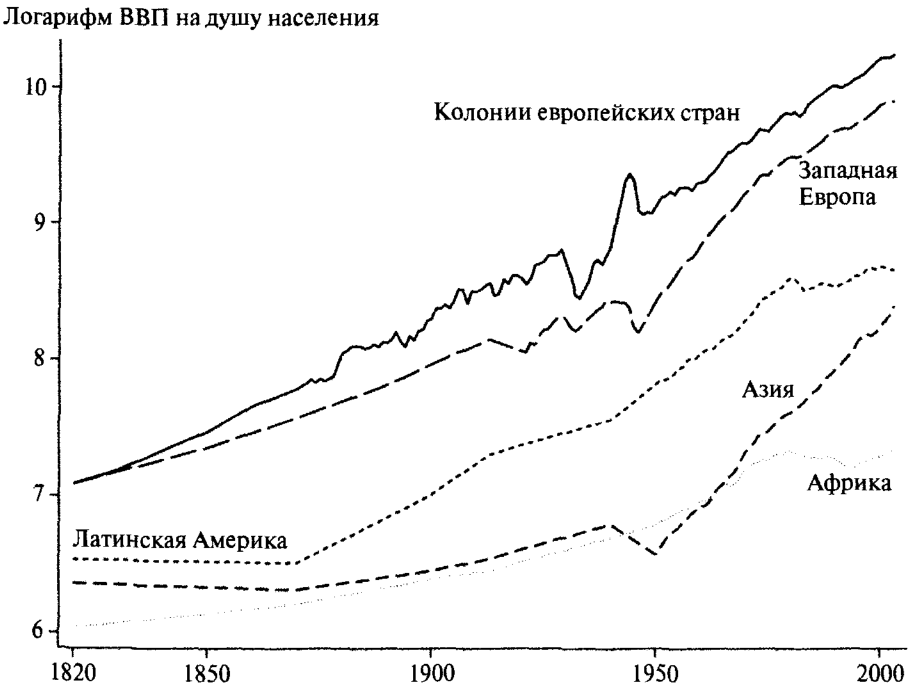


Рис. 1.10. Динамика среднего ВВП на душу населения в странах Африки, Азии, Латинской Америки, Западной Европы и колониях западноевропейского типа, 1820–2000 гг.

Существует целый ряд свидетельств, говорящих о том, что межстрановой разрыв в уровне доходов был еще меньшим до 1820 г. А. Мэддисон оценил средний уровень дохода для этих же групп стран вплоть до 1000 г., а в некоторых случаях и ранее. Графики на рис. 1.10 могут быть продолжены для того, чтобы учесть эти данные, результаты показаны на рис. 1.11. Несмотря на то что эти цифры основываются на неточных оценках, а иногда и косвенных догадках, общая картина согласуется с качественными историческими свидетельствами и фактом того, что доход на душу населения в любой стране мира не мог быть значительно меньшим 500 долларов в ценах 2000 г. в США просто потому, что эта сумма представляется минимальной для поддержания базового уровня жизни. Рисунок наглядно демонстрирует, что значительное расхождение в уровне жизни между странами началось примерно 200 лет назад. Рисунок также показывает очень важное свойство мирового экономического роста: большинство свидетельств говорят о том, что мировая экономика росла очень медленно вплоть до начала XVIII в. и совсем не росла до начала XV в. Конечно, в истории есть примеры цивилизаций (Древняя Греция, Древний Рим, Древний Китай, Венецианская Республика), которые демонстрировали экономический рост, однако этот рост был очень медленным или неустойчивым (и заканчивался распадом государства или серьезным

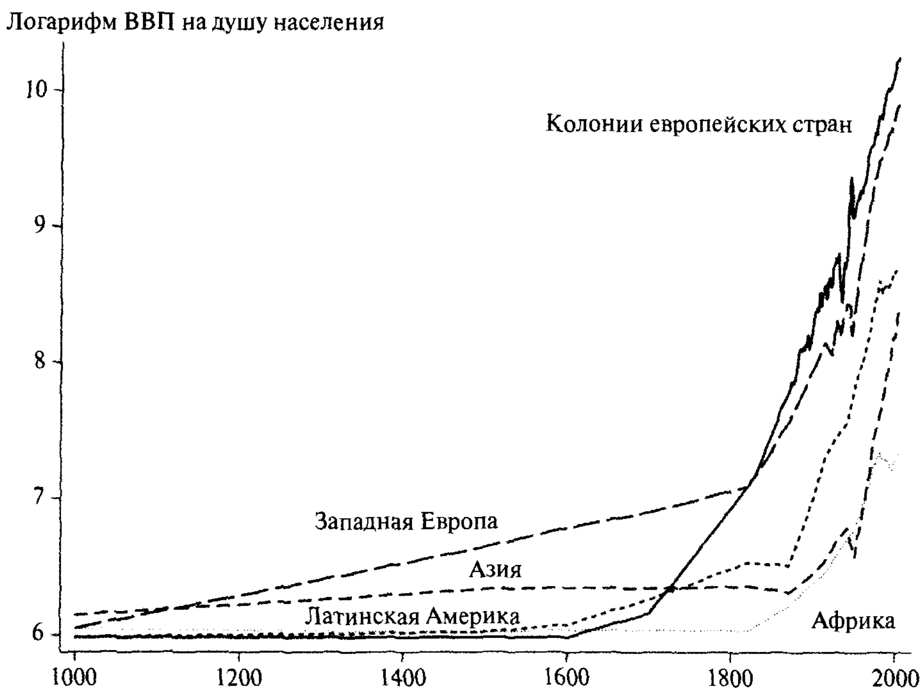


Рис. 1.11. Динамика среднего ВВП на душу населения в странах Африки, Азии, Латинской Америки, Западной Европы и европейских колониях, 1000–2000 гг.

экономическим кризисом). В мировой истории до XIX в. не существует прецедентов устойчивого экономического роста с темпом, сопоставимым с темпом роста западноевропейских и американской экономик в последние сто лет.

Хотя оценки Мэддисона показывают хоть и медленный, но непрерывный рост западноевропейских экономик начиная с 1000 г., многие экономические историки не согласны с этой точкой зрения. Они утверждают, что в Западной Европе также не было экономического роста до 1500-го, а может и до 1800 г. Однако этот исторический спор не столь важен для целей этой книги. Для нас важно то, что около двухсот лет назад в западноевропейских странах и их колониях со схожим политическим режимом произошло то, что Волтер Ростов называет *взлетом* на траекторию устойчивого роста, и динамика экономического развития этих стран претерпела значительные изменения. Экономические историки спорят о том, произошел ли в это время скачок в уровне экономической активности, заслуживающий использования терминов «взлет» или «промышленная революция», однако и этот спор не столь важен для нас. Были эти изменения скачкообразными или нет, они произошли и сильно изменили устройство многих экономик мира. В результате этих изменений медленно растущие или даже находящиеся в застое экономики Европы перешли на траекторию устойчивого экономического роста. Источники сегодняшнего богатства наций и сегодняшних межстрановых различий в его уровне находятся именно в этом переходе: в то самое время, когда европейские экономики начали быстро расти, большинство других экономик мира продолжали оставаться в застое и если и начали расти, то значительно позже. Таким образом, понимание структуры современного экономического роста и причин текущих межстрановых различий в уровне доходов явным образом требует от нас выяснения причин, почему этот переход произошел, почему он произошел около двухсот лет назад и почему он произошел лишь в некоторых странах.

На рис. 1.12. показана динамика дохода на душу населения в США, Великобритании, Испании, Бразилии, Китае, Индии и Гане. Он в среднем согласуется с выводами из рис. 1.10: экономики США, Великобритании и Испании растут быстрее экономик Индии и Ганы и намного быстрее экономик Бразилии и Китая в течение всего представленного на рисунке периода за исключением краткосрочных периодов быстрого роста в Бразилии и Китае.

Обобщая всю приведенную выше информацию, мы можем заключить, что истоки текущих межстрановых различий в уровне дохода на душу населения лежат в XIX и начале XX вв. (а может быть даже и в конце XVIII в.). Расхождение в уровне доходов началось в то время, когда ряд стран «взлетели» на траекторию устойчивого экономического роста. Таким образом,

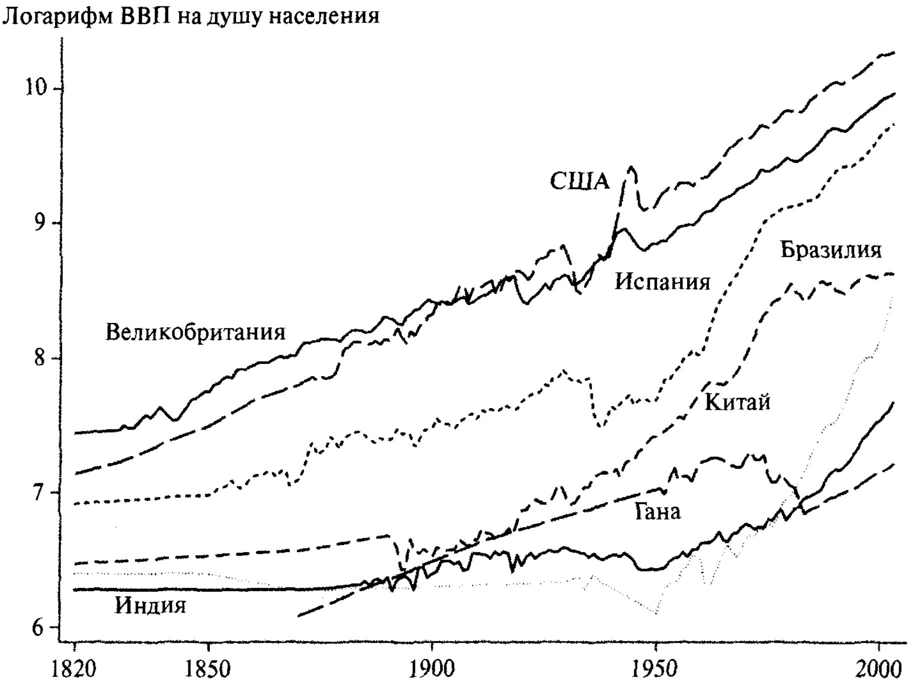


Рис. 1.12. Динамика дохода на душу населения в США, Великобритании, Испании, Бразилии, Китае, Индии и Гане, 1820–2000 гг.

понимание причин современного экономического роста не только важно и интересно само по себе, но и позволит нам выяснить причины текущих межстрановых различий в уровне доходов на душу населения.

1.5. Условная сходимость

В предыдущих параграфах мы показали значительные различия в уровне доходов на душу населения между странами, их дальнейшее небольшое расхождение в послевоенное время и их значительную дивергенцию начиная с 1800-х гг. Наш анализ был посвящен безусловному распределению уровня дохода на душу населения (или на одного работника). А именно мы изучали вопрос о том, будет ли разрыв в доходах между двумя странами увеличиваться или уменьшаться со временем независимо от индивидуальных характеристик этих стран (например институтов, экономической политики, доступных технологий или количества инвестиций). Работы Р. Барро и К. Сала-и-Мартина: [Barro, Sala-i-Martin 1991, 1992, 2004] утверждают, что изучение условного распределения намного более информативно. Другими словами, они изучают, будет ли разрыв в доходах увеличиваться или уменьшаться со временем для пары стран со схожими наблюдаемыми характеристиками. Их вывод состоит в том, что в послевоенный период мы наблюдаем условную сходимость: в большинстве случаев разрыв в уровне доходов между странами со схожими характеристиками сокращается со временем в этот период (хотя и довольно медленно). Это наблюдение важно как для понимания статистических свойств распределения мирового уровня доходов, так и как исходный материал для моделей, которые будут построены в книге далее.

Каким образом мы можем моделировать условную сходимость? Рассмотрим типичную так называемую *регрессию роста Барро:*

$$g_{i,t,t-1} = \alpha \log y_{i,t-1} + \mathbf{X}_{i,t-1}^{T}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{i,t}, \tag{1.1}$$

где $g_{i,t,t-1}$ — годовой темп роста между периодами $t-1$ и t в стране i, $y_{i,t-1}$ — доход на одного работника (или на душу населения) в периоде $t-1$, $\mathbf{X}$ — вектор других переменных, включенных в регрессию (так что $\mathbf{X}^T$ — транспонированная к нему строка), $\boldsymbol{\beta}$ —вектор коэффициентов регрессии, а $\varepsilon_{i,t}$ — ошибка, включающая влияние всех неучтенных факторов. Переменные из X включаются в регрессию, потому что мы ожидаем, что они могут влиять на долгосрочные стационарные значения уровня доходов и/или темпов роста дохода. Заметим, что регрессия без вектора объясняющих переменных X очень напоминает соотношения, показанные на рис. 1.9. А именно, так как $g_{i,t-1}, t \approx \log y_{i,t} - \log y_{i,t-1}$, (1.1) в данном случае может быть записано как:

$$\log y_{i,t} \approx (1+\alpha)\log y_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t}.$$

Рис. 1.9 показывает соотношение между логарифмом ВВП на одного работника в 2000 г. и логарифмом ВВП на одного работника в 1960 г., которое хорошо аппроксимируется прямой, проходящей под углом 45°, поэтому в единицах этого уравнения значение константы α должно быть равно 0. Это наблюдение подтверждается рис. 1.13, который показывает связь между средним геометрическим темпов роста между 1960 и 2000 гг. и логарифмом ВВП на одного работника в 1960 г. Этот рисунок еще раз подтверждает отсутствие «безусловной» сходимости для всего мира: мы не видим, что в течение послевоенного времени бедные страны становятся относительно более обеспеченными и сокращают разрыв в уровне доходов с богатыми странами.

Хотя мы и не видим сходимости для всего мира, взгляд на страны Организации экономического сотрудничества и развития (ОЭСР)[2] позволяет сделать другие выводы. Рис. 1.14 показывает значительную убывающую зависимость между логарифмом ВВП на одного работника в 1960 г. и среднегодовым темпом экономического роста между 1960 и 2000 гг. Выборка

[2] ОЭСР здесь означает членов организации, вступивших в нее до 1960 г. (Это исключает Австралию, Новую Зеландию, Мексику и Южную Корею. На рисунке также не учтена Германия в силу отсутствия соизмеримых данных до и после объединения страны.)

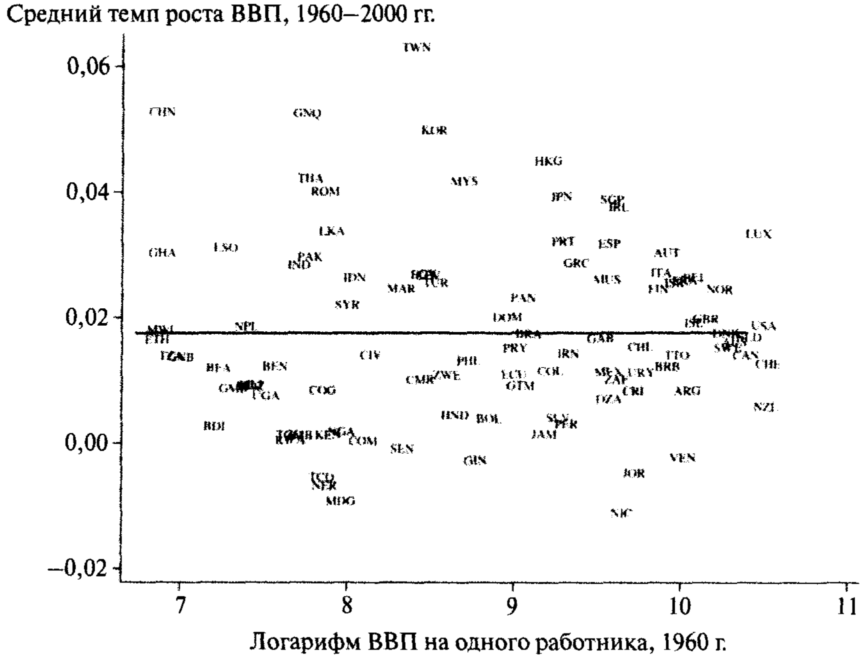


Рис. 1.13. ВВП на одного работника в 1960 г. и его среднегодовые темпы роста между 1960 и 2000 г. для всех стран мира

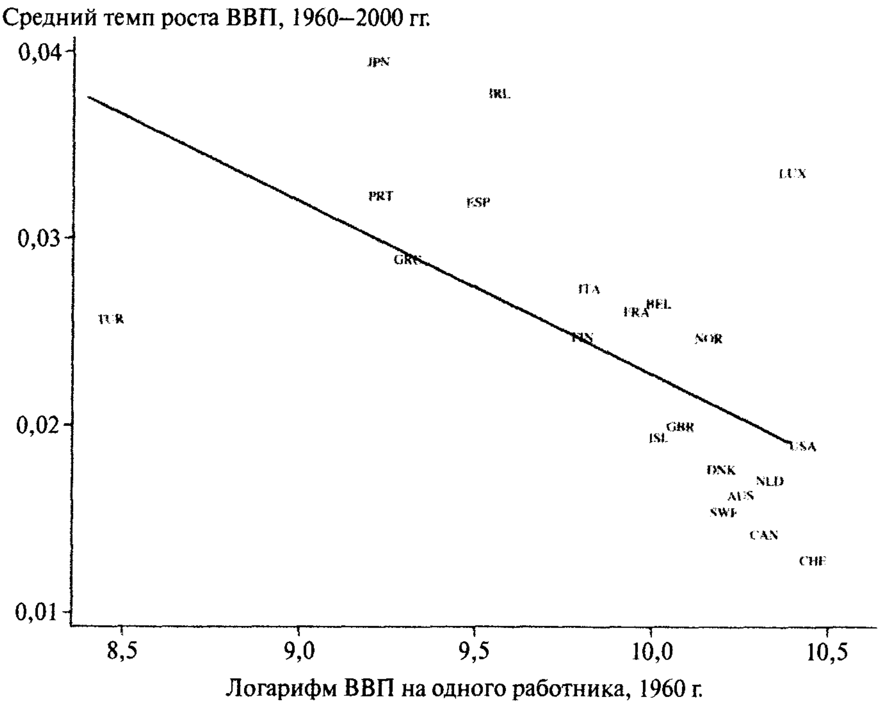


Рис. 1.14. ВВП на одного работника в 1960 г. и его среднегодовые темпы роста между 1960 и 2000 г. для стран ОЭСР

стран ОЭСР отличается от выборки всех стран мира относительной однородностью стран в ней, которая отражается в схожем наборе институтов, экономической политики и стартовых условий. Поэтому мы вправе рассчитывать на некоторый тип условной сходимости, после того как мы проконтролируем некоторые характеристики стран, которые, возможно, могут влиять на темпы экономического роста.

Именно для этого мы и включаем вектор **X** в уравнение (1.1). Например, когда этот вектор включает такие переменные, как уровень образования, измеренный как среднее количество лет обучения, или ожидаемая продолжительность жизни, Р. Барро и К. Сала-и-Мартин, используя межстрановые регрессии, оценивают значение коэффициента α примерно равным –0,02. Это значит, что разрыв в уровне доходов между двумя странами со схожим количеством человеческого капитала сокращался на 2% в год в течение послевоенного периода времени. Оценка регрессий на панельных данных с включением в вектор **X** полного набора фиксированных эффектов для всех стран дает еще больший по модулю отрицательный коэффициент α, что означает еще более быструю сходимость.

Таким образом, мы не наблюдаем подтверждений безусловной сходимости в уровне дохода на одного работника в течение послевоенного периода времени (на самом деле наблюдения говорят о некотором расхождении в уровне доходов между странами мира). При этом мы видим некоторые подтверждения условной сходимости. Это означает, что разрыв в уровне доходов между странами со схожими наблюдаемыми характеристиками, по всей видимости, сокращается со временем. Последнее наблюдение важно как для понимания типов стран, для которых мы наблюдаем расхождение в доходах, так и для определения типов моделей, которые нам необходимы для объяснения процесса экономического роста и межстрановых различий в экономических показателях. Например, мы увидим, что многие модели экономического роста, включая базовую модель Солоу и неоклассическую модель экономического роста, предполагают наличие переходной динамики, когда экономики, находящиеся ниже своего стационарного (целевого) уровня дохода на душу населения растут до достижения ими этого уровня. Условная сходимость согласуется с таким типом переходной динамики.

1.6. Корреляты экономического роста

Предыдущий параграф делает акцент на важности некоторых страновых характеристик, которые могут быть связаны с динамикой экономического роста. Каковы они? Какие типы стран растут более быстро? В идеале нам бы хотелось получить ответ на этот вопрос на причинно-следственном уровне. Другими словами, нам бы хотелось знать, какие специфические характеристики страны (включая институты и экономическую политику) имеют причинно-следственную связь с ее экономическим ростом. Под причинно-следственной связью мы понимаем здесь следующее. Рассмотрим гипотетический мысленный эксперимент, когда при прочих равных условиях некоторая характеристика страны изменяется экзогенно (т. е. не как часть равновесной динамики и не в ответ на изменение других наблюдаемых или ненаблюдаемых переменных). Ответ на вопрос: «каково будет влияние этого изменения на равновесный темп роста?» — и будет причинно-следственной связью. Ответ на такие вопросы достаточно сложен, во многом именно из-за трудностей в определении той части изменений эндогенных величин, которая не есть следствие равновесной динамики или влияния неучтенных факторов.

Поэтому мы начнем с более простого вопроса. А именно: какие наблюдаемые переменные коррелированы с экономическим ростом. Модели, которые представлены в следующих двух главах, предлагают два очевидных макроэкономических показателя: инвестиции в физический и человеческий капитал (образование).

Рис. 1.15. показывает возрастающую зависимость между средним значением отношения инвестиций к ВВП и среднегодовым темпом экономического роста между 1960 и 2000 гг. Рис. 1.16. показывает положительную корреляцию между средним количеством лет образования и темпами экономического роста. Таким образом, из обоих рисунков можно увидеть, что страны, которые имели более высокий темп роста, — это страны, которые использовали большее количество ресурсов на инвестиции в физический и человеческий капитал. Однако здесь стоит сделать важное замечание: показываемые этими рисунками зависимости нельзя рассматривать как подтверждение положения о том, что инвестиции являются причиной экономического роста (даже учитывая, что базовая экономическая теория говорит о том, что они делают некоторый вклад в рост). На данный момент эти рисунки следует рассматривать как иллюстрацию корреляций, которые возникают (по меньшей мере частично) под влиянием некоторых неучтенных факторов.

Изучению роли инвестиций в физический и человеческий капитал в процессе экономического роста посвящена глава 3. Один из основных выводов, который мы получим, состоит в том, что взгляд лишь на физический и человеческий капитал недостаточен ни для понимания процесса устойчивого экономического роста, ни для понимания причин столь значительной разницы в уровне доходов на душу населения в разных странах мира. Мы увидим, что нам необходимо понять, почему различные страны отличаются в эффективности использования как физического, так и человеческого капитала. Экономисты зачастую используют термин «технология» для обозначения всех остальных, помимо капитала, факторов,

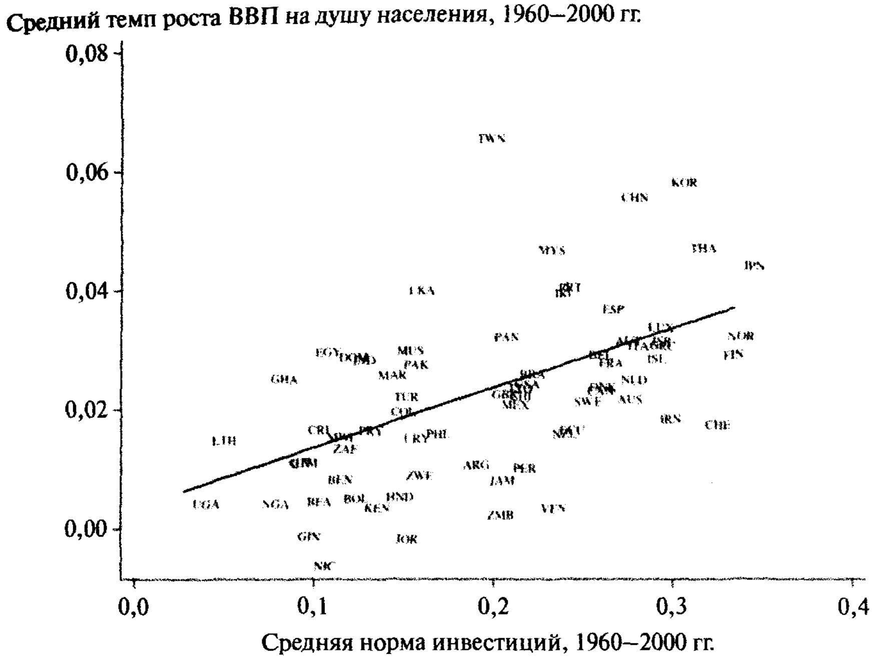


Рис. 1.15. Связь между средним темпом роста ВВП на душу населения и средним темпом роста отношения инвестиций к ВВП, 1960–2000 гг.

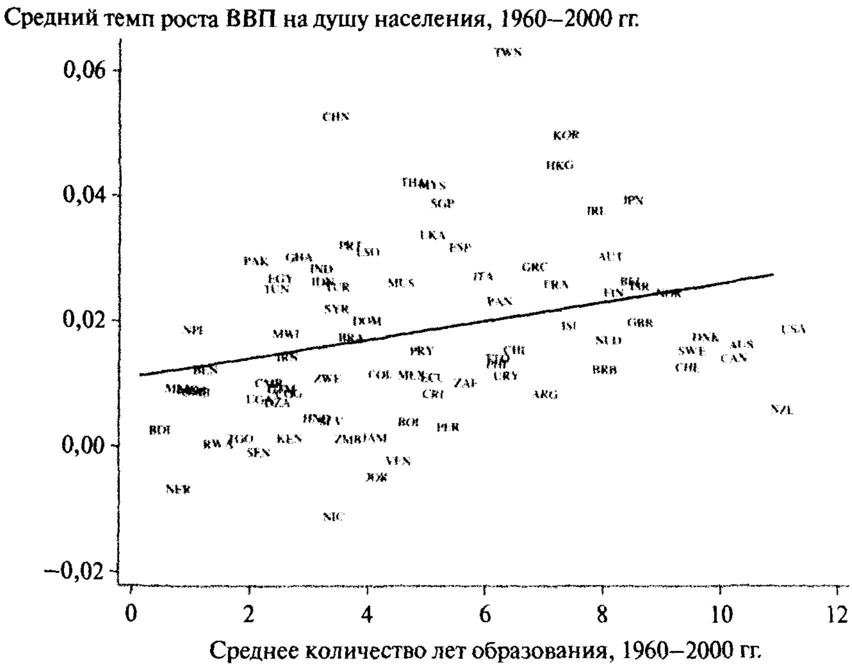


Рис. 1.16. Связь между средним темпом роста ВВП на душу населения и средним количеством лет образования, 1960–2000 гг.

влияющих на экономический рост и развитие. Поэтому важно помнить, что различия в уровне развития технологии между странами, о которых они говорят, включают в себя не только различия в производственных технологиях и качестве используемых в процессе производства благ машин и оборудования, но и различия в эффективности их использования, возникающие вследствие различий в организации экономики и появления возможных провалов рынка. Поэтому для понимания процесса экономического роста и причин межстрановых различий в уровне доходов необходимо более детальное изучение понятия технологии в таком широком определении. Этому посвящены глава 3 и следующие за ней главы.

1.7. От коррелятов к фундаментальным причинам

Такие корреляты экономического роста, как физический и человеческий капитал и технология, станут первыми переменными, которые мы будем изучать. Однако они не являются причинами экономического роста и процветания (хотя мы и убедили себя в наличии элемента причинности между темпом роста и этими показателями по корреляциям, представленным выше). Объяснять различия в темпах роста между странами количеством физического и человеческого капитала и технологий было бы неудовлетворительно, так как наверняка существуют более глубокие причины, почему эти показатели разнятся между экономиками мира. Если эти факторы имеют такое большое влияние на уровень дохода на душу населения и на возможность «взлета» на траекторию устойчивого экономического роста, почему некоторые страны так и не смогли улучшить свои технологии, сделать больше инвестиций в физический капитал, накопить большее количество знаний и как следствие наслаждаться высоким темпом роста?

Рис. 1.8. позволяет проиллюстрировать это замечание. Он показывает, что экономики Южной Кореи и Сингапура росли быстро в течение последних пятидесяти лет, в то время как экономика Нигерии не смогла расти. Мы можем попытаться объяснить успех Южной Кореи и Сингапура с помощью коррелятов роста. Так же, как и многие другие, мы можем заключить, что быстрое накопление капитала стало основной причиной этих «чудес роста», и детально выяснять относительную важность вклада инвестиций в человеческий капитал и развития технологий. Точно так же мы можем списать неуспех Нигерии на невозможность накопления капитала и развития технологий. Такие рассуждения, несомненно, позволяют понять механику экономического развития разных стран в послевоенное время, но они не дают ответа на основной вопрос, который мы изучаем: почему Южная Корея и Сингапур смогли расти, а экономика Нигерии не воспользовалась этой возможностью. Если физический капитал настолько важен, почему Нигерия не инвестировала в него большее количество ресурсов? Если образование настолько важно, почему уровень человеческого капитала в Нигерии настолько низок до сих пор и почему имеющийся человеческий капитал не используется там более эффективно? Ответ на эти вопросы связан с *фундаментальными причинами* экономического роста — факторами, возможно определяющими, почему общество делает тот или иной выбор инвестиционной активности и развития технологий.

Фундаментальные причины — это в некотором смысле те факторы, которые позволяют нам связать вопрос экономического роста с другими понятиями общественных наук и задать себе вопросы о роли экономической политики, институтов, культуры и других экзогенных факторов. Рискуя значительным упрощением, мы можем сформулировать следующий лист возможных потенциальных фундаментальных причин роста: (1) случайный элемент везения, или множественность равновесий, которая приводит к расхождению траекторий стран с одинаковыми технологиями, предпочтениями и рыночной структурой экономики; (2) географические различия, формирующие среду обитания населения страны и влияющие на производительность в сельскохозяйственном секторе, наличие природных ресурсов, некоторые ограничения на человеческое поведение, или даже на отношения в обществе; (3) институциональные различия, которые формируют законы и ограничения, в которых функционируют фирмы и предприниматели, и таким образом влияют на их стимулы для накопления, инвестиций и международной торговли; и (4) культурные различия, которые определяют индивидуальные принципы поведения, предпочтения и веру. Глава 4 посвящена детальному изучению отличий коррелятов от фундаментальных причин роста и тому, какой набор фундаментальных причин более подходит для объяснения процесса мирового экономического роста и межстрановых различий в уровне доходов.

Сейчас же полезным будет еще раз вернуться к сравнению Южной Кореи и Сингапура с одной стороны и Нигерии с другой стороны и задать следующие вопросы (даже если мы на данном этапе пока не можем на них ответить полностью): можем ли мы сказать, что Южной Корее и Сингапуру просто повезло, а Нигерии — нет? Можем ли мы объяснить столь быстрый рост Южной Кореи и Сингапура географическими факторами? Можем ли мы объяснить его институтами и экономической политикой? Есть ли в нашем объяснении место культурным различиям? Детальное изучение послевоенного экономического и политического развития Южной Кореи и Сингапура показывает важную роль экономической политики, направленной на стимулирование роста, включая такие меры, как улучшение защиты права собственности и создание стимулов для увеличения частных инвестиций. Послевоенная история Нигерии, с другой стороны, изобилует такими событиями, как гражданская война, военная хунта, коррупция, то есть экономическая и политическая ситуация в стране не способствовала созданию стимулов для увеличения инвестиций и технологических улучшений. Поэтому в данном случае фундаментальные причины роста должны быть связаны именно с этими фактами. Забегая немного вперед, мы можем заметить, что везение не выглядит приемлемым объяснением различий в послевоенном экономическом развитии этих стран, значительные экономические различия между Южной Кореей, Сингапуром, Нигерией имелись даже в самом начале этого периода. Настолько же неприемлемой будет попытка связать расхождение в доходах в этих странах с географическими факторами. На самом деле географические условия не меняются со временем, а быстрый рост в Южной Корее и Сингапуре начался только после Второй мировой войны. Более того, несмотря на то что Сингапур как остров имеет выгодное географическое положение, Нигерия обладает наилучшими природными и климатическими условиями для роста, так как содержит на своей территории значительные запасы нефти[3]. С другой стороны, вполне возможно, что культурные различия между этими странами имеют большое влияние на экономическое развитие. Быстрый рост многих азиатских стран, действительно, часто связывают с «азиатским менталитетом», однако одни лишь культурные различия вряд ли являются адекватным описанием фундаментальных источников экономического роста в данном случае. Действительно, культура и менталитет населения Южной Кореи и Сингапура не сильно изменились по окончании Второй мировой войны, в то время как быстрый рост этих стран является исключительно послевоенным феноменом. Более того, Северная Корея, чье население разделяет те же самые культуру и менталитет, в последние пятьдесят лет показала одни из самых худших в мире темпы экономического роста.

Это краткое (и частичное) сравнение двух историй экономического роста показывает, что для развития лучшего понимания фундаментальных источников экономического роста нам необходимо изучать институты и экономическую политику, которые влияют на стимулы для накопления физического и человеческого капитала и усовершенствования технологии. В Южной Корее и Сингапуре институты и экономическая

---

[3] Здесь можно использовать обратный аргумент и сказать, что Нигерия бедна из-за ресурсного проклятия, то есть именно потому, что она обладает значительными природными ресурсами. Однако этот аргумент слаб, так как существуют другие страны с большим количеством природных ресурсов, которые росли быстро в течение последних пятидесяти лет, например Ботсвана. Более того, единственная причина, по которой избыток природных ресурсов может иметь негативные последствия для роста, связана с институциональными и политэкономическими факторами, что возвращает нас к институциональным фундаментальным причинам.

политика были благоприятными для роста, а в Нигерии — нет. Изучению глубокой связи между фундаментальными причинами роста и институтами, затронутой здесь, посвящена часть VIII, где мы будем говорить о политической экономии и росте, а именно о том, как институты влияют на экономический рост и почему они различаются между странами.

В этом месте необходимо сделать важное предостережение. Обсуждение географии, институтов, культуры можно вести без явных ссылок на модели экономического роста и даже эмпирические данные. На самом деле ученые во многих других общественных науках делают именно так. Однако фундаментальные причины могут заметно влиять на рост только в том случае, если они изменяют те параметры экономики и экономическую политику, которые напрямую связаны с накоплением физического и человеческого капитала и изменением технологий. Поэтому понимание механики экономического роста очень важно для выбора среди множества различных возможных фундаментальных причин роста. Эмпирические данные имеют настолько же важное значение для определения, какие именно фундаментальные причины являются причиной межстрановых различий в уровне доходов. Только сформулировав строгую модель экономического роста и протестировав ее на данных, мы можем достичь понимания фундаментальных причин роста.

1.8. План книги

Проблемы, рассмотренные выше, приводят нас к трем основным вопросам теории экономического роста:

1. Почему мы наблюдаем такие значительные различия в уровне доходов на душу населения и производительности труда между странами?
2. Почему некоторые страны растут быстро, в то время когда другие находятся в экономическом застое?
3. Что позволяет странам иметь устойчивый рост в течение длительного времени и почему устойчивый рост мировой экономики начался около двухсот лет назад?

Ответ на каждый из этих вопросов требует наличия множества хорошо сформулированных моделей, которые хорошо иллюстрируют механику экономического роста и межстрановых различий в уровне доходов, а также позволяют увидеть фундаментальные причины, почему различные экономики мира имеют различные траектории роста. Другими словами, нам необходима комбинация как теоретических моделей, так и эмпирических исследований.

Традиционные модели экономического роста, такие как модель Солоу и неоклассическая модель роста, являются хорошим первым шагом в нашем исследовании, и тот акцент на инвестициях и человеческом капитале, который они делают, согласуется с данными, приведенными на рис. 1.15 и 1.16. Однако мы увидим, что технологические различия между странами (связанные или с фактическими различиями в доступе к технологиям, или с эффективностью их использования) настолько же важны для роста. Традиционные модели рассматривают технологии и рыночную структуру экономики как заданные или в лучшем случае как развивающиеся экзогенно (как некоторый черный ящик). Однако, если технологии настолько важны для роста, мы должны понимать, почему и как они развиваются и почему они различаются между странами. Это и является мотивацией для нашего детального изучения теории эндогенного технологического прогресса и внедрения технологий. Мы будем пытаться понять, как возникают различия в уровне технологий, почему они не исчезают и как это может повлиять на различия в уровне доходов на душу населения. Модели технологического развития также будут полезны для понимания источников устойчивого роста мировой экономики в последние двести лет и причин, почему этот процесс начался около двухсот лет назад и продолжается относительно стабильно до сих пор.

Ряд наблюдений, сделанных в этой главе, может помочь нам выделить тип моделей, которые наилучшим образом подойдут для объяснения экономического роста и межстрановых различий в уровне доходов. Например, мы увидели, что эти различия могут быть объяснены лишь тем, что некоторые страны росли быстро в последние двести лет, а некоторые — нет. Поэтому нам нужны модели, которые могут объяснить, почему некоторые страны проходят через период быстрого устойчивого роста, а экономики других стран остаются в состоянии застоя.

Также мы увидели, что мировое распределение доходов остается относительно стабильным в послевоенное время (хотя уровень неравенства незначительно увеличился между 1960 и 2000 г.). По мнению многих экономистов, это наблюдение подсказывает, что мы должны использовать модели, показывающие большое перманентное различие в уровне доходов, но не обязательно в темпе экономического роста (что и происходит в последние десятилетия). Этот аргумент основан на следующем: при большом различии в долгосрочных темпах экономического роста (как это происходит в моделях эндогенного роста, где страны, инвестирующие в разных пропорциях, имеют различные перманентные темпы роста) мы должны ожидать значительного расхождения уровней доходов в различных странах. Мы же убедились в том, что, несмотря на некоторое расхождение между самыми богатыми и самыми бедными странами, межстрановое распределение доходов в мире остается относительно стабильным в послевоенное время.

Объединив послевоенные данные с данными об источниках различий в уровне доходов за последние несколько столетий, мы приходим к выводу о том, что нам необходимы модели, которые могут сгенерировать длительные периоды значительных различий в темпах роста, но при этом приводят нас к стационарному распределению уровня доходов при потенциально больших различиях между богатыми и бедными странами. Эта задача в особенности трудна, учитывая современную структуру мировой экономики со свободным перетоком технологий между странами и значительными объемами мирового финансового рынка и оборотом международной торговли. Мы должны понять, почему и как бедные страны отстали от богатых и что не позволяет им сегодня заимствовать и перенять технологии и модель организации экономики (а также импортировать капитал), используемые богатыми странами.

Как подсказывает изложенное в предыдущем материале, ответы на все эти вопросы могут (и возможно должны) быть получены на двух различных, но связанных между собой уровнях (и с помощью двух последовательных шагов). Первый шаг состоит в использовании теоретических моделей и эмпирических данных для понимания механики экономического роста. Этот шаг может пролить свет на непосредственные причины роста и объяснить различия в уровне доходов в терминах различий в количестве и качестве физического и человеческого капитала и технологий. Это, в свою очередь, будет связано с другими объясняющими переменными, такими как предпочтения, технологии, организация рыночной экономики, открытость международной торговле и экономическая политика.

Второй шаг состоит в поиске фундаментальных причин, порождающих эти непосредственные причины, и объяснении того, почему экономики разных стран устроены по-разному. Почему разные страны имеют различную организацию рынков? Почему одни страны используют экономическую политику, стимулирующую рост, а другие накладывают ограничения на развитие технологий? Это центральные вопросы теории экономического роста, и ответы на них могут быть получены только с помощью построения систематических моделей политической экономии развития, изучения исторического процесса мирового экономического роста и построения данных, которые могут пролить свет на эти фундаментальные причины роста.

Наша следующая задача состоит в систематическом построении ряда моделей, позволяющих понять механику экономического роста. Мы также остановимся на детальном обсуждении математической структуры ряда динамических моделей общего равновесия, которые полезны для понимания экономического роста и связанных с ним макроэкономических вопросов. Особое внимание будет уделено следствиям из этих моделей, объясняющим причины различной экономической динамики в разных странах. Построение модельной базы, которую мы будем использовать для объяснения причин экономического роста и разрыва в уровне доходов, невозможно без понимания всех этих механизмов.

1.9. Литература

Эмпирические данные, представленные в этой главе, во многом стандартны, и часть из них может быть найдена во многих книгах, хотя их интерпретация может разниться. Прекрасное введение, с немного другим акцентированием, приведено в [Jones 1988, chapter 1] и [Weil 2005, chapter 1], обе книги являются учебниками по экономическому росту для бакалавров. Учебник [Barro, Sala-i-Martin 2004] также дает краткое обсуждение стилизованных фактов об экономическом росте, хотя с упором на послевоенный рост и условную сходимость, а не на значительные межстрановые различия уровня доходов и долгосрочную перспективу, как делаем мы. Прекрасное и очень просто читаемое обсуждение ключевых вопросов теории экономического роста, с похожим на наш методом, приведено в книгах [Helpman 2005; Хелпман 2012] и [Aghion, Howitt 2008]. В книге Ф. Агийона и П. Ховитта также приведено полезное обсуждение многих других вопросов, затронутых нами здесь.

Источником большинства приведенных в главе сведений являются данные Р. Саммерса и А. Хестона [Summers, Heston, Aten 2006]. Эти таблицы являются результатом скрупулезного исследования Роберта Саммерса и Алана Хестона, которые построили сравнимые друг с другом ценовые индексы для разных стран и значения дохода и потребления на душу населения. Их исследование позволило сделать корректировку ППС, используемую нами. Р. Саммерс и А. Хестон [Summers, Heston 1991] приводят понятное объяснение метода корректировки ППС и ее использования в *Penn World Tables*. Эта корректировка позволяет построить сравнимые между странами показатели дохода на душу населения. Без нее доходы на душу населения в разных странах можно сравнить, используя текущее или некоторое фундаментальное значение обменного курса валют этих стран. Однако этот метод имеет большое количество недостатков. Самый важный из них состоит в том, что он не учитывает различия в рыночных относительных ценах благ и даже общем уровне цен в разных странах. Корректировка ППС приводит нас намного ближе к фактическим значениям реального уровня потребления и дохода. Данные по ВВП, потреблению и инвестициям взяты из *Penn World Tables* и приведены в постоянных ценах в долларах США 1996 г. Информация по количеству работников (экономически активному населению), потреблению, инвестициям также взята из этой базы данных. Источником данных по ожидаемой продолжительности жизни является CD-ROM *World Development Indicators* Всемирного банка, данные по средней ожидаемой продолжительности жизни в момент рождения у мужчин и женщин. Эта база данных также содержит ряд другой полезной информации. Сведения по образованию взяты из базы данных [Barro, Lee 2001], которая содержит сравнимую между странами информацию о времени обучения. По всей книге в рисунках мы используем сокращения Всемирного банка для идентификации названий различных стран. Перечень сокращений приведен на странице в интернет по адресу: http://unstats.un.org/unsd/methods/m49/m49alpha.htm.

Во всех рисунках и регрессиях темпы роста переменных рассчитаны как среднее геометрическое. А именно среднее геометрическое темпа роста выпуска на душу населения y между периодами t и $t + T$ есть:

$$g_{t,t+T} = \frac{y_{t+T}}{y_t}^{1/T} - 1.$$

Среднее геометрическое темпов роста подходит больше, чем среднее арифметическое в контексте дохода на душу населения, так как темп роста переменной говорит о ее пропорциональном изменении. Из формулы выше легко увидеть, что если $y_{t+1} = (1 + g)y_t$ для всех t, то $g_{t,t+T} = g$.

Исторические данные взяты из различных работ Ангуса Мэддисона, в частности из [Maddison 2001, 2003]. Хотя эти данные не так надежны, как оценки из *Penn World Tables*, общая картина, которую они показывают, во многом соответствует свидетельствам из многих других источников. Однако среди экономистов нет единого мнения относительно некоторых из них. Например, на рис. 1.11 оценки Мэддисона показывают медленный, но сравнительно стабильный рост дохода на душу населения в странах Западной Европы начиная с 1000 г. Этот рост оспаривается многими историками и экономическими историками. Относительно убедительные свидетельства, которые во многом оспаривают этот вывод, приведены в [Pomeranz 2000; Померанц 2017]. Автор утверждает, что доходы на душу населения в Западной Европе и долине Янцзы в Китае были сопоставимы вплоть до 1800 г. Этот вывод поддерживает недавнее исследование [Allen 2004], которое утверждает, что производительность в сельскохозяйственном секторе в Западной Европе и Китае в 1800 г. была на схожем уровне. [Acemoglu, Johnson, Robinson 2002, 2005b] используют данные по уровню урбанизации как прокси-переменную для дохода на душу населения и получают результаты, находящиеся между результатами Мэддисона и Померанца. Данные из [Acemoglu, Johnson, Robinson 2002] также показывают, что вплоть до XVI в. межстрановые различия в уровне доходов были минимальны и процесс быстрого экономического роста начался лишь в XIX в. (в крайнем случае в конце XVIII в.). С другой стороны, исследование [Broadberry, Gupta 2006] оспаривает результаты Померанца и подтверждает выводы о том, что к концу XVIII в. уже существовал разрыв в уровне доходов между странами Западной Европы и Китаем.

Термин «взлет», используемый в параграфе 1.4, был введен Волтером Ростовом в его известной книге *The Stages of Economic Growth* (2003) и связан с понятием индустриальной революции, которое экономические историки часто используют для обозначения процесса, начавшегося в Великобритании в конце XVIII в. (например, в [Ashton 1969]). Работа [Mokyr 1993] дает прекрасное описание дискуссии о том, было ли начало индустриального роста процессом, последовавшим за плавным или скачкообразным изменением в экономике. В согласии с нашими выводами выше Мокир заключает, что этот вопрос вторичен по отношению к более важному факту о том, что современный экономический рост действительно начался примерно в это время.

Большое количество литературы, начавшейся с работы [Barro 2001], посвящено изучению коррелятов экономического роста. Ее обзор представлен в [Barro, Sala-i-Martin 2004] и [Barro 1997]. Однако большая часть работ в этой области интерпретирует эти корреляты как причины экономического роста, даже тогда, когда такая интерпретация не очевидна (см. обсуждение этой темы в главах 3 и 4).

Рис. 1.15 и 1.16, приведенные выше, демонстрируют связь между инвестициями и средним уровнем образования между 1960 и 2000 гг. и экономическим ростом за этот же период. Связь между ростом инвестиций и экономическим ростом в это время схожа, однако связь между ростом уровня образования и экономическим ростом намного более слабая. Отсутствие связи между ростом уровня образования и ростом выпуска может быть вызвано рядом причин. Во-первых, существуют значительные ошибки измерения в оценках уровня образования (см.: [Krueger, Lindahl 2001]). Во-вторых, как показано в некоторых моделях, которые мы будем изучать далее, главная роль человеческого капитала может состоять в ускорении процесса заимствования и внедрения технологий и поэтому мы можем ожидать большую связь между уровнем образования и экономическим ростом, чем между изменением уровня образования и экономическим ростом (см. главу 10). Наконец, связь между уровнем образования и экономическим ростом может отчасти быть ложной связью в том смысле, что она может показывать влияние некоторых пропущенных факторов, также коррелированных с уровнем образования. В этом случае эти пропущенные факторы могут перестать оказывать влияние, когда мы смотрим на изменения уровня образования. Хотя у нас нет возможности убедительного выбора из этих альтернативных объяснений, большая корреляция между уровнем образования и экономическим ростом, показанная на рис 1.16, интересна сама по себе.

Сокращение разрыва в уровне доходов на душу населения в мировой экономике в случае, когда страны взвешены по населению, изучено в работе [Sala-i-Martin 2005]. [Deaton 2005] содержит критику подхода Сала-и-Мартина. Утверждение, что доходы в разных странах должны быть примерно равны вплоть до *1800 г.* в силу существования нижнего предела реального дохода, необходимого для выживания индивида, впервые сделано в [Maddison 1991] и затем популяризировано в [Pritchett 1997]. Оценки ВВП на душу населения Мэддисона и оценки из [Acemoglu, Johnson, Robinson 2002], построенные по данным об уровне урбанизации, подтверждают эти выводы.

Оценки плотности распределения дохода на душу населения, приведенные в этой главе, схожи с оценками из работ [Qauh 1993, 1997] и [Jones 1997]. Они построены с помощью непараметрического гауссовского ядра. Использование различных специфических методов оценки ядра не изменяет вида функции плотности распределения. Д. Кво был первым, кто заметил стратификацию функции распределения дохода в мировой экономике и возможный ее сдвиг в сторону биномиального распределения, как видно из рис. 1.3. Он назвал этот феномен двойными пиками (также см.: [Durlauf, Quah 1999]). Работы [Barro 1991] и [Barro, Sala-i-Martin 1992, 2004], в свою очередь, выделяют важность условной сходимости и оспаривают значимость фактора стратификации, выделенного Д. Кво и другими. Оценка скорости условной сходимости около 2% в год взята из [Barro, Sala-i-Martin 2002]. Оценки из работы [Casselli, Esquivel, Lefort 1996], построенные на панельных данных, показывают значительно более высокую скорость условной сходимости.

Работы [Marris 1982] и [Baumol 1986] были первыми межстрановыми исследованиями по сходимости. Однако существующие в то время данные, использованные ими, были доступны лишь для узкого ряда стран и не столь хорошего качества, как данные Р. Саммерса — А. Хестона. Работы [Barro 1991] и [Barro, Sala-i-Martin 1992], использующие данные Р. Саммерса — А. Хестона, послужили толчком для множества межстрановых исследований по регрессиям роста.

Данные по ВВП и заработной плате на черном рынке в Южной Африке взяты из работы [Wilson 1972]. В качестве показателя реальной заработной платы мы использовали данные по зарплатам на золотодобывающих шахтах. Прекрасное изложение экономической истории Южной Африки можно найти в книге [Feinstein 2005]. Влияние промышленной революции в Великобритании на заработную плату и условия жизни рабочих обсуждается в работе [Mokyr 1993]. Другим примером быстрого экономического роста при падении реальной заработной платы является экономика Мексики в начале XX в. (см.: [Gomez-Galvarriato 1998]). Еще одним свидетельством падения условий жизни рабочих в этот период являются данные об уменьшении среднего роста населения, часто связываемого с этим фактом (см.: [Lopez-Alonso, Porras Condey 2004]).

Обсуждение важного вопроса о роли накопления капитала в экономическом росте стран Южной Азии представлено в работах: [Young 1991, 1995], где автор утверждает, что накопление капитала и увеличение занятости почти полностью объясняют рост в Сингапуре и Южной Корее. В работах: [Klenov, Rodriguez 2007] и [Hsieh 2002] представлен альтернативный взгляд на этот вопрос.

Мы будем изучать различия между непосредственными источниками и фундаментальными причинами экономического роста в последующих главах книги. Это различие, только в другом контексте, также обсуждается в работе [Diamond 1997; Даймонд 2012], а также неявно в классической книге [North, Thomas 1973]. Детальное описание этого вопроса в контексте долгосрочного экономического развития и роста можно найти в работе [Acemoglu, Johnson, Robinson 2005a]. Мы рассмотрим его более подробно в главе 4.

Глава 2
Модель роста Солоу

В предыдущей главе нами были представлены основные факты и поставлены главные вопросы, связанные с источниками экономического роста и причинами различий в экономическом развитии различных стран мира. Эти вопросы являются центральными не только для теории экономического роста, но и для макроэкономики в целом и, более обще, для всех общественных наук. Наша следующая цель состоит в развитии базового инструментария, который может быть использован для рассуждений о непосредственных источниках экономического роста и механике этого процесса, а также о межстрановых различиях в уровне доходов. Мы будем использовать этот инструментарий как для изучения возможных источников экономического роста, так и для выполнения простых упражнений по сравнительной статике с целью выяснить какие именно характеристики экономики страны наиболее важны для достижения высокого уровня дохода на душу населения и более высоких темпов роста.

Мы начнем с так называемой модели Солоу—Свона, получившей свое название по работам Роберта (Боба) Солоу и Тревора Свона, которую часто называют просто моделью Солоу по имени более известного из двух экономистов. Их ключевые работы, где описана эта модель, ставшие прорывом в теории экономического роста, были опубликованы одновременно в 1956 г. ([Solow 1956] и [Swan 1956]). В дальнейшем Боб Солоу развил много приложений модели и за свой вклад в теорию экономического роста был удостоен Нобелевской премии по экономике. Модель стала базой не только большинства последующих более сложных моделей экономического роста, но и оказала большое влияние на всю макроэкономику. Поэтому можно сказать, что в данной главе мы будем изучать одну из основных моделей, которые используют макроэкономисты.

Одним из основных достоинств модели Солоу является ее простота. Глядя на нее сегодня, невозможно представить насколько значительным интеллектуальным прорывом она стала в момент публикации. До ее появления наиболее распространенным подходом в изучении экономического роста были модели, предложенные Роем Харродом и Евсеем Домаром ([Harrod 1939] и [Domar 1946]). Модель Харрода—Домара в основном концентрировалась на изучении негативных последствий экономического роста, например почему рост может ассоциироваться с возрастающей безработицей (см. упражнение 2.23 на эту тему). Модель Солоу показывает, почему подход Харрода—Домара не является наилучшим для изучения экономического роста. В основе модели Солоу, в отличие от модели Харрода—Домара, лежит неоклассическая производственная функция. Это не только позволяет модели Солоу базироваться на микроэкономических обоснованиях, но и, как мы увидим далее, является мостом, связывающим модель и эмпирические данные.

Важной особенностью модели Солоу, которая является общей со многими другими моделями этой книги, является ее простота и абстракция в описании сложной структуры экономики. На первый взгляд она может показаться слишком простой или слишком абстрактной. Действительно, для описания процесса экономического роста или макроэкономического равновесия мы должны рассматривать домохозяйства и индивидов с различными предпочтениями, навыками и умениями, доходами и ролями в обществе; различные сектора экономики и множество общественных взаимодействий и экономических транзакций. Модель Солоу отсекает все эти усложнения и рассматривает простую экономику с одним товаром без какой-либо связи с оптимизационным поведением агентов. Поэтому модель Солоу стоит рассматривать как начальную точку на нашем пути, которая станет основой для более богатых и сложных моделей.

В этой главе представлена базовая модель Солоу. Близко связанная с ней неоклассическая модель роста рассматривается в главе 8.

2.1. Структура экономики в базовой модели Солоу

Экономический рост и развитие являются динамическими процессами и поэтому для их изучения необходимы динамические модели. Несмотря на свою простоту, модель Солоу является динамической моделью общего равновесия (хотя при этом важно отметить, что множество обсуждаемых в главе 5 ключевых элементов динамической модели общего равновесия, таких как предпочтения агентов и динамическая оптимизация, в ней отсутствуют).

Модель Солоу может быть построена как в дискретном, так и в непрерывном времени. Мы начнем с версии в дискретном времени, потому что она более проста и чаще используется в макроэкономических приложениях. Однако, так как множество других моделей экономического роста формулируется в непрерывном времени, затем мы приведем подробный вывод модели Солоу в непрерывном времени и покажем, что часто эта версия является более удобной в использовании.

2.1.1. Домашние хозяйства и производственная структура экономики

Рассмотрим закрытую экономику с единственным конечным товаром. Горизонт планирования бесконечен во времени и дискретен, таким образом, периоды времени могут быть проиндексированы как $t = 0, 1, 2, \ldots$ Длину периода можно рассматривать равной дню, неделе или году. На данном этапе длина временного интервала не имеет для нас значения.

Предположим, что экономика населена большим количеством домохозяйств. Заметим, что по всей книге мы будем использовать термины *домохозяйства, индивиды, потребители* и *агенты* взаимозаменяемо. Модель Солоу делает относительно небольшое количество предположений о поведении домохозяйств в силу того, что их оптимизационное поведение в ней не описывается явным образом. Отсутствие оптимизации со стороны домохозяйств является главным различием модели Солоу и *неоклассической модели экономического роста*, которая получается добавлением к модели Солоу динамической оптимизации своего поведения потребителями (домохозяйствами). Обе они предполагают, что все домохозяйства в экономике идентичны, поэтому мы будем рассматривать так называемого *репрезентативного потребителя*. Это означает, что спрос на товары и предложение труда в экономике можно рассматривать как результат поведения одного-единственного домохозяйства. Разумность и последствия предположения о наличии репрезентативного агента в экономике будет обсуждаться подробно в главе 5.

Что нам необходимо знать о поведении домохозяйств в экономике? Ответ на этот вопрос в модели Солоу прост: не так много. Мы не будем наделять их предпочтениями (функцией полезности). Вместо этого мы предположим, что домохозяйства сберегают экзогенно фиксированную долю своего располагаемого дохода $s \in (0, 1)$ независимо от происходящих в экономике событий. Это предположение совпадает с подходом к моделированию поведения потребителей в базовой кейнсианской модели и модели Харрода—Домара, упомянутой выше. Заметим, что оно не очень хорошо подтверждается эмпирическими данными. Домохозяйства не сохраняют фиксированную долю своего дохода. Если бы они делали так, то, например, значительное увеличение налогов государством не влияло бы на решения агентов о сбережениях, что выглядит нелогичным и не согласуется с эмпирическими данными. Несмотря на это, предположение о фиксированной норме сбережений является удобным первым шагом. В последующих главах мы отойдем от него и посвятим значительное количество времени анализу поведения потребителей и их межвременному выбору.

Другим важным типом агентов в экономике являются фирмы, производящие конечный товар. В реальности фирмы, как и потребители, сильно отличаются друг от друга. Даже внутри некоторого узко определенного сектора экономики нельзя найти две одинаковые фирмы. Однако и здесь для простоты изложения мы начнем с предположения, схожего с предположением о наличии репрезентативного потребителя: мы будем считать, что все фирмы имеют доступ к одной и той же технологии производства конечного товара. Другими словами, мы будем рассматривать *репрезентативную фирму* и репрезентативную (или агрегированную) производственную функцию. Условия, при которых предположение о репрезентативной фирме является целесообразным, также будут обсуждаться в главе 5. Агрегированную производственную функцию единственного конечного товара можно представить следующим образом:

$$Y(t) = F(K(t), L(t), A(t)), \tag{2.1}$$

где $Y(t)$ — общее количество произведенного конечного товара в периоде t, $K(t)$ — количество капитала, $L(t)$ — суммарная занятость, $A(t)$ — уровень технологий в момент t. Занятость в экономике может быть измерена различными способами. Например, мы можем рассматривать переменную $L(t)$ как общее количество человеко-часов труда в экономике или как общее количество занятого в ней населения. Под капиталом $K(t)$ мы будем понимать общее количество «машин» (или, более точно, оборудования и мощностей), используемых в производстве, которое обычно измеряется в терминах их стоимости. Аналогично, у нас есть ряд методов для измерения количества капитала (и, соответственно, множество способов описания процесса его накопления). Так как наша цель состоит в построении простой модели, мы, по аналогии с предположением о единственном конечном товаре, предположим, что весь капитал в экономике однороден. Однако в отличие от конечного товара, капитал не потребляется, а используется как средство производства этого товара. В качестве примера рассмотрим конечный товар «пшеницу». Его можно использовать как потребительский товар (хлеб) или для производства (семена). Капитал в данном примере соответствует количеству семян, использованных для будущего производства.

Технологии, с другой стороны, нельзя измерить в некоторых естественных единицах. Для нас $A(t)$ будет переменной, которая сдвигает производственную функцию (2.1). Для удобства математического изложения мы будем считать, что $A(t)$ принимает численное значение, хотя всегда нужно помнить, что она описывает некоторое абстрактное понятие. Как было показано в главе 1, мы будем рассматривать его в широком контексте, включая в него рыночную структуру экономики и эффективность использования факторов производства. В данной модели переменная $A(t)$ описывает все эти эффекты и признаки технологии.

Важным предположением модели роста Солоу (а также неоклассической модели роста, которой посвящена глава 8) является предположение о том, что технология доступна *бесплатно*. Она является неконкурентным и неисключаемым общественным благом. Благо называется *неконкурентным*, если его использование одним индивидом или фирмой не препятствует его использованию другим индивидом или фирмой в то же время. Благо является *неисключаемым*, если у одного агента нет возможности предотвратить его использование другим агентом. Технология является хорошим примером неисключаемого неконкурентного блага. После появления некоторого знания, которое может улучшить эффективность производства, оно может быть использовано всеми фирмами одновременно, использование его одной фирмой не препятствует использованию его же другой фирмой. Более того, использование этого знания обычно довольно трудно предотвратить (по крайней мере после того, как оно стало общественным достоянием и не защищается патентным законодательством). Например, с открытием колеса каждый мог использовать это знание для производства и использования колес, и это не препятствовало производству и использованию колес другими, использование колеса одной фирмой не влияет на возможность использования колеса другой фирмой (это делает умение производства колес неконкурентным благом). Также, если некоторый агент не обладает хорошо защищенным патентом на производство колес, каждый волен решать, будет ли он производить колеса (это делает умение производства колес неисключаемым благом). Следствием предположения о неконкурентности и неисключаемости технологии является свободная возможность использования $A(t)$ всеми фирмами в экономике бесплатно. Отход от моделей со свободно доступной технологией — важный шаг на пути понимания процесса технологического прогресса, это является основной темой части IV данной книги.

Заметим, что многие авторы используют обозначения типа x_t или K_t в моделях с дискретным временем и $x(t)$ или $K(t)$ в моделях с непрерывным временем. Так как мы будем использовать оба типа моделей, мы всегда будем пользоваться обозначениями второго типа. В случае когда это не ведет к неопределенности, мы будем опускать временной индекс, однако даже при малейшем риске возникновения двусмысленности временной индекс будет использоваться.

Ниже мы приведем стандартные предположения о свойствах производственной функции.

Предположение 1 (о непрерывности, дифференцируемости, положительном и убывающем предельном продукте и постоянстве отдачи от масштаба). *Производственная функция $F:\mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+$ является дважды дифференцируемой по K и L и удовлетворяет следующим условиям:*

$$F_K(K, L, A) \equiv \frac{\partial F(K, L, A)}{\partial K} > 0, \; F_L(K, L, A) \equiv \frac{\partial F(K, L, A)}{\partial L} > 0,$$

$$F_{KK}(K, L, A) \equiv \frac{\partial^2 F(K, L, A)}{\partial K^2} < 0, \ F_{LL}(K, L, A) \equiv \frac{\partial^2 F(K, L, A)}{\partial L^2} < 0.$$

Также F обладает свойством постоянной отдачи от масштаба.

Все свойства, сформулированные в предположении 1, являются важными. Во-первых, обозначение $F:\mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+$ означает, что производственная функция определена на неотрицательных значениях аргументов (то есть K, $L \in \mathbb{R}_+$) и переводит их в неотрицательные значения выпуска ($Y \in \mathbb{R}_+$). Естественно предположить, что количества капитала и занятого труда должны быть положительными. Так как переменная A не имеет естественных единиц измерения, она может принимать и отрицательные значения. Однако без ограничения общности мы ограничим ее только положительными значениями. Второй важной частью предположения 1 является предположение о непрерывности и дифференцируемости производственной функции по всем ее аргументам. Существует множество интересных производственных функций, которые не являются дифференцируемыми, некоторые из них даже не непрерывны, однако предположение о дифференцируемости позволяет нам пользоваться методами дифференциального исчисления и потеря некоторого уровня общности в данном случае будет небольшой платой за удобство. Предположение 1 также говорит о том, что предельные продукты труда и капитала положительны (то есть количество произведенного товара возрастает по обоим факторам производства). Это предположение также ограничивает выбор производственной функции, но оно может быть ослаблено без большого числа затруднений (см. упражнение 2.8). Более важная часть предположения 1 состоит в том, что мы требуем, чтобы предельные продукты труда и капитала убывали, $F_{KK} < 0$ и $F_{LL} < 0$, то есть увеличение капитала при сохранении того же количества других факторов увеличивает выпуск во все меньшей и меньшей степени. Это же справедливо и для увеличения количества используемого труда. Это свойство иногда называют убывающей предельной производительностью труда и капитала. Скорость убывания предельного продукта капитала играет очень важную роль во многих результатах базовой теории экономического роста. Более того, предположение об убывающей отдаче капитала отличает модель Солоу от ее предшественницы — модели Харрода—Домара.

Постоянство отдачи от масштаба является еще одним важным предположением. Мы будем говорить, что функция F обладает свойством *постоянной отдачи от масштаба* по переменным K и L, если она является *линейно однородной* (однородной первой степени) по этим переменным. Более точно, сформулируем следующее:

Определение 2.1. *Пусть $K \in \mathbb{N}$. Функция g: $\mathbb{R}^{K+2} \to \mathbb{R}$ называется однородной степени m по $x \in \mathbb{R}$, и $y \in \mathbb{R}$ если*

$$g(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda^m g(x, y, z) \text{ для всех } \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ и } z \in \mathbb{R}^K.$$

Нетрудно убедиться, что из предположения о линейной однородности следует свойство вогнутости (хотя и нестрогой, см. упражнение 2.2). Свойство линейной однородности (постоянства отдачи от масштаба) производственной функции особенно полезно в силу следующей теоремы.

Теорема 2.1. Теорема Эйлера. *Пусть функция g: $\mathbb{R}^{K+2} \to \mathbb{R}$ дифференцируема по $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$ и является однородной степени m* по *$x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$. Обозначим частные производные g как g_x и g_y. Тогда*

$$mg(x, y, z) = g_x(x, y, z)x + g_y(x, y, z)y \text{ для всех } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ и } z \in \mathbb{R}^K.$$

Более того, $g_x(x, y, z)$ и $g_y(x, y, z)$ также являются однородными степени $m - 1$ по $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Используем то, что g дифференцируема и удовлетворяет следующему условию:

$$\lambda^m g(x, y, z) = g(\lambda x, \lambda y, z). \tag{2.2}$$

Продифференцировав обе части (2.2) по λ, получаем:

$$m\lambda^{m-1} g(x, y, z) = g_x(\lambda x, \lambda y, z)x + g_y(\lambda x, \lambda y, z)y$$

для любого значения λ. Полагая $\lambda = 1$, получаем необходимое равенство. Чтобы получить второй результат, продифференцируем обе части равенства (2.2) по x:

$$\lambda g_x(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda^m g_x(x, y, z).$$

Необходимый результат получается делением обеих частей последнего равенства на λ. ■

2.1.2. Запасы, рыночная структура и рыночное равновесие

В предыдущем параграфе мы описали предпочтения домохозяйств и производственную структуру экономики. На следующем шаге мы должны описать запасы, то есть количество трудовых ресурсов и капитала в начальный момент времени, и кому эти запасы принадлежат. После этого мы сможем начать изучение распределения ресурсов в экономике. Ресурсы (при заданных количестве домохозяйств и производственной технологии) в зависимости от *институциональной структуры* экономики могут быть распределены различными способами. В главах 5–8 мы будем изучать распределение ресурсов общественным планировщиком, максимизирующим взвешенное среднее полезностей всех домохозяйств, в части VIII мы уделим внимание распределению ресурсов, максимизирующему полезность индивидов, обладающих политической силой. Наиболее часто используемый подход к распределению ресурсов состоит в предположении некоторой специальной рыночной структуры, а именно совершенной конкуренции. При совершенной конкуренции фирмы и домохозяйства рассматривают цены как заданные, действуют в своих лучших интересах, а цены уравновешивают спрос и предложение на рынках. Совершенная конкуренция является естественным предположением, и мы начнем с предположения, что рынки всех товаров и факторов производства в экономике — конкуренты. Заметим, что это предположение не является совершенно очевидным. Например, и на рынке капитала, и на рынке труда существуют несовершенства, что имеет большое значение для экономического роста, например монопольная сила отдельных производителей на товарных рынках играет важную роль в моделях части IV. Однако важность всех этих отклонений от предположения о совершенной конкуренции проще всего увидеть начав с рассмотрения конкурентных рынков.

Прежде чем начать изучение торговли на конкурентном рынке, нам необходимо специфицировать права собственности на все запасы в экономике. Так как предположение о конкуренции имеет смысл только в экономике с частной (по меньшей мере частично) собственностью на активы и средства производства, естественно будет предположить, что факторы производства принадлежат домохозяйствам. А именно: предположим, что домохозяйства владеют всеми трудовыми ресурсами, и их предложение абсолютно неэластично. Под неэластичным предложением мы будем понимать случай, когда в экономике есть некоторый запас труда $\bar{L}(t)$, например равный населению страны, и он весь будет использован независимо от его арендной стоимости, если она неотрицательна. Равновесие на рынке труда тогда может быть описано как:

$$L(t) = \bar{L}(t) \tag{2.3}$$

для всех t, где $L(t)$ обозначает спрос на труд (и одновременно количество занятых в экономике). Более обще, уравнение (2.3) должно быть записано в форме условия дополнительной нежесткости. А именно: обозначим арендную стоимость труда или заработную плату в момент t как $w(t)$, тогда условие равновесия на рынке труда будет выглядеть следующим образом:

$$L(t) \le \bar{L}(t),\ w(t) \ge 0 \quad \text{и} \quad \left(L(t) - \bar{L}(t)\right)w(t) = 0. \tag{2.4}$$

Условие дополнительной нежесткости гарантирует, что в равновесии на рынке труда заработная плата будет неотрицательной. В случае если спрос на труд оказывается недостаточен, занятость может стать меньше, чем $\bar{L}(t)$, при нулевой заработной плате. Однако это не будет происходить в большинстве моделей, рассмотренных в данной книге, так как предположение 1 и конкурентный рынок труда влекут строгую положительность заработной платы (см. упражнение 2.1). В силу этого результата мы будем использовать более простую формулировку равновесия на рынке труда в форме (2.3) и обозначать и предложение труда, и занятость в момент t переменной $L(t)$.

Домохозяйства также владеют капиталом в экономике и сдают его в аренду фирмам. Обозначим арендную стоимость капитала переменной $R(t)$. Условие равновесия на рынке капитала схоже с условием (2.3) и состоит в том, что спрос на капитал со стороны фирм должен совпадать с его предложением домохозяйствами:

$$K(t) = \bar{K}(t),$$

где $\bar{K}(t)$ — предложение капитала домохозяйствами, а $K(t)$ — спрос на него со стороны фирм. Обеспечение равновесия на рынке капитала в типе моделей, которые мы рассматриваем в этой книге, несложно. Действительно, для этого достаточно чтобы количество капитала $K(t)$, используемого в производстве в момент t (получаемое как результат оптимизационного поведения фирм), соответствовало запасам домохозяйств и их сбережениям.

Начальное значение капитала, имеющегося в распоряжении домохозяйств, $K(0) \geq 0$ будем считать заданным (как часть описания начального состояния экономики). На данный момент специфика его распределения между различными собственниками нам не важна, так как мы не моделируем оптимизационное поведение домохозяйств явно, а просто предполагаем, что все агенты сохраняют фиксированную долю s своего дохода. В моделях с оптимизацией со стороны домохозяйств, рассматриваемых далее в книге, важной частью описания экономики является спецификация предпочтений и бюджетных ограничений всех домохозяйств.

В данный момент мы можем ввести переменную, обозначающую цену конечного товара $P(t)$. Однако в этом нет необходимости, так как у нас есть выбор единицы измерения стоимости в экономике, цену которой можно нормализовать, положив ее равной 1. В действительности, как будет показано в главе 5, закон Вальраса требует, чтобы цена одного товара, единицы измерения стоимости, совпадала с 1. На самом деле мы будем требовать чуть большего и нормализуем цену конечного товара значением 1 во всех периодах времени. В большинстве случаев мы не можем выбрать более одной единицы измерения, так как тогда мы зафиксируем относительную цену одной из них. Однако как показано в главе 5, мы можем использовать результат Кеннета Эрроу [Arrow 1964], который утверждает, что нам достаточно знать стоимости *ценных бумаг* (цены активов), которые позволяют перенести одну единицу потребительского товара из одного периода времени (или состояния природы) в другой. В контексте динамической экономики это означает, что нам достаточно знания *процентной ставки* между периодами, которую мы будем обозначать $r(t)$. Она будет определять межвременные стоимости товаров, и это позволяет нам нормализовать стоимость конечного товара значением 1 в каждый момент времени. Естественно, стоимость единицы труда в единицах конечного товара в момент времени t будет определяться заработной платой $w(t)$.

Вышеприведенные рассуждения подчеркивают очень важный факт: все модели этой книги необходимо рассматривать как модели общего равновесия, в которых одно и то же благо соответствует различным товарам в различные моменты времени. Действительно, базовая теория общего равновесия рассматривает один товар в разные моменты времени (или в различных состояниях природы или даже расположенный в различных местах) как разные товары. Поэтому в силу предположения о бесконечности временного горизонта, почти во всех моделях этой книги мы будем иметь бесконечное количество товаров. Это приводит к ряду специфических вопросов, которые будут обсуждаться в главе 5.

Вернемся к базовой модели Солоу. Следующее предположение состоит в амортизации капитала. Мы будем считать, что машины, которые используются в производстве, подвержены износу и поэтому теряют некоторую часть своей стоимости. В терминах примера с пшеницей, приведенного выше, часть семян, используемых сегодня, не будет доступно для потребления или для использования в качестве семян в следующий период времени. Мы предположим, что амортизация происходит экспоненциально, это значительно упрощает математику модели. Будем считать, что капитал выбывает экспоненциально с темпом $\delta \in (0, 1)$, то есть от одной единицы капитала в текущий период в следующем остается лишь $1 - \delta$ единиц. Несмотря на то что здесь амортизация означает износ оборудования, в более реалистичных моделях, рассматриваемых в главе 14, ее можно рассматривать как процесс замены старого оборудования новым.

Потеря части капитала в результате амортизации влияет на процентную ставку (доходность сбережений), доступную для домохозяйств. Из предположения об экспоненциальном характере амортизации и нормализации цены конечного товара единицей следует, что процентная ставка, доступная для домохозяйств, равна $r(t) = R(t) - \delta$, где $R(t)$ — арендная стоимость капитала в периоде t. Единица конечного товара может быть использована для потребления в данный момент времени или как капитал и отдана в аренду фирмам. В последнем случае домохозяйство получает доход $R(t)$ на свои сбережения в размере арендной стоимости капитала в момент t, но теряет δ единиц капитала, так как его доля δ изнашивается в течение периода. Таким образом, домохозяйство отказалось от единицы потребления конечного товара в периоде $t-1$ и получило $1+r(t) = R(t)+1-\delta$ единиц конечного товара в периоде t, то есть $r(t) = R(t) - \delta$. Эта зависимость между переменными $r(t)$ и $R(t)$ объясняет выбор обозначений для процентной ставки и арендной стоимости капитала. Процентная ставка, доступная для домохозяйств, имеет ключевое значение в решении задачи динамической оптимизации потребителя в моделях, рассматриваемых в следующих главах. В модели Солоу процентная ставка напрямую не влияет на распределение ресурсов.

2.1.3. Максимизация прибыли фирмами и рыночное равновесие

Теперь мы можем рассмотреть решение оптимизационной задачи фирмы и увидеть, как выглядит конкурентное равновесие в моделируемой экономике. Во всех моделях, изучаемых в книге, мы будем предполагать, что задача фирмы состоит в максимизации прибыли. Предположение о наличии агрегированной производственной функции позволяет рассмотреть поведение лишь одной репрезентативной фирмы. Далее везде, если не сказано иначе, мы будем предполагать наличие функционирующего рынка капитала, так что фирмы могут арендовать капитал у домохозяйств. При заданных значениях технологии $A(t)$ и цен факторов производства $R(t)$ и $w(t)$ задача максимизации прибыли репрезентативной фирмой в момент времени t может быть представлена в следующем статическом виде:

$$\max_{K\geq 0, L\geq 0} F\left(K, L, A(t)\right) - R(t)K - w(t)L. \tag{2.5}$$

В случае наличия необратимых инвестиций или издержек изменения количества капитала оптимизационная задача фирмы становится динамической, как показано, например, в параграфе 7.8. Однако в отсутствие этих специфических особенностей максимизация фирмой прибыли в каждый момент времени t эквивалентна максимизации чистой приведенной стоимости совокупной прибыли фирмы. Это свойство значительно упрощает анализ модели.

Стоит отметить ряд дополнительных деталей, связанных с задачей максимизации прибыли:

1. Задача максимизации поставлена в терминах агрегированных переменных, однако, учитывая предположение о наличии репрезентативной фирмы, это не ограничивает общности анализа.
2. Перед слагаемым F в (2.5) отсутствует множитель. Это следствие нормализации цены конечного товара значением 1. Более того, первое слагаемое есть выручка репрезентативной фирмы (или всех фирм в экономике).

3. Способ постановки задачи уже предполагает совершенную конкуренцию на рынке, так как фирмы рассматривают арендную стоимость труда и капитала $w(t)$ и $R(t)$ как заданные (цены факторов здесь и далее выражены в терминах единицы измерения стоимости, а именно конечного товара).
4. Так как функция F вогнута, задача является вогнутой (см. упражнение 2.2).

Здесь важно заметить, что в силу предположения о постоянстве отдачи от масштаба, максимизационная задача (2.5) не имеет единственного внутреннего решения (см. упражнение 2.3). Максимальное значение прибыли либо равно бесконечности и решение задачи отсутствует, либо $K = L = 0$, либо максимум, равный в этом случае 0, достигается на бесконечном числе пар (K, L). Вывод этого утверждения связан с тем, что при постоянной отдаче от масштаба оптимальный размер фирмы не определен (только агрегированные переменные в экономике могут быть вычислены). Выбор единственного решения задачи может быть сделан с помощью добавления условия, что рынки факторов производства должны находиться в равновесии. Другими словами, в любой момент времени спрос на труд и капитал должен быть равным их предложению (или цены факторов производства должны равняться нулю, что невозможно в силу предположения 1). Из этого замечания следует, что репрезентативная фирма получает нулевую прибыль, так как в противном случае ее спрос на труд и капитал был бы неограниченно большим и превзошел бы их предложение, которое ограничено конечной величиной. Из него также следует, что совокупный спрос на труд L должен быть равен имеющемуся в экономике предложению труда $L(t)$. Аналогично, совокупный спрос на капитал K должен быть равен его совокупному предложению $K(t)$. В противном случае, например если $L < L(t)$, в экономике существовало избыточное предложение труда и заработная плата стала бы нулевой. Однако это не согласуется с максимизацией прибыли, так как в этом случае в силу предположения 1 репрезентативная фирма желала бы арендовать неограниченно большое количество труда, что превысило бы его предложение. Из этого аргумента вместе с предположением о дифференцируемости функции F (предположение 1) следует, что при заданном предложении труда $L(t)$ и капитала $K(t)$ в момент времени t цена фактора производства должна удовлетворять стандартным условиям и равняться соответствующему предельному продукту[1]:

[1] Другой метод вывода условий (2.6) и (2.7) состоит в решении задачи минимизации издержек репрезентативной фирмы, что соответствует минимизации значения выражения $rK + wL$ по K и L при условии $F(K, L, A) = Y$ при некотором значении выпуска Y. Эта задача имеет единственное решение при любом значении Y. Добавление условия равновесия на рынках, то есть $Y = F(K, L, A)$ при K и L, равных предложению капитала и труда, приводит к (2.6) и (2.7).

$$w(t) = F_L(K(t), L(t), A(t)), \tag{2.6}$$

и

$$R(t) = F_K(K(t), L(t), A(t)). \tag{2.7}$$

Из теоремы Эйлера (теоремы 2.1) следует, что при таких ценах факторов производства прибыль фирмы (или репрезентативной фирмы) равна нулю.

Утверждение 2.1. *Предположим, что предположение 1 выполнено. Тогда на равновесной траектории модели роста Солоу фирмы получают нулевую прибыль, а также*

$$Y(t) = w(t)L(t) + R(t)K(t).$$

Доказательство. Доказательство следует непосредственно из теоремы 2.1 для случая постоянной отдачи от масштаба ($m = 1$). ■

Так как прибыль фирм равна нулю, у нас нет необходимости специфицировать права собственности на них. Для описания равновесия нам достаточно предположения о максимизации прибыли фирмами.

Вдобавок к стандартным предположениям о виде производственной функции следующие граничные условия, именуемые *условиями Инада*, зачастую предполагаются выполненными при анализе макроэкономического равновесия в моделях роста.

Предположение 2 (условия Инада).

Будем говорить, что функция F *удовлетворяет* условиям Инада, если

$$\lim_{K \to 0} F_K(K, L, A) = \infty$$

$$\text{и} \lim_{K \to \infty} F_K(K, L, A) = 0 \text{ для всех } K > 0 \text{ и для всех } A,$$

$$\lim_{L \to 0} F_L(K, L, A) = \infty$$

$$\text{и} \lim_{L \to \infty} F_L(K, L, A) = 0 \text{ для всех } K > 0 \text{ и для всех } A.$$

Более того, $F(0, L, A) = 0$ *для всех* L *и* A.

Роль этих условий, в особенности в гарантировании существования *внутреннего равновесия*, станет ясна в следующей главе. Из них следует, что первые использованные труд и капитал являются очень высокопроизводительными и что их предельный продукт стремится к нулю, когда их количество становится относительно избыточно. Условие $F(0, L, A) = 0$ для всех L и A делает капитал необходимым фактором производства. Это предположение может быть отброшено без значительного влияния на результаты, полученные в этой главе. Рис. 2.1 показывает график функции $F(K, L, A)$ как функции от количества капитала K при заданных L и A в двух различных случаях: на рис. А условия Инада выполнены, а на рис. В — нет.

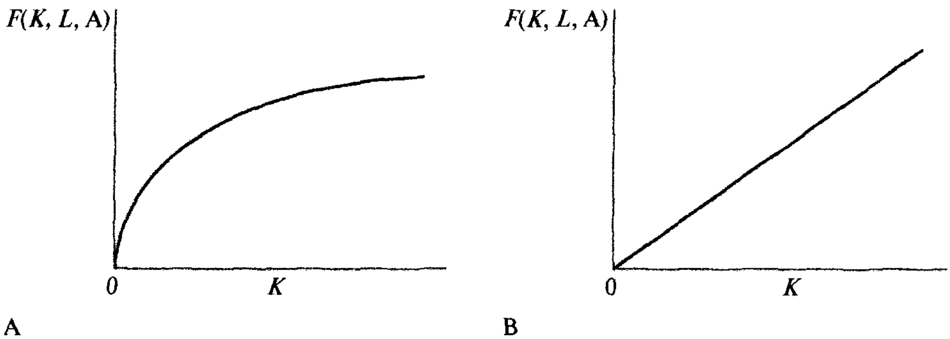


Рис. 2.1. Производственная функция. (А) удовлетворяет условиям Инада в предположении 2, а (В) — нет

Мы будем обращаться к предположениям 1 и 2, которые можно назвать неоклассическими предположениями о технологии, на протяжении всей книги. Именно поэтому они пронумерованы независимо от остальных уравнений, теорем и утверждений этой главы.

2.2. Модель Солоу в дискретном времени

В этом параграфе мы проанализируем динамику экономического роста в модели Солоу в дискретном времени.

2.2.1. Фундаментальный закон накопления капитала в модели Солоу

Напомним, что износ капитала K следует экспоненциальному закону. Из этого следует, что закон изменения количества капитала может быть записан как

$$K(t+1) = (1-\delta)K(t) + I(t), \tag{2.8}$$

где переменная $I(t)$ обозначает инвестиции в периоде t.

Тождества системы национальных счетов в закрытой экономике гарантируют, что весь произведенный продукт используется или в качестве конечного потребления, или в качестве инвестиций, то есть

$$Y(t) = C(t) + I(t), \tag{2.9}$$

где переменная $C(t)$ обозначает потребление в периоде t[2]. *Из уравнений* (2.1), (2.8) *и* (2.9) *следует, что любое доступное динамическое распределение ресурсов должно удовлетворять следующему условию:*

$$K(t+1) \le F(K(t), L(t), A(t)) + (1-\delta)K(t) - C(t)$$

[2] Мы также могли ввести государственные расходы $G(t)$ в правой части уравнения (2.9). Государственные расходы не играют важной роли в модели роста Солоу. Упражнение 2.7 посвящено ее динамике при наличии фискальных расходов государства.

при $t = 0, 1, \ldots$ Наша задача состоит в поиске равновесного динамического распределения ресурсов во множестве всех допустимых распределений. В данном случае правило поведения домохозяйств, которые сберегают фиксированную долю своего дохода, значительно упрощает структуру равновесия (мы называем правило поведения домохозяйств именно поведенческим, так как оно не является результатом максимизации явно заданной функции полезности). Из этого следует, что все оценки и сравнения уровня благосостояния агентов, основанные на модели Солоу, следует рассматривать с некоторой долей скептицизма, так как мы не знаем, каковы в действительности предпочтения домохозяйств.

Так как мы рассматриваем закрытую экономику (и государственные расходы отсутствуют), совокупные инвестиции в ней равны сбережениям:

$$S(t) = I(t) = Y(t) - C(t).$$

Предположение о том, что домохозяйства сберегают постоянную долю дохода $s \in (0, 1)$ может быть записано как

$$S(t) = sY(t), \tag{2.10}$$

из чего, в свою очередь, следует, что они потребляют оставшуюся долю дохода $1 - s$, то есть

$$C(t) = (1 - s)Y(t). \tag{2.11}$$

Уравнение равновесия на рынке капитала (2.10) означает, что количество капитала, имеющееся в экономике в результате действий домохозяйств, в момент времени $t + 1$ может быть выражено как $K(t + 1) = (1 - \delta)K(t) + S(t) = (1 - \delta)K(t) + sY(t)$. Приравнивая спрос и предложение на рынке капитала и используя уравнения (2.1) и (2.8), мы получаем *фундаментальный закон накопления капитала* в модели Солоу:

$$K(t + 1) = sF(K(t), L(t), A(t)) + (1 - \delta)K(t). \tag{2.12}$$

Это нелинейное разностное уравнение. Равновесие в модели Солоу описывается уравнением (2.12) и уравнениями, описывающими динамику переменных $L(t)$ и $A(t)$.

2.2.2. Определение равновесия в модели Солоу

Модель Солоу находится между моделями кейнсианского типа и современными динамическими макроэкономическими моделями. Решение о потреблении и сбережении домохозяйств в ней не является следствием оптимизации. Уравнения (2.10) и (2.11) являются нашим предположением об их поведении. Несмотря на это, мы моделируем фирмы как максимизирующие свою прибыль и предполагаем, что рынки факторов производства находятся в равновесии. Поэтому мы можем определить понятие равновесия привычным для современных динамических макроэкономических моделей способом.

Определение 2.2. *Зафиксируем последовательности* $\{L(t), A(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *и начальное значение капитала* $K(0)$. *Равновесной траекторией мы будем называть набор последовательностей* $\{K(t), Y(t), C(t), w(t), R(t)\}_{t=0}^{\infty}$, *таких, что* $K(t)$ *удовлетворяет уравнению* (2.12), $Y(t)$ *задается уравнением* (2.1), $C(t)$ *задается уравнением* (2.11), a, $w(t)$ *и* $R(t)$ *удовлетворяют уравнениям* (2.6) *и* (2.7).

Здесь стоит отметить наиболее важную часть определения 2.2. Равновесие определяется как динамическая траектория распределения ресурсов. Экономическое равновесие *не* является статическим объектом, оно описывает поведение агентов в экономике в течение всего времени ее существования. Также заметим, что определение 2.2 включает в себя условия равновесия на рынках факторов производства (2.6) и (2.7). Этот подход является стандартным в макроэкономических моделях и моделях экономического роста. Альтернативный подход, описывающий равновесие в более абстрактных терминах, представлен в контексте неоклассической модели экономического роста в главе 8 (см., например, определение 8.1).

2.2.3. Равновесие без роста населения и технологического прогресса

Начнем описание равновесия со следующих предположений, от которых мы откажемся далее в этой главе.

1. Население в экономике не изменяется. Зафиксируем его некоторой константой $L > 0$. Так как мы предполагаем абсолютно неэластичное предложение труда, это также значит, что $L(t) = L$.
2. Технологический прогресс отсутствует, то есть $A(t) = A$.

Введем понятие отношения капитала к труду (капиталовооруженности) в экономике, которое будет важнейшим в нашем анализе, как

$$k(t) = \frac{K(t)}{L}. \tag{2.13}$$

Из предположения о постоянной отдаче от масштаба следует, что выпуск (доход) на душу населения $y(t) \equiv Y(t)/L$ может быть представлен как

$$y(t) = F\left(\frac{K(t)}{L}, 1, A\right) \equiv f(k(t)). \tag{2.14}$$

Другими словами, при постоянной отдаче от масштаба доход на душу населения является функцией от капиталовооруженности экономики. Заметим, что $f(k)$ зависит от A, поэтому мы должны были записать $f(k, A)$. Мы не делаем этого для упрощения записи формул, а также потому, что мы не будем рассматривать технологический прогресс вплоть до параграфа 2.7. Не ограничивая общность изложения, мы можем нормализовать постоянную A единицей: $A = 1$[3]. Предельный продукт и арендная стоимость капитала задаются как частная производная функции F по первому аргументу, которая, в свою очередь, равна $f'(k)$. Предельный продукт труда и заработная плата могут быть найдены из теоремы 2.1:

$$R(t) = f'(k(t)) > 0$$

и

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) > 0. \tag{2.15}$$

Положительность цен обоих факторов производства следует из предположения 1, которое гарантирует, что частные производные функции F по труду и капиталу положительны.

Пример 2.1 (производственная функция Кобба—Дугласа). Рассмотрим пример производственной функции, наиболее часто используемой в макроэкономике, а именно производственной функции Кобба—Дугласа. Однако прежде чем перейти к рассмотрению, предупредим читателя, что, хотя функция Кобба—Дугласа удобна для анализа и поэтому очень широко используется, она является очень узким частным случаем производственной функции и многие результаты, показанные в книге, для нее не справедливы для более общего случая. Функция Кобба—Дугласа может быть представлена как

$$Y(t) = F(K(t), L(t), A(t)) = AK(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1. \tag{2.16}$$

Нетрудно убедиться, что она удовлетворяет предположениям 1 и 2, включая свойство постоянной отдачи от масштаба из предположения 1. После деления обеих частей равенства (2.16) на $L(t)$ производственная функция на душу населения (2.14) принимает вид:

$$y(t) = Ak(t)^{\alpha},$$

где переменная $y(t)$, как обычно, обозначает выпуск на одного работника, а переменная $k(t)$ — капиталовооруженность экономики, которую мы определили в уравнении (2.13). Справедливость равенств (2.15), связывающих цены факторов производства с видом производственной функции $f(k)$ также легко проверить. Из подушевого представления производственной функции можно увидеть, что равенство (2.15), описывающее арендную стоимость капитала, может быть записано как

$$R(t) = \frac{\partial Ak(t)^{\alpha}}{\partial k(t)} = \alpha Ak(t)^{-(1-\alpha)}.$$

В терминах исходной производственной функции арендная стоимость капитала в уравнении (2.7) имеет вид:

$$R(t) = \alpha AK(t)^{\alpha-1}L(t)^{1-\alpha} = \alpha Ak(t)^{-(1-\alpha)},$$

что убеждает нас в том, что предельный продукт капитала задается уравнением (2.15). Аналогично, из уравнения (2.15) следует равенство:

$$w(t) = Ak(t)^{\alpha} - \alpha Ak(t)^{-(1-\alpha)} \times k(t) = (1-\alpha)AK(t)^{\alpha}L(t)^{-\alpha},$$

которое совпадает с выражением для заработной платы в равенстве (2.6). ■

[3] Далее, когда мы будем рассматривать трудоинтенсивный технологический прогресс, производственная функция будет представлена в виде $y = Af(k)$ с немного другим определением переменной k как отношение капитала к количеству эффективного труда (см., например, (2.50) в параграфе 2.7).

Возвращаясь к анализу общего случая производственной функции, мы можем использовать ее подушевую форму и, разделив обе части равенства (2.12) на L, получим простое разностное уравнение, описывающее динамику капиталовооруженности (отношения капитала к количеству труда) в экономике:

$$k(t+1) = sf(k(t)) - (1-\delta)k(t). \tag{2.17}$$

Так как это разностное уравнение получено из уравнения (2.12), мы будем называть его *равновесным разностным уравнением* модели Солоу. Оно описывает динамику ключевой переменной модели, отношения количества капитала к трудовым ресурсам, или капиталовооруженности экономики $k(t)$. Значение всех остальных переменных модели в равновесии может быть получено из нее.

Далее мы определим *стационарное равновесие* в модели Солоу.

Определение 2.3. Стационарным равновесием *модели без роста населения и технологического прогресса назовем равновесную траекторию, на которой $k(t) = k^*$ для всех t.*

В стационарном равновесии капиталовооруженность экономики остается постоянной. Так как рост населения отсутствует, из этого следует, что количество капитала в экономике также остается постоянным. Математически стационарное равновесие соответствует неподвижной точке равновесного разностного уравнения (2.17). Большинство моделей, рассматриваемых в этой книге, имеет стационарное равновесие. Это утверждение верно и для простой модели Солоу.

В существовании стационарного равновесия легко убедиться графически. Для этого необходимо представить динамику равновесного разностного уравнения (2.17) на графике. Это сделано на рис. 2.2. Сплошная линия соответствует правой части уравнения (2.17), а прерывистая является прямой линией, проходящей под углом 45°. Их пересечение в положительной области определяет значение капиталовооруженности экономики в стационарном равновесии k^*. Оно удовлетворяет следующему равенству:

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta}{s}. \tag{2.18}$$

Заметим, что на рис. 2.2 существует еще одно пересечение графика уравнения (2.17) с линией, проходящей под углом 45° в точке $k = 0$. Его наличие следует из предположения 2 о том, что капитал является необходимым фактором производства и, следовательно, $f(0) = 0$. При нулевом начальном значении капитала $k(0) = 0$ в экономике не будет сбережений, поэтому количество капитала не изменится, $k = 0$. Несмотря на это, мы

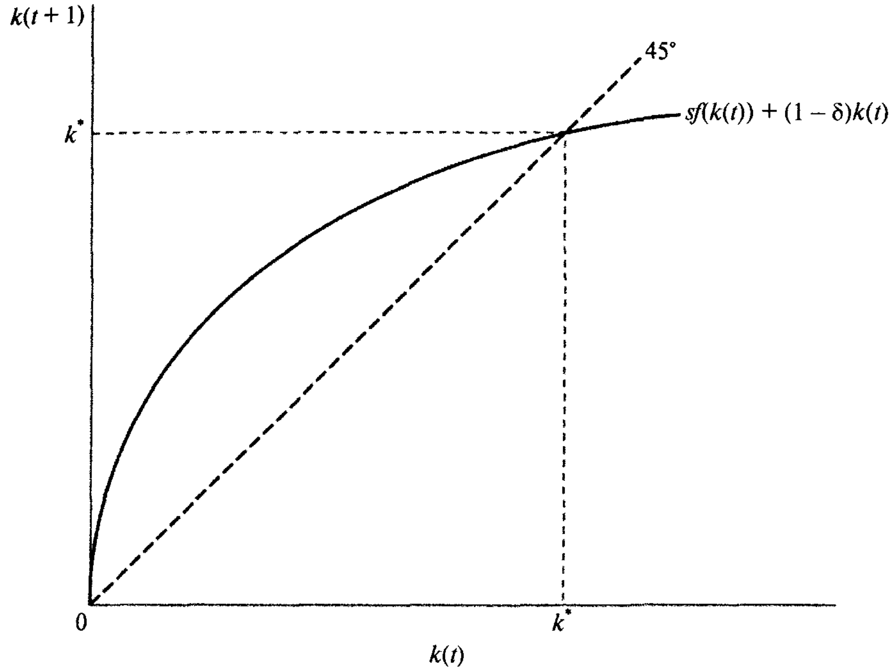


Рис. 2.2. Определение капиталовооруженности в стационарном равновесии в модели без роста населения и технологического прогресса

не будем уделять внимание этой точке пересечения в силу ряда причин. Во-первых, точка $k = 0$ является стационарным равновесием только в случае, если капитал является необходимым фактором производства и $f(0) = 0$. Однако, как было показано выше, это предположение может быть отброшено без последствий для нашего анализа, а в случае $f(0) > 0$ точка $k = 0$ уже не является стационарным равновесием. Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 2.3, где показан график уравнения (2.17) в случае $f(0) = \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Во-вторых, как мы убедимся далее, эта точка пересечения, даже если она существует, является неустойчивой. Другими словами, экономика никогда не будет двигаться по направлению к ней, если в начальный момент времени запас капитала был положительный ($K(0) > 0$, что эквивалентно $k(0) > 0$). Наконец, — и это наиболее важно для нас, — что касается экономической сути модели, эта точка не представляет для нас интереса[4].

В качестве другого графического представления стационарного равновесия можно рассмотреть пересечение луча, выходящего из начала координат, с тангенсом угла наклона, равным δ (что является графиком функции δk), и графиком функции $sf(k)$. Оно представлено на рис. 2.4 и является

[4] В работе [Hakenes and Irmen 2006] показано, что даже в случае $f(0) = 0$ из условий Инада следует, что в модели Солоу в непрерывном времени $k = 0$ не может быть единственным стационарным равновесием и экономика будет двигаться в сторону от точки $k = 0$.

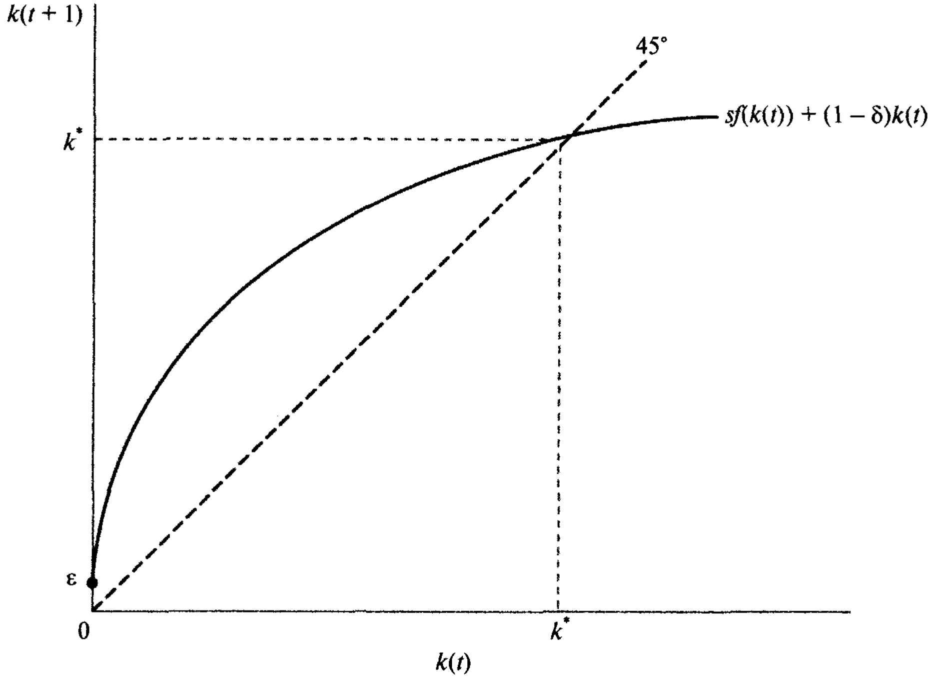


Рис. 2.3. Единственность стационарного равновесия в базовой модели Солоу в случае $f(0) = \varepsilon > 0$

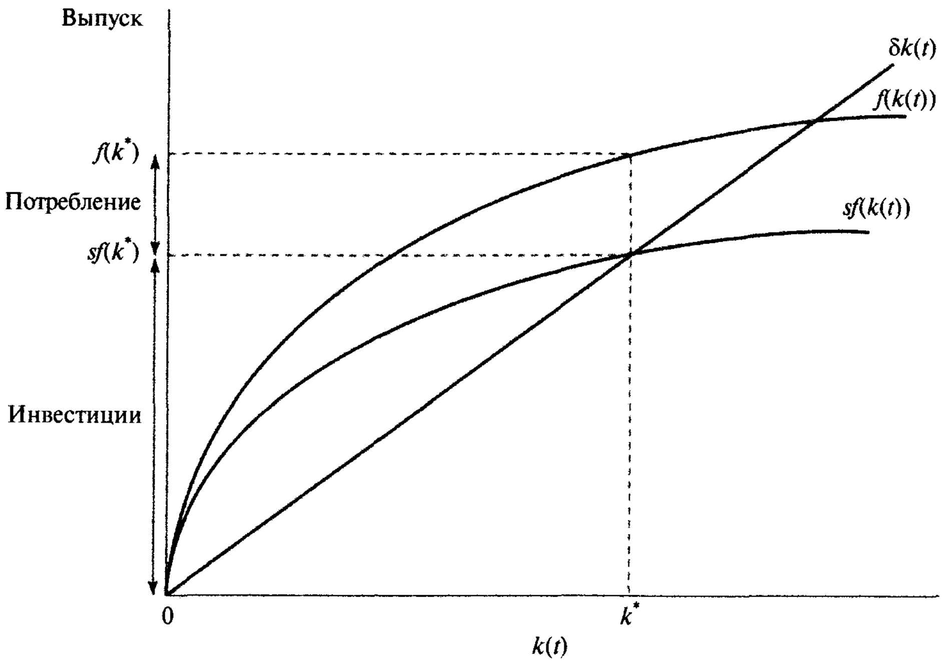


Рис. 2.4. Инвестиции и потребление в стационарном равновесии

полезным для нас по двум причинам. Во-первых, оно показывает значения потребления и инвестиций на одном графике. Расстояние между горизонтальной осью и лучом δk в точке k^* показывает значение инвестиций на душу населения в стационарном равновесии (равное δk^*), в то время как расстояние между графиком функции $f(k)$ и линией δk в стационарном равновесии показывает значение потребления на душу населения. Очевидно, что сумма этих двух слагаемых составляет весь выпуск $f(k^*)$. Во-вторых, рис. 2.4 явным образом показывает, что ключевой особенностью стационарного равновесия является равенство инвестиций $sf(k)$ и количества ресурсов, необходимого для покрытия износа капитала δk. Такая интерпретация стационарного равновесия будет особенно полезна в модели с ростом населения и технологическим прогрессом.

Из вышеприведенных рассуждений вытекает (игнорируя пересечение в точке $k = 0$ даже в случае $f(0) = 0$) следующее.

Утверждение 2.2. *Рассмотрим базовую модель Солоу в предположениях* 1 *и* 2. *Тогда в ней существует единственное стационарное равновесие, в котором капиталовооруженность* $k^* \in (0, \infty)$ *удовлетворяет условию* (2.18), *выпуск на душу населения равен:*

$$y^* = f(k^*), \tag{2.19}$$

а потребление на душу населения составляет:

$$c^* = (1 - s)f(k^*). \tag{2.20}$$

Доказательство. Предыдущие рассуждения показывают, что любое значение k^*, удовлетворяющее (2.18) является стационарным равновесием. Чтобы убедиться в его существовании, заметим, что (по правилу Лопиталя, см. теорему А.21 в приложении А) $\lim\limits_{k\to 0} f(k)/k = \infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(k)/k = 0$. Более того, из предположения 1 следует, что функция $f(k)/k$ непрерывна и по теореме Лагранжа о промежуточном значении (теорема А.3) существует такое k^*, что равенство (2.18) выполняется. Чтобы убедиться в единственности, продифференцируем функцию $f(k)/k$ по k. В результате получаем:

$$\frac{\partial(f(k)/k)}{\partial k} = \frac{f'(k)k - f(k)}{k^2} = -\frac{w}{k^2} < 0, \tag{2.21}$$

где последнее равенство в уравнении (2.21) следует из уравнения (2.15). Так как функция $f(k)/k$ везде является строго убывающей, существует лишь единственное значение k^*, удовлетворяющее равенству (2.18). Уравнения (2.19) и (2.20) следуют из определения сбережений и потребления. ■

Рис. 2.5 на ряде примеров показывает, почему мы не можем отказаться от предположений 1 и 2 в доказательстве существования и единственности стационарного равновесия в утверждении 2.2. Первые два рисунка показывают, почему отказ от предположения 2 может привести к ситуации, в которой не существует стационарного равновесия с положительным количеством капитала, третий рисунок показывает, как отказ от предположения 1 может привести к множественности стационарных равновесий в экономике.

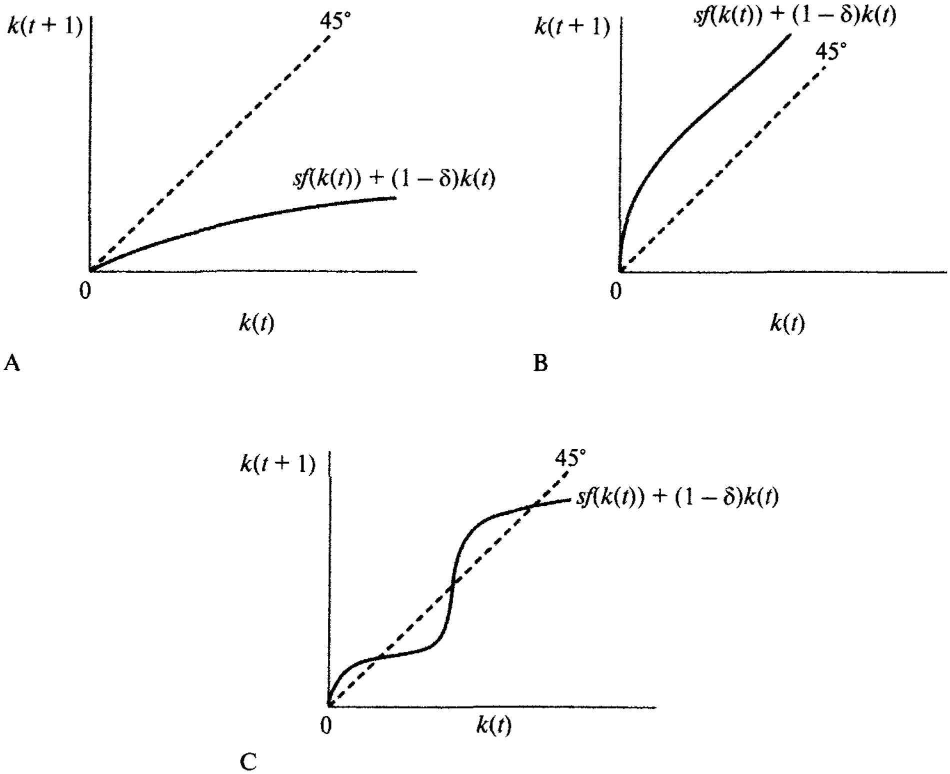


Рис. 2.5. Примеры несуществования и неединственности внутреннего стационарного равновесия в случае, когда предположения 1 и 2 не выполняются

Структура модели Солоу, которую мы рассматриваем, является довольно ограниченной. Модель имеет небольшое количество параметров и абстрагируется от многих особенностей реального мира. Вместе с тем понимание связи между различиями в значениях тех или иных параметров в разных странах и различиями в их темпах роста является нашей важнейшей задачей. Эта связь будет показана в следующем утверждении. Однако прежде полезно будет рассмотреть одно простое обобщение вида производственной функции. Предположим, что она задается как

$$f(k) = A\tilde{f}(k),$$

где $A > 0$. Мы можем рассматривать переменную A как множитель, изменяющий производительность факторов. Его большее значение соответствует их большей производительности. Изменения производительности такого типа называются нейтральными по Хиксу (см. объяснение ниже). Для нас это просто удобный способ параметризации различий в производительности факторов в разных странах. Так как мы предполагаем, что функция $f(k)$ удовлетворяет условиям гладкости, которые мы наложили выше, то функция $\tilde{f}(k)$ также будет удовлетворять этим условиям.

Утверждение 2.3. *Допустим, что предположения* 1 *и* 2 *выполняются и* $f(k) = A\tilde{f}(k)$. *Обозначим значение капиталовооруженности в стационарном равновесии* $k^*(A, s, \delta)$, *а значение выпуска в стационарном равновесии* $y^*(A, s, \delta)$, *где* A, s, *и* δ *— параметры модели. Тогда*

$$\frac{\partial k^*(A,s,\delta)}{\partial A} > 0, \quad \frac{\partial k^*(A,s,\delta)}{\partial s} > 0 \text{ и } \frac{\partial k^*(A,s,\delta)}{\partial \delta} < 0;$$

$$\frac{\partial y^*(A,s,\delta)}{\partial A} > 0, \quad \frac{\partial y^*(A,s,\delta)}{\partial s} > 0 \text{ и } \frac{\partial y^*(A,s,\delta)}{\partial \delta} < 0.$$

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из равенства:

$$\frac{\tilde{f}(k^*)}{k^*} = \frac{\delta}{As},$$

которое справедливо для любых значений k^*, A, s, *и* δ. Применяя теорему о неявной функции (теорема A.25), получаем требуемые результаты. Например, нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial k^*}{\partial s} = \frac{\delta (k^*)^2}{s^2 w^*} > 0,$$

где $w^* = f(k^*) - k^* f'(k^*) > 0$. Другие неравенства получаются аналогично. ■

Из утверждения 2.3 следует, что страны с более высокой нормой сбережений и лучшей технологией будут иметь более высокую капиталовооруженность и поэтому будут богаче. Страны с большей нормой амортизации капитала будут иметь меньшее отношение капитала к труду и поэтому будут беднее. Все результаты утверждения 2.3 достаточно очевидны с интуитивной точки зрения и дают нам первый взгляд на возможные факторы, определяющие значения капиталовооруженности экономики и уровня дохода в ней.

Аналогичное упражнение по сравнительной статике по отношению к параметрам A и δ можно провести и для потребления в стационарном равновесии c^*. Однако при этом нетрудно увидеть, что функция c^* не является монотонной по норме сбережений (например, рассмотрите граничный случай $s = 1$). Можно показать, что существует единственное значение нормы сбережений s_{gold}, называемое золотым правилом сбережений, на котором функция c^* достигает максимума. В силу того что мы рассматриваем норму сбережений как экзогенный параметр и не специфицируем максимизационного критерия домохозяйств, мы не вправе утверждать, что норма сбережений, соответствующая золотому правилу является в чем-то более предпочтительной, чем любая другая норма сбережений. Однако при этом экономическая характеристика золотого правила представляет значительный интерес. Выпишем соотношение между значениями потребления c^* и капитала k^* в стационарном равновесии, рассмотрев их как функции нормы сбережений s:

$$c^*(s) = (1 - s)f(k^*(s)) = f(k^*(s)) - \delta k^*(s),$$

где второе равенство следует из того, что в стационарном равновесии $sf(k) = \delta k$. Продифференцировав его по норме сбережений s (снова используя теорему о неявной функции), мы получаем следующее равенство:

$$\frac{\partial c^*(s)}{\partial s} = \left[f'\left(k^*(s)\right) - \delta\right]\frac{\partial k^*}{\partial s}. \tag{2.22}$$

Определим золотое правило для нормы сбережений s_{gold} как решение уравнения $\partial c^*(s_{gold})/\partial s = 0$, а соответствующее золотому правилу для нормы сбережений количество капитала обозначим k^*_{gold}. Значения потребления и нормы сбережений в стационарном равновесии и соотношение между ними показаны на рис. 2.6. Следующее утверждение показывает, что таким образом определенные значения s_{gold} и k_{gold} являются единственными.

Утверждение 2.4. *В базовой модели Солоу максимальное значение потребления в стационарном равновесии достигается при норме сбережений s^*_{gold}, которая соответствует количеству капитала в стационарном равновесии k^*_{gold}. При этом значение k^*_{gold} удовлетворяет условию:*

$$f'\left(k^*_{gold}\right) = \delta. \tag{2.23}$$

Доказательство. По определению золотого правила $\partial c^*(s_{gold})/\partial s = 0$. Из утверждения 2.3 следует, что $\partial k^*/\partial s > 0$, поэтому правая часть равенства (2.22) может быть равна нулю только в случае $f'(k^*(s_{gold})) = \delta$. Более того, можно показать, что если $f'(k^*(s_{gold})) = \delta$, то $\partial^2 c^*(s_{gold})/\partial s^2 < 0$, поэтому условие $f'(k^*(s_{gold})) = \delta$ действительно соответствует локальному

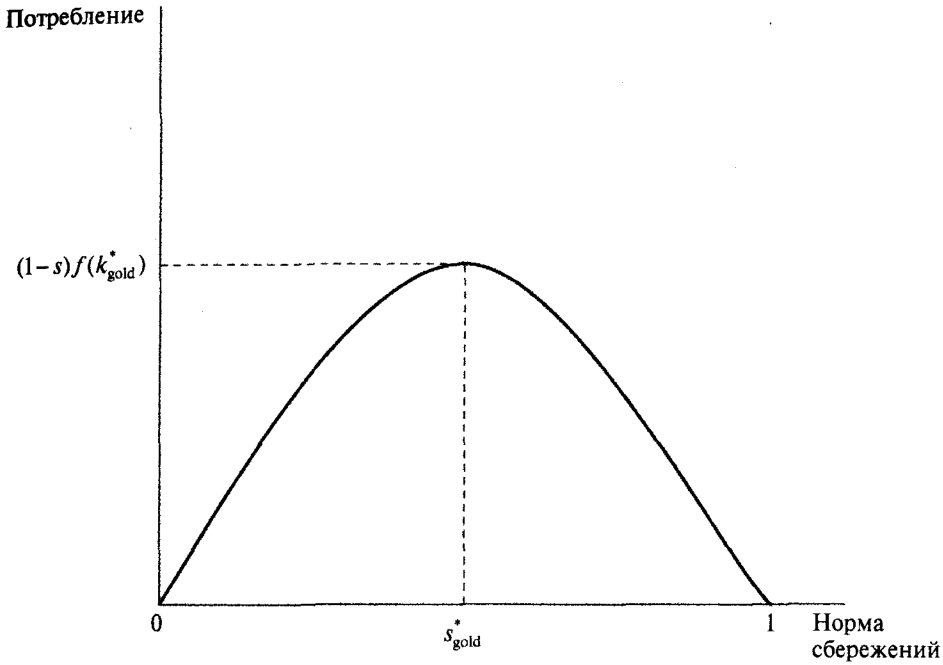


Рис. 2.6. Золотое правило для нормы сбережений и максимизация потребления в стационарном равновесии

максимуму. То, что оно является условием глобального максимума, вытекает из следующего утверждения. Для любого $s \in [0, 1]$ справедливо неравенство $\partial k^*/\partial s > 0$, более того, если $s < s_{\text{gold}}$, то в силу вогнутости функции f $f'(k^*(s)) - \delta > 0$, и поэтому $\partial c^*(s)/\partial s > 0$. Рассуждая аналогично, также нетрудно увидеть, что $\partial c^*(s)/\partial s < 0$ при $s > s_{\text{gold}}$. Поэтому равенство $f'(k^*(s)) = \delta$ выполняется при единственном значении нормы сбережений s_{gold}, при которой достигается глобальный максимум потребления в стационарном равновесии c^*. ■

Другими словами, существует единственное значение нормы сбережений s_{gold} и, соответственно, единственное значение капиталовооруженности экономики k^*_{gold}, задаваемое условием (2.23), которые максимизируют значение потребления в стационарном равновесии. Если количество капитала в экономике меньше, чем k^*_{gold}, увеличение нормы сбережений увеличивает потребление в стационарном равновесии, если же оно превышает k^*_{gold}, потребление в стационарном равновесии может быть увеличено за счет снижения нормы сбережений. Во втором случае уменьшение нормы сбережений ведет к росту потребления в силу того, что отношение капитала к труду слишком высоко, домохозяйства делают слишком много инвестиций и поэтому мало потребляют. В этом случае экономика является *динамически неэффективной*, мы обсудим этот феномен подробно в главе 9. Сейчас же, пока мы не ввели функцию полезности потребителей в явном виде, утверждение о неэффективности экономики следует воспринимать с известной долей предосторожности. Более того, причины, почему динамическая неэффективность такого типа не возникает в случае, когда решения потребителей о сбережениях и потреблении моделируются эндогенно, могут быть известны подготовленному читателю.

2.3. Переходная динамика в модели Солоу в дискретном времени

Утверждение 2.2 гарантирует существование и единственность стационарного равновесия с положительным выпуском в экономике. Однако напомним читателю, что понятие равновесия в экономике включает в себя не только стационарную точку, но и всю траекторию динамики капитала, выпуска, потребления и цен факторов производства начиная с начального момента времени. Это важно иметь в виду, так как термин «равновесие» используется в экономике не так, как в других научных дисциплинах. В инженерных науках и в физике равновесием называют стационарную точку динамической системы. Мы назвали такую точку «стационарным равновесием». У читателя может возникнуть искушение сказать, что экономика находится «вне равновесия» в случае, когда она отклоняется от стационарной точки. Однако в экономике поведение системы вне стационарной точки также подчиняется закону равенства спроса и предложения и является следствием оптимизационного поведения фирм и домохозяйств. Более того, большинство реальных экономик проводят значительную часть времени именно вне стационарного равновесия. Поэтому нас интересует вся равновесная траектория развития экономики, а не только ее стационарное состояние.

Чтобы определить, как выглядит равновесная траектория простой модельной экономики, которую мы изучаем, нам необходимо изучить переходную динамику равновесного разностного уравнения (2.17), начиная с произвольного значения капиталовооруженности экономики в начальный момент времени $k(0) > 0$. Нас особенно интересует ответ на вопрос о том, будет ли экономика сходиться к стационарному равновесию, стартуя с произвольного значения отношения капитала к труду, и какова будет ее динамика на траектории сходимости. Напомним, что суммарное количество капитала в начальный момент времени $K(0) > 0$ мы рассматриваем как переменную состояния, а количество трудовых ресурсов L — как фиксированную величину. Поэтому в момент времени $t = 0$ экономика начинает развиваться с произвольным начальным значением капиталовооруженности $k(0) = K(0)/L > 0$, а ее последующая динамика определяется разностным уравнением (2.17). Поэтому нам необходимо выяснить, будет ли уравнение (2.17) приводить экономику к единственному стационарному равновесию независимо от начального условия на отношение капитала к труду.

Прежде чем переходить к ответу на этот вопрос, напомним читателю основные определения и важнейшие результаты теории динамических систем. В приложении B содержится более подробное описание этих и ряда других результатов. Рассмотрим нелинейную систему автономных разностных уравнений:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)), \tag{2.24}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{G}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{R}$. Назовем $\mathbf{x}^*$ неподвижной точкой отображения $\mathbf{G}(\cdot)$, если

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{G}(\mathbf{x}^*).$$

Мы также будем называть $\mathbf{x}^*$ стационарной точкой разностного уравнения (2.24)[5]. В следующем определении вводится важное понятие устойчивости решения разностного уравнения.

Определение 2.4. *Стационарная точка разностного уравнения* (2.24) $\mathbf{x}^*$ *называется* локально асимптотически устойчивой, *если существует открытое множество* $B(\mathbf{x}^*)$, *содержащее* $\mathbf{x}^*$, *такое, что, для любого решения уравнения* (2.24) $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *из* $\mathbf{x}(0) \in B(\mathbf{x}^*)$ *следует* $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^*$ *при* $t \to \infty$. *Точка* $\mathbf{x}^*$ *называется глобально асимптотически устойчивой, если* $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^*$ *при* $t \to \infty$ *для любого решения уравнения* (2.24) $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *при любом* $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$.

В теореме 2.2 приведен основной результат теории устойчивости линейных разностных уравнений. Следующие теоремы являются частным случаем результатов, приведенных в приложении B.

Теорема 2.2. Об устойчивости систем линейных разностных уравнений. *Рассмотрим следующую систему линейных разностных уравнений:*

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}, \tag{2.25}$$

с начальным условием $\mathbf{x}(0)$, *где* $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ *для любого* t, $\mathbf{A}$ — *матрица* $n \times n$, $\mathbf{b}$ — *вектор* $n \times 1$. *Пусть* $\mathbf{x}^*$ — *стационарная точка системы разностных уравнений* (2.25), *то есть* $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{b}$. *Пусть все собственные значения матрицы* $\mathbf{A}$ *лежат строго внутри единичной окружности*

[5] В научной литературе используются различные термины для обозначения точки x*, например «равновесная точка» или «критическая точка». Так как в экономике эти термины зарезервированы за другими понятиями, мы по всей книге будем называть x* стационарной точкой.

на комплексной плоскости. Тогда стационарная точка системы уравнений (2.25) $\mathbf{x}^*$ *является глобально асимптотически устойчивой, то есть для любого* $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ *единственное решение* $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *удовлетворяет свойству* $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^*$ *при* $t \to \infty$.

К сожалению, этот результат неприменим к нелинейным системам и их анализ является более сложным. Однако имеет место следующая теорема о локальной устойчивости.

Теорема 2.3. О локальной устойчивости нелинейных систем разностных уравнений. *Рассмотрим следующую нелинейную автономную систему разностных уравнений:*

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)), \tag{2.26}$$

с начальным условием $\mathbf{x}(0)$, *где* $\mathbf{G}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. *Пусть* $\mathbf{x}^*$ *— стационарная точка этой системы, то есть* $\mathbf{G}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$. *Предположим, что оператор* $\mathbf{G}$ *дифференцируем по* $\mathbf{x}$. *Определим матрицу*

$$\mathbf{A} \equiv D\mathbf{G}(\mathbf{x}^*),$$

где $D\mathbf{G}$ *— матрица частных производных (якобиан) отображения* $\mathbf{G}$. *Предположим, что все собственные значения матрицы* $\mathbf{A}$ *лежат на комплексной плоскости строго внутри единичной окружности. Тогда стационарная точка системы разностных уравнений* (2.26) $\mathbf{x}^*$ *является локально асимптотически устойчивой, то есть существует открытая окрестность точки* $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}^*) \subset \mathbb{R}^n$, *такая, что для любого решения системы* (2.26), *удовлетворяющего* $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{B}(\mathbf{x}^*)$, $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^*$ *при* $t \to \infty$.

Непосредственным следствием теоремы 2.3 является следующий важный результат.

Следствие 2.1

1. *Пусть* $x(t)$, a, $b \in \mathbb{R}$. *Если* $|a| < 1$, *то единственное стационарное решение линейного разностного уравнения* $x(t+1) = ax(t) + b$ *является глобально асимптотически устойчивым, то есть* $x(t) \to x^* = b/(1-a)$ *при* $t \to \infty$.
2. *Пусть* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— функция, дифференцируемая в окрестности стационарной точки* x^*, *где* $g(x^*) = x^*$. *Предположим, что* $|g'(x^*)| < 1$. *Тогда стационарное решение нелинейного разностного уравнения* $x(t+1) = g(x(t))$ *является локально асимптотически устойчивым. Более того, если функция* g *является непрерывно дифференцируемой на всей числовой прямой* $\mathbb{R}$ *и* $|g'(x)| < 1$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$, *то стационарное решение* x^* *является глобально асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из теоремы 2.2. Локальная устойчивость g во втором утверждении следует из теоремы 2.3. Глобальная устойчивость следует из неравенства:

$$\left|x(t+1)-x^*\right| = \left|g(x(t))-g(x^*)\right| = \left|\int_{x^*}^{x(t)} g'(x)dx\right| < \left|x(t)-x^*\right|,$$

где второе равенство следует из фундаментальной теоремы математического анализа (теорема B.2 в приложении 2), а последнее неравенство использует предположение, что $|g'(x)| < 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Отсюда вытекает, что для любого $x(0) < x^*$ $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ является возрастающей последовательностью. Так как $|g'(x)| < 1$, x^* является единственным решением уравнения $x = g(x)$, и $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ограничена сверху значением x^*. Следовательно, последовательность $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ сходится к x^*. Аналогичные рассуждения можно провести и для случая $x(0) > x^*$. ■

Теперь мы можем применить следствие 2.1 к равновесному разностному уравнению модели Солоу (2.17) и убедиться в локальной устойчивости стационарного равновесия. Глобальная устойчивость не следует явным образом из следствия 2.1, так как аналог условия $|g'(x)| < 1$ для всех x не выполняется, но мы можем доказать это свойство немного изменив нашу аргументацию.

Утверждение 2.5. *Пусть предположения* 1 *и* 2 *выполнены. Тогда стационарное равновесие модели роста Солоу, описываемой уравнением* (2.17), *является глобально асимптотически устойчивым и капиталовооруженность экономики* $k(t)$ *монотонно сходится к* k^* *при любом начальном условии* $k(0) > 0$.

Доказательство. Введем функцию $g(k) \equiv sf(k) + (1-\delta)k$. Нетрудно убедиться, что $g'(k)$ определена и всегда строго положительна, то есть $g'(k) > 0$ для всех k. Из уравнения (2.17) следует, что уравнение

$$k(t+1) = g(k(t)) \tag{2.27}$$

имеет единственное стационарное решение k^*. Из уравнения (2.18) нетрудно увидеть, что оно удовлетворяет условию $\delta k^* = sf(k^*)$, что эквивалентно равенству

$$k^* = g(k^*). \tag{2.28}$$

Заметим, что по предположению 1 функция $f(\cdot)$ вогнута и дифференцируема, а по предположению 2 $f(0) = 0$. Для любой строго вогнутой и дифференцируемой функции f (см. факт А.23 в приложении А) справедливо неравенство:

$$f(k) > f(0) + kf'(k) = kf'(k). \tag{2.29}$$

В силу того что из равенства (2.29) вытекает $\delta = sf(k^*)/k^* > sf'(k^*)$, имеем $g'(k^*) = sf'(k^*) + 1 - \delta < 1$. Поэтому

$$g'(k^*) \in (0, 1).$$

Следствие 2.1 тогда гарантирует локальную устойчивость.

Для доказательства глобальной устойчивости заметим, что для любого $k(t) \in (0, k^*)$

$$k(t+1) - k^* = g(k(t)) - g(k^*) = -\int_{k(t)}^{k^*} g'(k)dk < 0,$$

где первое равенство получается вычитанием (2.28) из (2.27), второе равенство снова использует фундаментальную теорему математического анализа (теорема В.2), а неравенство следует из того, что $g'(k) > 0$ для всех k. Из условия (2.17) также следует, что

$$\frac{k(t+1) - k(t)}{k(t)} = s\frac{f(k(t))}{k(t)} - \delta > s\frac{f(k^*)}{k^*} - \delta = 0,$$

где неравенство является следствием монотонного убывания функции $f(k)/k$ по аргументу k (см. условие (2.29)), а последнее равенство — из определения стационарного равновесия в точке k^*. Из этих рассуждений следует, что для всех $k(t) \in (0, k^*)$, $k(t + 1) \in (k(t), k^*)$. Следовательно, $\{k(t)\}_{t=0}^{\infty}$ монотонно возрастает и ограничена сверху k^*. Более того, так как k^* является единственным стационарным равновесием (при $k > 0$), не существует других значений $k' \in (0, k^*)$, таких, что $k(t + 1) = k(t) = k'$ для любого t. Поэтому последовательность $\{k(t)\}_{t=0}^{\infty}$ монотонно сходится к k^*. Аналогичным образом нетрудно показать, что в случае $k(t) > k^*$ $k(t + 1) \in (k^*, k(t))$, что ведет к монотонной сходимости в случае $k(0) > k^*$. Глобальная устойчивость стационарного решения следует из двух утверждений выше. ■

Полученные нами результаты об устойчивости стационарного решения графически показаны на рис. 2.7. Начиная с произвольного начального значения капитала $k(0) > 0$, меньшего его значения в стационарном равновесии k^*, экономика растет. Этот процесс называется *углублением капитала*, что означает увеличение капиталовооруженности экономики. На фоне углубления капитала происходит рост дохода на душу населения. С другой стороны, если начальное значение капитала велико, $k'(0) > k^*$,

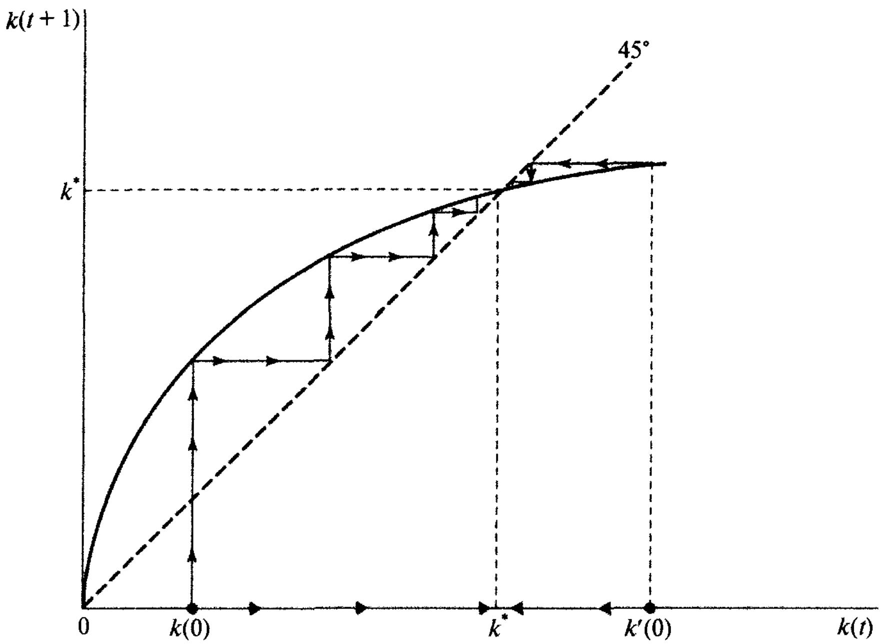


Рис. 2.7. Переходная динамика в базовой модели Солоу

экономика приходит к стационарному равновесию, сокращаясь, подушевой доход и капиталовооруженность падают, темп роста экономики оказывается отрицательным.

Следующее утверждение является естественным следствием утверждения 2.5.

Утверждение 2.6. *Допустим, что предположения* 1 *и* 2 *выполнены и* $k(0) < k^*$. *Тогда равновесная траектория заработной платы* $\{w(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *является возрастающей последовательностью, а равновесная траектория арендной стоимости капитала* $\{R(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *является убывающей последовательностью. В случае* $k(0) > k^*$ *верно противоположное утверждение: заработная плата является убывающей последовательностью, а арендная стоимость капитала — возрастающей.*

Доказательство. См. упражнение 2.9. ■

Из утверждения 2.5 следует, что в случае, если количество капитала в экономике в начальный момент времени мало по отношению к предложению труда, то отношение капитала к труду (капиталовооруженность) будет возрастать. Поэтому вследствие убывающей отдачи от капитала его предельный продукт будет сокращаться, а заработная плата будет расти. Аналогично, если экономика стартует со слишком большим количеством капитала на душу населения, оно будет сокращаться и в процессе ее развития заработная плата будет снижаться, а арендная стоимость капитала расти.

Наш анализ модели Солоу показывает, что она обладает рядом полезных свойств: единственность стационарного равновесия, глобальная асимптотическая устойчивость, а также простая и интуитивно понятная сравнительная статика модели. Однако в рассмотренной нами версии модели пока нет роста экономики. В стационарном равновесии капиталовооруженность экономики постоянна, расширения капитала не происходит и поэтому подушевой доход также оказывается постоянной величиной. Следовательно, экономический рост в базовой модели Солоу (без технологического прогресса) возможен лишь на переходной траектории, ведущей к стационарному равновесию (в случае $k(0) < k^*$). Конечно, такой рост не является устойчивым, со временем он замедляется и экономика перестает расти. В параграфе 2.7 мы введем технологический прогресс в модель Солоу и покажем, что в этом случае в ней возможен устойчивый рост. Однако прежде полезным будет сравнить формулировки модели в дискретном и непрерывном времени.

2.4. Модель Солоу в непрерывном времени

2.4.1. От разностных уравнений к дифференциальным уравнениям

Напомним, что периоды времени $t = 0, 1, \ldots$ в нашей постановке задачи могут обозначать дни, недели, месяцы или годы. В некотором смысле длина периода не имеет значения для полученных результатов. Поэтому может оказаться, что более удобно изучать модель, сделав период насколько возможно коротким, то есть перейти к непрерывному времени. Несмотря на то что в современной макроэкономике (за исключением теории роста) в основном используются модели в дискретном времени, большинство моделей теории роста формулируется в непрерывном времени. Формулировка модели в непрерывном времени обладает рядом преимуществ, так как некоторые аномальные выводы, получаемые в моделях с дискретным временем, неверны в такой формулировке (см. упражнение 2.21). Более того, модели в непрерывном времени оказываются более гибкими и удобными для анализа, что позволяет получить решение в явном виде при более широком множестве предположений. Эти факты являются главной причиной подробного изучения как дискретной версии базовой модели книги, так и ее версии в непрерывном времени.

Рассмотрим простое разностное уравнение:

$$x(t+1) - x(t) = g(x(t)). \tag{2.30}$$

Оно говорит о том, что абсолютное изменение переменной x между моментами времени t и $t + 1$ составляет $g(x(t))$. Представим, что период времени разделен на более короткие, чем утверждает наша индексация $t = 0, 1, \ldots$, промежутки. В пределе мы можем рассмотреть случай бесконечной делимости времени, так что $t \in \mathbb{R}_+$. В этом случае уравнение (2.30) предоставляет нам информацию лишь о том, как изменилась переменная x между двумя точками на оси времени, t и $t+1$. Какова была ее динамика между ними, нам остается неизвестным. Однако если эти t и $t+1$ не слишком далеко удалены друг от друга, разумной представляется следующая аппроксимация траектории переменной $x(t)$:

$$x(t+\Delta t)-x(t) \approx \Delta t \cdot g(x(t))$$

для любого значения $\Delta t \in [0, 1]$. В случае $\Delta t = 0$ это уравнение становится тривиальной тавтологией $0 = 0$. В случае $\Delta t = 1$ оно превращается в уравнение (2.30). В промежуточных случаях его можно рассматривать как линейную аппроксимацию. Ее точность зависит от длины промежутка времени между моментами t до $t+1$. Если она невелика, то есть $g(x) \approx g(x(t))$ для всех $x \in [x(t), x(t+1)]$, то аппроксимация точна (однако стоит понимать, что эта аппроксимация может быть очень неточной в случае, если функция g значительно нелинейна и ее поведение сильно изменяется между $x(t)$ и $x(t+1)$). Разделив обе части уравнения на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \dot{x}(t) \approx g(x(t)), \tag{2.31}$$

где, как и далее во всей книге, точка над символом переменной обозначает ее производную по времени, $\dot{x}(t) \equiv dx(t)/dt$. Уравнение (2.31) является дифференциальным уравнением, описывающим ту же динамику, что и разностное уравнение (2.30), в случае если промежуток времени между моментами t и $t+1$ мал.

2.4.2. Фундаментальное уравнение модели Солоу в непрерывном времени

В этом параграфе мы повторим предыдущий анализ для версии модели в непрерывном времени. Производственная структура экономики остается прежней, поэтому условия (2.6) и (2.7) для цен факторов производства сохраняются в том же виде, однако теперь они определяют моментальную арендную ставку. Например, переменная $w(t)$ обозначает потоковое значение заработной платы в момент времени t. Сбережения по-прежнему задаются условием:

$$S(t) = sY(t),$$

а потребление определяется аналогичным образом из условия (2.11).

На этом этапе мы можем ввести в модель рост населения в экономике. Предположим, что он идет по экспоненциальному закону, то есть

$$L(t) = \exp(nt)L(0). \tag{2.32}$$

Так как рост населения играет важную роль во многих моделях экономического роста, изучение вопроса о том, как он влияет на равновесную динамику в модели Солоу, является важной задачей. Заметим, что мы пока не вводим в модель технологический прогресс.

Для переменной $k(t)$, описывающей капиталовооруженность экономики,

$$k(t) \equiv \frac{K(t)}{L(t)},$$

справедливо следующее равенство:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - n,$$

где мы используем факт, что из условия (2.32) следует равенство $\dot{L}(t)/L(t) = n$. Рассуждая тем же образом, как и при выводе уравнения (2.21) в предыдущем параграфе, получаем следующий закон изменения количества капитала в экономике:

$$\dot{K}(t) = sF\left(K(t), L(t), A(t)\right) - \delta K(t).$$

Используя определение отношения капитала к труду $k(t)$ и свойство постоянной отдачи от масштаба для производственной функции, мы можем записать фундаментальное уравнение модели Солоу в непрерывном времени в следующей форме:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\frac{f(k(t))}{k(t)} - (n+\delta), \qquad (2.33)$$

где, используя стандартный подход, мы привели левую часть уравнения к пропорциональному изменению (темпу роста) капиталовооруженности экономики, разделив обе его части на $k(t)$[6].

Определение 2.5. Равновесная траектория *в базовой модели Солоу в непрерывном времени с ростом населения со скоростью n без технологического прогресса и с начальным значением* $K(0)$ *определяется как набор траекторий (последовательностей) капитала, труда, уровней выпуска и потребления, заработной платы и арендной стоимости капитала* $\left[K(t), L(t), Y(t), C(t), w(t), R(t)\right]_{t=0}^{\infty}$, *таких, что* $L(t)$ *удовлетворяет условию* (2.32), $k(t) \equiv K(t)/L(t)$ *удовлетворяет условию* (2.33), $Y(t)$ *задается уравнением* (2.1), $C(t)$ *— уравнением* (2.11), *а* $w(t)$ *и* $R(t)$ *— условиями* (2.6) *и* (2.7) *соответственно.*

[6] Далее мы будем обозначать непрерывную переменную $x(t)$ символом $\left[x(t)\right]_{t=0}^{\infty}$. В литературе также используется обозначение $(x(t);\ t \geq 0)$. Мы предпочтем первое, так как оно более компактно и более схоже с обозначением дискретной переменной $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Говоря о переменной $\left[x(t)\right]_{t=0}^{\infty}$, мы будем использовать термины «траектория», «последовательность» и «функция (от времени t)» взаимозаменяемо.

Как и ранее, определим стационарное равновесие как траекторию, на которой $k(t) = k^*$ для всех t.

Нетрудно убедиться, что равновесное дифференциальное уравнение (2.33) имеет единственное стационарное решение в точке k^*, которое задается небольшим изменением условия (2.18), учитывающим рост населения в модели:

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{n+\delta}{s}. \tag{2.34}$$

Таким образом, переход от дискретного времени к непрерывному не изменяет основных характеристик модели. Поэтому стационарное равновесие снова может быть представлено на диаграмме, аналогичной рис. 2.1, однако сейчас мы должны учесть рост населения в экономике. Это сделано на рис. 2.8, который позволяет убедиться в том, что логика стационарного равновесия одинакова в моделях с ростом населения и без него. Суммарные инвестиции $sf(k^*)$ используются для поддержания капиталовооруженности на постоянном уровне. Однако при наличии роста населения возникают две причины сокращения отношения капитала к труду. Во-первых, капитал изнашивается по экспоненциальному закону с моментальным темпом δ. Во-вторых, вдобавок к этому для поддержания капиталовооруженности на постоянном уровне количество капитала должно увеличиваться по мере увеличения населения в экономике. Поэтому количество капитала, необходимое для поддержания постоянного отношения капитала к труду, составляет $(n + \delta)k^*$.

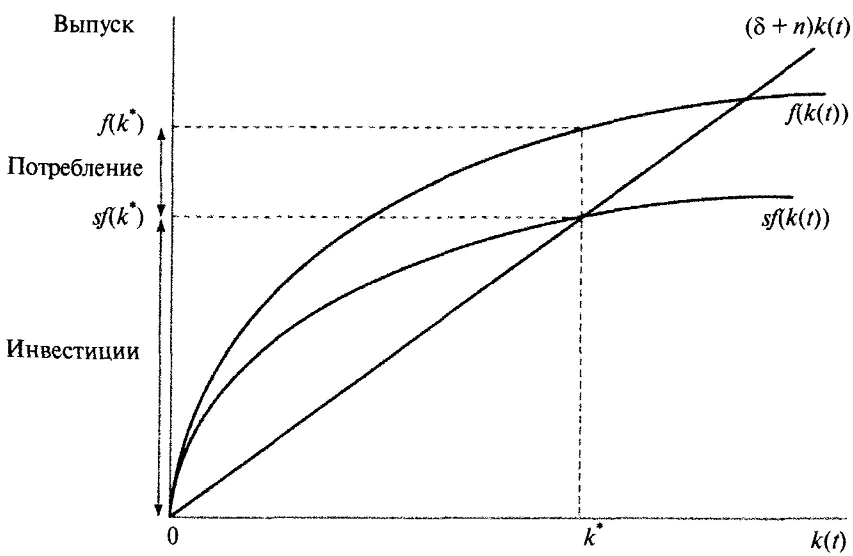


Рис. 2.8. Инвестиции и потребление в стационарном равновесии в модели с ростом населения

Утверждение 2.7. *Рассмотрим базовую модель Солоу в непрерывном времени и допустим, что предположения* 1 *и* 2 *выполнены. Тогда в ней существует единственное стационарное равновесие, в котором капиталовооруженность экономики* $k^* \in (0, \infty)$ *удовлетворяет условию* (2.34), *выпуск на душу населения задается уравнением:*

$$y^* = f(k^*),$$

а потребление на душу населения задается как

$$c^* = (1 - s)f(k^*).$$

Доказательство. См. упражнение 2.5. ■

Мы можем снова определить функцию $f(k)$ с помощью равенства $f(k) = A\tilde{f}(k)$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.8. *Пусть предположения* 1 *и* 2 *выполняются и* $f(k) = A\tilde{f}(k)$. *Обозначим значения капиталовооруженности экономики и уровня выпуска на душу населения в стационарном равновесии как* $k^*(A, s, \delta, n)$ *и* $y^*(A, s, \delta, n)$. *Тогда имеют место следующие неравенства:*

$$\frac{\partial k^*(A,s,\delta,n)}{\partial A} > 0, \quad \frac{\partial k^*(A,s,\delta,n)}{\partial s} > 0,$$

$$\frac{\partial k^*(A,s,\delta,n)}{\partial \delta} < 0, \quad \frac{\partial k^*(A,s,\delta,n)}{\partial n} < 0;$$

$$\frac{\partial y^*(A,s,\delta,n)}{\partial A} > 0, \quad \frac{\partial y^*(A,s,\delta,n)}{\partial s} > 0,$$

$$\frac{\partial y^*(A,s,\delta,n)}{\partial \delta} < 0, \quad \frac{\partial y^*(A,s,\delta,n)}{\partial n} < 0.$$

Доказательство. См. упражнение 2.6. ■

По сравнению с предыдущим упражнением по сравнительной статике (утверждение 2.3) новый результат состоит в том, что увеличение темпа роста населения n также снижает капиталовооруженность экономики и выпуск на душу населения в стационарном равновесии. Причина этого проста: более высокий темп роста населения приводит к тому, что в экономике оказывается больше трудовых ресурсов, использующих имеющееся количество капитала, который теперь накапливается медленнее и поэтому экономика оказывается в положении с более низким значением капиталовооруженности. Из этого результата следует, что страны с более высоким темпом роста населения будут иметь более низкий доход на душу населения (или на одного работника).

2.5. Переходная динамика в модели Солоу в непрерывном времени

Анализ переходной динамики и устойчивости стационарного равновесия в модели с непрерывным временем приводит к результатам, подобным полученным нами в параграфе 2.3, при этом, как мы отметили выше, в случае непрерывного времени вывод оказывается более простым. Вначале нам необходимо вспомнить основные результаты теории устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Как и ранее, подробности и доказательства приведены в приложении В.

Теорема 2.4. Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений. *Рассмотрим следующую систему линейных дифференциальных уравнений*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \tag{2.35}$$

с начальным условием $\mathbf{x}(0)$, *где* $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ *для любого* t, $\mathbf{A}$ — $n \times n$ *матрица, а* $\mathbf{b}$ — $n \times 1$ *вектор. Пусть* $\mathbf{x}^*$ — *стационарное решение системы* (2.35), *которое определяется равенством* $\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{b} = 0$. *Пусть все собственные значения матрицы* $\mathbf{A}$ *имеют отрицательную вещественную часть. Тогда стационарное решение системы дифференциальных уравнений* (2.35) $\mathbf{x}^*$ *глобально асимптотически устойчиво в том смысле, что для любого решения* (2.35) *с начальным условием* $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^*$ *при* $t \to \infty$.

Теорема 2.5. О локальной устойчивости систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. *Рассмотрим следующую нелинейную систему автономных дифференциальных уравнений:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)) \tag{2.36}$$

с начальным условием $\mathbf{x}(0)$, *где* $\mathbf{G}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. *Пусть* $\mathbf{x}^*$ — *стационарное решение системы* (2.36), *которое определяется равенством* $\mathbf{G}(\mathbf{x}^*) = 0$. *Предположим, что оператор* $\mathbf{G}$ *дифференцируем в точке* $\mathbf{x}^*$. *Определим матрицу* $\mathbf{A}$ *как*

$$\mathbf{A} \equiv D\mathbf{G}(\mathbf{x}^*),$$

и предположим, что все ее собственные значения имеют отрицательную вещественную часть. Тогда стационарное решение системы дифференциальных уравнений (2.36) $\mathbf{x}^*$ *локально асимптотически устойчиво в том смысле, что существует открытая окрестность* $\mathbf{B}(\mathbf{x}^*) \subset \mathbb{R}^n$ *точки* $\mathbf{x}^*$, *такая, что, для любого решения* $\mathbf{x}(t)$ *с начальным условием* $\mathbf{x}(0)$, *удовлетворяющим условию* $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{B}(\mathbf{x}^*)$, $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^*$ *при* $t \to \infty$.

Как и ранее, непосредственным следствием из этих теорем является следующее.

Следствие 2.2

1. *Рассмотрим вещественнозначную функцию $x(t)$. Тогда стационарное решение линейного дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = ax(t)$ является глобально асимптотически устойчивым (то есть $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$), если $a < 0$.*
2. *Пусть функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности точки x^*, которая является стационарным решением нелинейного дифференциального уравнения $\dot{x} = g(x(t))$, то есть $g(x^*) = 0$. Предположим, что $g'(x^*) < 0$. Тогда стационарное решение нелинейного дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = g(x(t))$, x^* является локально асимптотически устойчивым.*
3. *Пусть функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. Предположим, что $g(x^*) = 0$, а $g(x) < 0$ при всех $x > x^*$ и $g(x) > 0$ при всех $x < x^*$. Тогда стационарное решение нелинейного дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = g(x(t))$, x^*, является глобально асимптотически устойчивым, то есть для любого его решения с начальным условием $x(0)$, $x(t) \to x^*$.*

Доказательство. См. упражнение 2.10. ■

Заметим, что утверждение, аналогичное части 3 следствия 2.2, для дискретного времени не верно. Упражнение 2.21 иллюстрирует некоторые последствия этого замечания.

В свете вышеприведенных результатов справедливо следующее естественное обобщение утверждения 2.5 в непрерывном времени.

Утверждение 2.9. *Предположим, что выполняются предположения* 1 *и* 2. *Тогда стационарное равновесие базовой модели Солоу в непрерывном времени с постоянным темпом роста населения и отсутствием технологического прогресса является глобально асимптотически устойчивым и для любого $k(0) > 0$ функция $k(t)$ монотонно сходится к стационарному равновесию k^*.*

Доказательство. Доказательство устойчивости в данном случае проще, чем для утверждения 2.5 и следует непосредственно из третьей части следствия 2.2. Действительно, нетрудно увидеть, что если $k < k^*$, то $sf(k) - (n + \delta)k > 0$, а в случае $k > k^*$ имеем $sf(k) - (n + \delta)k < 0$. ■

Рис. 2.9 иллюстрирует графический анализ устойчивости равновесия. На нем представлен график правой части уравнения (2.33). Нетрудно убедиться, что при $k < k^*$ $\dot{k} > 0$, а при $k > k^*$ $\dot{k} < 0$, из чего следует, что капиталовооруженность экономики монотонно сходится к стационарному равновесию k^*.

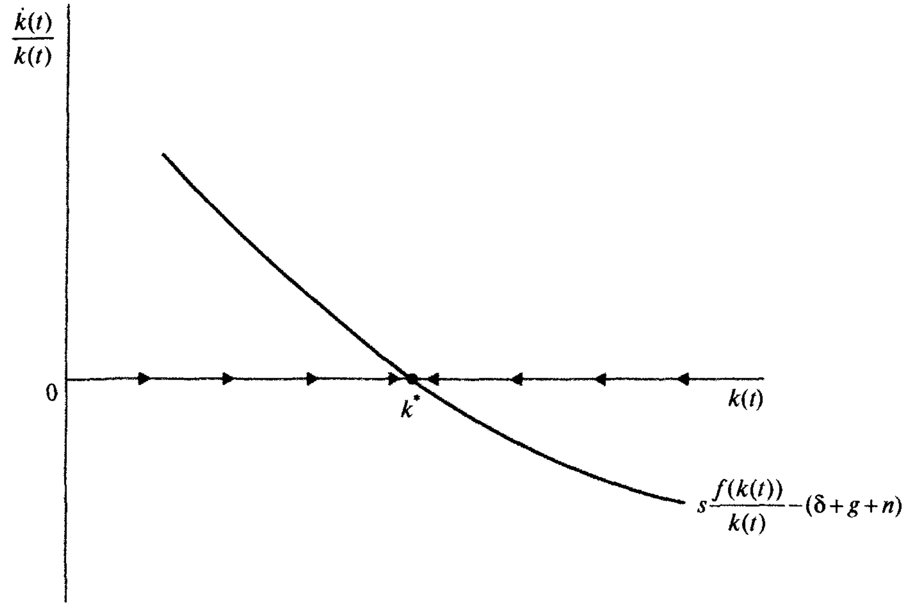


Рис. 2.9. Динамика капиталовооруженности экономики в базовой модели Солоу

Пример 2.2 (динамика экономики с производственной функцией Кобба—Дугласа). Рассмотрим производственную функцию Кобба—Дугласа, которую мы ввели в примере 2.1:

$$F(K, L, A) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \text{ где } 0 < \alpha < 1.$$

Как мы заметили выше, функция Кобба—Дугласа является во многом специальной, в основном в силу того, что она обладает свойством единичной эластичности замещения между трудом и капиталом. Определим эластичность замещения между факторами для гомотетичной производственной функции $F(K, L)$ как

$$\sigma \equiv -\left[\frac{\partial \log(F_K/F_L)}{\partial \log(K/L)}\right]^{-1}, \tag{2.37}$$

где F_K и F_L обозначают предельный продукт капитала и труда (функция F называется гомотетичной, если отношение F_K/F_L является функцией лишь от отношения K/L). Для функции Кобба—Дугласа $F_K/F_L = \alpha L/((1-\alpha)K)$, и поэтому $\sigma = 1$. Из этого следует, что в случае если производственная функция есть функция Кобба—Дугласа и рынки факторов производства конкурентны, равновесные доли дохода факторов производства в выпуске будут постоянны и не зависят от отношения капитала к труду K/L. Действительно, доля дохода капитала в национальном доходе равна:

$$\alpha_K(t) = \frac{R(t)K(t)}{Y(t)} = \frac{F_K(K(t), L(t))K(t)}{Y(t)} = \frac{\alpha AK(t)^{\alpha-1}L(t)^{1-\alpha}K(t)}{AK(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}} = \alpha.$$

Аналогичным образом нетрудно показать, что для доли труда в национальном доходе справедливо равенство $\alpha_L(t) = 1 - \alpha$. Таким образом, при единичной эластичности замещения между факторами при росте капитала его предельный продукт уменьшается пропорционально, что оставляет долю дохода капитала (количество капитала, помноженное на его предельный продукт) неизменной.

Напомним, что при производственной технологии типа Кобба—Дугласа производственная функция на душу населения задается как $f(k) = Ak^{\alpha}$, и в стационарном равновесии (с темпом роста населения n) из условия (2.34) следует равенство:

$$A(k^*)^{a-1} = \frac{n+\delta}{s},$$

или

$$k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\alpha-1},$$

которое является простым выражением для капиталовооруженности экономики в стационарном равновесии. Из него следует, что k^* является возрастающей функцией s и A и убывающей функцией n и δ (что естественным образом соответствует результату, полученному в утверждении 2.8). Более того, значение k^* возрастает по α, так как большее значение параметра α означает меньшую степень убывания отдачи от капитала, и поэтому для снижения средней отдачи от капитала до уровня, согласующегося со стационарным равновесием, задаваемого условием (2.34), требуется большее значение отношения капитала к труду.

Переходная динамика в случае производственной функции Кобба—Дугласа также довольно проста. В частности,

$$\dot{k}(t) = sAk(t)^{\alpha} - (n + \delta)k(t)$$

с начальным условием $k(0) > 0$. Для решения этого уравнения введем переменную $x(t)$ как $x(t) \equiv k(t)^{1-\alpha}$. Тогда равновесный закон для динамики капиталовооруженности экономики может быть переписан в терминах переменной $x(t)$ следующим образом:

$$\dot{x}(t) = (1-\alpha)sA - (1-\alpha)(n+\delta)x(t).$$

Общее решение этого линейного дифференциального уравнения выглядит как

$$x(t) = \frac{sA}{n+\delta} + \left[x(0) - \frac{sA}{n+\delta}\right]\exp(-(1-\alpha)(n+\delta)t)$$

(см. приложение B). Переходя назад к капиталовооруженности $k(t)$, имеем равенство:

$$k(t) = \left\{\frac{sA}{n+\delta} + \left[k(0)^{1-\alpha} - \frac{sA}{n+\delta}\right]\exp(-(1-\alpha)(n+\delta)t)\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Из вида решения следует, что для любого начального значения капиталовооруженности экономики $k(0)$ на равновесной траектории $k(t) \to k^* = (sA/(n + \delta))^{1/(1-\alpha)}$ при $t \to \infty$, а значение скорости сходимости связано со значением выражения $(1 - \alpha)(n + \delta)$. Более точно, расстояние между $k(0)$ и стационарной точкой k^* сокращается экспоненциально с темпом $(1-\alpha)(n+\delta)$. Этот результат интуитивен: большее значение параметра α означает меньшую степень убывания отдачи от капитала, что замедляет темпы убывания предельного и среднего продуктов капитала по мере его накопления и поэтому снижает скорость сходимости к стационарному равновесию. Подобным образом, меньшее значение амортизации δ означает меньший износ капитала, а меньшее значение параметра n — более медленный рост населения. Оба этих фактора замедляют динамику отношения капитала к труду и, соответственно, скорость сходимости к стационарному равновесию. ■

Пример 2.3 (производственная функция с постоянной эластичностью замещения). Производственная функция Кобба—Дугласа, обладающая свойством единичной эластичности замещения между факторами производства, является частным случаем производственной функции с постоянной эластичностью замещения (ПЭЗ), впервые введенной в работе [Arrow et. al. 1961]. Эта производственная функция имеет постоянную эластичность замещения, не обязательно равную единице. Рассмотрим векторнозначную функцию индекса технологии $A(t) = (A_H(t), A_K(t), A_L(t))$. Тогда ПЭЗ функция может быть введена как

$$Y(t) = F\big(K(t), L(t), A(t)\big) \equiv$$
$$\equiv A_H(t)\left[\gamma(A_K(t)K(t))^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\gamma)(A_L(t)L(t))^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad (2.38)$$

где $A_H(t) > 0$, $A_K(t) > 0$ и $A_L(t) > 0$ являются тремя различными типами технологический изменений, которые подробно обсуждаются в параграфе 2.7; $\gamma \in (0, 1)$ — параметр, который определяет относительную значимость капитала и трудовых ресурсов в производстве конечного товара, а $\sigma \in [0, \infty]$ является эластичностью замещения между трудом и капиталом. Чтобы убедиться, что параметр σ действительно является эластичностью замещения, используем ее определение (2.37). Отношение предельного продукта капитала к предельному продукту труда F_K/F_L задается как

$$\frac{F_K}{F_L} = \frac{\gamma A_K(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} K(t)^{-\frac{1}{\sigma}}}{(1-\gamma)A_L(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} L(t)^{-\frac{1}{\sigma}}},$$

и поэтому эластичность замещения равна σ:

$$\sigma = -\left[\frac{\partial \log(F_K/F_L)}{\partial \log(K/L)}\right]^{-1}.$$

Производственная функция с постоянной эластичностью замещения часто используется экономистами, так как она является более общей и гибкой, чем функция Кобба—Дугласа, но при этом остается простой с точки зрения технического анализа. При $\sigma \to 1$ производственная функция ПЭЗ (2.38) становится функцией Кобба—Дугласа:

$$Y(t) = A_H(t)(A_K(t))^{\gamma}(A_L(t))^{1-\gamma}(K(t))^{\gamma}(L(t))^{1-\gamma}.$$

При $\sigma \to \infty$ функция ПЭЗ становится линейной, а именно:

$$Y(t) = \gamma A_H(t)A_K(t)K(t) + (1-\gamma)A_H(t)A_L(t)L(t).$$

Наконец, при $\sigma \to 0$ она сходится к леонтьевской производственной функции, в которой факторы производства являются дополняющими и замещение между ними отсутствует:

$$Y(t) = A_H(t)\min\{\gamma A_K(t)K(t); (1-\gamma)A_L(t)L(t)\}.$$

Особое свойство леонтьевской производственной функции состоит в том, что, если $\gamma A_K(t)K(t) \neq (1-\gamma)A_L(t)L(t)$, один из двух факторов производства будет отчасти незанятым в том смысле, что небольшое изменение количества труда или капитала не повлияет на общий выпуск и цены факторов производства. В упражнении 2.23 показан ряд свойств производственной функции ПЭЗ, а в упражнении 2.16 приведен альтернативный метод вывода этой производственной функции в духе оригинальной работы [Arrow et. al. 1961]. Стоит отметить, что при $\sigma > 1$ вид производственной функции ПЭЗ (2.38) не согласуется с предположением 1 (см. упражнение 2.24). Поэтому в контексте производственной функции, имеющей капитал и труд как свои аргументы, мы будем накладывать условие $\sigma \leq 1$ в качестве базового предположения. ■

2.6. Первый взгляд на устойчивый экономический рост

Способна ли модель Солоу сгенерировать устойчивый экономический рост без технологического прогресса? Ответ на этот вопрос утвердительный, но только в случае, если мы откажемся от ряда предположений, сделанных выше. Пример производственной функции Кобба—Дугласа (пример 2.2) уже убедил нас в том, что, если параметр α близок к единице, процесс достижения капиталовооруженностью и выпуском стационарного состояния может оказаться очень долгим, а очень медленное движение к стационарному состоянию намного больше похоже именно на устойчивый рост экономики, а не на краткосрочную переходную динамику. В действительности самая простая модель устойчивого экономического роста фактически полагает значение $\alpha = 1$ в терминах производственной функции Кобба—Дугласа. Для построения такой модели нам необходимо отказаться от предположений 1 и 2 (которые не позволяют равенство $\alpha = 1$) и рассмотреть так называемую AK-модель, в которой производственная функция имеет следующий вид:

$$F(K(t), L(t), A(t)) = \mathrm{AK}(t) \tag{2.39}$$

и константа $A > 0$. Все результаты, полученные ниже, справедливы и для более общего вида производственной функции с постоянной отдачей от масштаба, нарушающей предположение 2, например для функции следующего вида:

$$F(K(t), L(t), A(t)) = AK(t) + BL(t) \tag{2.40}$$

Несмотря на это, использование функции типа (2.39) позволяет показать основные выводы из модели более просто, поэтому мы рассмотрим ее, а анализ функции типа (2.40) оставим в качестве упражнения (см. упражнение 2.22).

Как и ранее, продолжим предполагать, что население растет с постоянным темпом n (см. условие (2.32)). Объединяя это предположение с производственной функцией (2.39), нетрудно получить следующий фундаментальный закон накопления капитала:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = sA - \delta - n.$$

Из этого уравнения легко убедиться в том, что в случае, если параметры модели удовлетворяют неравенству $sA - \delta - n > 0$, в экономике будет происходить устойчивый рост отношения капитала к труду и, вследствие этого, выпуска на душу населения. Этот результат описывается в следующем утверждении.

Утверждение 2.10. *Рассмотрим модель Солоу с производственной функцией* (2.39). *Пусть* $sA - \delta - n > 0$. *Тогда в равновесии выпуск на душу населения в экономике будет устойчиво расти с темпом* $sA - \delta - n$. *В частности, при начальном значении капиталовооруженности* $k(0) > 0$, *равновесные траектории отношения капитала к труду и выпуска на душу населения имеют вид:*

$$k(t) = \exp\left((sA - \delta - n)t\right)k(0)$$

и

$$y(t) = \exp\left((sA - \delta - n)t\right)Ak(0).$$

Это утверждение не только демонстрирует возможность устойчивого роста, но также показывает, что в случае производственной функции типа (2.39) выход на траекторию устойчивого роста происходит минуя переходную динамику. Экономика всегда растет с темпом $sA - \delta - n$ независимо от начального значения капиталовооруженности. Рис. 2.10 показывает равновесие в модели графически.

Вправе ли мы рассматривать АК модель как привлекательный и оправданный подход для объяснения устойчивого роста в мировой экономике? Несмотря на то что простота является ее преимуществом, модель обладает рядом недостатков. Во-первых, она предполагает граничный случай производственной функции, не удовлетворяющий предположениям 1 и 2; а именно она рассматривает производственную функцию, линейную по капиталу. Во-вторых, из этого следует, что по мере течения времени доля дохода капитала в национальном доходе увеличивается и стремится

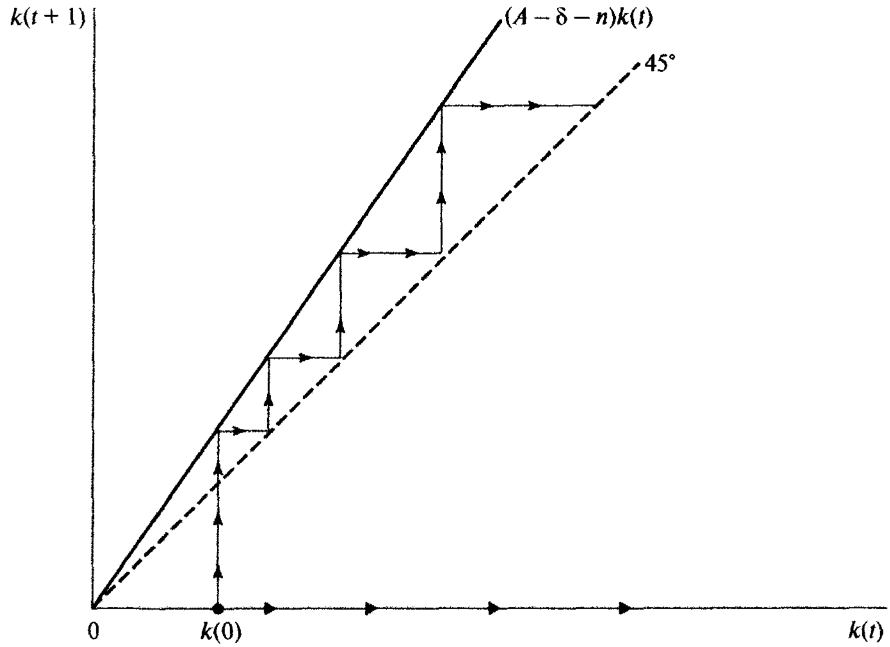


Рис. 2.10. Устойчивый рост с линейной АК технологией и $sA - \delta - n > 0$

к единице (если она не была равна 1 в начальный момент). В следующем параграфе мы покажем, что это тенденция не присутствует в реальных экономических данных. Наконец, важнейшим недостатком модели является отсутствие в ней технологического прогресса, хотя мы имеем большое количество эмпирических свидетельств того, что именно технологический прогресс является одним из основных (и возможно самым значительным) факторов устойчивого экономического роста. Модель роста без технологического прогресса не в состоянии описать влияние этого ключевого фактора экономического роста. Используя вышесказанное как мотивацию, в следующем параграфе мы введем в базовую модель Солоу технологический прогресс.

2.7. Модель Солоу с технологическим прогрессом

2.7.1. Сбалансированный рост

До сих пор мы рассматривали модель без технологического прогресса. Для отражения изменений в технологических возможностях экономики мы будем использовать переменную $A(t)$, ее рост будет означать улучшение технологий и накопление знаний в экономике. Нет никаких сомнений в том, что сегодня общество может производить намного больше различных товаров и услуг, чем в прошлом, более того, оно может делать это намного эффективней. Доступные нам производственные технологии значительно улучшились за последние 200 лет, не говоря о временном промежутке в 1000 или 10 000 лет. Поэтому логичным представляется ввести в модель возможность технологического прогресса.

Основной вопрос, на который нам необходимо ответить, заключается в том, каким образом мы должны моделировать влияние изменений переменной $A(t)$ на агрегированную производственную функцию. Стандартный подход состоит в наложении ограничений на тип технологического прогресса (и его влияние на агрегированную производственную функцию) так, что равновесное распределение ресурсов оказывается согласованным с траекторией сбалансированного роста, как она определяется так называемыми фактами Калдора [Kaldor 1963]. Н. Калдор заметил, что, хотя выпуск на душу населения в большинстве стран мира растет, такие показатели, как отношение капитала к труду, процентная ставка и распределение дохода между трудом и капиталом, остаются постоянными. Например, на рис. 2.11 показана динамика долей дохода капитала и труда в национальном доходе в США. Во всей книге под траекторией сбалансированного роста мы будем понимать траекторию развития экономики, на которой выпуск растет с постоянным темпом, а отношение капитала к выпуску, процентная ставка и доли факторов производства в национальном доходе остаются постоянными (очевидно, что из трех вышеперечисленных свойств следует четвертое).

Рис. 2.11. Доли дохода капитала и труда в ВВП США

Рис. 2.11 показывает, что, несмотря на значительные флуктуации, динамика долей труда и капитала не имеет выраженного тренда. Более того, эмпирические свидетельства говорят об отсутствии выраженного тренда в динамике процентных ставок на долгосрочном временном горизонте (см., например, работу: [Homer, Sylla 1991]). Эти наблюдения, а также постоянство отношения капитала к выпуску до 1970-х гг., привело многих экономистов к мысли о предпочтительности моделей, обладающих траекторией сбалансированного роста. Однако стоит отметить, что доля капитала в национальном доходе и отношение капитала к выпуску не являются в точности постоянными. Например, начиная с 1970-х гг. и доля капитала в доходе, и отношение капитала к выпуску могли увеличиваться, если судить по некоторым методам измерения этих показателей. Несмотря на это, предположение о постоянстве долей факторов производства и отношения капитала к выпуску является хорошей аппроксимацией реальных данных и подходящей начальной точкой для нашего анализа.

Из рис. 2.11 также нетрудно увидеть, что доля дохода капитала в национальном доходе составляет около $^1/_3$, а доля трудовых доходов — около $^2/_3$. Мы будем использовать этот факт в нашем дальнейшем анализе. Эти оценки игнорируют долю доходов землевладельцев, так как в современной экономике земля не является важным фактором производства (хотя это утверждение не было верно в исторической перспективе и неверно даже сейчас для менее развитых экономик). Упражнение 2.11 показывает, как включение земли как производственного фактора влияет на наш анализ. Отмеченное выше распределение дохода между факторами производства вкупе с желанием многих экономистов работать с простыми моделями стало причиной выбора производственной функции Кобба—Дугласа вида $AK^{1/3}L^{2/3}$ как стандарта во многих макроэкономических моделях (основная причина такого выбора в том, что данный вид функции гарантирует постоянные доли капитала и труда, равные $^1/_3$ и $^2/_3$). Однако, как показывает теорема 2.6 ниже, производственная функция Кобба—Дугласа не является необходимым условием сбалансированного роста. Более того, как мы уже заметили в примере 2.2, вид функции Кобба—Дугласа является частным случаем и часто ограничивает анализ модели.

Еще одним важным преимуществом моделей с траекторией сбалансированного роста является значительно более простой анализ их динамики по сравнению с моделями, не обладающими такой траекторией. Эта простота является следствием того, что при наличии траектории сбалансированного роста, уравнение, которое определяет динамику модели, при некоторой трансформации переменных является разностным или дифференциальным уравнением с хорошо определенной стационарной точкой (траектория сбалансированного роста будет определяться условием $\dot{k} = 0$, однако переменная k будет определена несколько иным образом). Это позволит нам применять для анализа моделей экономического роста методы анализа автономных систем. Однако при этом стоит помнить, что в реальности экономический рост мировой экономики обладает рядом характеристик, не присущих сбалансированной траектории. Например, доли различных секторов систематически изменяются в процессе роста: доля сельского хозяйства сокращается, доля промышленности сначала возрастает, а затем сокращается. Наша конечная цель состоит в построении модели, которая соединит движение по сбалансированной траектории с этими чертами структурной трансформации экономики. Мы вернемся к этим вопросам в части VII данной книги.

2.7.2. Типы нейтрального технологического прогресса

Какие ограничения накладывает на модель требование наличия траектории сбалансированного роста? Оказывается, что таких ограничений довольно много. Общий вид производственной функции $F(K(t), L(t), A(t))$ оказывается слишком широким для достижения сбалансированной траектории и лишь только несколько специальных видов производственной функции согласуются со сбалансированным ростом экономики в равновесии. Чтобы убедиться в этом, возьмем производственную функцию $\tilde{F}$ и рассмотрим несколько типов нейтрального технологического прогресса. Одним вариантом является следующий:

$$\tilde{F}\big(K(t), L(t), A(t)\big) = A(t)F\big(K(t), L(t)\big)$$

с некоторой функцией F с постоянной отдачей от масштаба. Эта функциональная форма предполагает, что технологическая переменная A является мультипликативным множителем перед некоторой квазипроизводственной функцией F. Такой тип технологического прогресса называют нейтральным по Хиксу по имени известного британского экономиста Джона Хикса. Он графически демонстрируется на рис. 2.12. На рисунке изображены изокванты функции $\tilde{F}\big(K(t), L(t), A(t)\big)$, то есть пары значений труда и капитала, соответствующих заданному значению выпуска при фиксированном значении переменной $A(t)$. Нейтральный по Хиксу технологический прогресс, показанный на первой диаграмме, состоит в гомотетичном сдвиге изокванты к началу координат без изменения ее формы.

Другой альтернативой является капиталоинтенсивный, или нейтральный по Солоу, технологический прогресс. Функционально этот тип технологического прогресса может быть представлен как

$$\tilde{F}\big(K(t), L(t), A(t)\big) = F\big(A(t)K(t), L(t)\big).$$

Название «капиталоинтенсивный» следует из того, что технологический прогресс в данном случае эквивалентен увеличению количества капитала в экономике. На рис. 2.12 этот тип технологического прогресса соответствует пропорциональному сдвигу изокванты вдоль оси K или укрупнению ее масштаба без сдвига изокванты (так как увеличение значения переменной A в данном случае соответствует увеличению количества эффективного капитала в экономике). Это показано на диаграмме В на рис. 2.12 для случая удвоения переменной $A(t)$.

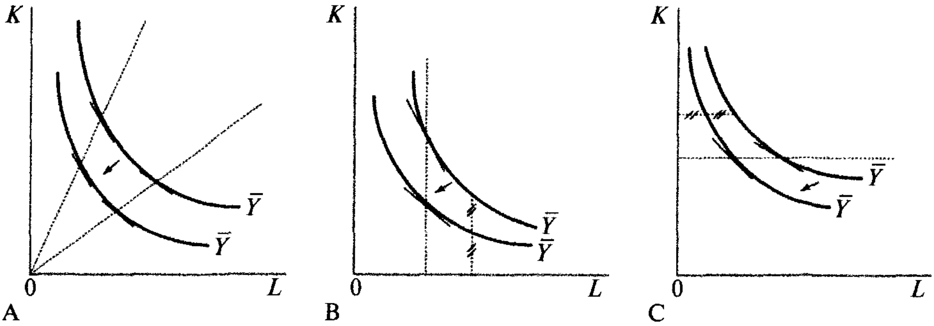


Рис. 2.12. (A) нейтральный по Хиксу, (B) нейтральный по Солоу, (C) нейтральный по Харроду сдвиг изоквант производственной функции

Заключительным случаем является нейтральный по Харроду технологический прогресс (диаграмма С на рис. 2.12), названный по имени Роя Харрода (мы уже знакомы с его именем после упоминания модели Харрода—Домара). Функционально он может быть представлен как

$$\tilde{F}(K(t), L(t), A(t)) = F[K(t), A(t)L(t)].$$

Эта функциональная форма подразумевает, что увеличение технологической переменной $A(t)$ увеличивает выпуск в экономике, так как если бы в ней было больше трудовых ресурсов и поэтому соответствует пропорциональному сдвигу изокванты вдоль оси L (рис. 2.12). Примерная форма такого сдвига показана на третьей диаграмме на рис. 2.12 для случая удвоения переменной $A(t)$.

Очевидно, что в реальности технологические изменения могут быть комбинацией вышеописанных типов технологического прогресса, и для описания производственной функции мы можем ввести векторнозначную переменную $\mathbf{A}(t) = (A_H(t), A_K(t), A_L(t))$, описывающую технологии. Производственная функция тогда может быть записана как

$$\tilde{F}(K(t), L(t), \mathbf{A}(t)) = A_H(t)F[A_K(t)K(t), A_L(t)L(t)]. \qquad (2.41)$$

Такой вид производственной функции включает в себя производственную функцию ПЭЗ из примера 2.3 как частный случай. Необходимо понимать, что довольно общий вид производственной функции (2.41) продолжает накладывать ограничения на тип технологического прогресса, так как в общем случае он может изменять саму структуру функции.

Несмотря на то что все показанные выше типы технологического прогресса ex-ante выглядят одинаково приемлемыми для описания реальности, далее мы убедимся в том, что лишь трудоинтенсивный нейтральный по Харроду технологический прогресс согласуется с наличием траектории сбалансированного роста. Этот результат является довольно неожиданным, особенно потому что у нас нет убедительных причин думать, что технологический прогресс должен быть того или иного типа. Мы вернемся к обсуждению того, почему долгосрочные изменения в технологии могут быть нейтральными по Харроду, в главе 15.

2.7.3. Теоремы Узавы

Выводы из предыдущей части подсказывают, что постоянство долей факторов производства в национальном доходе и отношения капитала к выпуску $K(t)/Y(t)$ являются ключевыми элементами траектории сбалансированного роста. Доли капитала и труда в национальном доходе задаются следующими соотношениями:

$$\alpha_K(t) \equiv \frac{R(t)K(t)}{Y(t)} \text{ и } \alpha_L(t) \equiv \frac{w(t)L(t)}{Y(t)}.$$

Из предположения 1 и теоремы 2.1 следует, что $\alpha_K(t) + \alpha_L(t) = 1$.

Следующая версия теоремы, приведенной ниже, была впервые доказана ведущим специалистом в теории экономического роста Хирофуми Узавой [Uzawa 1961]. Ее утверждение и доказательство, приведенное нами, базируется на аргументации из работы [Shlicht 2006]. Теорема показывает, что предположение о постоянных темпах роста выпуска, капитала и потребления вместе с постоянной отдачей от масштаба ведет к тому, что агрегированная производственная функция должна иметь вид, соответствующий нейтральному по Харроду технологическому прогрессу. Для простоты и без ограничения общности мы рассмотрим только случай модели в непрерывном времени.

Теорема 2.6. Первая теорема Узавы. *Рассмотрим модель экономического роста с агрегированной производственной функцией вида*:

$$Y(t) = \tilde{F}\left(K(t), L(t), \tilde{A}(t)\right),$$

где функция $\tilde{F}: \mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$, *а переменная* $\tilde{A}(t) \in \mathcal{A}$ *представляет технологию в момент времени* t, *и* $\mathcal{A}$ *— некоторое произвольное подмножество* $\mathbb{R}^N$ *для натурального числа* N. *Предположим, что функция* $\tilde{F}$

обладает свойством постоянной отдачи от масштаба по переменным K и L. Совокупное ресурсное ограничение в экономике выглядит как

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - \delta K(t).$$

Допустим, что население растет с постоянным темпом n, т.е. $L(t) = \exp(nt)L(0)$ и существует константа $T < \infty$, такая, что для всех $t \geq T$ $\dot{Y}(t)/Y(t) = g_Y > 0$, $\dot{K}(t)/K(t) = g_K > 0$, $\dot{C}(t)/C(t) = g_C > 0$. Тогда

1. $g_Y = g_K = g_C$ *и*
2. *для всех $t \geq T$ существует однородная степени 1 функция $F : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$, такая, что, агрегированная производственная функция может быть представлена в виде:*

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)),$$

где $A(t) \in \mathbb{R}_+$ и

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g = g_Y - n.$$

Доказательство. (Часть 1). Из предположения теоремы для всех $t \geq T$ справедливы равенства $Y(t) = \exp(g_Y(t - T))Y(T)$, $K(t) = \exp(g_K(t - T))K(T)$ и $L(t) = \exp(n(t - T))L(T)$. Так как $\dot{K}(t) = g_K K(t)$, из агрегированного ресурсного ограничения в момент t вытекает уравнение:

$$(g_K + \delta)K(t) - Y(t) - C(t).$$

Разделив обе части этого равенства на $\exp(g_K(t - T))$, получаем

$$(g_K + \delta)K(T) = \exp((g_Y - g_K)(t - T))Y(T) - \exp((g_C - g_K)(t - T))C(T)$$

для всех $t \geq T$. Дифференцируя это уравнение по времени, находим, что

$$(g_Y - g_K)\exp((g_Y - g_K)(t - T))Y(T) - \\ - (g_C - g_K)\exp((g_C - g_K)(t - T))C(T) = 0$$

для всех $t \geq T$. Это уравнение справедливо для всех t, если выполняется любое из следующих четырех условий: (i) $g_Y = g_K = g_C$, (ii) $g_Y = g_C$ и $Y(T) = C(T)$, (iii) $g_Y = g_K$ и $C(T) = 0$ или (iv) $g_C = g_K$ и $Y(T) = 0$. Последние три условия противоречат предположениям, что $g_K > 0$, $g_C > 0$ (это подразумевает, что $C(T) > 0$ и $K(T) > 0$ и, следовательно, $Y(T) > C(T)$), и $Y(T) > 0$ соответственно. Поэтому должно выполняться условие (i), что означает $g_Y = g_K = g_C$, что утверждается в теореме.

(Часть 2). Для любого $t \geq T$ агрегированная производственная функция для момента времени T может быть записана как

$$\exp(-g_Y(t - T))Y(t) = \tilde{F}\left[\exp(-g_K(t - T))K(t), \exp(-n(t - T))L(t), \tilde{A}(T)\right].$$

Умножая обе части этого уравнения на $\exp(g_Y(t-T))$ и воспользовавшись свойством постоянной отдачи от масштаба для функции $\tilde{F}$, получаем:

$$Y(t)=\tilde{F}\left[\exp((t-T)(g_Y-g_K))K(t),\exp((t-T)(g_Y-n))L(t),\tilde{A}(T)\right].$$

Из части 1 доказательства имеем $g_Y=g_K$ и поэтому для всех $t\geq T$ получаем:

$$Y(t)=\tilde{F}\left[K(t),\exp((t-T)(g_Y-n))L(t),\tilde{A}(T)\right]. \tag{2.42}$$

Так как уравнение (2.42) выполняется для всех $t\geq T$ и функция $\tilde{F}$ является однородной степени 1 по K и L, существует однородная степени 1 функция $F:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}_+$, такая, что

$$Y(t)=F\left(K(t),\exp((g_Y-n)t)L(t)\right).$$

Это равенство можно переписать в форме:

$$Y(t)=F\left(K(t),A(t)L(t)\right),$$

при

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}=g_Y-n. \blacksquare$$

Важной особенностью этой теоремы является то, что она была сформулирована и доказана не обращаясь к понятию экономического равновесия. Теорема использует лишь свойство постоянной отдачи от масштаба по труду и капиталу для производственной функции и то, что в распределении $\left[Y(t),K(t),C(t)\right]_{t=0}^{\infty}$ выпуск, капитал и потребление растут с одинаковым темпом начиная с момента T. Заметим, однако, что теорема верна в предположении о том, что $Y(t)$, $K(t)$ и $C(t)$ растут с одинаковым темпом начиная с конечного момента времени T. Более сильным результатом будет справедливость теоремы при $t\to\infty$. Упражнение 2.14 посвящено обобщению теоремы 2.6 в этом направлении и показывает, почему для ее справедливости в этом случае необходимо наложить ряд дополнительных требований.

Прежде чем переходить к экономической интуиции, стоящей за теоремой 2.6, приведем следующее простое следствие из нее. Оно будет полезно в нашем дальнейшем анализе, а также поможет интуитивно объяснить первую теорему Узавы.

Следствие 2.3. *В предположениях теоремы* 2.6 *для всех* $t\geq T$ *технологический прогресс может быть представлен в форме нейтрального по Харроду (исключительно как трудоинтенсивный).*

В свете теоремы 2.6 и этого следствия мы, немного злоупотребляя использованием терминологии, будем говорить, что «технологические изменения должны асимптотически быть нейтральными по Харроду».

Вернемся теперь к экономической интуиции, стоящей за теоремой Узавы. В теореме предполагается, что в экономике происходит накопление капитала ($g_K > 0$). В части 1 утверждается, что это возможно только в случае, если выпуск и капитал растут с одинаковым темпом. Он может быть равным темпу роста населения n, и в этом случае в экономике не происходит технологических изменений (тогда $g_Y = 0$), или он превышает n, и тогда выпуск на душу населения и отношение капитала к труду растут (тогда $g_K = g_Y > 0$). В последнем случае между капиталом и трудом возникает асимметрия в том смысле, что количество капитала в экономике растет быстрее, чем трудовые ресурсы. Требование сбалансированности роста тогда приводит к тому, что технологические изменения должны компенсировать эту асимметрию. Другими словами, технологический прогресс должен быть трудоинтенсивным.

Однако интуитивные соображения такого типа не раскрывают причин, почему в реальности технологический прогресс должен быть трудоинтенсивным (нейтральным по Харроду). Теорема и следствие из нее просто констатируют, что если технология не принимает такую форму, то асимптотическое распределение ресурсов с постоянными темпами роста выпуска, капитала и потребления (то есть сбалансированный рост) оказывается невозможным. В некотором смысле этот результат разочаровывает, так как он подразумевает, что сбалансированный рост (на самом деле даже нечто более слабое, чем сбалансированный рост) возможен только при очень строгих ограничениях. В главе 15 показано, что в случае эндогенной технологии аналогичная интуиция приводит к тому, что технология эндогенно должна быть более трудоинтенсивной, чем капиталоинтенсивной.

Заметим, что теорема 2.6 и следствие из нее не утверждают, что технология должна быть трудоинтенсивной в течение всего периода существования экономики. Она должна стать трудоинтенсивной лишь начиная с некоторого момента времени T (на траектории сбалансированного роста). Такой динамикой отличается определенный класс моделей эндогенной технологии (мы обсудим эти модели в главе 15). Более важным является тот факт, что вопреки утверждениям, приведенным во многих учебниках и литературе, теорема 2.6 *ни в коем случае* не утверждает, что капиталоинтенсивный (нейтральный по Солоу) технологический прогресс невозможен при $t \to \infty$. Она утверждает лишь, что он невозможен только при сбалансированном росте экономики начиная с некоторого момента времени T. В упражнении 2.17 приведен простой пример, когда асимптотически сбалансированный рост (с выполнением условий теоремы 2.6 при $t \to \infty$) возможен при асимптотически капиталоинтенсивном технологическом прогрессе.

Еще одно важное замечание состоит в том, что теорема 2.6 не требует, чтобы производственная функция имела вид $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$. Она утверждает лишь, что существует ее представление такого вида. Например, рассмотрим агрегированную производственную функцию Кобба—Дугласа:

$$Y(t) = (A_K(t)K(t))^{\alpha}(A_L(t)L(t))^{1-\alpha}.$$

На траектории сбалансированного роста обе технологические переменные $A_K(t)$ и $A_L(t)$ должны расти с одинаковым темпом. Если мы определим новую переменную $A(t)$ как $A(t) = A_K(t)^{\alpha/(1-\alpha)}A_L(t)$, то производственная функция может быть представлена в виде

$$Y(t) = K(t)^{\alpha}(A(t)L(t))^{1-\alpha},$$

так что технологический прогресс оказывается трудоинтенсивным, что и требует теорема 2.6. Интуитивно, различие между трудоинтенсивной и капиталоинтенсивной (нейтральной по Хиксу) формами технологического прогресса имеет значение только в случае, если эластичность замещения между факторами производства отличается от единицы. Для функции Кобба—Дугласа, как мы убедились выше, она в точности равна 1, поэтому нейтральная по Харроду, нейтральная по Солоу и нейтральная по Хиксу формы технологического прогресса для нее являются просто трансформациями друг друга.

Теорема 2.6 ничего не говорит о поведении цен факторов производства. С другой стороны, как мы заметили в начале этого параграфа, факты Калдора требуют, чтобы доли факторов в национальном доходе оставались постоянными. Так как капитал и выпуск растут с одним темпом, арендная стоимость капитала должна быть постоянной. Будет ли тогда свойство постоянства долей факторов следовать из теоремы 2.6 (вместе с предположением о совершенной конкуренции на рынках факторов производства)? К сожалению, ответ на этот вопрос отрицательный. Причина этого состоит в следующем неявном ограничении теоремы 2.6. Она утверждает, что оригинальная производственная функция $\tilde{F}(K(t), L(t), \tilde{A}(t))$ может быть представлена в виде $F(K(t), A(t)L(t))$ на асимптотической траектории с постоянным темпом роста. Однако из этого не следует, что частные производные функций $\tilde{F}$ и F по K и L будут согласованы друг с другом. В упражнении 2.19 приведен пример производственной функции $\tilde{F}$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы 2.6 и поэтому имеет представление в виде $F(K(t), A(t)L(t))$ при $t \to \infty$, однако частные производные $\tilde{F}$ и F не согласуются между собой. На самом деле в упражнении 2.19 утверждается, что при производственной функции $\tilde{F}$ поведение цен факторов производства на конкурентном рынке может быть любым при $t \to \infty$. Однако следующая теорема показывает, что если доли факторов производства в национальном доходе постоянны, то на траектории сбалансированного роста частные производные $\tilde{F}$ и F будут согласованы, и наоборот.

Теорема 2.7. Вторая теорема Узавы. *Пусть все условия теоремы 2.6 выполнены. Тогда производственная функция* $\tilde{F}: \mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ *имеет представление* $F(K(t), A(t)L(t))$ *при* $\mathcal{A} \in \mathbb{R}_+$ и $\dot{A}(t)/A(t) = g = g_Y - n$ *для* $t \geq T$. *Также предположим совершенную конкуренцию на рынках факторов производства и что арендная стоимость капитала удовлетворяет условию* $R(t) = R^*$ *для всех* $t \geq T$ *(или, что эквивалентно,* $\alpha_K(t) = \alpha_K^*$*). Тогда для частных производных функций* $\tilde{F}$ *и* F *по их обоим аргументам* $\tilde{F}_K$, $\tilde{F}_L$, F_K, F_L *выполняются равенства:*

$$\tilde{F}_K\left(K(t), L(t), \tilde{A}(t)\right) = F_K(K(t), A(t)L(t))$$

и

$$\tilde{F}_L\left(K(t), L(t), \tilde{A}(t)\right) = A(t)F_L(K(t), A(t)L(t)). \tag{2.43}$$

Более того, если выполняются равенства (2.43) *и рынки факторов производства конкурентны, то* $R(t) = R^*$ *(и* $\alpha_K(t) = \alpha_K^*$*) для всех* $t \geq T$.

Доказательство. Из теоремы 2.6 следует, что $g_Y = g_K = g_C = g + n$. Так как $R(t) = R^*$ для всех $t \geq T$, из этого следует, что для заработной платы $w(t)$ справедливо равенство $w(t) = (Y(t) - R^*K(t))/L(t) = \exp(g(t - T))w^*$ (где $w^* = w(T)$). Тогда для всех $t \geq T$ имеем уравнения:

$$R^* = \tilde{F}_K\left(K(t), L(t), \tilde{A}(t)\right),$$

$$\exp(g(t-T))w^* = \tilde{F}_L\left(K(t), L(t), \tilde{A}(t)\right). \tag{2.44}$$

Используя те же аргументы, что и при доказательстве теоремы 2.6, нетрудно увидеть, что

$$R^* = \tilde{F}_K\left(\exp(-(g+n)(t-T))K(t), \exp(-n(t-T))L(t), \tilde{A}(T)\right),$$

$$w^* = \tilde{F}_L\left(\exp(-(g+n)(t-T))K(t), \exp(-n(t-T))L(t), \tilde{A}(T)\right).$$

Используя то, что функции $\tilde{F}_K$ и $\tilde{F}_L$ являются однородными степени 0 по K и L (см. теорему 2.1), эти равенства можно переписать как

$$R^* = \tilde{F}_K\left(K(t), \exp(g(t-T))L(t), \tilde{A}(T)\right),$$

$$w^* = \tilde{F}_L\left(K(t), \exp(g(t-T))L(t), \tilde{A}(T)\right).$$

Сравнивая эти равенства с равенствами (2.44), нетрудно увидеть, что для всех $t \geq T$ справедливы следующие равенства:

$$\tilde{F}_K\left(K(t), \exp(g(t-T))L(t), \tilde{A}(T)\right) = \tilde{F}_K\left(K(t), L(t), \tilde{A}(t)\right),$$

$$\exp(g(t-T)\tilde{F}_L\left(K(t), \exp(g(t-T))L(t), \tilde{A}(T)\right) = \tilde{F}_L\left(K(t), L(t), \tilde{A}(t)\right).$$

Отсюда следует, что существуют две однородные степени 0 функции $\hat{F}_1$, $\hat{F}_2$: $\mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$, такие, что

$$\hat{F}_1\left(K(t), A(t)L(t)\right) = \tilde{F}_K\left(K(t), L(t), \tilde{A}(t)\right),$$

$$A(t)\hat{F}_2\left(K(t), A(t)L(t)\right) = \tilde{F}_L\left(K(t), L(t), \tilde{A}(t)\right),$$

и $\dot{A}(t)/A(t) = g$. Определим функцию $\hat{F}$: $\mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ как

$$\hat{F}(K, AL) \equiv \hat{F}_1(K, AL)K + \hat{F}_2(K, AL)AL. \tag{2.45}$$

Из теоремы 2.1 следует, что $\hat{F}\left(K(t), A(t)L(t)\right) = \tilde{F}_K\left(K(t), L(t), \tilde{A}(t)\right)$, и поэтому функция $\hat{F}$ является однородной степени 1 по своим двум аргументам и является представлением функции $\tilde{F}$ на траектории $\left[K(t), L(t)\right]_{t=0}^{\infty}$. Так как функция $\hat{F}$ является однородной степени 1, из равенства (2.45) следует, что ее частные производные $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_2$ согласуются с частными производными функции $\tilde{F}$, что и утверждается в равенствах (2.43).

Чтобы доказать вторую часть теоремы, заметим, что на конкурентных рынках факторов производства при $t \geq T$ мы имеем уравнение:

$$\alpha_K(t) \equiv \frac{R(t)K(t)}{Y(t)} = \frac{K(t)}{Y(t)} \frac{\partial \tilde{F}\left(K(t), L(t), \tilde{A}(t)\right)}{\partial K(t)} = \alpha_K^*,$$

где второе равенство использует определение арендной стоимости капитала на конкурентном рынке, а третье — условие (2.43) и однородность степени 1 функции F. ■

Из теоремы 2.7 следует, что любое распределение ресурсов с постоянными темпами роста выпуска, капитала и потребления должно быть траекторией сбалансированного роста (на которой доли факторов производства в национальном доходе также постоянны). Из нее также следует, что траектория сбалансированного роста может существовать только при производственной функции, в которой технологический прогресс является нейтральным по Харроду.

Теорема 2.7 также показывает дополнительную экономическую интуицию, стоящую за теоремой 2.6. Предположим, что производственная функция имеет специальный вид $F(A_K(t)K(t),\ A_L(t)L(t))$. Из теоремы 2.7 следует, что доли факторов производства должны быть постоянными при $t \to \infty$. Тогда, принимая во внимание свойство постоянной отдачи от масштаба, наличие траектории сбалансированного роста начиная с некоторого момента времени T возможно только в том случае, если эффективное количество капитала $A_K(t)K(t)$ и эффективное количество труда $A_L(t)L(t)$ растут с одинаковыми темпами. В противном случае доля труда или доля капитала перестанет быть постоянной. Далее, если эффективное количество капитала $A_K(t)K(t)$ и эффективное количество труда $A_L(t)L(t)$ растут с одинаковыми темпами, то и выпуск $Y(t)$ будет расти с тем же темпом (снова в силу постоянства отдачи от масштаба). С другой стороны, из того, что отношение капитала к выпуску постоянно в стационарном равновесии, следует, что эффективное количество капитала $K(t)$ должно расти с тем же темпом, что и выпуск, а значит, что и переменная $A_L(t)L(t)$. Следовательно, сбалансированный рост возможен, лишь если переменная $A_K(t)$ остается постоянной начиная с некоторого момента времени T.

2.7.4. Модель экономического роста Солоу в непрерывном времени с технологическим прогрессом

Перейдем к анализу модели экономического роста Солоу с технологическим прогрессом в непрерывном времени. Случай дискретного времени можно проанализировать аналогичным образом, и поэтому мы пропустим его, чтобы избежать повторений. Из теоремы 2.6 следует, что производственная функция экономики, находящейся на траектории сбалансированного роста, может быть представлена в виде:

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)),$$

с только лишь трудоинтенсивным технологическим прогрессом. В большинстве макроэкономических моделей и в моделях теории роста предполагается, что она принимает такой вид в течение всего времени существования экономики и что технологический прогресс происходит с темпом $g > 0$, то есть

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g > 0. \tag{2.46}$$

Мы также начнем рассмотрение модели с этого предположения. Как и в предыдущем анализе, будем считать, что население экономики растет с темпом n и поэтому его динамика задается уравнением (2.32). Предполагая, что норма сбережений остается постоянной, получаем следующее дифференциальное уравнение для процесса накопления капитала:

$$\dot{K}(t) = sF\big(K(t), A(t)L(t)\big) - \delta K(t). \tag{2.47}$$

Наиболее простым методом анализа динамики экономики в данном случае будет переход к новым нормализованным переменным. Так как «эффективное» количество труда (или количество эффективных единиц труда) в модели задается как переменная $A(t)L(t)$, определим переменную $k(t)$ как *эффективное отношение капитала к труду* (т.е. количество капитала, деленное на количество эффективного труда):

$$k(t) \equiv \frac{K(t)}{A(t)L(t)}. \tag{2.48}$$

Несмотря на то что использование одной и той же переменной для обозначения отношения капитала к труду и эффективного отношения капитала к труду может привести к путанице, важная параллель между этими переменными в модели Солоу без технологического прогресса и в модели с ним оправдывает этот выбор обозначений.

Дифференцируя равенство (2.48) по времени, получаем равенство:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - g - n. \tag{2.49}$$

Выпуск на единицу эффективного труда может быть представлен как

$$\hat{y}(t) \equiv \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} = F\left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}, 1\right) \equiv f\left(k(t)\right).$$

Тогда доход на душу населения $y(t) \equiv Y(t)/L(t)$ равен:

$$y(t) = A(t)\hat{y}(t) = A(t)f(k(t)). \tag{2.50}$$

Читатель должен понимать, что если переменная $\hat{y}(t)$ остается постоянной, то доход на душу населения $y(t)$ будет со временем расти в силу того, что растет переменная $A(t)$. Из этого следует, что в этой модели, как и во всех моделях с технологическим прогрессом, мы не должны искать стационарное равновесие с постоянным доходом на душу населения. Вместо него мы будем искать *траекторию сбалансированного роста*, на которой доход на душу населения растет с постоянным темпом, в то время как трансформированные переменные, такие как $\hat{y}(t)$ и $k(t)$ в уравнении (2.49), остаются постоянными. Так как эти переменные остаются постоянными, мы можем рассматривать траекторию сбалансированного роста как стационарное равновесие в модели с трансформированными переменными. Базируясь на этом замечании, в дальнейшем в моделях с технологическим прогрессом мы будем использовать термины «стационарное равновесие» и «траектория сбалансированного роста» (ТСР) взаимозаменяемо. Ниже мы увидим, что траектория сбалансированного роста согласуется с определением из параграфа 2.7.1 в том смысле, что на ней отношение капитала к выпуску, процентная ставка и доли факторов производства в национальном доходе остаются постоянными.

Далее, подставляя значение $\dot{K}(t)$ из уравнения (2.47) в уравнение (2.49), находим что

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{sF(K(t), A(t)L(t))}{K(t)} - (\delta + g + n).$$

Используя теперь определение (2.48), получаем равенство:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{sf(k(t))}{k(t)} - (\delta + g + n), \tag{2.51}$$

которое очень схоже с законом изменения капиталовооруженности экономики в модели без технологического прогресса (2.33). Единственное различие состоит в присутствии слагаемого g в уравнении (2.51), что является следствием того, что теперь мы рассматриваем переменную $k(t)$ не как отношение капитала к труду, а как *эффективное* отношение капитала к труду. Поэтому для того, чтобы ее значение оставалось постоянным на ТСР, капиталовооруженность экономики должна расти с темпом g.

Равновесие в данной модели можно определить аналогично тому, как мы делали это раньше. Стационарное равновесие или ТСР, в свою очередь, является равновесием, в котором эффективное отношение капитала к труду $k(t)$ остается постоянной величиной. В силу вышесказанного справедливо следующее утверждение (доказательство опущено).

Утверждение 2.11. *Рассмотрим модель Солоу в непрерывном времени с нейтральным по Харроду технологическим прогрессом с темпом g и ростом населения с темпом n. Допустим, что предположения* 1 *и* 2 *выполнены, и определим эффективное отношение капитала к труду, как в равенстве* (2.48). *Тогда в ней существует единственная ТСР, на которой эффективное отношение капитала к труду равно* $k^* \in (0, \infty)$, *заданным условием*

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta + g + n}{s}. \tag{2.52}$$

Выпуск на душу населения на ТСР растет с темпом g.

Равенство (2.52), которое определяет значение эффективного отношения капитала к труду в стационарном равновесии (на ТСР), подчеркивает, что теперь суммарные сбережения в экономике $sf(k)$, используются на компенсацию сокращения капиталовооруженности в силу трех различных причин. Первая, как и ранее, состоит в амортизации капитала с темпом δ. Вторая связана с ростом населения с темпом n. Третья возникает из-за нейтрального по Харроду технологического прогресса, который сокращает значение эффективного отношения капитала к труду при постоянном значении капиталовооруженности экономики (отношения капитала к труду) с темпом g. Поэтому компенсация сокращения эффективного отношения капитала к труду требует общих инвестиций в количестве $(\delta + g + n)k$, что является интуитивным объяснением равенства (2.52).

Результаты сравнительной статики в модели схожи с результатами, полученными для модели без технологического прогресса. Дополнительным упражнением в данном случае будет сравнительная статика по отношению к начальному значению трудоинтенсивной технологии $A(0)$ (значение технологии в любой другой момент времени $A(t)$ однозначно определяется из ее начального значения $A(0)$ уравнением (2.46)).

Утверждение 2.12. *Пусть предположения 1 и 2 выполнены и начальное значение технологии равно $A(0)$. Обозначим значения эффективного отношения капитала к труду как $k^*(A(0), s, \delta, n, g)$ и выпуска на душу населения на ТСР как $y^*(A(0), s, \delta, n, g, t)$ (последний является функцией времени, так как он растет). Тогда для всех t имеют место неравенства:*

$$\frac{\partial k^*(A(0), s, \delta, n, g)}{\partial A(0)} = 0, \quad \frac{\partial k^*(A(0), s, \delta, n, g)}{\partial s} > 0,$$

$$\frac{\partial k^*(A(0), s, \delta, n, g)}{\partial n} < 0, \quad \frac{\partial k^*(A(0), s, \delta, n, g)}{\partial \delta} < 0,$$

а также

$$\frac{\partial y^*(A(0), s, \delta, n, g, t)}{\partial A(0)} > 0, \quad \frac{\partial y^*(A(0), s, \delta, n, g, t)}{\partial s} > 0,$$

$$\frac{\partial y^*(A(0), s, \delta, n, g, t)}{\partial n} < 0, \quad \frac{\partial y^*(A(0), s, \delta, n, g, t)}{\partial \delta} < 0.$$

Доказательство. См. упражнение 2.25. ■

Переходная динамика в экономике с технологическим прогрессом также схожа с динамикой модели без него.

Утверждение 2.13. *Пусть предположения 1 и 2 выполнены. Тогда ТСР в модели экономического роста Солоу в непрерывном времени с нейтральным по Харроду технологическим прогрессом и ростом населения асимптотически устойчива в том смысле, что для любого начального условия $k(0) > 0$ эффективное отношение капитала к труду сходится к своему значению на ТСР k^*: $(k(t) \to k^*)$ при $t \to \infty$.*

Доказательство. См. упражнение 2.26. ■

Таким образом, в случае нейтральных по Харроду технологических изменений динамика равновесной траектории и сравнительная статика оказываются очень похожими на их аналоги в модели без технологического прогресса. Основное отличие моделей состоит в том, что в случае технологического прогресса выпуск на душу населения в экономике растет и модель может лучше описать реальные данные. Главным недостатком модели, с другой стороны, является то, что рост выпуска оказывается полностью экзогенным: темп роста подушевого дохода в экономике в точности совпадает с темпом роста технологии $A(t)$, задаваемым экзогенно. Сама модель не конкретизирует, откуда появляются новые технологии и почему они растут с заданным темпом g.

2.8. Сравнительная динамика

В этом параграфе мы коротко проанализируем основные упражнения по сравнительной динамике в модели Солоу. Сравнительная динамика отличается от результатов сравнительной статики, изложенных в утверждениях 2.3, 2.8 и 2.12, тем, что в этом случае мы интересуемся всей динамической траекторией реакции экономики на некоторый шок и изменение ее параметров. Базовая модель Солоу в особенности хорошо подходит для анализа такого типа по причине своей простоты. Упражнения по сравнительной динамике также являются полезными, потому что базовая модель Солоу и неоклассическая модель экономического роста часто используются для анализа последствий изменений в экономической политике, реакции экономики на среднесрочные шоки, динамики цикла экономической активности. Поэтому понимание механизма реакции экономики на различные шоки в модели Солоу оказывается важным в целом ряде приложений.

Напомним читателю, что закон изменения эффективной капиталовооруженности в модели Солоу в непрерывном времени задается уравнением (2.51): $\dot{k}(t)/k(t) = s\,f(k(t))/k(t) - (\delta + g + n)$. Его правая часть представлена графически на рис. 2.13. Пересечение графика с горизонтальной осью координат показывает единственную ТСР с эффективным отношением капитала к труду, равным k^*. Для анализа сравнительной динамики достаточно рис. 2.13. Например, рассмотрим моментальное неожиданное перманентное увеличение нормы сбережений с s до s'. Сдвиг графика правой части уравнения (2.51) вправо показан прерывистой линией, и ее пересечение с горизонтальной осью координат находится в точке k^{**}. Прерывистые стрелки под горизонтальной осью координат показывают направление постепенного изменения эффективного отношения капитала к труду при переходе на новую ТСР k^{**}. В момент изменения нормы сбережений количество капитала в экономике и эффективное отношение капитала к труду остаются неизменными, так как они являются переменными состояния в модели. После этого переменная k изменяется по направлению прерывистых стрелок на рис. 2.13 к точке k^{**}. Сравнительная динамика модели после моментального неожиданного перманентного сокращения нормы амортизации δ или темпа роста населения n оказывается идентичной.

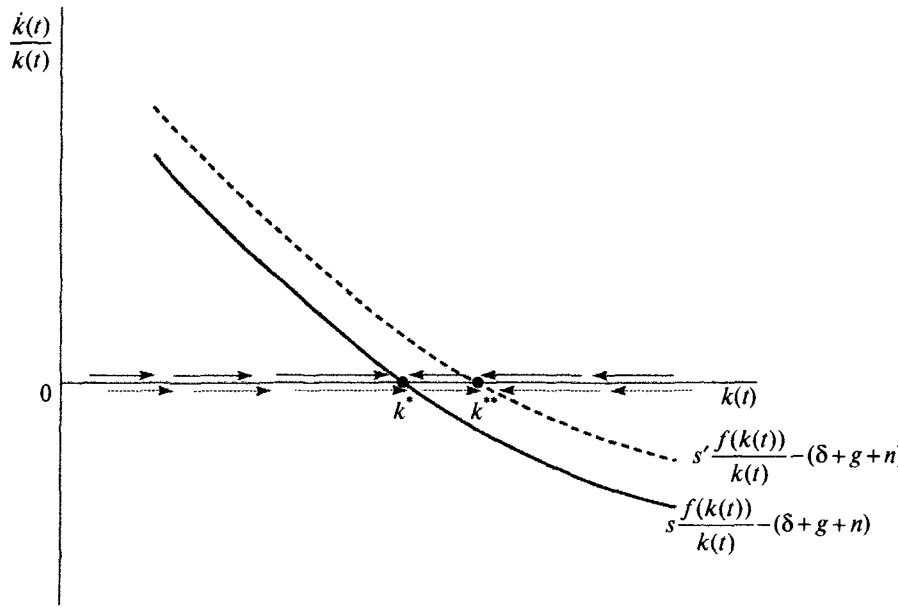


Рис. 2.13. Динамика модели Солоу после увеличения нормы сбережений с s до s'. Сплошная линия показывает динамику достижения исходного стационарного равновесия, прерывистая линия — динамику достижения нового стационарного состояния

Схожий анализ графического типа можно использовать и для изучения реакции экономики в модели на неожиданные временные изменения ее параметров. Например, предположим, что в момент времени $t = t'$ норма сбережений, s, неожиданно меняется, но это изменение является временным, то есть в некоторый более поздний известный момент времени $t'' > t'$ ее значение возвращается назад. В этом случае начиная с момента t' и до момента t'' экономика находится на прерывистой линии, а затем, после момента t'' ее динамика определяется стационарным решением исходного дифференциального уравнения и поэтому она следует сплошным линиям над горизонтальной осью координат на рис. 2.13. Таким образом, начиная с момента t'' экономика медленно возвращается к своей исходной траектории сбалансированного роста k^*. В дальнейшем мы убедимся в том, что аналогичные эксперименты по сравнительной динамике можно также провести в неоклассической модели экономического роста, однако в этом случае реакция экономики на некоторые изменения окажется более сложной.

2.9. Основные выводы

Что мы узнали, изучив модель Солоу? В некотором смысле довольно много. Теперь у нас есть простая база для анализа динамики накопления капитала и экономического эффекта технологического прогресса. Как мы убедимся в следующей главе, эта база уже оказывается весьма полезной для понимания динамики реальных экономических данных.

С другой стороны, из модели Солоу мы узнали очень мало. Основные вопросы теории экономического роста, поставленные нами в первой главе, связаны с тем, почему некоторые страны оказались богатыми, а некоторые — бедными, почему экономики некоторых стран растут, а других пребывают в застое, почему мировая экономика в последние несколько столетий находится на траектории устойчивого роста. Модель Солоу говорит о том, что если технологический прогресс отсутствует и мы не живем в *AK* мире, что противоречит предположению 2, то устойчивый рост экономики невозможен. В этом случае мы можем использовать модель лишь для обсуждения межстрановых различий в уровне выпуска, а не причин роста экономик отдельных стран или мировой экономики.

Рост выпуска на душу населения становится возможным в модели Солоу только после введения в нее экзогенного технологического прогресса. Однако в этом случае вся динамика экономики определяется технологическим прогрессом, а сам технологический прогресс предполагается экзогенным процессом аналогично черному ящику, который находится вне модели и вне влияния экономических стимулов. Если технологический прогресс так важен для развития экономики, то мы должны стараться изучить его и понять, какие факторы являются определяющими в этом процессе, что заставляет некоторые фирмы и общества изобретать лучшие технологии и почему эти фирмы и общества используют эти технологии в экономической деятельности.

Даже возвращаясь к вопросу накопления капитала, модель Солоу не может ответить на него полностью удовлетворительно. Скорость накопления капитала в модели определяется нормой сбережений, нормой амортизации и темпом роста населения. Все эти параметры в модели являются экзогенными.

В свете вышесказанного, модель роста Солоу может рассматриваться как некоторая база для описания задач и постановки основных вопросов. Основной ее вывод состоит в том, что для понимания процесса экономического роста мы должны понять процесс накопления физического капитала (а также накопления человеческого капитала, чему посвящена следующая глава) и, что, скорее всего, более важно, понять причины технологического прогресса. В рамках модели Солоу все эти понятия описываются на уровне черных ящиков. Поэтому далее в книге мы будем пытаться «рыть глубже», стараясь понять, что спрятано в этих черных ящиках. Мы начнем с введения оптимизации со стороны домохозяйств в главе 8, что позволит нам более систематически изучить динамику накопления капитала. Затем мы перейдем к моделям с накоплением человеческого капитала и эндогенным технологическим прогрессом. Модель, в которой темп накопления факторов производства и технологии является эндогенным, станет для нас основой для постановки вопросов, связанных с фундаментальными причинами экономического роста, и ответов на них.

Несмотря на это, модель Солоу, даже в своей простейшей форме, является полезной для понимания источников экономического роста, в особенности непосредственных его причин. Это будет темой следующей главы книги.

2.10. Литература

Модель, которую мы изучили в этой главе, была впервые представлена в работах: [Solow 1956] и [Swan 1956]. Работа [Solow 1970] содержит хорошее и доступное ее описание вместе с исторической справкой. В учебнике [Barro, Sala-i-Martin 2004, chapter 1)] можно найти более современное описание базовой модели Солоу на магистерском уровне, а в книге [Jones 1998, chapter 2] — на бакалаврском уровне.

Описание модели в этой главе использует частые ссылки на теории поведения потребителей и общего экономического равновесия. Знакомство с обоими этими разделами экономики необходимо для адекватного понимания теории экономического роста. Некоторые основные результаты теории динамического общего равновесия будут приведены в главе 5. Учебник по микроэкономике магистерского уровня [Mas-Colell, Whinston, Green 1995; Мас-Колелл, Уинстон, Грин 2016] содержит прекрасное описание большей части необходимого нам материала, включая теорию поведения производителя и доступное описание основных концепций теории общего равновесия вместе с описанием понятия ценных бумаг Эрроу и товаров Эрроу—Дебре.

Описание свойств однородных функций и доказательство теоремы Эйлера может быть найдено, например, в учебнике [Simon, Blume 1994, chapter 20]. Читатель должен быть знаком с теоремой о неявной функции и свойствами вогнутых и выпуклых функций, которые интенсивно используются в этой книге. Краткий обзор этих свойств приведен в приложении А.

В приложении В содержится обзор методов решения дифференциальных и разностных уравнений и обсуждение понятия устойчивости решения.

Теоремы 2.2, 2.3, 2.4 и 2.5 вытекают из результатов, приведенных в нем. В дополнение читатель может воспользоваться книгами [Boyce, DiPrima 1977; Luenberger 1979] или [Simon, Blume 1994], в которых содержится большое количество результатов теории дифференциальных и разностных уравнений. Знание методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и понимание понятия устойчивости решения на уровне изложения приложения B является необходимым для работы с основным текстом книги. Стоит отметить, что единое описание теории дифференциальных и разностных уравнений, приведенное в книге [Luenberger 1979], представляется особенно полезным материалом для ознакомления. Учебник [Galor 2005] содержит введение в теорию разностных уравнений и теорию динамических систем в дискретном времени для экономистов.

Понятие золотого правила для нормы сбережений было впервые введено Эдмундом Фелпсом в работе [Phelps 1966]. Название «золотое правило» отсылает к библейскому золотому правилу нравственности «как хотите, чтобы с вами поступали люди, так и вы поступайте с ними», примененному в межпоколенческом контексте, подразумевая, что агенты, живущие и совершающие потребление благ в разные моменты времени, принадлежат к разным поколениям. Несмотря на то что золотое правило для нормы сбережений представляет исторический интерес и используется для анализа динамической эффективности экономики, оно не является оптимальным правилом поведения, так как оно не было получено нами как результат максимизации явно заданной функции полезности потребителей. Глава 8 посвящена более детальному описанию оптимального поведения потребителя и оптимального количества сбережений.

Базовые стилизованные факты, описывающие сбалансированный рост, были впервые отмечены в работе [Kaldor 1963]. Рис. 2.11 использует данные из работы [Piketty, Saez 2003]. Работа [Homer, Sylla 2003] описывает динамику процентных ставок в различных обществах в течение многих столетий. В этой работе показано, что в ней не присутствует какой-либо тенденции к повышению или понижению в долгосрочной временной перспективе. При этом необходимо отметить, что процесс экономического роста не является сбалансированным во всех аспектах. В части VII данной книги мы подробно остановимся на различных элементах несбалансированной природы экономического роста. Там же можно найти справочную информацию об изменении секторальной структуры выпуска в мировой экономике в процессе долгосрочного экономического роста.

Теорема 2.6 в ее более простой версии впервые была доказана в работе [Uzawa 1961]. В литературе встречается несколько версий ее доказательства, хотя многие из них не являются доказательствами в строгом смысле.

Доказательство, приведенное в этой главе, является адаптацией доказательства из работы [Shlicht 2006], которое также обсуждается в работе [Jones, Scrimgeour 2006]. Похожее доказательство можно найти в работе [Wan 1971]. Доказательство этой теоремы также приведено в учебнике [Barro, Sala-i-Martin 2004, chapter 1]. Однако аргументация в этих доказательствах неполна, так как они предполагают, что технологический прогресс происходит как некоторая комбинация технологических изменений, нейтральных по Харроду и по Солоу. Поэтому формулировка теоремы и ее доказательство, приведенное нами, являются более общими и полными. Стоит отметить, что в литературе часто встречается неправильное понимание выводов из теоремы 2.6. Во многих учебниках утверждается, что теорема отвергает возможность асимптотического капиталоинтенсивного технологического прогресса, в случае если производственная функция не является функцией Кобба—Дугласа. В упражнении 2.17 показано, что это утверждение неверно и сбалансированный рост возможен даже при асимптотическом капиталоинтенсивном технологическом прогрессе с производственной функцией, не являющейся функцией Кобба—Дугласа. Теорема 2.6 верна в случае, если траектория сбалансированного роста достигается в некоторый конечный момент времени T или при наложении некоторых дополнительных предпосылок, описанных в упражнении 2.14. Более того, важно еще раз отметить то, что мы уже выделили в основном тексте главы, а именно что теорема 2.6 утверждает только наличие некоторого представления определенной траектории капитала и труда. Как показано в упражнении 2.19, это представление не всегда может быть использовано для анализа равновесия в экономике и ценообразования капитала и труда. Теорема 2.7 предлагает некоторые возможные выходы из этой затруднительной ситуации. Нам неизвестно о существовании других результатов, схожих с теоремой 2.7.

Как уже было отмечено выше, производственная функция ПЭЗ была впервые представлена в работе [Arrow et. al. 1961]. Такой вид производственной функции играет важную роль во многих приложениях макроэкономики и теории экономического роста. Условия Инада, накладываемые нами в предположении 2, читатель может найти в работе [Inada 1963].

Наконец, отметим, что читателя может заинтересовать работа [Hakenes, Irmen 2006], в которой показано, почему наложение условий Инада может в непрерывном времени привести к наличию еще одной равновесной траектории (кроме равновесия в отсутствии экономической активности) при $k = 0$ даже если $f(0) = 0$. Нам же здесь достаточно отметить, что существование этого стационарного равновесия зависит от порядка, в котором берутся пределы соответствующих функций. В любом случае, как было отмечено ранее, равновесие с $k = 0$ не имеет экономического смысла и поэтому мы игнорируем его наличие во всей книге.

2.11. Упражнения

2.1. Покажите, что из предположения 1 при совершенной конкуренции на рынке труда следует, что заработная плата будет строго положительной и поэтому из условий (2.4) вытекает равенство (2.3).

2.2. Докажите, что из предположения 1 следует, что функция $F(A, K, L)$ является вогнутой по K и L, но не обязательно строго вогнутой.

2.3. Предположите совершенную конкуренцию на рынках факторов производства. Покажите, что если производственная функция F обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, то максимизационная задача (2.5) или не имеет решения (прибыль фирм стремится к бесконечности), или имеет единственное решение $K = L = 0$, или имеет континуум решений (т. е. любая пара (K, L), такая, что $K/L = \kappa$ для некоторой $\kappa > 0$ будет решением задачи (2.5)).

2.4. Рассмотрите модель экономического роста Солоу в непрерывном времени со следующей производственной функцией на душу населения:

$$f(k) = k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k.$$

(a) Какие условия предположений 1 и 2 не выполняются для исходной производственной функции $F(K, L)$?

(b) Покажите, что при этой производственной функции в модели существуют три стационарных равновесия.

(c) Докажите, что два из этих стационарных равновесия локально устойчивы, а одно — локально неустойчиво. Может ли хотя бы одно из этих стационарных равновесий быть глобально устойчивым?

2.5. Докажите утверждение 2.7.

2.6. Докажите утверждение 2.8.

2.7. Введем в базовую модель Солоу государственный сектор. Рассмотрите базовую версию модели без технологического прогресса и предположите, что уравнение (2.9) принимает вид:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t),$$

где переменная $G(t)$ обозначает государственные расходы в момент времени t. Предположите, что государственные расходы следуют закону $G(t) = \sigma Y(t)$.

(a) Опишите как должно измениться соотношение между доходом и потреблением. Будет ли логичным продолжать предполагать, что потребление задается равенством $C(t) = (1 - s)Y(t)$?

(b) Предположите, что государственные расходы частично производятся из частного потребления, т. е. $C(t) = (s - \lambda\sigma)Y(t)$, где $\lambda \in [0, 1]$.

Как изменится равновесие в модели Солоу при увеличении государственных расходов (т. е. при увеличении параметра σ)?

(c) Теперь предположите, что некоторая доля ϕ государственных расходов $G(t)$ инвестируется в капитал и поэтому общее количество инвестиций в момент времени t задается как

$$I(t) = (1 - s - (1 - \lambda)\sigma + \phi\sigma)Y(t).$$

Покажите, что если параметр ϕ достаточно высок, то капиталовооруженность экономики в стационарном равновесии будет расти при увеличении государственных расходов (росте параметра σ). Является ли такой вывод разумным? Можете ли вы предложить альтернативный метод включения в модель государственных инвестиций?

2.8. Предположите, что производственная функция $F(K, L, A)$ является вогнутой по K и L (хотя не обязательно строго вогнутой) и условия предположения 2 выполнены. Докажите утверждения 2.2 и 2.5. Каким образом необходимо изменить формулировку утверждения 2.6 для того, чтобы оно осталось истинным?

2.9. Докажите утверждение 2.6.

2.10. Докажите следствие 2.2.

2.11. Рассмотрите модифицированную версию модели экономического роста Солоу со следующей агрегированной производственной функцией:

$$F(K, L, Z) = L^{\beta}K^{\alpha}Z^{1-\alpha-\beta},$$

где переменная Z обозначает землю. Общее количество земли является фиксированной величиной. Предположите, что $\alpha + \beta < 1$, норма амортизации капитала равна δ, норма сбережений задана экзогенно и равна s.

(a) Сначала предположите, что рост населения в экономике отсутствует. Найдите значения капиталовооруженности и выпуска в экономике в стационарном равновесии. Докажите, что стационарное равновесие единственно и является глобально устойчивым.

(b) Теперь предположите, что темп роста населения равен n, то есть $\dot{L}/L = n$. Что будет происходить с отношением капитала к труду и выпуском в экономике при $t \to \infty$? Что будет происходить с нормой доходности владельцев земли и заработной платой при $t \to \infty$?

(c) Как вы думаете, будут ли темп роста населения n или норма сбережений s со временем меняться в такой экономике? Если да, то каким образом?

2.12. Рассмотрите модель Солоу в непрерывном времени без технологического прогресса и с постоянным темпом роста населения n. Предположите, что производственная функция удовлетворяет предположениям 1 и 2. Также предположите, что капитал в экономике принадлежит капиталистам, а трудовые ресурсы предоставляются другим множеством агентов, рабочими. Следуя предложению из работы [Kaldor 1957], будем считать, что капиталисты сберегают долю своего дохода, равную s_K, а рабочие не делают сбережений и направляют весь свой доход на потребление.

(a) Определите и охарактеризуйте стационарное равновесие в этой модели. Изучите его устойчивость.

(b) Как соотносятся отношение капитала к труду в стационарном равновесии k^* и его значение для золотого правила k^*_{gold}, определенное в параграфе 2.2.3?

2.13. Теперь сделайте предположение, противоположное сделанному в упражнении 2.12. Будем считать, что задана постоянная норма сбережений из трудового дохода $s \in (0, 1)$, а весь доход капиталистов используется для потребления. Предположите, что производственная функция удовлетворяет предположениям 1 и 2. Покажите, что в этом случае в экономике возможна множественность стационарных равновесий.

2.14.* В этом упражнении вы сможете обобщить теорему 2.6. Предположите, что вместо условий:

$$\dot{Y}(t)/Y(t) = g_Y > 0,\ \ \dot{K}(t)/K(t) = g_K > 0,\ \ \dot{C}(t)/C(t) = g_C > 0$$

для всех $t \geq T$ при некотором $T < \infty$, выполняются условия:

$$\dot{Y}(t)/Y(t) \to g_Y > 0,\ \ \dot{K}(t)/K(t) \to g_K > 0,\ \ \dot{C}(t)/C(t) \to g_C > 0$$

при $t \to \infty$.

(a) Покажите, построив контрпример, что в этом случае часть 1 теоремы 2.6 не будет верна без дополнительных предположений [Подсказка: рассмотрите случай $g_C < g_K = g_Y$.] Какие дополнительные условия необходимо наложить для того, чтобы темпы роста рассматриваемых переменных, достигаемые в пределе при $t \to \infty$ равнялись между собой?

(b) Теперь предположите, что часть 1 теоремы 2.6 верна (в частности $g_Y = g_K$). Покажите, применяя аргументацию, эквивалентную использованной при доказательстве теоремы, что для любых T и $t \geq T$ справедливо следующее равенство:

$$\exp\left(-\int_T^t g_Y(s)ds\right)Y(t) =$$
$$= \tilde{F}\left[\exp\left(-\int_T^t g_K(s)ds\right)K(t), \exp(-n(t-T))L(t), \tilde{A}(T)\right],$$

где $g_Y(t) \equiv \dot{Y}(t)/Y(t)$, и переменные $g_K(t)$ и $g_C(t)$ определены аналогичным образом. Затем покажите, что

$$Y(t) = \tilde{F}\left[\exp\left(\int_T^t (g_Y(s) - g_K(s))ds\right)K(t),\right.$$
$$\left.\exp\left(\int_T^t (g_Y(s) - n)ds\right)L(t), \tilde{A}(T)\right].$$

Теперь заметьте, что для любого $\varepsilon_T > 0$ существует число $T < \infty$, такое, что $|g_Y(t) - g_Y| < \varepsilon_T/2$ и $|g_K(t) - g_K| < \varepsilon_T/2$ при $t > T$ (это следует из предположений, что $\dot{Y}(t)/Y(t) \to g_Y > 0$ и $\dot{K}(t)/K(t) \to g_K > 0$ при $t \to \infty$). Рассмотрите последовательность (или сеть, см. приложение А) $\{\varepsilon_T\} \to 0$, что естественным образом соответствует $T \to \infty$ в определении выше. Положите $t = \zeta T$ при некотором значении $\zeta > 1$ и покажите, что часть 2 теоремы 2.6 остается верна, если $\varepsilon_T T \to 0$ при $T \to \infty$. Используя это утверждение, покажите, что если переменные $g_Y(t)$ и $g_K(t)$ сходятся к g_Y и g_K со скоростью сходимости, строго большей, чем $1/t$, то асимптотическая производственная функция может быть представлена в виде: $F(K(t), A(t)L(t))$, но такого представления может не существовать, если хотя бы одна из переменных $g_Y(t)$ и $g_K(t)$ сходится медленнее. [Подсказка: в данном случае асимптотическое представление означает, что $\lim_{t\to\infty} \tilde{F}/F = 1$.]

2.15. Это упражнение посвящено понятию эластичности замещения между факторами производства σ, которое мы определили равенством (2.37). Предположите совершенную конкуренцию на рынке труда. Пусть заработная плата равна w. Докажите, что если агрегированная производственная функция $F(K, L, A)$ обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, то справедливо следующее равенство:

$$\varepsilon_{y,w} \equiv \frac{\partial y/\partial w}{y/w} = \sigma,$$

где, как обычно, $y \equiv F(K, L, A)/L$.

2.16*. В этом упражнении вы сможете вывести производственную функцию ПЭЗ, заданную нами уравнением (2.38), с помощью метода, использованного в оригинальной работе [Arrow et. al. 1961]. В ней авторы делают наблюдение о том, что следующее уравнение, описывающее зависимость дохода на душу населения от заработной платы, является хорошей эмпирической аппроксимацией связи между этими переменными:

$$y = \alpha w^{\sigma},$$

где $y = f(k)$ как обычно в книге обозначает выпуск на душу населения, а w — реальную заработную плату. Вспомните, что при совершенной конкуренции на рынках факторов производства заработная плата задается равенством $w = f(k) - kf'(k)$. Поэтому предыдущее уравнение может быть записано как

$$y = \alpha(y - ky')^{\sigma},$$

где $y = y(k) \equiv f(k)$, а y' обозначает производную $f'(k)$. Это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка.

(a) Используя метод разделения переменных (см. приложение B), покажите, что общим решением этого дифференциального уравнения является следующая функция:

$$y(k) = \left(\alpha^{-1/\sigma} + c_0 k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

где параметр c_0 является константой интегрирования.

(b) Объясните, каким образом можно параметризовать значения констант α и c_0 и выведите явный вид производственной функции ПЭЗ, заданный равенством (2.38).

2.17. Рассмотрите модель экономического роста Солоу с постоянной нормой сбережения s и нормой амортизации капитала, равной δ. Предположите, что население в экономике постоянно, агрегированная производственная функция обладает свойством постоянной отдачи от масштаба и задана следующим образом:

$$Y = F(A_K(t)K(t), A_L(t)L(t)),$$

где $\dot{A}_L(t)/A_L(t) = g_L > 0$ и $\dot{A}_K(t)/A_K(t) = g_K > 0$.

(a) Предположите, что функция F является функцией Кобба—Дугласа. Найдите темп роста экономики на траектории сбалансированного роста и опишите ее переходную динамику к стационарному равновесию.

(b) Предположите, что функция F не является функцией Кобба–Дугласа (даже асимптотически). Докажите, что тогда не существует конечного числа $T < \infty$, такого, что экономика находится на ТСР для всех $t \geq T$. Объясните ваш результат интуитивно.

2.18*. Рассмотрите экономику, описанную в упражнении 2.17. Предположите, что производственная функция F является функцией ПЭЗ с эластичностью замещения между капиталом и трудом, равной $\sigma < 1$. Также предположите, что норма сбережений постоянна и равна s, а $g_K > g_L$. Покажите, что экономика сходится к ТСР при $t \to \infty$ и что на траектории сбалансированного роста доля дохода труда в национальном доходе равна 1, а капитал, выпуск и потребление растут с одинаковым темпом, равным g_L. В свете полученного результата обсудите часто встречающееся в литературе утверждение о том, что сбалансированный рост невозможен при капиталоинтенсивном технологическом прогрессе. Почему это утверждение неверно? Свяжите ваш ответ с ответом на вопрос в упражнении 2.14.

2.19*. Рассмотрите в контексте теоремы 2.6 следующую производственную функцию:

$$\tilde{F}\left(K(t), L(t), \tilde{A}(t)\right) = K(t)^{\tilde{A}(t)} L(t)^{1-\tilde{A}(t)},$$

где $\tilde{A}(t)\colon \mathbb{R}_+ \to (0,1)$ — некоторая произвольная функция от времени, представляющая технологию.

(a) Покажите, что если $K(t) = \exp(nt)$ и $L(t) = \exp(nt)$ при $n \geq 0$, то условия теоремы 2.6 выполняются и функция $\tilde{F}$ имеет представление в виде $F(K(t), A(t)L(t))$. Определите, какой класс функций позволяет получить такое представление.

(b) Покажите, что частные производные функций $\tilde{F}$ и F не равны между собой.

(c) Предположите совершенную конкуренцию на рынках факторов производства. Покажите, что в то время как капитал, выпуск и потребление растут с постоянным темпом, доля дохода капитала в национальном доходе может не быть постоянной и ведет себя произвольным образом [Подсказка: рассмотрите, например, функцию $\tilde{A}(t) = (2 + \sin(t))/4$.]

2.20. Рассмотрите модель Солоу с неконкурентным рынком труда. В частности, предположите, что рост населения и технологический прогресс отсутствуют, выпуск задан производственной функцией $F(K, L)$, норма сбережений постоянна и равна s, норма амортизации капитала равна δ.

(a) Сначала предположите, что задано значение минимальной заработной платы $\bar{w}$, и компенсация работников не может быть меньше, чем $\bar{w}$. Если спрос на труд со стороны фирм при такой заработной плате оказывается меньше, чем L, занятость определяется спросом фирм и равна L^d (а безработные не участвуют в производстве товаров и услуг и их доход равен нулю). Предположите, что $\bar{w} > f(k^*) - k^* f'(k^*)$, где k^* обозначает отношение капитала к труду в стационарном равновесии в базовой модели Солоу и задается соотношением $f(k^*)/k^* = \delta/s$. Опишите динамику равновесной траектории экономики, стартующей с некоторым начальным запасом физического капитала $K(0) > 0$.

(b) Далее рассмотрите другой тип отклонения от совершенной конкуренции на рынке труда. Предположите, что в качестве заработной платы работник получает некоторую долю $\lambda > 0$ выпуска фирмы, на которой он занят. Охарактеризуйте динамику равновесной траектории экономики в этом случае. [Подсказка: вспомните, что норма сбережений и в этом случае остается постоянной и равна s.]

2.21. Рассмотрите модель экономического роста Солоу в дискретном времени. Предположите, что темп роста населения равен n, технологический прогресс отсутствует, а норма амортизации капитала δ равна единице (что соответствует полной амортизации). Также предположите, что норма сбережений является функцией от отношения капитала к труду и задана как $s(k)$.

(a) Предположите, что $f(k) = Ak$, а $s(k) = s_0 k^{-1} - 1$. Покажите, что если $A + \delta - n = 2$, то при любом значении $k(0) \in (0, As_0/(1+n))$ экономика моментально оказывается в асимптотическом цикле и значение отношения капитала к труду непрерывно изменяется между $k(0)$ и $As_0/(1+n) - k(0)$. (Предположите, что значения $k(0)$ и параметров модели заданы таким образом, что $s(k) \in (0, 1)$ для $k = k(0)$ и для $k = As_0/(1+n) - k(0)$.)

(b) Теперь рассмотрите более общий вид непрерывных производственной функции $f(k)$ и функции сбережений $s(k)$. Предположите, что существуют такие значения $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$, причем $k_1 \neq k_2$, что

$$k_2 = \frac{s(k_1)f(k_1) + (1-\delta)k_1}{1+n},$$

$$k_1 = \frac{s(k_2)f(k_2) + (1-\delta)k_2}{1+n}.$$

Покажите, что если такая пара (k_1, k_2) существует, то экономика может также обладать стационарным равновесием.

(c) Докажите, что такие циклы невозможны в модели экономического роста Солоу в непрерывном времени для любой (включая не неоклассические) производственной функции $f(k)$ и непрерывной функции сбережений $s(k)$. [Подсказка: рассмотрите вариант рис. 2.9.]

(d) Какой вывод вы можете сделать из результатов пунктов (a)–(c) относительно аппроксимации дискретного времени непрерывным временем, предложенной нами в параграфе 2.4?

(e) В свете вашего ответа на вопрос в пункте (d) что вы думаете о циклах, полученных в пунктах (a) и (b)?

(f) Покажите, что если производственная функция $f(k)$ является неубывающей по k, а функция сбережений имеет вид $s(k) = k$, то циклы, как в пунктах (a) и (b), невозможны и в модели с дискретным временем.

2.22. Опишите асимптотическое равновесие в модифицированной модели Солоу/АК, рассмотренной в параграфе 2.6. Предположите, что норма сбережений s постоянна, норма амортизации физического капитала равна δ, рост населения отсутствует, а агрегированная производственная функция задана уравнением:

$$F(K(t), L(t)) = A_K K(t) + A_L L(t).$$

2.23. Рассмотрите базовую модель экономического роста Солоу. Предположите, что норма сбережений s постоянна, темп роста населения равен n, а технологический прогресс отсутствует. Также предположите, что агрегированная производственная функция является функцией типа ПЭЗ, введенной нами в уравнении (2.38).

(a) Предположите, что $\sigma > 1$. Покажите, что в этом случае равновесная динамика экономики является схожей с динамикой экономики упражнения 2.22 и обладает свойством наличия устойчивого роста в долгосрочной перспективе. Проинтерпретируйте ваш вывод.

(b) Теперь предположите, что $\sigma \to 0$ и производственная функция становится функцией леонтьевского типа:

$$Y(t) = \min\{\gamma A_K(t)K(t), (1-\gamma)A_L(t)L(t)\}.$$

Такая модель идентична классической модели экономического роста Харрода—Домара, разработанной Роем Харродом и Евсеем Домаром [Harrod 1939; Domar 1946]. Покажите, что в этом случае в модели, скорее всего, не будет стационарного равновесия с полной занятостью и полной загрузкой физического капитала. Что происходит с ценами факторов производства в этом случае? Объясните, почему этот случай является в некотором роде патологией, и приведите по меньшей мере два аргумента, почему равновесие с неполной занятостью или не полностью загруженным физическим капиталом не будет встречаться на практике.

2.24. Покажите, что производственная функция с постоянной эластичностью замещения удовлетворяет предположению 2 только в случае, если $\sigma = 1$.

2.25. Докажите утверждение 2.12.

2.26. Докажите утверждение 2.13.

2.27. В этом упражнении мы разберем альтернативный подход к концепции технологии, который будет нам полезен в следующей главе. Рассмотрите базовую модель Солоу и предположите, что $A(t) = A$, то есть технологический прогресс отсутствует в стандартном понимании этого термина. Однако при этом предположите, что соотношение между инвестициями и увеличением количества капитала изменяется и принимает следующий вид:

$$\dot{K}(t) = q(t)I(t) - \delta K(t),$$

где $[q(t)]_{t=0}^{\infty}$ является экзогенно заданной изменяющейся во времени траекторией (функцией). Интуитивно это уравнение означает, что, когда значение $q(t)$ велико, то же самое количество инвестиций приводит к большему приросту физического капитала. Поэтому мы можем мыслить о переменной $q(t)$ как о величине, обратной к относительной цене оборудования в единицах конечного товара. Высокое значение величины $q(t)$ соответствует ситуации, когда оборудование имеет относительно низкую цену. В работе [Gordon 1990] приведены эмпирические свидетельства того, что относительная цена оборудования длительного пользования в единицах конечного товара снижалась на протяжении всей послевоенной истории. Это снижение цены выглядит весьма правдоподобным и может быть хорошо проиллюстрировано снижением относительной стоимости компьютеров и программного обеспечения в последние годы. Поэтому логично будет предположить, что $\dot{q}(t) > 0$. В этом упражнении вам потребуется по аналогии с работой [Greenwood, Herkowitz, Krusell 1977] изучить модель, обладающую таким свойством.

(a) Предположите, что $\dot{q}(t)/q(t) = \gamma_K > 0$. Покажите, что в общем случае при любой производственной функции $F(K, L)$ в модели может не существовать траектории сбалансированного роста.

(b) Теперь предположите, что производственная функция имеет вид функции Кобба—Дугласа, $F(K, L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, и опишите единственную в данном случае ТСР в модели.

(c) Покажите, что стационарное равновесие в модели не будет соответствовать факту Калдора о постоянстве отношения K/Y. Является ли это несоответствие проблемой? [Подсказка: каким образом количество капитала K измеряется на практике? Каким образом оно измеряется в модели?]

Глава 3
Модель Солоу и данные

В этой главе мы увидим, как модель Солоу и ее простые расширения могут быть использованы для интерпретации и роста мировой экономики со временем, и межстрановых различий в уровне выпуска. Мы сконцентрируемся на *непосредственных причинах* экономического роста, таких как инвестиции и накопление физического капитала, хорошо описываемых базовой моделью Солоу, а также на различиях в уровне технологий и в количестве человеческого капитала. Фундаментальные причины экономического роста, лежащие за этими непосредственными источниками, будут изучаться нами в последующих главах.

Существует множество способов использования базовой модели Солоу для описания экономических данных. Мы начнем с подхода, называемого бухгалтерией экономического роста, который чаще всего используется для выделения вкладов каждого источника в совокупный рост экономики в некотором периоде времени. После краткого описания теории, стоящей за понятием бухгалтерии роста, и знакомства с некоторыми методами его использования мы перейдем к обсуждению приложений модели Солоу к объяснению межстрановых различий в уровне выпуска и темпах роста. В этом контексте мы рассмотрим расширенную модель Солоу, в которой введем понятие человеческого капитала, а также покажем, какие различные регрессионные методы анализа данных могут быть предложены как эмпирически тестируемые следствия этой модели. Наконец, мы покажем, как методика бухгалтерии роста может быть преобразована в методику бухгалтерии экономического развития, что позволяет построить еще один мост между моделью Солоу и экономическими данными. Основным наблюдением, вытекающим из всех рассмотренных подходов, станет вывод о важности различий в уровне производительности, как во времени, так и между различными странами. Окончание главы посвящено короткому описанию других подходов к эмпирической оценке межстрановых различий в производительности.

3.1. Бухгалтерия роста

Как мы уже отметили в предыдущей главе, ключевым элементом модели Солоу является агрегированная производственная функция (2.1), которая в общем виде может быть записана как

$$Y(t) = F(K(t), L(t), A(t)). \tag{3.1}$$

Другим важным вкладом Боба Солоу в теорию экономического роста стало наблюдение о том, что эта производственная функция, вместе с предположением о совершенной конкуренции на рынках факторов производства, может быть использована как базовый инструмент для подсчета вкладов различных источников роста в совокупный рост экономики. В частности, в работе [Solow 1957] он развил одну из наиболее часто используемых макроэкономических методик, называемую бухгалтерией роста.

Для достижения наших целей нам будет достаточно ограничиться изложением самой простой версии этой методики. Рассмотрим экономику в непрерывном времени и предположим, что производственная функция (3.1) удовлетворяет предположениям 1 и 2 главы 2. Дифференцируя равенство (3.1) по времени и отбрасывая временные индексы, получаем:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{F_A A}{Y}\frac{\dot{A}}{A} + \frac{F_K K}{Y}\frac{\dot{K}}{K} + \frac{F_L L}{Y}\frac{\dot{L}}{L}, \tag{3.2}$$

где мы обозначили частные производные функции F по ее аргументам как F_A, F_K и F_L. Обозначим темпы роста выпуска, количества физического капитала и занятости как $g \equiv \dot{Y}/Y$, $g_K \equiv \dot{K}/K$ и $g_L \equiv \dot{L}/L$ соответственно, а также введем новую переменную:

$$x \equiv \frac{F_A A}{Y}\frac{\dot{A}}{A},$$

которая будет обозначать вклад технологии в экономический рост. Также введем эластичности выпуска по отношению к капиталу и труду $\varepsilon_k \equiv F_K K/Y$ и $\varepsilon_l \equiv F_L L/Y$ (см. также уравнение (3.9)). Тогда в новых обозначениях из равенства (3.2) вытекает что

$$x = g - \varepsilon_k g_K - \varepsilon_l g_L.$$

Заметим, что это уравнение является всего лишь тавтологией. Однако при совершенной конкуренции на рынках факторов производства оно оказывается полезным при оценке роли вклада технологического прогресса в экономический рост. Действительно, на конкурентных рынках цены факторов производства определяются как $w = F_L$ и $R = F_K$ (уравнения (2.6) и (2.7) из предыдущей главы) и поэтому эластичности ε_k и ε_l становятся равны долям доходов факторов производства в национальном доходе $\alpha_K \equiv RK/Y$ и $\alpha_L \equiv wL/Y$. Объединяя все вышесказанное, получаем:

$$x = g - \alpha_K g_K - \alpha_L g L. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) называют фундаментальным уравнением бухгалтерии роста. Его можно использовать для оценки вклада технологического прогресса в экономический рост, используя данные по долям дохода факторов производства в национальном доходе, темпу роста выпуска, темпу роста занятости и темпу роста запаса капитала. Вклад технологического прогресса в экономический рост x обычно называют совокупной факторной производительностью (СФП) или мультифакторной производительностью.

В частности, обозначая эмпирические оценки символом «крышка» ^, для оценки СФП получаем:

$$\hat{x}(t) = g(t) - \alpha_K(t) g_K(t) - \alpha_L(t) g_L(t). \tag{3.4}$$

В уравнении (3.4) мы поставили крышку только над переменной x, однако читатель может принять во внимание тот факт, что все показатели в правой части уравнения (3.4) также являются оценками, основанными на целом ряде предположений, сделанных при построении статистики национальных счетов и других источников экономических данных.

В силу того что уравнение (3.4) базируется на измерении моментальных изменений переменных (их производных), оно выполняется в точности только в непрерывном времени. На практике же мы наблюдаем изменения макроэкономических показателей в течение дискретных временных интервалов, например в течение года (иногда, если это позволяют данные, в течение квартала или месяца). В случае дискретного времени при использовании уравнения (3.4) может возникнуть следующая возможная проблема: если доли дохода факторов производства в национальном доходе изменяются на рассматриваемом временном горизонте, должны ли мы использовать значения α_K и α_L на начало или на конец изучаемого периода времени? Можно показать, что использование значений как на начало периода, так и на его конец может привести к смещению оценки вклада СФП в экономический рост $\hat{x}$. Такое смещение в особенности вероятно в том случае, если длина временного промежутка между двумя рассматриваемыми дискретными периодами велика (см. упражнение 3.1). Наилучшим способом избежать этого смещения оценки является использование наиболее высокочастотных доступных данных.

Принимая доступность экономических данных как данность, попробуем выяснить, как мы можем использовать методологию бухгалтерии роста при наличии лишь дискретных данных. Наиболее общепринятым методом преодоления вышеуказанной проблемы является использование значений долей факторов, рассчитанных как их средние значения между начальным и конечным периодом наблюдений. Поэтому в дискретном времени версия уравнения (3.4) для изменения между периодами времени t и $t + 1$ будет выглядеть как

$$\hat{x}_{t+1,t} = g_{t+1,t} - \bar{\alpha}_{K,t+1,t} g_{K,t+1,t} - \bar{\alpha}_{L,t+1,t} g_{L,t+1,t}, \tag{3.5}$$

где переменная $g_{t+1,t}$ обозначает темп роста выпуска между периодами t и $t + 1$, другие темпы роста определены аналогичным образом, и доли факторов производства

$$\bar{\alpha}_{K,t+1,t} \equiv \frac{\alpha_K(t) + \alpha_K(t+1)}{2} \text{ и } \bar{\alpha}_{L,t+1,t} \equiv \frac{\alpha_L(t) + \alpha_L(t+1)}{2}$$

рассчитаны как средние значения в периодах t и $t + 1$. Уравнение (3.5) является достаточно точной аппроксимацией уравнения (3.4) в случае, когда различия между периодами t и $t + 1$ малы и отношение капитала к труду изменяется в течение изучаемого периода времени незначительно.

В работе [Solow 1957] автор не только разработал методологию бухгалтерии роста, но также применил ее к данным по экономике США для получения предварительных оценок вкладов различных источников экономического роста в первой половине XX в. Боб Солоу задался следующим вопросом: какая доля изменения ВВП США может быть отнесена к вкладу увеличения количества факторов производства (труда и капитала), а какая — к вкладу технологического прогресса, рассчитываемого как остаток? Вывод Солоу оказался поразительным: большая часть экономического роста оказалась связанной именно с технологическим прогрессом. Этот результат, подчеркнувший важность технологического прогресса как причины экономического роста не только в теории, но и на практике, стал ключевым в макроэкономике. Именно поэтому экономисты, изучающие теорию роста, так внимательно изучают причины технологических различий во времени, между странами, отраслями экономики и отдельными фирмами.

Однако почти сразу после появления методики бухгалтерии роста, экономисты заметили, что использование ее для расчета вклада технологического прогресса в экономический рост обладает рядом недостатков. В работе [Moses, Abramovitz 1957] переменная $\hat{x}$ очень точно была названа мерой нашего неведения — действительно, она является остатком, который мы не смогли объяснить накоплением факторов производства, и решили называть его технологией. В своей крайней степени такой критический подход не совсем правилен: из уравнения (3.4) действительно следует, что переменная $\hat{x}$ соответствует технологическому прогрессу и поэтому методология бухгалтерии роста является примером использования *теории для интерпретации результатов измерения*. Однако на другом уровне такая критика представляется обоснованной. Например, если значения темпов роста занятости и количества капитала g_K и g_L оказались недооцененными, то наша оценка $\hat{x}$ будет больше фактического вклада технологии в рост. И на самом деле у нас есть целый ряд аргументов, позволяющих подозревать, что оценки Солоу и даже более поздние оценки лучшего качества действительно преуменьшают темпы роста факторов производства. Наиболее очевидной причиной возникновения ошибок измерения является то, что нам необходимо знать количество эффективных человеко-часов занятости, а не просто количество человеко-часов. Поэтому при измерении занятости в экономике очень важно, хотя и трудно, делать поправку на изменения в количестве человеческого капитала. Мы обсудим вопросы, связанные с человеческим капиталом, в параграфе 3.3 и, более подробно, в главе 10. Аналогично, измерение количества капитала также не является простой процедурой. В теоретических моделях капиталом считаются конечные товары, используемые как средство производства других товаров. Однако на практике капиталом считаются не только оборудование (машины), но и сооружения (здания). При измерении общего количества капитала, используемого в производстве, исследователю необходимо делать некоторые предположения об изменении относительных цен различных его типов с течением времени. Стандартный подход, давно используемый при построении статистики национальных счетов и в таких ее приложениях, как бухгалтерия роста, состоит в использовании данных по капитальным расходам. Однако если один и тот же тип оборудования сегодня оказывается дешевле, чем вчера (как, например, случилось с компьютерами), использование этого подхода приведет к занижению оценки значения g_K (читатель мог это увидеть из упражнения 2.27 из предыдущей главы). Следовательно, подстановка недооцененных значений переменных g_K и g_L в уравнение (3.4) очевидным образом приведет к преувеличению роли технологического прогресса как источника экономического роста. Также стоит отметить тот факт, что изменение относительных цен и качества различных товаров может привести к ошибкам измерения темпа роста выпуска g. Если эта оценка оказывается ниже его фактического значения, то это также приведет к недооценке значения переменной $\hat{x}$.

Экономисты до сих пор спорят по поводу того, какие поправки необходимо делать при измерениях для учета изменений качества рабочей силы и используемого капитала, чтобы получить наилучшие оценки вклада технологии в экономический рост. Например, Дейл Йоргенсон показал, что использование поправок на качество рабочей силы и капитала может привести к очень значительному снижению (вполне возможно почти до нуля) оценки вклада остаточного члена (технологии) в экономический рост (см., например: [Jorgenson, Gollop, Fraumeni 1987] и [Jorgenson 2005]). Все вышеизложенные рассуждения также оказываются важными при оценке вклада различных факторов в межстрановые различия в уровне выпуска. Прежде чем переходить к этому вопросу, далее мы рассмотрим ряд эмпирических приложений модели Солоу с использованием регрессионного анализа.

3.2. Модель Солоу и регрессионный анализ

Другим популярным методом применения модели Солоу к анализу экономических данных являются так называемые *регрессии роста*, которые состоят в оценке регрессионных моделей с темпом роста экономики определенной страны в левой части уравнения. Они стали широко использоваться после выхода работы [Barro 1991]. Чтобы хорошо понять интуицию, стоящую за этими регрессиями и их основные недостатки, вернемся к базовой модели Солоу с постоянным темпом роста населения и трудоинтенсивным технологическим прогрессом в непрерывном времени. Напомним, что равновесие в этой модели описывается следующими уравнениями:

$$y(t) = A(t)f(k(t)), \tag{3.6}$$

и

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{sf(k(t))}{k(t)} - (\delta + g + n), \tag{3.7}$$

где $A(t)$ обозначает трудоинтенсивную (нейтральную по Харроду) технологическую переменную, $k(t) \equiv K(t)/(A(t)L(t))$ — эффективное отношение капитала к труду, а $f(\cdot)$ — подушевая производственная функция. Уравнение (3.7) повторяет уравнение (2.51) предыдущей главы. Дифференцирование уравнения (3.6) по времени и деление обеих частей полученного равенства на $y(t)$ приводит к следующему равенству:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g + \varepsilon_k(k(t))\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}, \tag{3.8}$$

где

$$\varepsilon_k(k(t)) \equiv \frac{f'(k(t))k(t)}{f(k(t))} \in (0,1) \tag{3.9}$$

является эластичностью функции $f(\cdot)$. Утверждение о том, что она лежит между 0 и 1, следует из предположения 1. Например, для производственной технологии типа Кобба—Дугласа из примера 2.1 из предыдущей главы $\varepsilon_k(k(t)) = \alpha$ (т. е. постоянна и не зависит от значения $k(t)$; см. пример 3.1). Однако в общем случае эта эластичность является функцией от $k(t)$.

Далее рассмотрим разложение уравнения (3.7) в ряд Тейлора до линейного члена по переменной $\log k(t)$ вокруг точки стационарного равновесия k^* (используя теорему А.22 из приложения А и равенства $\partial y/\partial \log x \equiv (\partial y/\partial x)\cdot x$). Из этого разложения следует, что динамика $k(t)$ в окрестности точки k^* описывается следующим уравнением:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \approx \left(\frac{sf(k^*)}{k^*} - \delta - g - n\right) +$$
$$+\left(\frac{f'(k^*)k^*}{f(k^*)} - 1\right) s\frac{f(k^*)}{k^*}(\log k(t) - \log k^*) \approx$$
$$\approx \left(\varepsilon_k(k^*) - 1\right)(\delta + g + n)(\log k(t) - \log k^*).$$

Мы используем в этом равенстве символ $\approx$ для того, чтобы подчеркнуть, что оно является лишь аппроксимацией, игнорирующей члены более высокого, чем линейный, порядка малости. В частности, первое приближенное равенство получается простым дифференцированием функции $\dot{k}(t)/k(t)$ по переменной $\log k(t)$ и вычисления значения производной в точке k^* (то есть игнорируя все члены, кроме линейного). Второе приближенное равенство вытекает из того, что первый член в первом равенстве равен нулю по определению стационарного равновесия k^* (напомним, что из уравнения (2.52) предыдущей главы следует, что $sf(k^*)/k^* = \delta + g + n$) и из определения эластичности функции f, $\varepsilon_k(k(t))$. Теперь, подставляя это приближенное равенство в уравнение (3.8), получаем:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \approx g - \varepsilon_k(k^*)(1 - \varepsilon_k(k^*))(\delta + g + n)(\log k(t) - \log k^*).$$

Определим значение выпуска на душу населения в стационарном равновесии как $y^* \equiv A(t)f(k^*)$. Оно определяет значение выпуска на душу населения в случае, если эффективная капиталовооруженность экономики достигла стационарного равновесия, а значение технологии равно ее значению в момент времени t. Используя разложение выражения для $\log y(t)$ в ряд Тейлора до линейного члена по переменной $\log k(t)$ вокруг точки $\log k^*(t)$, получаем следующее уравнение:

$$\log y(t) - \log y^*(t) \approx \varepsilon_k(k^*)(\log k(t) - \log k^*).$$

Объединяя это равенство с предыдущим, получаем следующее уравнение, описывающее динамику сходимости к стационарному равновесию:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \approx g - (1 - \varepsilon_k(k^*))(\delta + g + n)(\log y(t) - \log y^*(t)). \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) явным образом демонстрирует, что в модели Солоу есть два источника роста выпуска на душу населения: первый — технологический прогресс, проходящий с темпом g, второй — сходимость к стационарному равновесию. Появление последнего является следствием влияния разрыва между текущим значением выпуска на душу населения и его значением в стационарном равновесии на темп накопления капитала (напомним, что $0 < \varepsilon_k(k^*) < 1$). Интуитивно это значит, что чем ниже находится страна по отношению к своему значению отношения капитала к труду в стационарном равновесии, тем быстрее она растет. Мы уже наблюдали это свойство на рис. 2.7 в предыдущей главе.

Еще одна важная деталь, которую можно заметить из уравнения (3.10), состоит в том, что скорость сходимости к стационарному равновесию, равная произведению $(1 - \varepsilon_k(k^*))(\delta + g + n)$ — множителю перед расстоянием от $\log y(t)$ до $\log y^*(t)$, зависит от значения величины $\delta + g + n$ и от эластичности производственной функции $\varepsilon_k(k^*)$. Влияние обоих этих множителей можно легко проинтерпретировать интуитивно. Как было показано в предыдущей главе, величина $\delta + g + n$ определяет темп, с которым должно идти восстановление эффективной капиталовооруженности экономики. Чем выше этот темп восстановления, тем больше количество необходимых инвестиций (вспомните рис. 2.7 из предыдущей главы) и больше необходимости в более быстром достижении стационарного равновесия. С другой стороны, в случае когда значение эластичности $\varepsilon_k(k^*)$ высоко, производственная функция приближается к линейной (типа AK) функции, и, как было показано в предыдущей главе, тогда сходимость должна быть медленной. В крайнем случае, когда величина $\varepsilon_k(k^*)$ равна 1, мы приходим к модели AK, в которой сходимость отсутствует.

Пример 3.1 (Производственная функция Кобба—Дугласа и сходимость)

Рассмотрим коротко производственную функцию Кобба—Дугласа из примера 2.1 $Y(t) = A(t)K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$. Из такого представления вытекает, что подушевая производственная функция имеет вид $y(t) = A(t)k(t)^{\alpha}$ и, как было отмечено выше, для эластичности справедливо равенство $\varepsilon_k(k(t)) = \alpha$. Поэтому уравнение (3.10) принимает следующий вид:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \approx g - (1-\alpha)(\delta + g + n)(\log y(t) - \log y^*(t)). \tag{3.11}$$

Это уравнение позволяет нам откалибровать значение скорости сходимости к стационарному равновесию. Под калибровкой мы понимаем получение оценки переменной, используя эмпирически правдоподобные значения параметров модели. Рассмотрим относительно развитую экономику. Подходящим для нее набором параметров будет следующий: $g \approx 0{,}02$, что означает рост дохода на душу населения примерно на 2% в год, $n \approx 0{,}01$, что означает прирост населения с темпом около 1% в год, и $\delta \approx 0{,}05$, что соответствует амортизации капитала с темпом около 5% в год. Вспомним из предыдущей главы, что доля дохода капитала в национальном доходе примерно равна $^1/_3$, и поэтому для параметризации производственной функции Кобба—Дугласа положим $\alpha \approx {}^1/_3$. Подставляя эти значения параметров в уравнение (3.11), находим, что скорость сходимости экономики, равная множителю перед членом $\log y(t) - \log y^*(t)$, составляет около 0,054 ($\approx 0{,}67 \times 0{,}08$). Это значение соответствует очень быстрой сходимости, и из него следует, что разрыв между двумя схожими странами с одинаковыми технологиями, нормой амортизации капитала и темпом роста населения должен сокращаться довольно быстро. Например, можно показать, что при такой параметризации экономики разрыв между двумя схожими странами сокращается в два раза за чуть более десяти лет (см. упражнение 3.4). Очевидно, что такая высокая скорость сходимости противоречит эмпирическим наблюдениям, сделанным нами в главе 1. ■

Используя аппроксимацию для случая дискретного времени, уравнение (3.10) можно трансформировать в следующее регрессионное уравнение:

$$g_{i,t,t-1} = b^0 + b^1 \log y_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t}, \tag{3.12}$$

где $g_{i,t,t-1}$ обозначает темп роста экономики страны i между периодами $t-1$ и t, $\log y_{i,t-1}$ — начальное (в период $t-1$) значение логарифма выпуска на душу населения в стране i, а $\varepsilon_{i,t}$ — случайная ошибка, описывающая влияние всех неучтенных факторов. Оценивания регрессий такого вида проводились во многих работах, включая [Baumol 1986; Barro 1991; Barro, Sala-i-Martin 1992]. При оценивании подобной регрессии на выборке основных стран ОЭСР оценка коэффициента b^1 действительно получается отрицательной, что означает, что такие страны, как Ирландия, Греция, Испания, Португалия, которые были бедны по окончании Второй мировой войны, в дальнейшем росли быстрее, чем остальные страны, как мы уже убедились из рис. 1.14 главы 1.

Однако из рис. 1.13 главы 1 отчетливо видно, что, если мы в качестве выборки будем использовать все страны мира, у нас нет свидетельств того, что оценка коэффициента b^1 окажется отрицательной. Наоборот, рисунок убеждает нас в том, что она должна быть положительной. Другими словами, у нас нет эмпирических доказательств сходимости в масштабе мировой экономики. Однако, как мы показали в предыдущей главе, понятие безусловной сходимости может оказаться слишком ограничивающим. Оно требует сокращения со временем разрыва в доходах между любыми двумя странами независимо от уровня технологического развития, количества инвестиций, экономической политики и политических институтов в этих странах. Если они действительно различаются по этим характеристикам, то модель Солоу *не* предсказывает сходимости уровней доходов для них. Действительно, в этом случае значения величины $y^*(t)$ будут различными для разных стран и каждая страна будет сходиться к своей собственной специфической сбалансированной траектории дохода на душу населения. Поэтому в мире, где страны различаются по своим характеристикам, более подходящей версией регрессионного уравнения (3.12) будет следующая:

$$g_{i,t,t-1} = b_i^0 + b^1 \log y_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t}. \qquad (3.13)$$

Ее основное отличие состоит в том, что в данном случае значения константы b_i^0 различны для разных стран (в общем случае значения коэффициента b^1, который измеряет скорость сходимости, также должны быть различными, однако в эмпирических исследованиях их полагают неизменными, что сделаем и мы, чтобы упростить выводы). Коэффициент b_i^0 можно моделировать как функцию от различных характеристик страны.

Если уравнение (3.13) является истинным в том смысле, что модель Солоу действительно описывает реальный мир, однако некоторые определяющие факторы экономического роста различаются по странам, то уравнение (3.12) не сможет хорошо описать реальные данные. В этом случае у нас нет гарантии того, что оценка коэффициента b^1 в регрессии (3.12) окажется отрицательной даже в случае наличия сходимости, вытекающей из модели Солоу. Действительно, естественно ожидать, что $\mathrm{Cov}(b_i^0, \log y_{i,t-1}) > 0$ (где Cov обозначает ковариацию в генеральной совокупности), так как экономики с некоторыми занижающими рост характеристиками, скорее всего, будут иметь более низкие значения, как начального выпуска, так и выпуска в стационарном равновесии. Поэтому в случае, если данные описываются уравнением (3.13), при оценивании уравнения (3.12) на них будет возникать положительное смещение в оценке коэффициента b^1, что приводит к меньшей вероятности получения ее отрицательного значения.

Принимая во внимание вышеупомянутые замечания, Р. Барро и К. Сала-и-Мартин в работах: [Barro 1991] и [Barro, Sala-i-Martin 1992, 2004] предпочитают вести анализ в рамках подхода условной сходимости. Это означает, что сходимость в рамках модели Солоу должна приводить к отрицательному значению оценки коэффициента b^1 в случае, если значение коэффициента b_i^0 может принимать различные значения для разных стран. Для эмпирической проверки утверждения об условной сходимости они оценивают модели, в которых значение b_i^0 предполагается некоторой функцией от многих переменных, включая уровень образования мужчин, уровень образования женщин, показатели рождаемости, долю инвестиций в ВВП, долю государственного потребления в ВВП, инфляцию, изменения условий торговли, вовлеченность экономики в международную торговлю и такие институциональные характеристики, как показатели развития демократии и закона. Регрессионное уравнение, которое они оценивают, выглядит следующим образом:

$$g_{i,t,t-1} = \mathbf{X}_{i,t}^T \boldsymbol{\beta} + b^1 \log y_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t}, \tag{3.14}$$

где $\mathbf{X}_{i,t}$ — вектор, включающий вышеупомянутые переменные (вместе с константой), $\boldsymbol{\beta}$ — вектор коэффициентов перед ними (напомним, что символ $\mathbf{X}^T$ обозначает вектор, транспонированный к вектору $\mathbf{X}$). Другими словами, такая спецификация предполагает, что коэффициент b_i^0 в уравнении (3.13) может быть приближен суммой $\mathbf{X}_{i,t}^T \boldsymbol{\beta}$. Их вывод состоит в том, что в согласии с требованиями условной сходимости оценивание регрессии (3.14) действительно приводит к отрицательному значению коэффициента b^1, хотя его абсолютное значение оказывается значительно меньшим, чем значение, полученное нами в примере 3.1.

Регрессии, схожие с регрессией (3.14), использовались не только для анализа условной сходимости, но и для оценки детерминантов экономического роста. В частности естественным образом можно предположить, что оценки коэффициентов в векторе $\boldsymbol{\beta}$ будут содержать информацию о причинно-следственных связях между различными переменными и темпом экономического роста. Например, тот факт, что оценки коэффициентов перед переменными, описывающими уровень образования населения, оказываются положительными, интерпретируют как подтверждение его положительного влияния на экономический рост. Простота формы регрессионных уравнений типа (3.14) и тот факт, что они позволяют объединить теорию и данные, привели к их частому использованию в литературе в последние два десятилетия.

Несмотря на это, в силу ряда причин подобные регрессии выглядят проблематично. Перечислим несколько из них.

1. Большинство, если не все, переменных, входящих в вектор $\mathbf{X}_{i,t}$, как и $\log y_{i,t-1}$, являются эконометрически эндогенными в том смысле, что они определяются совместно с темпом экономического роста между периодами $t-1$ и t. Например, те факторы, которые стали причиной того, что экономика была относительно бедна в 1950 г. (тем самым снизив значение $\log y_{i,t-1}$), будут влиять и на ее темп роста после 1950 г. *Или те факторы*, которые стали причиной малого количества инвестиций в физический и человеческий капитал, могут напрямую влиять и на темп экономического роста (через другие каналы, например технологию или эффективность использования факторов производства). Это очевидным образом приводит к смещенности (и отсутствию эконометрической согласованности) оценок коэффициентов регрессии. Это, в свою очередь, приводит к малой вероятности того, что оценки коэффициентов в векторе $\boldsymbol{\beta}$ согласуются с причинно-следственной связью вышеупомянутых характеристик экономики и ее потенциалом экономического роста. Можно предположить, что если мы

заинтересованы в проверке условной сходимости, то важным является значение коэффициента b^1, а не фактический смысл оценки вектора $\boldsymbol{\beta}$. Однако одно из базовых утверждений эконометрики состоит в том, что если переменные в $\mathbf{X}_{i,t}$ эконометрически эндогенны и оценки элементов вектора $\boldsymbol{\beta}$ оказываются несостоятельными, то и оценка параметра b^1 также будет несостоятельна, кроме случая, когда случайные величины $\mathbf{X}_{i,t}$ и $\log y_{i,t-1}$ независимы[1]. Этот результат ведет к трудности интерпретации оценки коэффициента b^1. Более того, краткосрочные колебания дохода на душу населения (например, в результате циклов экономической активности) и ошибки измерения данных также приводят к тому, что переменные в правой части регрессионного уравнения (3.14) становятся эконометрически эндогенными, что в *большинстве случаев* влечет отрицательное смещение в оценке коэффициента b^1. Предположим, например, что наблюдаемое значение выпуска на душу населения описывается уравнением $\tilde{y}_{i,t} = y_{i,t}\exp(u_{i,t})$, где переменная $y_{i,t}$ обозначает истинное значение выпуска на душу населения, а $u_{i,t}$ — случайная некоррелированная во времени ошибка. Если в регрессии используется переменная $\log \tilde{y}_{i,t}$, то случайная величина $u_{i,t-1}$ будет присутствовать и в левой, и в правой частях уравнения (3.14). Действительно, заметим что

$$\log \tilde{y}_{i,t} - \log \tilde{y}_{i,t-1} = \log y_{i,t} - \log y_{i,t-1} + u_{i,t} - u_{i,t-1}.$$

Для измеренного темпа роста имеем:

$$\tilde{g}_{i,t,t-1} \approx \log \tilde{y}_{i,t} - \log \tilde{y}_{i,t-1} = \log y_{i,t} - \log y_{i,t-1} + u_{i,t} - u_{i,t-1},$$

и поэтому в регрессионном уравнении

$$\tilde{g}_{i,t,t-1} = \mathbf{X}_{i,t}^T \boldsymbol{\beta} + b^1 \log \tilde{y}_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t}$$

ошибка измерения $u_{i,t-1}$ войдет как в случайную величину $\varepsilon_{i,t}$, так и в переменную $\log \tilde{y}_{i,t-1} = \log y_{i,t-1} + u_{i,t-1}$, стоящую в его правой части. Вследствие этого мы можем получить отрицательную оценку коэффициента b^1 даже в случае отсутствия условной сходимости.

2. Экономическая интерпретация регрессий типа (3.14) не всегда проста и очевидна. Множество регрессий такого типа, оцениваемых в литературе, содержат долю инвестиций в ВВП как элемент вектора $\mathbf{X}_{i,t}$ (и во всех из них он включает в себя переменные, связанные с уровнем образования рабочей силы). Однако в модели Солоу изменения в норме инвестиций (а также изменения в уровне образования в расширенной модели Солоу) являются основными каналами, через которые возможные детерминанты, включенные в вектор $\mathbf{X}_{i,t}$ (например, институты, открытость международной торговле), влияют на экономи-

[1] Пример случая возможной эндогенности этих переменных приведен в параграфе 3.4.

ческий рост. Следовательно, после включения нормы инвестиций и показателей образования в вектор $\mathbf{X}_{i,t}$ коэффициенты перед его другими элементами не будут отражать их полное влияние на экономический рост. Поэтому оценкам уравнения (3.14) с переменными, описывающими инвестиции, в правой части трудно дать теоретическое обоснование.

3. И последнее. Уравнение (3.10), на котором базируются описанные регрессии роста, было выведено нами из модели Солоу для закрытой экономики. Использование этого уравнения для описания различий в уровне доходов между странами или в темпах их экономического роста неявно подразумевает, что каждая страна является отдельным островом. *Иными словами*, мир моделируется как множество не связанных между собой экономик. В реальности же мы наблюдаем международную торговлю товарами, обмен интеллектуальными идеями, заимствования и кредитование на международном рынке капитала. Наличие связей между странами приводит к тому, что динамика их экономик будет описываться не уравнением (3.10), а системой уравнений, характеризующих равновесие для всей мировой экономики. Использование уравнения (3.10) для анализа межстрановых различий в экономическом росте часто может приводить к вводящим в заблуждение результатам (мы обсудим это в главах 18 и 19).

Вышеприведенные рассуждения не означают, что регрессии роста не несут в себе никакой информации. На некотором базовом уровне (опуская трудности, связанные с оценкой коэффициента b^1) эти регрессии могут быть использованы для интерпретации ключевых корреляций в данных. Знание структуры этих корреляций является важным начальным шагом в процессе построения правдоподобных эмпирических моделей.

В контексте вышесказанного дополнительным, и более удобным, подходом к регрессионному анализу условных корреляций в данных является следующая модель:

$$\log y_{i,t} = \alpha \log y_{i,t-1} + \mathbf{X}_{i,t}^T \boldsymbol{\beta} + \delta_i + \mu_t + \varepsilon_{i,t}, \tag{3.15}$$

где вектор δ_i включает в себя полный набор фиксированных эффектов для страны i, а вектор μ_t — полный набор временных эффектов для года t. Этот подход отличается от метода регрессий роста по ряду причин. Во-первых, в данной регрессии в левой части стоит уровень переменной, а не ее темп роста. Однако, так как $g_{i,t,t-1} \approx \log y_{i,t} - \log y_{i,t-1}$, это отличие является лишь манипуляцией уравнения (3.14). Более важным является то, что включение в данную регрессию фиксированных страновых эффектов, которые могут одновременно влиять на темп экономического роста, позволяет отделить их от интересующих нас переменных в правой части уравнения. Поэтому панельные регрессии типа (3.15) могут быть более информативными в анализе статистических взаимосвязей между различными экономическими показателями и доходом на душу населения. Однако стоит подчеркнуть, что включение в модель фиксированных эффектов не является панацеей для преодоления проблемы смещения, связанного с пропущенными переменными, и проблемы эконометрической эндогенности. Смещение в оценках коэффициентов в моделях одновременных уравнений часто возникает из-за изменяющихся во времени факторов и поэтому оно не может быть устранено лишь включением фиксированных эффектов. Более того, по мере того как некоторые переменные в векторе $\mathbf{X}_{i,t}$ сами медленно изменяются во времени, включение фиксированных эффектов может затруднить понимание статистических взаимосвязей между этими переменными и доходом на душу населения а также возможно увеличить смещение оценок коэффициентов, связанное с ошибками измерения данных в правой части уравнения.

Оставшаяся часть этой главы посвящена анализу других методов того, как модель Солоу может быть использована для анализа данных. Однако перед этим мы остановимся на анализе расширенной версии модели Солоу, включающей в себя человеческий капитал. Эта модель оказывается полезной во множестве эмпирических упражнений.

3.3. Модель Солоу с человеческим капиталом

Под человеческим капиталом мы будем понимать весь набор навыков, умений, уровня образования и других улучшающих производительность характеристик рабочей силы. Другими словами, человеческий капитал описывает количество эффективных единиц труда, содержащихся в общем количестве человеко-часов занятости.

Понятие «человеческий капитал» возникло как описание процесса инвестиций домохозяйств в свои навыки, умения и производственные возможности аналогично тому, как фирмы инвестируют в физический капитал — в обоих случаях для увеличения своей производительности. Важная работа Теда Шульца, Джейкоба Минсера и Гари Бекера привнесла понятие человеческого капитала на авансцену экономической науки. Все, что нам необходимо понимать на данный момент, состоит в том, что часы занятости, предоставляемые разными экономическими агентами, не содержат в себе одинакового количества эффективных единиц труда. Например, высококвалифицированный плотник может сделать стул за несколько часов, в то время как начинающему работнику для выполнения той же работы понадобится намного больше времени. Экономисты объясняют это тем, что высококвалифицированный плотник обладает большим запасом человеческого капитала, то есть один час его труда содержит в себе большее количество эффективных единиц труда. Теория человеческого капитала очень обширна и некоторые важные части этой теории освещены в главе 10. В данный момент наша цель более скромна: мы хотим исследовать, каким образом включение человеческого капитала позволяет модели Солоу лучше описать реальные данные. Включение человеческого капитала позволит нам ввести в модель все три непосредственных источника различий в уровне доходов между странами: физический капитал, человеческий капитал и технологии.

В этом параграфе мы остановимся на версии модели в непрерывном времени и предположим, что агрегированная производственная функция задается следующим аналогом уравнения 2.1:

$$Y = F(K, H, AL), \tag{3.16}$$

где переменная H обозначает человеческий капитал. Заметим, что такой вид производственной функции представляется необычным, так как в нем человеческий капитал H и часы занятости L отделены друг от друга как возможные факторы производства. Мы начнем с этой формы производственной функции, потому что она наиболее часто используется в литературе по теории экономического роста. Более микрообоснованные модели, рассмотренные в главе 10, предполагают, что человеческий капитал связан непосредственно с работниками. Мы обсудим вопросы, связанные с измерением количества человеческого капитала, на практике ниже. Изменим предположения 1 и 2 следующим образом.

Предположение 1′. *Производственная функция $F: \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+$ является дважды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет следующим условиям:*

$$\frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial K} > 0,\ \frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial H} > 0,\ \frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial L} > 0;$$

$$\frac{\partial^2 F(K,H,AL)}{\partial K^2} < 0,\ \frac{\partial^2 F(K,H,AL)}{\partial H^2} < 0,\ \frac{\partial^2 F(K,H,AL)}{\partial L^2} < 0.$$

Более того, функция F обладает свойством постоянной отдачи от масштаба по трем своим аргументам.

Предположение 2′. *Функция F удовлетворяет условиям Инада:*

$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial K} = \infty \text{ и } \lim_{K\to \infty} \frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial K} = 0 \text{ для всех } H > 0 \text{ и } AL > 0,$$

$$\lim_{H\to 0} \frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial H} = \infty \text{ и } \lim_{H\to \infty} \frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial H} = 0 \text{ для всех } K > 0 \text{ и } AL > 0,$$

$$\lim_{L\to 0} \frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial L} = \infty \text{ и } \lim_{L\to \infty} \frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial L} = 0 \text{ для всех } K,\ H,\ A > 0.$$

В дополнение предположим, что инвестиции в человеческий капитал происходят аналогично инвестициям в физический капитал: домохозяйства сберегают долю s_k своего дохода для инвестиций в физический капитал и долю s_h своего дохода для инвестиций в человеческий капитал. Амортизация человеческого капитала происходит по схожему принципу. Мы будем обозначать нормы амортизации физического и человеческого капитала соответственно δ_k и δ_h.

Аналогично базовой модели Солоу, предположим, что рост населения и трудоинтенсивный технологический прогресс происходят с постоянным темпом, то есть $\dot{L}(t)/L(t) = n$ и $\dot{A}(t)/A(t) = g$. Определим эффективные отношения человеческого и физического капитала к труду как

$$k(t) \equiv \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \text{ и } h(t) \equiv \frac{H(t)}{A(t)L(t)}.$$

Тогда, используя свойство постоянной отдачи от масштаба из предположения 1′, мы можем записать выпуск на единицу эффективного труда как

$$\hat{y}(t) \equiv \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} = F\left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}, \frac{H(t)}{A(t)L(t)}, 1\right) \equiv f\big(k(t), h(t)\big).$$

Делая выкладки, аналогичные сделанным в главе 2, получаем законы накопления физического и человеческого капитала $k(t)$ и $h(t)$:

$$\dot{k}(t) = s_k f\big(k(t), h(t)\big) - \big(\delta_k + g + n\big)k(t),$$

$$\dot{h}(t) = s_h f\big(k(t), h(t)\big) - \big(\delta_h + g + n\big)h(t).$$

Стационарное равновесие тогда можно определить как пару эффективных отношений физического и человеческого капитала к труду (k^*, h^*), удовлетворяющую следующим уравнениям:

$$s_k f(k^*, h^*) - (\delta_k + g + n)k^* = 0, \tag{3.17}$$

и

$$s_h f(k^*, h^*) - (\delta_h + g + n)h^* = 0. \tag{3.18}$$

Как и в базовой модели Солоу, сконцентрируем внимание на стационарном равновесии, в котором $k^* > 0$ и $h^* > 0$ (в случае $f(0, 0) = 0$ всегда существует тривиальное стационарное равновесие, в котором $k^* = h^* = 0$. Мы будем его игнорировать по тем же причинам, что и в предыдущей главе).

В начале докажем единственность стационарного равновесия. Чтобы увидеть это интуитивно, рассмотрим рис. 3.1, который построен на плоскости (k, h). Две кривые на нем представляют графики уравнений (3.17) и (3.18) (то есть соответствуют множествам точек, в которых $\dot{k} = 0$ и $\dot{h} = 0$). Обе кривые являются графиками возрастающих функций, поэтому

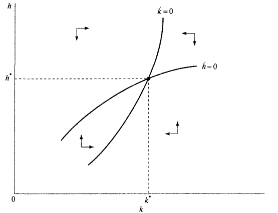


Рис. 3.1. Динамика отношения физического капитала к труду и отношения человеческого капитала к труду в модели Солоу с человеческим капиталом

большему значению человеческого капитала в равновесии будет соответствовать большее количество физического капитала. Более того, в доказательстве следующего утверждения будет показано, что график уравнения (3.18) всегда более пологий на плоскости (k, h) и поэтому два графика возрастающих функций могут пересечься только в одной точке.

Утверждение 3.1. *Предположим, что условия предположений 1′ и 2′ выполнены. Тогда в расширенной модели Солоу с человеческим капиталом существует единственное стационарное равновесие* (k^*, h^*).

Доказательство. В начале исследуем наклон графика уравнения (3.17), описывающего на плоскости (k, h) множество точек, где $\dot{k}=0$. Используя теорему о неявной функции (теорема A.25), получаем:

$$\left.\frac{dh}{dk}\right|_{\dot{k}=0} = \frac{(\delta_k + g + n) - s_k f_k(k^*, h^*)}{s_k f_h(k^*, h^*)}, \tag{3.19}$$

где $f_k \equiv \partial f/\partial k$. Переписывая уравнение (3.17), получаем $s_k f(k^*, h^*)/k^* - (\delta_k + g + n) = 0$. Далее вспомним, что функция f в силу предположения 1′ является строго вогнутой по k и $f(0, h^*) \geq 0$. Тогда получаем следующее неравенство:

$$f(k^*, h^*) > f_k(k^*, h^*)k^* + f(0, h^*) > f_k(k^*, h^*)k^*.$$

Следовательно, $\delta_k + g + n - s_k f_k(k^*, h^*) > 0$ и значение выражения (3.19) строго положительно.

Аналогичным образом определим функцию f_h как $f_h \equiv \partial f/\partial h$ и применим теорему о неявной функции к множеству точек $\dot{h} = 0$, описываемому уравнением (3.18). Тогда

$$\left.\frac{dh}{dk}\right|_{\dot{h}=0} = \frac{s_h f_k\left(k^*, h^*\right)}{(\delta_h + g + n) - s_h f_h(k^*, h^*)}. \qquad (3.20)$$

Используя аргументацию, аналогичную вышеприведенной, нетрудно показать, что это выражение также является строго положительным.

Далее докажем, что, если условия (3.17) и (3.18) выполнены, значение выражения (3.19) превышает значение выражения (3.20). Во-первых, заметим, что

$$\left.\frac{dh}{dk}\right|_{\dot{h}=0} < \left.\frac{dh}{dk}\right|_{\dot{k}=0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{s_h f_k(k^*, h^*)}{(\delta_h + g + n) - s_h f_h(k^*, h^*)} < \frac{(\delta_k + g + n) - s_k f_k(k^*, h^*)}{s_k f_h(k^*, h^*)}$$

$$\Updownarrow$$

$$s_k s_h f_k f_h < s_k s_h f_k f_h + (\delta_h + g + n)(\delta_k + g + n) -$$
$$-(\delta_h + g + n) s_k f_k - (\delta_k + g + n) s_h f_h.$$

Теперь, используя уравнения (3.17) и (3.18) для подстановок $(\delta_k + g + n) = s_k f(k^*, h^*)/k^*$ и $(\delta_h + g + n) = s_h f(k^*, h^*)/h^*$, заметим, что предыдущее неравенство эквивалентно следующему:

$$f(k^*, h^*) > f_k(k^*, h^*)k^* + f_h(k^*, h^*)h^*,$$

которое выполняется в силу строгой вогнутости функции $f(k^*, h^*)$.

Для доказательства существования стационарного равновесия заметим, что из предположения 2′ следует, что

$$\lim_{h \to 0} f(k, h)/h = \infty,\ \lim_{k \to 0} f(k, h)/k = \infty,\ \lim_{h \to \infty} f(k, h)/h = 0,$$
$$\text{и } \lim_{k \to \infty} \frac{f(k, h)}{k} = 0,$$

и поэтому графики уравнений (3.17) и (3.18) выглядят так, как на рис. 3.1: то есть график уравнения (3.17) находится ниже графика уравнения (3.18) при $k \to 0$ и $h \to 0$ и выше графика уравнения (3.18) при $k \to \infty$ и $h \to \infty$. Из этого следует, что два графика должны пересечься по меньшей мере один раз. ■

Это утверждение показывает, что в расширении модели Солоу с человеческим капиталом имеется единственное стационарное равновесие. Упражнения по сравнительной статике для него схожи с теми, которые мы выполняли для базовой модели Солоу (см. упражнение 3.7). Самым важным следствием из них является то, что увеличение как параметра s_k, так и параметра s_h приводит к большему значению нормализованного выпуска на душу населения $\hat{y}^*$.

Далее, переходя к межстрановым сравнениям, рассмотрим множество стран, имеющих одинаковое значение темпа роста трудоинтенсивного технологического прогресса g. Те из них, которые имеют бóльшую склонность к инвестициям в физический и человеческий капитал, окажутся относительно более богатыми. Выводы такого типа могут быть проверены эмпирически для того, чтобы выяснить, может ли расширенная модель Солоу (со схожими технологическими возможностями для разных стран) быть использована для анализа межстрановых различий уровня дохода на душу населения. Прежде чем перейти к такому анализу, докажем в следующем утверждении, что единственное стационарное состояние модели является глобально устойчивым.

Утверждение 3.2. *Предположим, что условия предположений 1′ и 2′ выполнены. Тогда единственное стационарное состояние расширенной модели Солоу с человеческим капиталом* (k^*, h^*) *является глобально устойчивым в том смысле, что для любых начальных условий* $k(0) > 0$ *и* $h(0) > 0$ *на равновесной траектории справедливо* $(k(t), h(t)) \to$ $\to (k^*, h^*)$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство. См. упражнение 3.6. ■

Рис. 3.1 помогает увидеть интуицию, стоящую за этим результатом. Из него видно, что закон изменения переменных k и h зависит от того, находится ли экономика выше или ниже двух графиков уравнений (3.17) и (3.18), представленных на рисунке, показывающих множества точек, где $\dot{k} = 0$ и $\dot{h} = 0$ соответственно. Справа от графика уравнения (3.17) в экономике имеется большое количество физического капитала по отношению к количеству человеческого капитала и, следовательно, выполняется неравенство $\dot{k}(t) < 0$. Слева от этого графика верно обратное: $\dot{k}(t) > 0$. Аналогичным образом снизу от графика уравнения (3.18) имеется небольшое количество человеческого капитала по отношению к количеству физического капитала и поэтому $\dot{h}(t) > 0$. Над этим графиком верно обратное: $\dot{h}(t) < 0$. Принимая во внимание полученные направления движения переменных k и h, легко убедиться в глобальной устойчивости стационарного состояния модели.

Пример 3.2 (Расширенная модель Солоу с производственной функцией Кобба—Дугласа). Рассмотрим специальный случай модели, представленной выше, с производственной функцией Кобба—Дугласа. А именно предположим, что агрегированная производственная функция имеет следующий вид:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} H(t)^{\beta} (A(t)L(t))^{1-\alpha-\beta}, \tag{3.21}$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ и $\alpha + \beta < 1$. Выпуск на единицу эффективного труда тогда может быть выражен как $\hat{y}(t) = k^{\alpha}(t)h^{\beta}(t)$, где функции $\hat{y}(t)$, $k(t)$ и $h(t)$ определены так же, как и ранее. Используя функциональную форму (3.21) и уравнения (3.17) и (3.18), получаем следующее описание стационарного равновесия:

$$k^{*} = \left(\left(\frac{s_k}{n+g+\delta_k}\right)^{1-\beta}\left(\frac{s_h}{n+g+\delta_h}\right)^{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, \tag{3.22}$$

$$h^{*} = \left(\left(\frac{s_k}{n+g+\delta_k}\right)^{\alpha}\left(\frac{s_h}{n+g+\delta_h}\right)^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}},$$

из которого видно, что увеличение нормы инвестиций в физический капитал увеличивает не только значение k^{*}, но и значение h^{*} в стационарном равновесии. Это отражает влияние того факта, что увеличение нормы инвестиций в физический капитал, увеличивая значение k^{*}, увеличивает общий выпуск в экономике и поэтому инвестиции в образование (так как значение параметра s_h остается постоянным). Используя равенства (3.22), получаем значение выпуска на единицу эффективного труда в стационарном равновесии:

$$\hat{y}^{*} = \left(\frac{s_k}{n+g+\delta_k}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{s_h}{n+g+\delta_h}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}. \tag{3.23}$$

Уравнение (3.23) показывает, что размер относительного вклада в выпуск норм инвестиций в физический и человеческий капитал зависит от значений долей физического и человеческого капитала в производственной функции: чем выше значение параметра α, тем более важным оказывается параметр s_k, чем выше значение параметра β, тем более важным становится параметр s_h. ■

3.4. Модель Солоу и межстрановые различия в уровне доходов: регрессионный анализ данных

3.4.1. Экономика, описываемая расширенной моделью Солоу

Альтернативой регрессиям роста, описанным в параграфе 3.2, является изучение выводов модели Солоу о стационарном равновесии. Это направление исследований началось с важной работы [Mankiw, Romer, Weil 1992] (далее MPB). Авторы использовали модель с производственной функцией Кобба—Дугласа, описанную в примере 3.2, и предположили, что мир состоит из $j = 1, 2, ..., J$ стран, каждая из которых изолирована от остальных, и поэтому динамика их экономик описывается законами модели Солоу. Другими словами, мы опять делаем предположение о том, что каждую страну можно представлять как отдельный остров. Несмотря на то что такое предположение выглядит непривлекательным в силу вышеприведенных аргументов, большинство эмпирических исследований начинают с него. Поэтому оно будет полезной начальной точкой в нашем обсуждении вопроса о том, может ли стандартная модель Солоу быть использована для надлежащего описания причин межстрановых различий в уровне дохода на душу населения.

Следуя примеру 3.2, предположим, что страны $j = 1, 2, ..., J$ обладают следующей агрегированной производственной функцией:

$$Y_j(t) = K_j(t)^{\alpha} H_j(t)^{\beta} (A_j(t) L_j(t))^{1-\alpha-\beta}.$$

В случае такой производственной функции базовая модель Солоу является частным случаем расширенной модели Солоу при $\beta = 0$. Во-первых, предположим, что страны различаются значениями своих норм сбережений $s_{k,j}$ и $s_{h,j}$, темпом роста населения n_j и темпом роста технологического прогресса $\dot{A}_j(t)/A_j(t) = g_j$. Как обычно, введем переменные $k_j \equiv K_j/A_jL_j$ и $h_j \equiv H_j/A_jL_j$. Так как нашим основным интересом сейчас является изучение межстрановых различий в доходах, а не динамика каждой экономики во времени, сосредоточим внимание на состоянии мира, когда каждая страна находится в стационарном равновесии (то есть игнорируя переходную динамику сходимости, которую мы изучали в предыдущем параграфе). Если экономики стран находятся не очень далеко от своих стационарных равновесий, такое предположение не будет значительно ограничивать общность наших рассуждений. При этом такой подход не будет подходящим для описания стран, испытывающих бурный рост или значительное сокращение экономики как в некоторых примерах, приведенных нами в главе 1.

В предположении о нахождении экономик в стационарном равновесии уравнения, аналогичные (3.22), будут выполняться и поэтому значения отношений физического и человеческого капитала к эффективному труду на траектории сбалансированного роста в стране j (k_j^*, h_j^*) будут задаваться ими. Тогда, используя уравнение (3.23), получаем значение дохода на душу населения в стационарном равновесии в стране j:

$$y_j^*(t) \equiv \frac{Y(t)}{L(t)} = A_j(t) \left(\frac{s_{k,j}}{n_j + g_j + \delta_k} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_{h,j}}{n_j + g_j + \delta_h} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}. \quad (3.24)$$

Здесь переменная $y_j^*(t)$ обозначает выпуск на душу населения в стране j на ТСР. Из уравнения (3.24) непосредственно следует, что если значения параметров g_j различаются между странами, то уровни дохода на душу населения в них будут расходиться, так как в этом случае множители $A_j(t)$ будут расти с различными темпами. Как было показано в главе 1, мы действительно видим некоторые эмпирические подтверждения такой динамики мировой экономики, однако мировое распределение дохода на душу населения может быть приближено относительно стабильной функцией распределения. Этот вопрос сейчас глубоко изучается экономистами, и среди них идет активная дискуссия на тему, должно ли межстрановое распределение дохода на душу населения в послевоенную эпоху моделироваться с помощью расширяющейся или стабильной функции распределения. Расширяющееся распределение будет соответствовать случаю, когда значения параметров g_j различаются между странами, а предположение стабильного распределения накладывает требования равенства темпов роста технологического прогресса g во всех странах (это было показано в главе 1). Г. Мэнкью, Д. Ромер и Д. Вейл используют второй подход и предполагают, что технологические изменения проходят с одним и тем же темпом роста g во всех странах.

Предположение об общем темпе технологического прогресса: $A_j(t) = \bar{A}_j \exp(gt)$.

Другими словами, страны различаются по *уровню* развития технологии в них, а именно по начальному запасу технологических знаний $\bar{A}_j$, но имеют общий темп роста запаса технологий g. Используя сделанные предположения и уравнение (3.24) и переходя к логарифмам, нетрудно получить следующее удобное уравнение для дохода в стране $j = 1, 2, ..., J$ на ТСР:

$$\log y_j^*(t) = \log \bar{A}_j + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\log\left(\frac{s_{k,j}}{n_j + g + \delta_k}\right) +$$

$$+ \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\log\left(\frac{s_{h,j}}{n_j + g + \delta_h}\right). \qquad (3.25)$$

Уравнение (3.25) выглядит простым и привлекательным и может быть оценено на выборке межстрановых данных. Оценки параметров $s_{k,j}$, $s_{h,j}$ и n_j могут быть получены на имеющихся временных рядах. Затем, вместе с предположениями о значениях констант δ_k, δ_h и g, эти оценки могут быть использованы для построения двух ключевых переменных в правой части уравнения (3.25). После этого его можно оценить с помощью метода наименьших квадратов (делая регрессию дохода на душу населения на построенные переменные) и получить оценки коэффициентов α и β.

Для аппроксимации норм амортизации физического и человеческого капитала и темпа роста мировой экономики МРВ делают предположения, что $\delta_k = \delta_h = \delta$ и $\delta + g = 0{,}05$. Такой выбор значений параметров выглядит произвольным, однако их точные значения не важны для оценивания уравнения (3.25). Стандартным выбором для аппроксимации значений параметров $s_{k,j}$ в литературе является средняя норма инвестиций (отношение инвестиций к ВВП). Нормы инвестиций, средние тепы роста населения и значения логарифма выпуска на душу населения были взяты из базы данных Р. Саммерса — А. Хестона, которую мы обсуждали в главе 1. В дополнение МРВ использовали долю людей, учащихся в школе, как меру нормы инвестиций в человеческий капитал $s_{h,j}$. Мы вернемся к обсуждению этой переменной ниже.

Этих предположений недостаточно для получения состоятельных оценок коэффициентов в уравнении (3.25), так как переменная $\log \bar{A}_j$ является ненаблюдаемой (по меньшей мере для эконометриста) и поэтому войдет в ошибку при оценивании уравнения. Из большинства приемлемых моделей экономического роста следует, что переменная, описывающая технологические различия стран — $\log \bar{A}_j$, будет коррелирована с нормами инвестиций в физический и человеческий капитал. Поэтому при оценивании уравнения (3.25) эконометрист столкнется со стандартной проблемой смещения оценок в связи с пропущенными переменными и, таким образом, получит несостоятельные оценки коэффициентов. Состоятельность оценок будет следствием более сильных предположений, чем предположение об общем темпе технологического прогресса. Поэтому, неявным образом, МРВ делают следующее важное предположение.

Ортогональность технологий в разных странах: $\bar{A}_j = \varepsilon_j A$, где переменные ε_j ортогональны ко всем остальным переменным.

В предположении об ортогональности технологий переменная $\log \bar{A}_j$, являющаяся частью ошибки при оценивании уравнения, ортогональна всем ключевым переменным в его правой части, поэтому оценки коэффициентов будут состоятельны.

3.4.2. Результаты оценивания Г. Мэнкью, Д. Ромера и Д. Вейла

Вначале МРВ оценивают уравнение (3.25) без введения человеческого капитала (т. е. предполагая $\beta = 0$) в кросс-секционной выборке стран, не производящих нефть. А именно в этом случае они оценивают уравнение:

$$\log y_j^* = \text{constant} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\log(s_{k,j}) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\log(n_j + g + \delta_k) + \varepsilon_j.$$

Это уравнение получается из уравнения (3.25) после подстановки $\beta = 0$ и приведения его к единой кросс-секции. В добавление члены $\log s_{k,j}$ и $\log(n_j + g + \delta_k)$ в нем разделены для возможности проведения теста о том, что коэффициенты перед ними равны по абсолютному значению и имеют противоположные знаки. Также в уравнение включена ошибка ε_j, которая несет информацию обо всех пропущенных переменных, влияющих на величину дохода на душу населения.

Таблица 3.1

Оценки базовой модели Солоу

	МРВ 1985	Продолженные 1985	Данные 2000
$\log s_k$	1,42 (0,14)	1,01 (0,11)	1,22 (0,13)
$\log(n+g+\delta)$	−1,97 (0,56)	−1,12 (0,55)	−1,31 (0,36)
Скорректированный R^2	0,59	0,49	0,49
Полученное значение α	0,59	0,50	0,55
Количество наблюдений	98	98	107

Примечание: в скобках приведены стандартные ошибки.

Результаты оценивания МРВ приведены в первой колонке таблицы 3.1. Они получены повторением их процедуры для исходной выборки (в скобках приведены стандартные ошибки коэффициентов). Из них следует, что значение выражения $\alpha/(1-\alpha)$ примерно равно 1,4, откуда следует, что значение параметра α находится около $^2/_3$. Так как α является долей дохода капитала в национальном доходе, его значение должно быть около $^1/_3$ (вспомните рис. 2.11). Таким образом, оценивание подобной регрессии без включения человеческого капитала приводит к переоценке значения параметра α. В колонках 2 и 3 табл. 3.1 приведены оценки такой регрессии с использованием более длинных рядов данных. В этом случае модель чуть хуже описывает данные, но общая картина остается такой же. Полученное значение коэффициента α оказывается чуть меньшим, чем в случае оригинальных данных МРВ, но оно все еще остается значительно выше $^1/_3$ — значения, вытекающего из логики рассматриваемой модели.

Наиболее естественной причиной получения высоких значений коэффициента α является то, что ошибка ε_j может быть коррелирована с переменной $\log(s_{k,j})$ либо в силу того, что предположение об ортогональности технологий не является хорошей аппроксимацией реальности, либо потому, что различия в уровне человеческого капитала могут быть коррелированы с $\log(s_{k,j})$. МРВ предпочитают вторую интерпретацию и оценивают улучшенную модель вида:

$$\log y_j^* = \text{constant} + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\log(s_{k,j}) - \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\log(n_j+g+\delta_k) + \\ + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\log(s_{h,j}) - \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\log(n_j+g+\delta_h) + \varepsilon_j. \quad (3.26)$$

Оригинальные оценки уравнения (3.26) МРВ приведены в колонке 1 табл. 3.2. В этом случае они оказываются более успешными. Действительно, не только значение R^2 становится выше (примерно 78%), но и полученное значение параметра α находится рядом с $^1/_3$. Базируясь на оценках этого уравнения, МРВ и другие исследователи делают вывод об успехе расширенной модели Солоу в описании данных. В предположении об общей технологии различия в инвестициях в физический и человеческий капитал могут описать около $^3/_4$ межстрановых различий в уровне доходов на душу населения, а полученные оценки параметров выглядят разумными. В колонках 2 и 3 представлены результаты оценивания аналогичного уравнения для продолженной выборки данных. Полученные значения параметра α оказываются схожими, хотя в этом случае значение скорректированного R^2 становится чуть ниже.

В предположении о том, что полученные выше оценки коэффициентов заслуживают доверия, расширенная модель Солоу оказывается способной описать различия в уровне доходов между странами. В частности, оценки скорректированного R^2 позволяют сделать вывод, что значительная часть различий в уровне доходов на душу населения между странами может быть объяснена различиями в количестве инвестиций в физический и человеческий капитал. Следствием из этого вывода является то, что технологические различия имеют лишь ограниченное влияние на доходы. Если этот вывод действительно верен, из него следует, что при изучении непосредственных источников экономического роста нам достаточно сконцентрировать внимание на инвестициях в физический и человеческий капитал и предположить, что все страны имеют доступ к более-менее одинаковой общемировой технологии. Влияние этого вывода на дальнейшее развитие теории экономического роста, конечно же, было очень велико.

Таблица 3.2

Оценки расширенной модели Солоу

	МРВ 1985	Продолженные данные 1985	Продолженные данные 2000
$\log(s_k)$	0,69 (0,13)	0,65 (0,11)	0,96 (0,13)
$\log(n+g+\delta)$	−1,73 (0,41)	−1,02 (0,45)	−1,06 (0,33)
$\log(s_h)$	0,66 (0,07)	0,47 (0,07)	0,70 (0,13)
Скорректированный R^2	0,78	0,65	0,60
Полученное значение α	0,30	0,31	0,36
Полученное значение β	0,28	0,22	0,26
Количество наблюдений	98	98	107

Примечание: в скобках приведены стандартные ошибки.

3.4.3. Проблемы регрессионного анализа моделей роста

Можно выделить две основные (и связанные друг с другом) проблемы, связанные с регрессионным подходом, описанным выше и выводом об ограниченной важности технологических различий между странами.

Первая из них связана с предположением о том, что переменные, описывающие технологические различия между странами, ортогональны ко всем остальным переменным. В то время как предположение о постоянном и одинаковом для всех стран темпе роста технологического прогресса может быть оправданным, предположение об ортогональности технологий представляется слишком сильным, почти непригодным для анализа. Если значения переменных $\bar{A}_j$ различаются между странами, они должны быть коррелированы с нормами инвестиций s_j^h и s_j^k: более производительные экономики будут больше инвестировать в физический и человеческий капитал. У этой корреляции есть две причины. Первая, некоторый вариант проблемы *смещения, связанного с пропущенными переменными*: различия в уровне технологий отчасти являются следствием различных инвестиционных решений. Общество с более высоким значением переменной $\bar{A}_j$ обычно является обществом, которое по различным причинам больше инвестировало в развитие технологий; тогда естественно предположить, что те же причины повлекут большее количество инвестиций в физический и человеческий капитал. Во-вторых, даже если мы проигнорируем смещение, связанное с пропущенными переменными, существует проблема *обратной причинности:* взаимодополняемость между технологиями и физическим или человеческим капиталом в производственной функции приводит к тому, что страны с большим значением переменной $\bar{A}_j$ имеют больше стимулов наращивать количество физического и человеческого капитала. Эконометрически смещение регрессии (3.26), связанное с пропущенными переменными, и проблема обратной причинности означают, что ключевые переменные в правой части уравнения коррелированы с ошибкой ε_j. Следовательно, оценивание уравнения (3.26) с помощью метода наименьших квадратов приведет к положительному смещению в оценках коэффициентов α и β. В дополнение, оценка значения статистики R^2, говорящей о том, какая доля межстрановой волатильности дохода на душу населения объясняется регрессией, также будет завышена.

Вторая проблема регрессионного анализа связана с количественными значениями оценок коэффициентов α и β. Регрессионный подход является привлекательным отчасти потому, что с его помощью мы можем определить, насколько правдоподобной выглядит оценка коэффициента α. Однако мы должны делать подобное упражнение и для оценки коэффициента β. Результатом подобного упражнения является наблюдение о том, что имеющиеся у нас микроэкономические свидетельства показывают, что оценки нормы инвестиций в человеческий капитал s_j^h слишком завышены.

Напомним, что МРВ калибруют норму инвестиций в человеческий капитал как долю трудоспособного населения, обучающегося в средней школе. Значение этой переменной в выборке стран, используемой в регрессии, лежит в интервале от 0,4% до более 12%. Оценки МРВ тогда подразумевают, что при одинаковых значениях всех остальных переменных, страна с 12%-ной долей населения, обучающегося в средней школе, будет иметь доход на душу населения в 10 раз превышающий его значение в стране с этой долей, равной 0,4%. Более точно предсказанная регрессией разность логарифмов дохода на душу населения в двух странах равна:

$$\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}(\log(12)-\log(0,4)) = 0,70\times(\log(12)-\log(0,4)) \approx 2,38.$$

Поэтому при одинаковых значениях всех остальных факторов страна со значением $s_h = 0,12$ должна быть примерно в $\exp(2,38) \approx 10,8$ раз богаче страны с нормой инвестиций в человеческий капитал, равной 0,4%.

На практике разница в среднем количестве лет образования между любыми двумя странами в выборке МРВ всегда меньше 12. В главе 10 показано, что у нас есть ряд хороших экономических причин ожидать, что дополнительный год образования увеличивает доход индивида пропорционально. Например, в исследовании Дж. Минсера оценивается регрессия следующего вида:

$$\log w_i = \mathbf{X}_i^T\gamma + \phi S_i + u_i, \tag{3.27}$$

где переменная w_i обозначает заработную плату индивида i, вектор $\mathbf{X}_i$ содержит множество демографических переменных, переменная S_i измеряет количество лет его образования, а u_i является ошибкой регрессии. Значение коэффициента ϕ, отдачи на образование, измеряет пропорциональное увеличение заработной платы в результате дополнительного года обучения. Из микроэкономической литературы следует, что уравнение типа (3.27) является хорошей аппроксимацией имеющихся у нас данных и оценка коэффициента ϕ лежит в интервале между 0,06 и 0,10. Это означает, что работник, обучавшийся на один год больше, имеет заработную плату примерно на 6–10% большую, чем работник со схожими характеристиками, обучавшийся на один год меньше. Если рынок труда является рынком с совершенной конкуренцией, или по меньшей мере если заработная плата в среднем пропорциональна производительности работника, из оценок коэффициентов уравнения (3.27) следует, что дополнительный год образования увеличивает производительность работника примерно на 6–10%.

Можем ли мы из этой информации узнать, насколько богаче должна быть страна, в которой работники имеют в среднем на 12 лет больше образования? Ответ на этот вопрос утвердительный, но необходимо сделать два предостережения. Во-первых, мы должны предположить, что микроэкономическое соотношение между заработной платой и образованием, постулируемое уравнением (3.27), одинаково применимо ко всем странам. Проигнорируем пока все остальные возможные детерминанты заработной платы и запишем доход индивида i как функцию $w_i = \tilde{\phi}(S_i)$, где переменная S_i обозначает уровень его образования. Первое ключевое предположение состоит в том, что сама функция $\tilde{\phi}$ выглядит одинаково во всех странах и может быть аппроксимирована экспоненциальной функцией вида $\tilde{\phi}(S_i) \approx \exp(\phi S_i)$. В этом случае мы приходим к уравнению (3.27). Причины, по которым такое предположение кажется правдоподобным, в деталях обсуждаются в главе 10.

Во-вторых, мы должны предположить отсутствие *внешних эффектов (экстерналий) от человеческого капитала*. Это означает, что количество человеческого капитала у одного работника не влияет напрямую на производительность другого работника. У нас есть причины предполагать, что экстерналии от человеческого капитала могут существовать, более того, некоторые экономисты считают, что они важны. Однако эмпирические свидетельства, которые обсуждаются в главе 10, позволяют считать, что экстерналии от человеческого капитала, кроме тех, которые действуют через инновации, скорее всего, невелики. Важный результат, который позволит нам перейти от микроэкономической регрессии уровня заработной платы к межстрановым различиям, состоит в том, что при постоянной отдаче от масштаба в производстве, совершенной конкуренции на рынках факторов производства и отсутствии экстерналий от человеческого капитала различия в производительности работников напрямую транслируются в различия в уровне дохода на душу населения. Чтобы убедиться в этом, предположим, что каждая фирма f в стране j обладает доступом к следующей производственной технологии:

$$y_{fj} = K_f^{\alpha}(A_j H_f)^{1-\alpha},$$

где переменная A_j обозначает производительность всех фирм в стране j, K_f — количество физического капитала, а H_f — эффективного человеческого капитала, занятых в фирме f (в этом случае производственная функция принимает более стандартный, чем в уравнении (3.16), вид, в котором человеческий капитал является характеристикой работника). Вид производственной функции Кобба—Дугласа в данном случае выбран лишь для простоты выкладок и не влияет на выводы. Предположим, что стоимость аренды капитала в стране j равна R_j. При совершенной конкуренции на рынках факторов производства и максимизации прибыли фирмой следует, что стоимость аренды капитала должна равняться его предельному продукту:

$$R_j = \alpha \left(\frac{K_f}{A_j H_f} \right)^{-(1-\alpha)}. \tag{3.28}$$

Поэтому отношение физического капитала к человеческому будет одинаковым во всех фирмах и, следовательно, все работники независимо от их уровня образования будут заняты при одном отношении физического капитала к человеческому. Другое прямое следствие совершенной конкуренции на рынке труда в стране j состоит в том, что заработная плата на единицу человеческого капитала будет равна:

$$w_j = (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)} A_j R_j^{-\alpha/(1-\alpha)}.$$

Поэтому работник, обладающий человеческим капиталом h_j, получает заработную плату в размере $w_j h_j$. В действительности справедливо более общее утверждение: при агрегированной производственной функции, обладающей свойством постоянной отдачи от масштаба, заработная плата является линейной функцией по количеству человеческого капитала на одного работника, поэтому работник, обладающий в два раза большим количеством человеческого капитала по сравнению с другим работником, зарабатывает в два раза больше него. Выражая физический капитал из уравнения (3.28) и подставляя в производственную функцию, получаем значение дохода в стране j:

$$Y_j = (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)} R_j^{-\alpha/(1-\alpha)} A_j H_j,$$

где переменная H_j обозначает общее количество единиц эффективного труда в стране j. Из этого равенства следует, что при постоянных значениях R_j и A_j удвоение количества человеческого капитала приведет к удвоению общего дохода. Регрессии МРВ, в которых норма инвестиций является одной из независимых переменных, можно рассматривать как упражнение, в котором переменная R_j остается постоянной (чтобы увидеть, почему R_j остается постоянной при постоянном отношении капитала к выпуску, см. упражнение 3.10). Поэтому удвоение количества человеческого капитала работника (т. е. удвоение количества эффективных единиц труда) будет так же влиять на его заработную плату, как и удвоение общего количества человеческого капитала на общий доход в стране j.

Из этого анализа следует, что полученные оценки отдачи на образование могут быть использованы для вычисления разностей в количестве человеческого капитала в разных странах. Например, в отсутствие экстерналий от человеческого капитала, страна, в которой работники обучались на 12 лет больше, будет иметь в $\exp(0{,}10 \times 12) \approx 3{,}3 - \exp(0{,}06 \times 12) \approx$ $\approx 2{,}05$ раз большее количество человеческого капитала. Поэтому при прочих равных эта страна должна быть в 2–3 раза богаче, чем страна с нулем лет образования. Эти различия намного меньше, чем 11-кратная разница в количестве человеческого капитала, вытекающая из анализа МРВ.

Из вышесказанных замечаний можно сделать вывод о том, что оценка коэффициента β, полученная в регрессиях МРВ, оказывается завышенной по отношению к имеющимся у нас микроэкономическим свидетельствам и, скорее всего, смещена вверх. Причина этого смещения, в свою очередь, скорее всего, связана с наличием корреляции между ошибкой ε_j и ключевыми переменными в правой части регрессии (3.26). Следовательно, регрессионный анализ, построенный на уравнении (3.26), не может быть использован для точного описания межстрановых различий в производительности и непосредственных источников различий в уровне доходов.

3.5. Калибровка различий в уровне производительности факторов производства

Какие другие подходы мы можем использовать для измерения важности различий в количестве физического и человеческого капитала и уровне технологии? Альтернатива состоит в калибровке различий в совокупной факторной производительности (СФП) вместо их оценки с помощью регрессионного анализа. Полученные оценки СФП затем можно интерпретировать как меру вклада межстрановых различий в технологии в различия в уровне доходов. Подход, основанный на калибровке, был предложен и использован в работах: [Klenow, Rodriguez 1997] и [Hall, Jones 1999]. Мы остановимся на подходе Р. Холла и Ч. Джонса, который является более простым. Преимущество метода калибровки состоит в том, что смещение, связанное с пропущенными переменными, возникающее в регрессионном анализе МРВ, становится менее важным (так как при калибровке для оценки вклада человеческого капитала в экономический рост используются микроэкономические свидетельства). Недостатком метода является то, что при калибровке большое значение имеет явный вид некоторых функциональных зависимостей между переменными и то, что в этом случае мы должны явным образом предположить отсутствие экстерналий от человеческого капитала.

3.5.1. Основные понятия

Предположим, что каждая страна j обладает доступом к агрегированной производственной функции типа Кобба–Дугласа:

$$Y_j = K_j^{\alpha}(A_j H_j)^{1-\alpha}, \qquad (3.29)$$

где переменная H_j обозначает количество человеческого капитала в стране j, характеризующее количество эффективных единиц труда в стране, переменная K_j — количество физического капитала, а переменная A_j — уровень трудоинтенсивной технологии. Так как наш интерес связан с межстрановыми различиями, мы опускаем временной индекс в уравнении (3.29).

Предположим, что каждый работник в стране j имеет S_j лет образования. Тогда, используя уравнение Минсера из предыдущего параграфа (3.27), игнорируя другие ковариаты и экспонируя его, мы можем записать переменную H_j в виде $H_j = \exp(\phi S_j)L_j$, где переменная L_j обозначает занятость в стране j, а коэффициент ϕ — отдачу на образование, найденную при оценивании уравнения (3.27). Однако такой подход может не привести к аккуратной оценке количества человеческого капитала. Во-первых, он не учитывает различий в «других факторах» человеческого капитала, таких как опыт и обучение на работе (которые мы обсудим более подробно в главе 10). Во-вторых, страны могут отличаться не только по времени обучения своих работников, но и по качеству их образования и по количеству человеческого капитала вне образовательных учреждений. В-третьих, величина отдачи на образование может систематически различаться между странами (например, она может быть ниже в странах с относительным избытком человеческого капитала). Чтобы преодолеть эти проблемы, необходима тщательность при построении оценок количества человеческого капитала.

Следуя Р. Холлу и Ч. Джонсу, проведем частичную корректировку на третий из вышеупомянутых факторов. Предположим, что отдача на образование не различается между странами, но может различаться для различных лет образования. Например, один год начальной школы может быть более ценным, чем один год старшей школы или университета (потому что обучение чтению может увеличить производительность работника в большей степени, чем хорошее понимание теории экономического роста). В частности, предположим, что отдача на S-й год образования равна $\phi(S)$. Уравнение выше тогда будет частным случаем при $\phi(S) = \phi$ для любого S. Из этого предположения следует, что оценка количества человеческого капитала может быть построена как

$$H_j = \sum_S \exp\{\phi(S)S\} L_j(S),$$

где переменная $L_j(S)$ в данном уравнении обозначает количество занятых работников с S годами образования в стране j.

Ряд значений переменных $K_j(t)$ может быть построен с помощью метода *непрерывного учета запасов* по базе данных Р. Саммерса — А. Хестона, используя данные по инвестициям. А именно: вспомним, что при экспоненциальной амортизации динамика накопления физического капитала описывается следующим уравнением:

$$K_j(t+1) = (1-\delta)K_j(t) + I_j(t),$$

где переменная $I_j(t)$ обозначает количество инвестиций в стране j в периоде t. Для построения ряда $I_j(t)$ метод непрерывного учета запасов использует значение нормы амортизации, δ, и данные по инвестициям $I_j(t)$. Предположим, следуя за Р. Холлом и Ч. Джонсом, что $\delta = 0{,}06$. При наличии полного ряда по инвестициям $I_j(t)$ предыдущее уравнение может быть использовано для получения значения физического капитала в любой момент времени. Однако база данных Р. Саммерса — А. Хестона не содержит данных по инвестициям до 1960-х гг. Мы можем использовать уравнение выше для построения начального значения капитала, предположив, что инвестиции в каждой стране росли с тем же темпом и до начала выборки. Используя это предположение, Р. Холл и Ч. Джонс рассчитали значение количества физического капитала в каждой стране в 1985 г. Ниже мы делаем аналогичное упражнение для 1980 и 2000 г. Используя доводы, приведенные ранее, мы положили значение параметра α равным $^1/_3$.

Используя данные по H_j, K_j и значение параметра α, мы можем построить значения «предсказанного» дохода в каждой стране в любой момент времени с помощью равенства:

$$\hat{Y}_j = K_j^{1/3}(A_{US}H_j)^{2/3},$$

где переменная A_{US} обозначает трудоинтенсивную технологию для США, рассчитанную таким образом, что уравнение в точности описывает доход в США: $Y_{US} = K_{US}^{1/3}(A_{US}H_{US})^{2/3}$. Временной индекс во всех уравнениях опущен. После того как переменные $\hat{Y}_j$ построены, мы можем сравнить их значения с фактическими значениями выпуска. Разность двух рядов данных может быть проинтерпретирована как вклад технологии. В качестве альтернативного подхода мы можем явным образом рассчитать значение технологии для каждой страны (по отношению к ее значению в США) следующим образом:

$$\frac{A_j}{A_{US}} = \left(\frac{Y_j}{Y_{US}}\right)^{3/2}\left(\frac{K_{US}}{K_j}\right)^{1/2}\left(\frac{H_{US}}{H_j}\right).$$

Рис. 3.2 и 3.3 иллюстрируют результаты подобных упражнений для 1980 и 2000 г. Из них можно увидеть следующие важные детали:

1. Различия в количестве физического и человеческого капитала продолжают играть важную роль: корреляция между предсказанным и фактическим доходом очень высока. Поэтому выводы из регресси-

онного анализа о важности физического и человеческого капитала не были полностью вводящими в заблуждение.

2. Однако в отличие от регрессионного анализа такое упражнение демонстрирует наличие значительных различий в технологии (производительности). Важность технологических различий между странами можно заметить по значительному количеству случаев большой разницы между предсказанным и фактическим значениями дохода. Особенно хорошо это показывает рис. 3.2, где практически все наблюдения лежат выше линии с наклоном 45°, что означает, что модель Солоу предсказывает большие, чем фактические, значения дохода для стран с доходом ниже, чем в США.
3. Аналогичный вывод можно сделать и из рис. 3.3, на котором показаны оценки технологических различий $\frac{A_j}{A_{US}}$ в зависимости от логарифма ВВП на душу населения. Эти различия оказываются значительными достаточно часто.
4. Также интересным представляется наблюдение о том, что способность модели Солоу хорошо описывать эмпирические данные, скорее всего, ухудшается со временем. На рис. 3.2 отклонение наблюдений

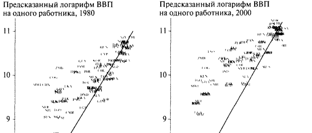


Рис. 3.2. Предсказанные и фактические значения логарифма ВВП на одного работника в разных странах, 1980 и 2000 г.

за 2000 г. от линии с наклоном 45° оказываются больше, чем у наблюдений за 1980 г. На рис. 3.3 относительные различия в технологии увеличиваются со временем. Почему соответствие модели Солоу данным в 1980 г. оказывается лучше, чем в 2000 г. Это наблюдение представляется интересным и пока во многом не изученным вопросом.

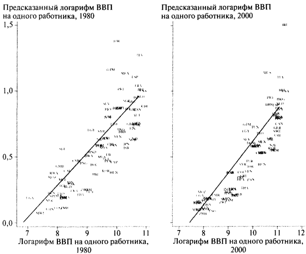


Рис. 3.3. Откалиброванные значения технологии по отношению к технологии в США (по модели роста Солоу с человеческим капиталом) и логарифм ВВП на одного работника, 1980 и 2000 г.

3.5.2. Трудности

В той же мере, как регрессионный анализ базировался на ряде строгих предположений (в частности, что технологические различия между странами ортогональны всем остальным переменным), калибровочный подход также основан на некоторых важных предположениях. Вышеприведенные замечания показывают некоторые из них. Вдобавок к стандартному предположению о совершенной конкуренции на рынках факторов производства, при проведении упражнений по калибровке мы вынуждены предположить отсутствие экстерналий от человеческого капитала, ограничить вид производственной функции типом Кобба—Дугласа и сделать ряд аппроксимаций для измерения межстрановых различий в количестве физического и человеческого капитала.

Остановимся подробнее на предположении о функциональной форме производственной функции. Можем ли мы ослабить предположение о форме Кобба—Дугласа? Ответ на этот вопрос: отчасти да. Следующие рассуждения схожи с теми, что мы делали в упражнении по бухгалтерии роста, где мы обошлись без значительных ограничений функциональной формы производственной функции (именно это является причиной того, что данное упражнение иногда называют бухгалтерией развития или бухгалтерией в уровнях). В частности, вернемся к уравнению (3.5), которое показывает, как, используя средние значения долей факторов производства в доходе, мы можем получить оценки СФП при общем виде производственной функции, обладающей свойством постоянной отдачи от масштаба (при совершенной конкуренции на рынке труда). Теперь предположим, что производственная функция во всех странах задана как $F(K_j, H_j, A_j)$ и что страны могут отличаться количеством физического и человеческого капитала и технологии, но форма функции F остается неизменной во всех странах. Также предположим, что у нас имеются данные по переменным K_j и H_j а также доле дохода капитала в национальном доходе для всех стран. Тогда мы можем использовать естественную адаптацию уравнения (3.5) уже в межстрановом, а не межвременном анализе. А именно проранжируем страны в убывающем порядке по отношению физического капитала к человеческому капиталу K_j/H_j (см. упражнение 3.1, показывающее, почему в данном случае необходимо упорядочивание стран). Тогда справедливо следующее равенство:

$$\hat{x}_{j,j+1} = g_{j,j+1} - \bar{\alpha}_{K,j,j+1} g_{K,j,j+1} - \bar{\alpha}_{L,j,j+1} g_{H,j,j+1}, \qquad (3.30)$$

где переменная $g_{j,j+1}$ обозначает процентную разницу выпуска в странах j и $j+1$, переменная $g_{K,j,j+1}$ — процентную разницу в количестве физического капитала в этих странах, а переменная $g_{H,j,j+1}$ — процентную разницу в количестве человеческого капитала. Также параметры $\bar{\alpha}_{K,j,j+1}$ и $\bar{\alpha}_{L,j,j+1}$ являются средними значениями долей капитала и труда в двух странах, а переменная $\hat{x}_{j,j+1}$ в уравнении (3.30) обозначает оценку процентной разницы в СФП в странах j и $j+1$.

Используя этот метод и взяв одну из стран как базовую (например, США), мы можем рассчитать различия в технологии между странами. Тем не менее подобное упражнение по бухгалтерии в уровнях имеет два важных недостатка. Один из них связан с данными, другой — теоретический. Во-первых, данные по долям труда и капитала не доступны для большинства стран. Малочисленность данных делает использование уравнения (3.30) затруднительным. Поэтому почти во всех исследованиях, где для оценки технологических различий (различий в производительности) используется калибровка или ведется бухгалтерия в уровнях, используется подход Кобба—Дугласа из предыдущего параграфа (т. е. предполагается постоянное значение параметра α_K, равное $^1/_3$).

Во-вторых, даже в случае доступности данных по долям капитала и труда в национальном доходе, различия в относительном количестве факторов производства (то есть различия в значениях K_j/H_j) между странами велики. Уравнение типа (3.30) является хорошей аппроксимацией только при небольших изменениях. Как показано в упражнении 3.1, при больших различиях в относительном количестве факторов производства в различных наблюдениях возможно значительное смещение в оценках.

Таким образом, подход, основанный на калибровке межстрановых различий в производительности, является приемлемой альтернативой межстрановому регрессионному анализу, однако базируется на ряде строгих предположений относительно вида производственной функции и может привести к смещенным оценкам технологических различий. Это смещение возникает в силу того, что предположения о функциональной форме производственной функции могут не быть хорошей аппроксимацией данных, а также из-за ошибок в измерении количества и качества физического и человеческого капитала в разных странах.

3.6. Оценка различий в уровне производительности факторов производства

В предыдущем параграфе мы находили различия в уровне производительности (технологии) между странами как остатки с помощью калибровки, и поэтому должны были доверять предположениям о функциональной форме производственной функции, используемым в этом подходе. Однако, если мы готовы доверять этим предположениям, вместо того чтобы полагаться на калибровку, мы можем оценить эти различия эконометрически. Главным преимуществом эконометрического подхода по сравнению с калибровкой является то, что в этом случае мы не только получаем оценки интересующих нас параметров, но и их стандартные ошибки, показывающие, насколько точными являются эти оценки. В этом параграфе мы коротко опишем два основных подхода к оценке различий в уровне производительности факторов.

3.6.1. Наивный подход

В качестве первого метода оценки можно предположить неизменный вид производственной функции типа (3.29) и попытаться оценить ее на имеющихся межстрановых данных:

$$\log Y_j = \alpha \log K_j + (1-\alpha)\log H_j + \alpha \log A_j. \tag{3.31}$$

Используя ряды данных по переменным Y_j, K_j и H_j, мы можем оценить уравнение (3.31) с помощью метода наименьших квадратов, наложив ограничение о том, что сумма коэффициентов перед $\log K_j$ и $\log H_j$ равна 1. Остаток регрессии в таком случае может быть проинтерпретирован как оценка технологических различий. К сожалению, такой подход не является привлекательным, так как из возможной корреляции между $\log A_j$ и $\log K_j$ или $\log H_j$ следует, что полученные оценки α могут оказаться смещенными, даже если мы требуем постоянной отдачи от масштаба в производственной функции. Более того, если мы откажемся от требования о постоянной отдаче от масштаба, гипотеза о равенстве суммы коэффициентов единице может быть отвергнута. Поэтому подход, основанный на подобной регрессии, приводит нас к тем же трудностям, что и подход MPB, который мы обсудили в параграфе 3.4.

Таким образом, даже если мы готовы предположить, что нам известна явная функциональная форма агрегированной производственной функции, прямая оценка различий в уровне производительности представляется затруднительной. Есть ли у нас методы, лучшие, чем такой наивный подход? Ответ на этот вопрос требует большего использования экономической теории. Прямое оценивание уравнения типа (3.31) не использует того факта, что мы наблюдаем экономическую систему, находящуюся в состоянии равновесия. Более детальный подход состоит в наложении большего количества ограничений, вытекающих из экономического поведения агентов (и в использовании большего количества данных). Ниже мы проиллюстрируем этот подход, опираясь на определенный метод, базирующийся на теории международной торговли. Читатель, незнакомый с теорией международной торговли, может пропустить следующий параграф.

*3.6.2. Использование теории и данных по международной торговле**

Модели теории экономического роста и международной торговли изучаются в главе 19. Однако, даже не прибегая к подробному обсуждению теории международной торговли, мы можем использовать данные по международным потокам товаров и услуг и некоторые базовые принципы теории международной торговли для построения альтернативного подхода к оценке межстрановых различий в уровне производительности.

Рассмотрим важную работу [Trefler 1993], использующую расширенную версию стандартной модели международной торговли Хекшера—Олина. Стандартный подход Хекшера—Олина предполагает, что страны различаются по относительному количеству факторов производства (то есть некоторые страны обладают значительно большим количеством физического капитала на одного работника по сравнению с другими). В закрытой экономике эти различия приведут к различиям в относительной стоимости факторов производства и относительных ценах товаров, в производстве которых разнится интенсивность использования этих факторов. Международная торговля позволяет использовать эти различия для увеличения благосостояния агентов. Наиболее простая версия модели предполагает отсутствие транспортных издержек и политических препятствий торговле, поэтому в ней международная торговля происходит без издержек.

Д. Трефлер использует стандартную модель международной торговли Хекшера—Олина, но предполагает, что производительность каждого фактора может различаться между странами. Например, если производительность капитала в стране j равна A_j^k, то количество капитала K_j в этой стране будет эквивалентно его эффективному количеству $A_j^k K_j$. Аналогично, труд (человеческий капитал) в стране j имеет производительность A_j^h. Также Д. Трефлер предполагает, что агенты во всех странах имеют одинаковые однородные предпочтения и что различия в интенсивности использования факторов в производстве различных товаров достаточны для того, чтобы международная торговля, основанная на арбитраже между относительными ценами факторов, имела место (или, как говорят специалисты по международной торговле, страны оказываются склонны к диверсификации). Последнее предположение важно: если все страны имеют одинаковую производительность физического и человеческого капитала, справедлив знаменитый результат о ***выравнивании цен факторов производства***. Он говорит о том, что после учета различий в эффективной производительности, цены факторов производства выравниваются во всех странах.

Используя эти предположения, мы можем использовать стандартные уравнения теории международной торговли для получения связи между чистым экспортом факторов из каждой страны и относительного избытка их по отношению ко всему миру в ней. Термин «чистый экспорт фактора производства» требует разъяснения. Он не описывает фактическую торговлю факторами (например, трудовую миграцию или потоки капитала). Вместо этого будем представлять торговлю товарами как торговлю факторами, используемыми при их производстве. Например, страна, экспортирующая автомобили, при производстве которых используется капитал, и импортирующая кукурузу, при производстве которой используется труд, неявным образом экспортирует капитал и импортирует труд. Более точно, чистый экспорт капитала из страны j, X_j^K можно определить как разность между количеством капитала, необходимым для производства всего экспорта из страны j и количеством капитала, необходимым для производства всего импорта в страну j. В нашем случае конкретные детали метода подсчета необходимого количества факторов не важны (достаточно будет лишь сказать, что, как и во всех эмпирических исследованиях, дьявол скрывается именно в деталях и что эти расчеты не совсем просты и базируются на ряде дополнительных предположений). Отсутствие несовершенств на рынке международной торговли между странами и предположение об одинаковых однородных предпочтениях приводят к следующему уравнению:

$$X_j^K = A_j^k K_j - \gamma_j^C \sum_{i=1}^{J} A_i^k K_i \text{ и } X_j^H = A_j^h H_j - \gamma_j^C \sum_{i=1}^{J} A_i^h H_i, \tag{3.32}$$

где коэффициент γ_j^C обозначает долю страны j в мировом потреблении (отношение потребления в стране j к общемировому потреблению), а J — общее количество стран в мире. Эти уравнения математически формулируют вывод предыдущего абзаца о том, что страна будет чистым экспортером капитала, если его эффективное количество в ней $A_j^k K_j$ превышает долю, в данном случае γ_j^C, от мирового предложения капитала $\sum_{i=1}^{J} A_i^k K_i$.

Эмпирические значения долей стран в мировом потреблении легко получить из данных. Поэтому, используя оценки переменных X_j^K и X_j^H, мы можем разрешить такую систему $2 \times J$ уравнений с $2 \times J$ неизвестными относительно значений A_j^k и A_j^h во всех J странах. Так мы можем получить оценки межстрановых различий в производительности каждого фактора из совершенно другой информации по сравнению с предыдущими рассмотренными методами оценивания. Более того, такое упражнение позволяет нам получить оценки как трудоинтенсивной (связанной с человеческим капиталом), так и капиталоинтенсивной компоненты технологии для каждой страны.

Как мы можем убедиться в том, что полученные таким образом оценки являются хорошей аппроксимацией межстрановых различий в производительности факторов производства? Проблема, стоящая перед нами, схожа с той, которую мы встретили, когда обсуждали надежность оценок различий в производительности (технологии), полученных с помощью метода калибровки. К счастью, теория международной торговли дает нам еще один набор уравнений для проверки надежности полученных выше оценок. Как мы заметили выше, в предположении о достаточной интегрированности мировой экономики справедлив результат о выравнивании цен факторов производства. Поэтому для любых двух стран j и j' выполняются следующие равенства:

$$\frac{R_j}{A_j^k} = \frac{R_{j'}}{A_{j'}^k} \text{ и } \frac{w_j}{A_j^h} = \frac{w_{j'}}{A_{j'}^h}, \tag{3.33}$$

где переменные R_j и w_j обозначают арендную стоимость капитала и наблюдаемую заработную плату (которая включает в себя компенсацию человеческого капитала) в стране j. Например, второе уравнение в (3.33) утверждает, что если работник в стране j имеет в среднем половину эффективных единиц труда по сравнению с работником в США, то заработная плата в этой стране будет примерно равна половине заработной платы в США.

Поэтому, используя данные по ценам факторов производства, мы можем построить альтернативные оценки переменных A_j^k и A_j^h. Оказывается, что значения A_j^k и A_j^h, полученные с помощью уравнений (3.32) и (3.33), очень схожи. Этот результат позволяет сказать, что значения производительности, полученные Д. Трефлером, несут в себе релевантную информацию об экономике.

Оригинальные оценки Д. Трефлера проиллюстрированы на рис. 3.4. Из него видно, что в данных присутствуют очень значительные различия в производительности труда и значительные, хотя в меньшей степени, различия в производительности капитала между странами. Например, производительность труда в Пакистане составляет лишь $^1/_{25}$ от произво-

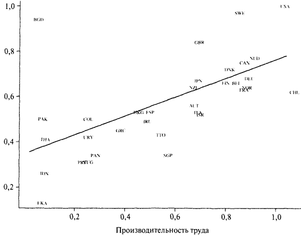


Рис. 3.4. Сравнение производительности труда и производительности капитала в разных странах

дительности труда в США. Этот результат не только интересен сам по себе, но и хорошо согласуется с моделями направленного технологического прогресса из главы 15, которые могут объяснить, почему технологические изменения являются трудоинтенсивными в долгосрочной временной перспективе.

Также полезным будет сравнить оценки межстрановых различий в производительности, полученные с помощью метода Д. Трефлера, с оценками, полученными нами в предыдущих параграфах. Такое сравнение показано на *рис. 3.5* и *3.6*. На первом из них представлены оценки различий в производительности труда по методу Д. Трефлера и различий в общей производительности факторов, полученных в предыдущем параграфе с помощью калибровки по производственной функции Кобба—Дугласа. Схожесть двух рядов данных очень высока, из чего мы можем сделать вывод о том, что оба подхода неплохо описывают наблюдения и что в действительности в мировой экономике имеются значительные различия в уровне производительности (технологии) между странами. Также интересно отметить тот факт, что связь между откалиброванными различиями в производительности и различиями в производительности

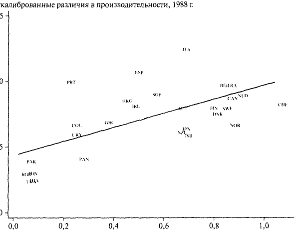


Рис. 3.5. Сравнение оценок производительности труда по методу Трефлера и откалиброванных по методу Холла—Джонса различий в производительности факторов

Рис. 3.6. Сравнение оценок производительности капитала по методу Трефлера и откалиброванных по методу Холла–Джонса различий в производительности факторов

капитала, полученная с помощью метода Д. Трефлера, показанная на рис. 3.6, значительно более слаба.

Несмотря на кажущийся успех подхода Д. Трефлера, необходимо помнить, что он также базируется на ряде строгих предположений. Четыре основных из них следующие:

1. Отсутствие издержек в международной торговле.
2. Единый вид производственной функции во всех странах лишь при различиях в производительности факторов.
3. Одинаковые однородные предпочтения у всех агентов в мировой экономике.
4. Значительная интегрированность мировой экономики и следующее из нее условное выравнивание цен факторов производства между странами.

Ни одно из этих предположений в той или иной форме не подтверждается эмпирическими данными. Наличие издержек в международной торговле, включая транспортные издержки, тарифы, пошлины и другие торговые ограничения, очевидно. Структура различий в производительности на практике представляется намного более сложной, чем предполагаемая Д. Трефлером. В литературе хорошо описана склонность к предпочтению отечественных товаров в потребительской корзине, что противоречит предположению об однородности предпочтений агентов. Наконец, консенсус среди специалистов по международной торговле состоит в том, что условное выравнивание цен факторов производства не является хорошим описанием межстрановых различий цен факторов. Учитывая все вышеперечисленные причины, мы должны быть осторожны при интерпретации результатов Д. Трефлера. Вместе с этим такой подход является важным как с точки зрения демонстрации того, как различные источники эмпирических данных и теоретические модели могут быть использованы для построения оценок межстрановых различий в технологии, так и с точки зрения подтверждения оценок, полученных с помощью калибровки и регрессионного анализа, представленных в параграфе 3.5.

3.7. Основные выводы

Что мы узнали в этой главе? Ее основная задача не состояла в построении новой теории. Вместо этого мы хотели ответить на вопросы, можем ли мы использовать модель Солоу для более точной интерпретации межстрановых различий, а также как экономические данные могут пролить свет на основные достоинства и недостатки модели экономического роста Солоу.

По итогам главы мы не можем прийти к однозначному выводу. Как достоинство можно выделить то, что модель Солоу, несмотря на ее простоту, несет достаточно содержания, чтобы описывать данные в различной форме, включая бухгалтерию роста, регрессионный анализ и калибровку. Более того, из каждого из этих методов следуют осмысленные выводы относительно источников роста мировой экономики и различий в уровне дохода между странами.

С другой стороны, недостатком является то, что ни один из рассмотренных нами подходов нельзя назвать полностью убедительным. Каждый из них опирается на ряд дополнительных строгих предположений о структуре экономики. Поэтому полученные выводы необходимо интерпретировать с осторожностью. Из самого простого подхода бухгалтерии роста следует, что основной причиной экономического роста является технологический прогресс. Однако такой вывод оспаривается экономистами, которые утверждают, что внесение в бухгалтерию роста поправок на качество физического и человеческого капитала значительно снижают, а в некоторых случаях и полностью нивелируют остаток, связанный с ростом СФП. Аналогичные споры ведутся и при обсуждении вопроса о причинах межстрановых различий в уровне дохода. В то время как одни ученые считают, что при корректном учете различий в количестве и качестве физического капитала этих различий достаточно для объяснения различий в уровне дохода, другие утверждают, что при разумном моделировании большая часть различий является следствием различий в технологии.

Несмотря на то что у нас нет возможности дать однозначный исчерпывающий ответ на этот вопрос, на данный момент консенсус в литературе состоит в том, что межстрановые различия в доходе на душу населения не могут быть полностью объяснены исключительно различиями в физическом и человеческом капитале. Другими словами, страны действительно различаются технологическими возможностями, и эти технологические различия, скорее всего, являются важнейшей причиной межстрановых различий в уровне дохода и темпах экономического роста государств.

Поэтому важным выводом из рассмотренных нами упражнений с данными будет утверждение о том, что технологический прогресс не только важная причина экономического роста в базовой модели Солоу, но и, вероятно, один из главных факторов, определяющих различия в благосостоянии наций. Поэтому подробное изучение технологического прогресса и процесса внедрения технологий домохозяйствами и фирмами является неотъемлемой частью теории экономического роста. Этот вывод приводит нас к необходимости подробного анализа технологического прогресса и процесса внедрения технологий в следующих главах книги. Также необходимо отметить то, что различия в СФП не обязательно являются следствием различий в технологии в узком смысле этого слова. Например, если две страны получают доступ к одинаковым производственным технологиям, но используют их различным образом и с различной эффективностью или имеют различную рыночную организацию и институциональную структуру, все эти отличия трансформируются в различия в СФП. Хорошей иллюстрацией важности различий в структуре рынка и институтов как причин различий в СФП служат серьезные экономические и политические кризисы. Значительное падение уровня дохода на душу населения в странах, прошедших через гражданскую войну, период политической нестабильности, финансовый кризис или другие схожие события всегда происходят на фоне столь же значительного сокращения СФП (в то же время количество капитала в стране почти не сокращается, а занятость падает в значительно меньшей степени). Очевидно, что такое снижение СФП происходит не вследствие технологического регресса, а возникает в результате разрушения рыночной организации экономики или снижения ее эффективности по другим причинам. Поэтому технологические различия между странами всегда должны толковаться в широком смысле и мы должны уделять особое внимание межстрановым различиям в эффективности производства. Таким образом, для понимания причин межстрановых различий СФП, мы не только должны изучать различия в используемых производственных технологиях, но и рыночную структуру экономик и отдельных фирм, а также то, какие стимулы эта структура создает для отдельных агентов. Этот вывод является основой дальнейшего содержания книги, в особенности ее параграфов, посвященных эндогенному технологическому прогрессу в части IV и межстрановым различиям в технологии и производственной эффективности в частях VI и VII.

Существует еще одна причина, по которой материал этой главы нельзя назвать полным описанием источников экономического роста. Факторы, обращающие на себя внимание в модели Солоу: физический капитал, человеческий капитал и технологии — являются лишь непосредственными источниками экономического роста и межстрановых различий. Нам важно понимать размер вклада каждого из этих непосредственных источников и их влияние на экономическое развитие страны как для понимания процесса экономического роста, так и для выбора класса моделей, описывающих его адекватно. Однако вывод о том, что страна бедна, потому что в ней недостает физического и человеческого капитала и используются неэффективные технологии в некотором смысле (немного преувеличивая) схож с утверждением о том, что определенный человек беден, потому что у него мало денег. Аналогично тому, как всегда есть причины, по которым один человек имеет больше денег, чем другой, всегда есть причины, по которым одни страны обладают большим запасом физического и человеческого капитала и лучшими технологиями. В главе 1 мы назвали их *фундаментальными причинами* различий в богатстве наций, отделив их от непосредственных причин. Для удовлетворительного понимания экономического роста и различий в богатстве наций необходим анализ как непосредственных источников, так и фундаментальных причин экономического роста. Первое важно для понимания механики процесса экономического роста и построения подходящих формальных моделей, описывающих ее. Второе важно для понимания причин того, почему некоторые общества принимают решения, приводящие экономику к низкому уровню физического и человеческого капитала, неэффективной технологии и, как следствие, к относительной бедности. Мы перейдем к этому вопросу в следующей главе.

3.8. Литература

Модель бухгалтерии роста развита и использована в анализе данных в статье [Solow 1957]. В работе [Jorgensen, Gollop, Fraumeni 1987] приведен исчерпывающий анализ этого подхода. В ней показано, что предположение о совершенной конкуренции на рынках факторов производства является необходимым и, в общем, достаточным условием для его использования в анализе данных. Также авторы уделяют особое внимание трудностям в измерении данных и утверждают, что использование заниженных оценок качества физического и человеческого капитала приводит к завышенным оценкам вклада технологии в экономический рост. Современный обзор метода бухгалтерии роста приведен в работе [Jorgenson 2005].

Регрессионный анализ, базирующийся на модели Солоу, имеет довольно долгую историю. Среди недавних работ в этой области можно отметить работы [Baumol 1986], [Barro 1991] и [Barro, Sala-i-Martin 1992]. Популярность регрессий роста особенно возросла после публикации работы [Barro 1991], в течение последующих двух десятилетий этот метод стал наиболее часто используемым в анализе. Критика метода регрессий роста, особенно связанная с вопросами сходимости, представлена в работах [Durlauf 1996], [Durlauf, Johnson, Temple 2005] и [Quah 1993]. В книге [Wooldrige 2002] можно найти прекрасный обзор вопросов, связанных со смещением из-за пропущенных переменных и обсуждение различных методик, используемых для его преодоления (см., например, главы 4–5 и 8–11 в книге А. Вулдриджа). Стоит предостеречь читателя: прежде чем начинать собственные эмпирические исследования, необходимо подробнее ознакомиться с экономическими ограничениями метода регрессий роста и эконометрическими проблемами этих регрессий.

Расширенная модель Солоу с человеческим капиталом, рассмотренная нами, является обобщением модели, представленной в работе [Mankiw, Romer, Weil 1992]. Как мы уже отметили в тексте выше, рассмотрение человеческого капитала как отдельного фактора производства является в чем-то нестандартным подходом. Микрообоснование такого подхода также довольно сложно. Различные методы введения человеческого капитала в базовую модель экономического роста обсуждаются в главе 10.

Первые регрессионные оценки модели Солоу и расширенной модели Солоу также можно найти в работе [Mankiw, Romer, Weil 1992]. Подробная критика метода Г. Мэнкью, Д. Ромера и Д. Вейла представлена в работе [Klenow, Rodriguez 1997]. Первые результаты калибровочного оценивания межстрановых различий в уровне производительности (технологии) представлены в работах: [Klenow, Rodriguez 1997] и [Hall, Jones 1999]. В работе [Caselli 2005] содержится прекрасный обзор литературы на эту тему и обсуждение методов коррекции на различия в качестве физического и человеческого капитала между странами. Основной вывод из этой работы состоит в том, что подобные корректировки не изменяют главного вывода из статей П. Кленова, А. Родригеза и Р. Холла, Ч. Джонса о том, что межстрановые различия в технологии являются важным фактором, определяющим различия в уровне дохода.

Подпараграф 3.6.2 книги базируется на работе [Trefler 1993]. В работе Д. Трефлера не уделяется особого внимания оценкам производительности, полученным с помощью его метода, автор использует этот метод в основном для тестирования модели Хекшера—Олина. Тем не менее эти оценки являются важными данными для эмпирических работ в теории роста. Подход Д. Трефлера также был подвержен критике по различным направлениям, но это не столь важно для целей данной книги. Интересующийся читатель может ознакомиться с работами [Gabaix 2000] и [Weinstein 2001].

3.9. Упражнения

3.1. Предположите, что выпуск задается неоклассической производственной функцией $Y(t) = F(K(t), L(t), A(t))$, удовлетворяющей предположениям 1 и 2. Также предположите, что у вас есть наблюдения о значениях выпуска, капитала и занятости в два момента времени: t и $t + T$. Предположите, что оценка темпа роста СФП между периодами t и $t + T$ проводится с помощью следующей регрессии:

$$\hat{x}(t, t+T) = g(t, t+T) - \alpha_K(t) g_K(t, t+T) - \alpha_L(t) g_L(t, t+T),$$

где переменная $g(t,\ t + T)$ обозначает темп роста выпуска между периодами t и $t + T$ и остальные темпы роста определены аналогичным образом как $\alpha_K(t)$ и $\alpha_L(t)$ обозначают доли факторов производства в начальное время. Предположите, что истинное значение темпа роста СФП между $\alpha_K(t)$ и $\alpha_L(t)$ обозначают доли факторов производства в начльное время периодами t и $t + T$ задано как $x(t,\ t + T)$. Покажите, что для любого сколь угодно большого или сколь угодно малого числа существует производственная функция F, такая, что значение отношения $\hat{x}(t,t+T)/x(t,t+T)$ при ней будет равно этому числу. Затем покажите, что аналогичный результат об оценке темпа роста СФП верен и при использовании в регрессии долей труда и капитала за последний период:

$$\hat{x}(t, t+T) = g(t, t+T) - \alpha_K(t+T) g_K(t, t+T) - \alpha_L(t+T) g_L(t, t+T).$$

Объясните важность различий в относительном количестве факторов производства (отношении капитала к труду) в начальный и конечный период времени для получения этих результатов.

3.2. Рассмотрите экономику с несовершенствами на рынке труда, аналогичную экономике из упражнения 2.20 предыдущей главы. Заработная плата работника в ней составляет долю выпуска $\lambda > 0$. Покажите, что использование фундаментального уравнения бухгалтерии роста для получения оценки СФП в подобной экономике приводит к смещенным оценкам.

3.3. Рассмотрите производственную функцию Кобба—Дугласа из примера 3.1: $Y(t) = A(t)K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$. Выведите для нее точный аналог уравнения (3.10) и покажите, что скорость сходимости к ТСР, то есть коэффициент перед $(\log y(t) - \log y^*(t))$, изменяется как функция от $\log y(t)$.

3.4. Еще раз рассмотрите производственную функцию Кобба—Дугласа из примера 3.1. Предположите, что две страны, 1 и 2, обладают доступом к абсолютной идентичной технологии и общим набором параметров α, n, g и δ. В результате они имеют идентичные значения выпуска в стационарном состоянии $y^*(t)$. Предположите, что в начальный момент времени $t = 0$ $y_1(0) = 2y_2(0)$. Используя значения параметров из примера 3.1, рассчитайте время, необходимое для сокращения разрыва в доходе между двумя странами до 10%.

3.5. Рассмотрите множество экономик, описываемых моделью Солоу, различающихся значениями параметров δ, s и n. Покажите, что регрессионное уравнение, эквивалентное уравнению регрессии условной сходимости (3.13) в данном случае может быть выведено из аналога уравнения (3.10).

3.6. Докажите утверждение 3.2.

3.7. В расширенной модели Солоу (см. утверждения 3.1 и 3.2) рассчитайте эффект увеличения параметров s_k, s_h и n на значение переменных h^* и k^*.

3.8. Рассмотрите мировую экономику, состоящую из стран, описываемых расширенной моделью экономического роста Солоу с производственной функцией, заданной уравнением (3.16). Выведите в данном случае уравнение, эквивалентное фундаментальному уравнению бухгалтерии роста, и объясните, каким образом с помощью этого уравнения можно использовать доступные данные для построения оценки темпа роста СФП.

3.9. Рассмотрите базовую модель Солоу без роста населения и технологического прогресса. Предположите, что производственная функция имеет вид $F(K, H)$, где переменная H обозначает количество эффективных единиц труда (человеческого капитала) и задается как $H = \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i$, где переменная $\mathbb{N}$ обозначает множество всех индивидов в населении страны, а переменная h_i — количество человеческого капитала индивида i. Предположите, что значение H остается неизменным. Также предположите совершенную конкуренцию на рынках факторов производства и отсутствие экстерналий от человеческого капитала.

(a) Опишите стационарное равновесие в этой экономике.

(b) Докажите, что если увеличение количества человеческого капитала определенного индивида h на 10% приводит к росту его заработной платы на a%, то увеличение общего количества человеческого капитала в экономике H на 10% приводит к росту выпуска в стационарном равновесии на a%. Сравните этот результат с непосредственным моментальным эффектом от неожиданного увеличения переменной H на 10% (то есть опишите эффект от увеличения переменной H на 10% при неизменном количестве капитала K).

3.10. Рассмотрите производственную функцию в стране j, обладающую свойством постоянной отдачи от масштаба: $Y_j = F(K_j, A_j H_j)$, где переменная K_j обозначает количество физического капитала, переменная H_j — количество единиц эффективного труда, а переменная A_j — трудоинтенсивную технологию. Докажите, что если $K_j/Y_j = K_{j'}/Y_{j'}$ в двух различных странах j и j', то арендные стоимости капитала в них R_j и $R_{j'}$ также будут равны.

3.11. Представьте мир, состоящий из $j = 1, 2, ..., J$ стран. Предположите, что у вас имеются наблюдения по занятости L_j, количеству капитала K_j, суммарному выпуску Y_j и доли дохода капитала в национальном доходе α_j^K для каждой страны j в некоторый момент времени. Также предположите, что все страны имеют доступ к производственной технологии, заданной в форме

$$F(K_j, L_j, A_j),$$

где переменная A обозначает технологию. Предположите, что функция F обладает свойством постоянной отдачи от масштаба по K и L и совершенную конкуренцию на всех рынках.

(a) Объясните, каким образом вы бы оценивали относительные различия в технологии (производительности), возникающие вследствие различий значений переменной A без дополнительных предположений о структуре экономик. Выпишите уравнения, которые вы будете использовать для оценки вклада различий в производительности в межстрановые различия в уровне дохода в явном виде.

(b) Предположите, что из результата части (a) следуют значительные различия в производительности, связанные с переменной A. Как бы вы их проинтерпретировали? Значит ли это, что разные страны имеют доступ к различным множествам производственных возможностей?

(c) Теперь предположите, что истинная производственная функция имеет вид $F(K, H, A)$, где переменная H обозначает количество единиц эффективного труда. Какой набор данных будет вам необходим для оценки вклада технологии (производительности) в межстрановые различия в уровне дохода?

(d) Покажите, что при значительных различиях в качестве образования между странами и отсутствии различий в технологии A использование для оценки переменной H метода, предложенного в параграфе 3.5, приведет к значительным различиям в оценках значения A в разных странах.

Глава 4
Фундаментальные детерминанты межстрановых различий в уровне экономического развития

4.1. Непосредственные источники и фундаментальные причины

«Факторы, которые мы перечислили (инновации, экономия от масштаба, образование, накопление капитала и др.) не являются источниками роста; *они и есть сам экономический рост*» (North, Thomas, 1973, p. 2, курсив использован в оригинале).

В предыдущей главе показано, каким образом модель Солоу может быть использована для объяснения межстрановых различий в уровне дохода и понимания процесса экономического роста. В контексте модели роста Солоу экономический рост является следствием технологического прогресса. Межстрановые различия в уровне дохода, в свою очередь, возникают в результате комбинации различий в технологии и количестве физического и человеческого капитала на одного работника. Несмотря на то что такой подход является хорошей начальной точкой для анализа и позволяет выделить возможные источники экономического роста и межстрановых различий в уровне дохода, эти источники являются лишь непосредственными источниками экономического роста и экономического процветания. Например, обратим внимание на межстрановые различия в уровне дохода. Как только мы начинаем пытаться объяснить эти различия различиями в технологии накопления физического и человеческого капитала, сразу естественным образом встает следующий вопрос. Если технологии, физический капитал, человеческий капитал так важны для понимания различий в богатстве наций и если различия в них являются причиной 5-кратного, 10-кратного, 20-кратного и даже 30-кратного разрыва в доходе на душу населения между странами, почему некоторые общества так и не начали развивать технологии, инвестировать в физический капитал, накапливать человеческий капитал в том же количестве, как и богатые страны?

Из этого следует, что любое объяснение, базирующееся на межстрановых различиях в технологии, физическом и человеческом капитале, является, в некотором смысле, неполным. Должны существовать другие, более глубокие, причины экономического роста и межстрановых различий, которые мы будем называть фундаментальными причинами экономического роста. Именно они являются причинами, не позволяющими некоторым странам делать достаточное количество инвестиций в технологическое развитие и накопление физического и человеческого капитала.

Исследование фундаментальных причин экономического роста важно по крайней мере по двум причинам. Во-первых, любая теория, основывающаяся только на изменяющихся факторах (непосредственных источниках), будет неполна без объяснения причин изменения ключевых факторов. Теория экономического роста такого типа не сможет ответить на поставленные нами вопросы, пока не столкнется с фундаментальными причинами роста. Во-вторых, если наше изучение теории экономического роста отчасти мотивировано желанием улучшить экономическое развитие определенных стран и повысить уровень жизни их граждан, то понимание фундаментальных причин является нашей главной целью. Попытки увеличить темп роста экономики за счет воздействия на непосредственные источники роста в данном случае можно сравнить с попытками вылечить болезнь, борясь с ее симптомами, без понимания сути самой болезни. Хотя борьба с симптомами может быть полезна в некоторых случаях, она не заменит полного понимания причин болезни, с помощью которого можно начать успешное лечение. Аналогичным образом можно надеяться, что понимание фундаментальных причин экономического роста однажды позволит нам найти удовлетворительный ответ на основные вопросы общественных наук, а именно почему одни страны становятся богатыми, а другие остаются бедными и как мы можем ускорить экономический рост в большинстве стран.

В чем могут состоять эти фундаментальные причины? Можем ли мы улучшить наше понимание этих причин? И, пожалуй, самое главное с точки зрения данной книги — сможет ли теория экономического роста помочь нам в понимании этих причин?

В этой главе мы предложим некоторые ответы на подобные вопросы. Начнем с двух последних из поставленных выше вопросов. Эта книга построена на убеждении о том, что хорошее понимание процесса экономического роста, а значит построение подробных моделей экономического роста, является необходимым для успешного понимания фундаментальных причин экономического роста. Это понимание важно по меньшей мере по двум причинам. Во-первых, постановка разумных вопросов о фундаментальных причинах невозможна без детального понимания основных непосредственных источников и их влияния на экономическое развитие. Во-вторых, только модели, успешно описывающие реальность и хорошо объясняющие основные корреляции в данных, как на качественном, так и на количественном уровне, могут быть использованы для ответа на вопрос о том, какие из ряда предложенных возможных фундаментальных причин роста действительно играют важную роль в генерировании огромных различий в уровне дохода на душу населения между странами. Наш анализ механизма экономического роста часто позволяет нам отбросить или уточнить часть предложенных фундаментальных причин. Возвращаясь к вопросу о том, сможем ли мы улучшить наше понимание фундаментальных причин, огромное количество работ по теории экономического роста является прямым свидетельством того, что прогресс в нашем понимании происходит и что дальнейший прогресс достижим. Некоторым образом, одна из задач этой книги состоит в том, чтобы убедить читателя, что ответ на этот вопрос положительный.

Возвращаясь к первому вопросу, можно выделить несчетное множество фундаментальных причин, предложенных в течение времени экономистами, историками и другими специалистами в общественных науках. Очевидно, простое их перечисление и систематизация не станет ни полезным, ни информативным упражнением. Вместо этого мы классифицируем основные предложенные фундаментальные причины экономического роста по четырем главным категориям или гипотезам. Несмотря на то что классификация подобного типа, несомненно, упускает некоторые нюансы литературы, она является удовлетворительной для целей нашего исследования. Мы выделим следующие основные факторы, влияющие на межстрановые различия в уровне дохода и темпе экономического роста:

1. Гипотеза случайного везения.
2. Географическая гипотеза.
3. Культурная гипотеза.
4. Институциональная гипотеза.

Под термином «везение (удача)» мы будем понимать множество фундаментальных причин, объясняющих расходящиеся траектории экономического развития различных стран, являющихся во многом идентичными. Объяснение различий базируется либо на предположении, что некоторая неопределенность или небольшие различия привели к отличным экономическим решениям с далеко идущими последствиями либо на предположении о существовании множества равновесий и различном выборе равновесия в разных странах. Под множественностью равновесий мы будем понимать ситуацию существования различных равновесных распределений ресурсов при одинаковой структуре экономики. В моделях, обладающих множественными равновесиями, мы часто не имеем возможности сделать точное предсказание относительно выбора того или иного равновесия различными экономиками. В таком случае всегда существует возможность выбора различных равновесий двумя во всем остальном идентичными экономиками. Эти равновесия могут обладать сильно различающимися характеристиками, что может привести к значительным различиям в уровне жизни и темпе экономического роста двух экономик. Везение или множественность равновесий могут проявиться в любом из непосредственных источников, которые мы обсуждали (а также через некоторые другие механизмы, которые будут представлены в книге в дальнейшем). Например, множественность равновесий может присутствовать в моделях внедрения технологий или моделях, описывающих инвестиции в физический и человеческой капитал. Поэтому объяснения, базирующиеся на удаче и множественности равновесий, часто хорошо обоснованы теоретически. Однако важен также вопрос о том, являются ли они эмпирически правдоподобными.

Под географией мы будем понимать все характеристики агентов, связанные с физическими, географическими и экологическими свойствами окружающей среды, в которой они проживают. География может воздействовать на экономический рост посредством ряда непосредственных факторов. Географические факторы, которые могут влиять на процесс экономического роста, включают в себя качество почвы, от которого напрямую зависит производительность в сельском хозяйстве; наличие природных ресурсов, которое является важной частью богатства нации, а также может стимулировать индустриализацию экономики, сопровождающуюся ростом спроса на такие ресурсы, как уголь и железная руда; климатические условия, которые могут иметь прямое влияние на производительность работников и их отношение к труду; топографические свойства рельефа территории, от которых зависит величина издержек услуг транспорта и связи, распространенность инфекционных заболеваний, которая влияет на здоровье нации, производительность и стимулы к накоплению физического и человеческого капитала. Например, плохое качество почвы, недостаток природных ресурсов и суровый климат в терминах агрегированной производственной функции могут быть проинтерпретированы как низкое значение переменной A, что, в некотором смысле, соответствует неэффективной технологии. Многие философы и специалисты в других областях общественных наук отмечали, что климат может иметь фундаментальное влияние на предпочтения агентов. Например, люди, проживающие в определенных климатических условиях, могут иметь большую норму дисконтирования и в большей степени предпочитать потребление сегодня потреблению в будущем. Это будет вести к снижению норм сбережений и инвестиций в физический и человеческий капитал в экономике. Наконец, различия в распространенности различных заболеваний между территориями может повлиять на производительность агентов и их желание накапливать человеческий капитал. Таким образом, объяснения, основанные на географических факторах, могут быть легко включены как в простую модель Солоу, так и в более сложные модели экономического роста, которые мы будем рассматривать в следующих главах книги.

Под культурой мы будем понимать веру, ценности и предпочтения, которые влияют на экономическое поведение индивидов. Различия в религиозных убеждениях между странами являются самым простым примером культурных факторов, влияющих на экономическое поведение. Различия в предпочтениях, например, о важности богатства по отношению к другим статусным характеристикам человека или о том, насколько скромным и терпеливым должен быть человек, могут быть настолько же, или даже более, важными, чем удача, географические характеристики или институты, факторами экономического развития страны. В широком смысле культурные факторы могут влиять на экономическое состояние страны через два основных канала. Во-первых, они могут влиять на желание и стимулы агентов заниматься той или иной экономической деятельностью и на их межвременной выбор между потреблением сегодня и потреблением в будущем. Через этот канал культурные факторы влияют на экономическую и профессиональную специализацию в обществе, рыночную структуру экономики, норму сбережений и желание и стимулы агентов накапливать физический и человеческий капитал. Во-вторых, культурные факторы могут влиять на степень кооперации и доверия в обществе, что является важным основанием различных видов деятельности, связанных с ростом производительности экономики.

Под институтами мы будем понимать правила, нормы, законы и политические меры, влияющие на экономические стимулы агентов и, соответственно, стимулы к инвестициям в технологии, физический и человеческий капитал. Основная аксиома экономического анализа состоит в предположении о том, что агенты совершают только те действия, за которые они получают вознаграждение. Поэтому институты, которые определяют размер этого вознаграждения, должны иметь значительное влияние на все три непосредственных источника экономического роста. Основное отличие институтов от географических факторов, везения и культурных факторов состоит в том, что они являются результатом общественного выбора. Несмотря на то что законы и другие нормы не являются прямым выбором населения и некоторые институциональные договоренности могут быть унаследованы из прошлого, в конце концов, законы, нормы и политические решения, в которых живет общество, являются выбором членов этого общества. Если члены общества коллективно решат изменить их, то они смогут это сделать. Из этого следует, что если институты являются важной фундаментальной причиной экономического роста и межстрановых различий в экономическом развитии, то они, возможно, могут быть реформированы для достижения лучших результатов. Такие реформы могут быть нелегки, они могут встретить сильную оппозицию, очень часто мы можем не знать, какие именно реформы будут эффективны. Однако они все равно остаются возможными, и дальнейшие исследования могут помочь нам понять, как различные реформы повлияют на экономические стимулы агентов и какие именно из них необходимо проводить.

Существует очевидная взаимосвязь между институтами и культурой. Оба типа факторов влияют на индивидуальное поведение, и они оба являются важными детерминантами стимулов агентов. Несмотря на это, важнейшее различие между теориями этих типов факторов оправдывает разделение на две группы. Институты находятся под прямым контролем членов общества в том смысле, что, изменяя механизм распределения ресурсов, конституцию, законы, меры экономической политики, агенты коллективно могут изменить институты, в которых они живут. С другой стороны, под культурными факторами мы понимаем те факторы, которые эволюционируют во времени и находятся вне прямого влияния агентов[1]. Несмотря на то что изменение институтов может на практике оказаться очень сложным процессом, изменить культуру намного сложнее и любые рекомендации обществу об изменении культурных характеристик почти бесполезны.

Также важно отметить тот факт, что институты сами по себе, хотя и считаются фундаментальной причиной различий в темпе экономического роста и уровне дохода между странами, являются эндогенными факторами. Они представляют собой равновесный выбор, сделанный либо обществом в целом, либо некоторыми влиятельными группами в обществе. Можно утверждать, что удача, география и культура являются более важными факторами, потому что они «более экзогенны» в том смысле, что они *не есть* результат равновесного выбора как институты, и поэтому институты различаются между странами во многом в результате различий в географических, культурных или каких-то случайных факторах. Хотя на некотором философском уровне это утверждение верно, оно не особенно полезно. Оно не избавляет нас от необходимости понимать прямые последствия различий в удаче, географии, культуре и институтах (и эти прямые различия считаются основой дебатов в этой области науки), также оно не означает, что понимание специфики роли институтов в экономическом развитии в любом смысле вторично. В конце концов, если мы сможем понять, какое *влияние институты оказывают* на экономический рост и какой специфический тип институтов имеет *наибольшее* значение, институциональные реформы могут привести к серьезным изменениям в экономическом поведении агентов (даже если часть исходных различий в институтах была вызвана различиями в географии, удаче или культуре).

В оставшейся части главы мы остановимся на причинах, повлиявших на появление четырех вышеописанных гипотез, и проведем краткий об-

[1] Важным исключением здесь является влияние образования на веру и ценности членов общества.

зор эмпирических свидетельств, имеющих отношение к различным фундаментальным причинам экономического роста. Теоретические основы и следствия институционального подхода будут подробно изложены в части VIII. На данный момент читателю необходимо усвоить, что автор книги не объективный сторонний наблюдатель в этом процессе, а, наоборот, активный сторонник институционального подхода. Поэтому неудивительно то, что основным выводом этой главы является утверждение о том, что институциональные различия во многом определяют важнейшие непосредственные источники роста, перечисленные выше. Вместе с тем те же самые эмпирические свидетельства могут быть проинтерпретированы другим образом и читатель волен делать выводы из них по своему усмотрению.

Прежде чем перейти к обсуждению фундаментальных причин экономического роста, стоит остановиться на еще одном важном вопросе. Этому посвящен следующий параграф.

4.2. Экономия от масштаба, население, технологии и рост мировой экономики

Как мы отметили в главе 1, межстрановые различия в уровне дохода возникли вследствие различий в темпе роста экономик различных стран в течение последних двух столетий. Именно поэтому нам так важно понимать механику процесса экономического роста. Настолько же замечателен тот факт, что мировой экономический рост является во многом феноменом лишь последних двухсот лет. Поэтому важный вопрос состоит в том, почему мировой экономический рост начался столь недавно и почему он не происходил до этого. В литературе по теории экономического роста предложен целый ряд интересных ответов на этот вопрос. Большое количество работ связано с ролью экономии от масштаба и населения. Аргументация выглядит следующим образом: при наличии экономии от масштаба (то есть возрастающей отдачи от масштаба) население должно достигнуть некоторого критического значения, прежде чем технологический прогресс начнет набирать скорость. Другими словами, для начала процесса экономического роста, некоторый естественный (стационарный) темп прогресса технологии должен достичь некоторого критического значения. Такой сценарий выглядит вполне убедительным. Действительно, мировое население очень сильно выросло за последний миллион лет и живущие сейчас люди имеют доступ к набору знаний и технологий, которые наши предки не могли представить. Может ли это долгосрочное развитие мировой экономики быть причиной межстрановых различий? Является ли увеличение населения планеты хорошим объяснением начала роста мировой экономики?

Чтобы дать предварительные ответы на эти вопросы, остановимся сначала на вопросах, связанных с населением страны. Самый простой способ увидеть связь между населением и технологическим прогрессом предложен в модели Саймона—Креймера (названной по именам демографа Джулиана Саймона и экономиста Майкла Креймера). В модели отсутствуют межстрановые различия, и поэтому в ней неявным образом описывается вся мировая экономика. Представим, что существует небольшая вероятность события, что некоторый индивид откроет новую идею, которая увеличит общее количество знаний в обществе. Важной частью модели является предположение о том, что такие случайные открытия распределены независимо между агентами и поэтому большее количество населения приводит к большему количеству новых открытий и росту совокупной производительности. Предположим, что значение выпуска определяется только технологией (это предположение может быть обобщено так, чтобы выпуск зависел от технологии и количества капитала как в модели Солоу, но это не изменяет вывода, который мы сделаем ниже):

$$Y(t) = L(t)^{\alpha}(A(t)Z)^{1-\alpha},$$

где $\alpha \in (0, 1)$, переменная $Y(t)$ обозначает мировой выпуск, переменная $A(t)$ — доступные технологии в мировой экономике, переменная $L(t)$ — население планеты, константа Z — некоторый другой неизменный фактор производства (например, землю). Не ограничивая общность рассуждений, нормируем ее значение $Z = 1$. Модель построена в непрерывном времени, и новые идеи открываются с темпом λ. Поэтому динамика общего количества знаний в экономике задается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{A}(t) = \lambda L(t), \tag{4.1}$$

а начальное значение $A(0) > 0$ считается заданным. Население, в свою очередь, определяется значением выпуска, например в результате мальтузианского механизма, который мы обсудим в главе 21. А именно предположим, что население мировой экономики является линейной функцией от выпуска:

$$L(t) = \phi Y(t). \tag{4.2}$$

Объединяя три этих уравнения, приходим к следующему (см. упражнение 4.1) уравнению:

$$\dot{A}(t) = \lambda \phi^{\frac{1}{1-\alpha}} A(t). \tag{4.3}$$

Решением этого дифференциального уравнения является следующая функция:

$$A(t) = \exp(\lambda \phi^{1/(1-\alpha)} t) A(0). \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) показывает, каким образом предположение об экономии от масштаба (возрастающей отдаче) в динамике населения приводит к устойчивому росту технологии. Читателю не составит труда убедиться в том, то выпуск задается как

$$Y(t) = \phi^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t),$$

поэтому совокупный доход будет расти с постоянным темпом, равным $\lambda\phi^{1/(1-\alpha)}$. Модель подобного типа приводит к устойчивому росту, который не ускоряется со временем. Однако Дж. Саймон и М. Креймер делают более сильное, чем сделанное нами в уравнении (4.1), предположение об экстерналии от населения. Они предполагают, что динамика накопления знаний задается следующим образом:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \lambda L(t).$$

Такое предположение приводит к следующему уравнению, определяющему динамику технологии (см. упражнение 4.2):

$$A(t) = \frac{1}{A(0)^{-1} - \lambda\phi^{1/(1-\alpha)}t}. \tag{4.5}$$

В отличие от уравнения (4.4), это уравнение приводит к ускоряющемуся темпу роста выпуска. Начиная с низкого начального значения переменной $A(0)$ (или $L(0)$) динамика экономики в модели будет описываться длительным периодом низкого выпуска и следующим за ним скачком — процессом, схожим со «взлетом» в современном мировом экономическом росте, который мы обсуждали в главе 1. Поэтому модели со значительной экономией от масштаба оказываются в состоянии сгенерировать процесс скачка в темпе роста выпуска, подобный тому, который мы наблюдаем в данных.

Несмотря на то что подобные модели, предложенные многими экономистами, могут быть использованы для описания процесса мирового экономического роста, необходимо отметить, что они не дают ответов на вопросы, связанные с межстрановыми различиями в уровне доходов или, например, на вопрос, почему мировой экономический рост начался в определенных странах (Западной Европе), а не в каких-либо других (странах Азии, Южной Америки, Африки). На самом деле, если объединить Западную Европу и Азию в единое релевантное экономическое пространство, можно заметить, что в течение последних двух тысяч лет население Азии последовательно было выше, чем население Европы (см., например, рис. 21.1). Поэтому объяснение, что скачок в развитии экономики Западной Европы при застое в экономическом развитии Азии является следствием лишь экономии от масштаба в динамике населения, представляется малоправдоподобным.

Из обсуждения модели Саймона—Креймера следует, что модели, основанные только на экономии от масштаба того или иного типа, не показывают нам фундаментальной причины межстрановых различий в уровне дохода. В лучшем случае они являются теориями роста мировой экономики, рассматриваемой в целом. Более того, если мы учтем тот факт, что мировой экономический рост происходит неравномерно, то есть он начался и идет более быстро в некоторых определенных регионах, привлекательность подобных теорий снижается еще больше. Если бы экономия от масштаба была важной причиной современного экономического роста, такие модели могли бы объяснить, где и когда начался процесс мирового экономического роста. Существующие модели, опирающиеся на экономию от масштаба, не в состоянии этого сделать. Именно поэтому вряд ли они предоставляют нам фундаментальные причины мирового экономического роста. Можем ли мы в этом случае сделать вывод о том, что экономия от масштаба и возрастающая отдача от населения не важны для объяснения процесса экономического роста? Безусловно, нет. Они вполне могут быть непосредственными источниками экономического роста (например, частями содержимого «черного ящика» технологии). При этом из обсуждения выше следует, что для объяснения того, почему, когда и где произошел скачок в развитии мировой экономики, подобные модели должны быть расширены. Это в еще большей степени мотивирует наше изучение фундаментальных причин роста.

4.3. Четыре фундаментальные причины

4.3.1. Удача и множественность равновесий

В главе 21 представлен ряд моделей, в которых множественность равновесий и множественность стационарных состояний экономики может возникнуть в результате провалов в координации на товарных рынках или несовершенств на финансовых рынках. Из этих моделей следует, что в двух экономиках с идентичным заданным набором параметров могут очень сильно различаться равновесные траектории. В экономике, находящейся в одном равновесии, может наблюдаться высокий уровень дохода и, возможно, темп устойчивого роста, в то время как экономика, находящаяся в другом равновесии, будет находиться в бедности и застое. Чтобы кратко описать основную идею подобных моделей, рассмотрим следующую простую инвестиционную игру с участием большого числа членов общества:

		Остальные агенты	
		Высокий уровень инвестиций	**Низкий уровень инвестиций**
Индивид	Высокий уровень инвестиций	y^H, y^H	$y^L - \varepsilon, y^L$
	Низкий уровень инвестиций	$y^L, y^L - \varepsilon'$	y^L, y^L

Остановимся на симметричном равновесии в этой игре. Первая колонка таблицы описывает случай, когда все агенты в экономике (за исключением одного индивида) выбрали высокий уровень инвестиций, во второй колонке представлены результаты игры в случае, когда все агенты выбрали низкий уровень инвестиций. С другой стороны, в первой строке приведены выигрыши агентов в случае, когда рассматриваемый индивид выбрал высокий уровень инвестиций, а во второй строке — выигрыши агентов в случае выбора индивидом низкого уровня инвестиций. В каждой ячейке таблицы первое число обозначает доход рассматриваемого индивида, в то время как второе число описывает доход каждого из остальных агентов в экономике. Предположим, что $y^H > y^L$ и что $\varepsilon, \varepsilon' > 0$. В этом случае из платежной матрицы вытекает, что высокий уровень инвестиций оказывается более выгодным для индивида в случае, если все остальные агенты также выбирают высокий уровень инвестиций. Это, например, может быть связано с дополняемостью различных технологий или с наличием в экономике экстерналии совокупного спроса (см. главу 21).

Легко убедиться в том, что в такой игре существует два симметричных равновесия по Нэшу (в чистых стратегиях). В первом равновесии все агенты, кроме рассматриваемого индивида, выбирают высокий уровень инвестиций и он также выбирает высокий уровень инвестиций. Так как аргумент предыдущего абзаца справедлив для каждого агента, выбор высокого уровня инвестиций будет оптимальной стратегией в случае, если все остальные агенты выбирают высокий уровень инвестиций. Из этого следует, что выбор высокого уровня инвестиций всеми агентами будет равновесием по Нэшу. Аналогично в случае, если индивид ожидает выбор низкого уровня инвестиций всеми остальными агентами, наилучшим ответом для него также будет выбор низкого уровня инвестиций, поэтому выбор низкого уровня инвестиций всеми агентами также будет равновесием. Таким образом, в данной простой игре существуют два симметричных равновесия по Нэшу (в чистых стратегиях).

Два важных замечания заслуживают внимания. Во-первых, в зависимости от устройства экономики и структуры взаимодействия агентов в ней значение y^H может оказаться значительно больше, чем значение y^L, и поэтому в распределении ресурсов в двух различных равновесиях могут быть значительные различия в уровне доходов. Поэтому, в случае если у нас есть основания считать, что такая игра может быть хорошей аппроксимацией реальности и что разные страны могут оказаться в различных равновесиях, структура экономических взаимодействий между агентами может помочь объяснить значительные межстрановые различия в уровне доходов на душу населения. Во-вторых, два равновесия в этой игре можно упорядочить по Парето: благосостояние всех агентов в экономике оказывается выше в равновесии с высоким уровнем инвестиций (критерий Парето обсуждается в главе 5). Модели Большого толчка, описанные в главе 21, обладают обоими из этих свойств.

Стохастические модели, в которых реализация некоторых случайных переменных определяет момент перехода некоторой экономики от низкопроизводительных к высокопроизводительным технологиям и, соответственно, начало процесса «взлета» экономики, так же, как и модели с множественностью равновесий, могут быть релевантными в данном контексте.

Модели с множественностью равновесий и стохастические модели, в которых случайные переменные определяют долгосрочный темп роста экономики, являются привлекательными для описания определенных аспектов экономического развития. Они также предоставляют нам информацию об устройстве механизма экономического развития внутри интересного класса моделей. Но говорят ли они нам что-либо о фундаментальных причинах экономического роста? Можем ли мы сделать вывод о том, что США стали богатой страной, а Нигерия осталась бедной, просто потому, что первой повезло с выбором равновесия, а второй не сопутствовала удача в этом выборе? Можем ли мы связать расхождение в траекториях экономического развития двух стран с каким-то незначительным случайным событием 200, 300 или 400 лет назад? Скорее всего, ответ на этот вопрос отрицательный.

Экономический рост в США является совокупным следствием множества экономических процессов, от инноваций и свободы экономической деятельности до значительных инвестиций в человеческий капитал и быстрого накопления физического капитала. Объяснить все эти процессы лишь случайной удачей в выборе нужного равновесия очень затруднительно. Условия в США и Нигерии сильно различались даже 400 лет назад, и это привело к различным возможностям, стимулам и институциональному развитию двух экономик. Именно комбинация различий в историческом опыте стран и различий в структуре экономических стимулов в них лежит в основе различий в процессе их экономического роста.

Модели, основанные на удаче и множественности равновесий, возможно, могут помочь нам понять причины расхождения траекторий двух во всем остальном идентичных экономик в течение двадцати или даже пятидесяти лет. Однако важный вопрос состоит в том, как мы можем объяснить расхождение в течение пятисот лет. Очевидно, очень маловероятной представляется ситуация, в которой Нигерия вдруг перейдет в новое равновесие и быстро достигнет уровня дохода на душу населения, сопоставимого с доходом в США[2]. Большинство моделей с множественностью равновесий являются неудовлетворительными в следующем смысле. Так же как в простом примере, рассмотренном выше, большинство моделей с множественностью равновесий обладают несколькими упорядоченными по Парето равновесиями. Это означает, что в одном равновесии полезность и благосостояние *всех* агентов выше, чем во всех остальных. Возможность упорядочить равновесия по Парето возникает как следствие простой структуры подобных моделей, в которых не учитывается множество важных в реальном мире характеристик экономики и разнородностей между агентами в ней. Однако эмпирически совершенно неочевидно, что возможность такого упорядочения равновесий помогает нам понять причины богатства одних стран и относительной бедности других. Действительно, если бы изменение поведения нигерийцами позволило бы всем жителям страны увеличить свое благосостояние (в рамках рассмотренной выше игры это соответствует переходу от низкого уровня инвестиций к высокому уровню), очень сложно представить, почему они не смогли скоординировать свои действия и сделать это в течение двухсот лет. Большинство читателей знают, что история Нигерии пронизана религиозными и этническими конфликтами и гражданскими войнами, опустошающими страну. В стране до сих пор процветает коррупция среди политиков, чиновников и армии, обогащающихся за счет остального населения. Поэтому перед лицом исторического и социального развития утверждение о возможности улучшающего по Парето изменения представляется по меньшей мере маловероятным.

Необходимо заметить, что легкий переход из одного, худшего в смысле Парето, равновесия к лучшему возможен не во всех моделях с множественностью равновесий. В литературе по экономическому росту делается полезное разбиение подобных моделей на два типа: модели с множественностью равновесий (в которых различные равновесия достигаются в результате одновременных изменений в ожиданиях или поведении агентов) и модели с множественностью стационарных состояний и зависимостью от истории (в которых после выбора экономикой определенной равновесной траектории переход к другому стационарному равновесию становится очень сложным или вовсе невозможным; см. главу 21). Модели

[2] Конечно, можно возразить, что реформы и важные изменения в темпе роста экономики всегда являются переходом из одного равновесия в другое. Однако такое объяснение не имеет большой эмпирической важности, если оно не основано на некоторой хорошо сформулированной модели выбора равновесия и может быть использовано для предсказания момента такого перехода.

с множественностью стационарных состояний являются более привлекательными, чем модели с множественностью равновесий при описании сохраняющихся в течение длительного времени различий в экономическом развитии разных стран. Несмотря на это, без добавления какого-то важного источника конфликта интересов или других искажений, способность моделей, в которых две во всем остальном идентичные страны оказались в различных равновесиях из-за различий в некотором выборе, объяснить различия между США и Нигерией представляется маловероятной. Механизм достижения определенного стационарного равновесия является важнейшим элементом таких моделей, и все фундаментальные причины экономического роста, включая институты, экономическую политику и, возможно, культуру должны играть важную роль при объяснении этих различий. Другими словами, если экономика Нигерии имеет такие же параметры, такие же возможности и такие же институты, как экономика США, в сегодняшнем мире свободного перетока информации, технологий и капитала должен существовать какой-то механизм, приводящий к импорту технологий и улучшению благосостояния жителей обеих стран.

Множество эпизодов чудес роста, таких как, например, Южная Корея и Сингапур, которые мы описали в главе 1, является еще одним вызовом для моделей с множественностью стационарных состояний. Если межстрановые различия в уровне доходов — это следствие выбора странами различных стационарных состояний, переход между которыми очень затруднителен или невозможен вовсе, то как мы можем объяснить опыт стран, вступивших в период очень быстрого роста? Очень показательным в данном случае является пример Китая. Экономика Китая находилась в застое при коммунизме до смерти Мао Цзедуна, но изменения в экономических институтах и политике, произошедшие после, привели к быстрому экономическому росту. Если экономика Китая находилась в стационарном состоянии с низким темпом роста до смерти Мао Цзедуна, нам необходимо объяснить, каким образом она вышла из него после 1978 г. и почему она не смогла сделать этого ранее. Такой подход неизбежно приведет нас к важной роли других фундаментальных причин экономического роста, таких как институты, экономическая политика и культура.

Другой — возможно, более убедительный — аргумент в защиту гипотезы удачи можно сделать наблюдая за ролью политических лидеров. Может, именно Мао Цзедун был причиной застоя в экономике Китая и его смерть и появление новых лидеров с их новыми убеждениями и экономической политикой стало причиной последовавшего экономического роста. Возможно, личность лидера страны можно моделировать как некоторый стохастический процесс, влияющий на развитие экономики. Такой подход, вероятно, является оправданным. В эмпирической работе [Jones, Olken 2005] показано, что личность политического лидера оказывает большое влияние на состояние экономики страны. Поэтому удача или везение могут играть важную роль в объяснении межстрановых различий в уровне дохода и темпе экономического роста и могут быть проинтерпретированы как выбор либо ускоряющей рост, либо тормозящей рост личности политического лидера страны. Однако такое объяснение ближе к институциональной гипотезе, чем к теориям случайного везения. Во-первых, влияние политического лидера на экономическое развитие страны происходит посредством его выбора тех или иных институтов и экономической политики. Во-вторых, описание процесса выбора лидера, его поведения и экономической политики, которую он проводит, является частью институционального объяснения. В-третьих, в исследовании Б. Джонса и Б. Олкена описана важная взаимосвязь между эффектом политического лидера и институтами в обществе. Выбор политического лидера, скорее всего, влияет на экономический рост только в странах со слабыми (в том смысле, что эти институты не накладывают ограничений на политиков и другие элиты в обществе) и недемократическими институтами. В демократических странах и в обществах с другим политическим устройством, в которых другие институты позволяют обществу контролировать поведение политических лидеров и других политиков, личность лидера не оказывает почти никакого влияния на экономический рост страны.

Таким образом, опираясь на вышеприведенные рассуждения, мы можем сделать предварительный вывод о том, что модели, базирующиеся на гипотезе удачи и множественности равновесий, полезны для изучения механизма экономического развития. Однако то, что они могут помочь нам найти фундаментальные объяснения, почему мировой экономический рост начался двести лет назад и почему некоторые страны сейчас оказались богатыми, а некоторые остались бедными, представляется маловероятным.

4.3.2. География

В подходе, описанном в предыдущем подпараграфе, мы описали важность фактора везения и множественности равновесий в идентичных во всем остальном экономиках. Альтернативный подход основан на предположении о глубоких различиях между странами. Географическая гипотеза, во-первых и в основном, основана на убеждении о том, что различные регионы планеты не являются одинаковыми. «Природа», то есть физические, экологические и географические характеристики страны, играют важную роль в ее экономическом развитии. Как мы отметили выше, географические факторы могут играть эту роль, определяя предпочтения и множества производственных возможностей для отдельных членов общества в различных странах. Существуют по меньшей мере три основные версии географической гипотезы, каждая из которых основана на различном механизме влияния географии на богатство нации.

Первая, и самая ранняя, версия географической гипотезы описана в работе [Montesquieu [1748], 1989]. Ш. Монтескье, будучи прекрасным французским философом и ярым сторонником республиканской формы правления, был убежден в том, что климатические факторы находятся среди важнейших детерминантов судьбы нации. Он считал, что климат, а именно температура воздуха, во многом определяют отношение человека к экономической деятельности, и через этот канал влияет на экономическое развитие и общественное устройство. В своей ставшей классической книге *The Spirit of the Laws* (1989, с. 234) он писал:

> Температура воздуха может быть настолько высокой, что тело человека становится полностью обессиленным. Прострация проникает даже в душу, человек теряет любопытство, у него отсутствует желание вести какую-либо благородную деятельность, притупляются чувства. Все его желания становятся пассивными, лень становится его счастьем.
>
> В прохладном климате люди <...> более энергичны. Жители теплых стран более боязливы, их можно сравнить со стариками, жители холодных стран же более храбры и молоды.

В настоящее время некоторые из утверждений, процитированных выше, могут показаться в чем-то наивными и возможно даже находящимися на грани «политической корректности». Несмотря на это, у них до сих пор много сторонников. Хотя красноречие Ш. Монтескье выделяет его из ряда мыслителей, придерживающихся таких взглядов, он был не первый и не последний из тех, кто подчеркивает важность географического фактора как фундаментальной причины экономического роста. Наиболее почитаемым среди экономистов сторонником такого подхода был один из основателей экономической науки Альфред Маршалл. Почти спустя полтора века после работы Монтескье он писал [Marshall 1890, p. 195; Маршалл 1993]:

> Энергичность людей отчасти связана с их расовой принадлежностью. Единственной причиной, которая может объяснить эти различия, если это вообще возможно, представляется климат.

В то время как первая версия географической гипотезы может показаться многим их нас наивной и сырой, вторая ее версия, основанная на влиянии климата на доступные обществу технологии, особенно в сельском хозяйстве, выглядит приемлемой и имеет значительно большее количество сторонников. Этот подход разработан одним из первых нобелевских лауреатов по экономике Гуннаром Мюрдалем. Он писал [Murdal 1968, vol. 3, p. 2121]:

Глубокое исследование проблемы недостаточного экономического развития отдельных стран должно принимать во внимание климатический фактор и его влияние на почву, растительность, животный мир, людей и физические активы, другими словами, на условия жизни и возможность экономического развития.

Уже сравнительно недавно Джаред Даймонд в популярной книге «Ружья, микробы и сталь», развивая эту мысль, утверждал, что географические различия между Северной и Южной Америками и Европой (или, более точно, Евразией) определили время начала и структуру сельскохозяйственной деятельности населяющих их людей и посредством этого канала повлияли на способность общества развить комплексную организацию и продвинутые гражданские и военные технологии (1997, например р. 358). Экономист Джеффри Сакс является одним из последовательных сторонников гипотезы важности географических факторов для производительности в сельском хозяйстве. В своей работе [Sachs 2001, p. 2] он пишет:

Технологии в регионах с умеренным климатом были более производительны, чем технологии в регионах с тропическим климатом уже к началу эпохи современного экономического роста, а может даже и ранее.

Вторая, более широко используемая, версия гипотезы географического детерминизма также подвержена критике. Большинство технологических различий, которые описывают ее сторонники, связаны с сельским хозяйством. Однако, как мы подчеркнули в главе 1, причины межстрановых различий в экономическом росте восходят к началу эпохи индустриализации. Современный экономический рост начался в промышленном секторе экономики, и именно те страны, которые не смогли провести индустриализацию, являются бедными сейчас. Более того, низкая производительность в сельском хозяйстве должна, наоборот, привести к появлению сравнительных преимуществ в промышленности и страны с «неблагоприятной географией» должны были начать инвестировать в промышленное развитие раньше, чем другие страны. Конечно, можно утверждать, что необходимым условием начала индустриализации является достижение некоторого уровня производительности в сельском хозяйстве. Хотя такая гипотеза возможно и выглядит правдоподобной, многие общества, которые не смогли провести индустриализацию, имели достаточно развитое сельское хозяйство и часто даже опережали в этом те страны, которые позднее смогли провести индустриализации очень быстро (см. параграф 4.4). Поэтому вряд ли мы можем найти простую и очевидную связь между неблагоприятными условиями для ведения сельского хозяйства и несостоявшимся скачком в экономическом росте[3].

[3] Ex post мы можем даже привести противоположные аргументы: может быть, страны, которые сейчас бедны, имели лучшую для ведения сельского хозяйства землю и это привело

Третий вариант географической гипотезы, ставший особенно популярным в последнее десятилетие, связывает бедность во многих регионах планеты с распространением инфекционных заболеваний. Он основан на утверждении о том, что «бремя инфекционных заболеваний <...> в тропиках выше, чем в умеренном климате» [Sachs 2000, p. 32]. В статьях [Bloom, Sachs 1998] и [Gallup, Sachs 2001, p. 91] утверждается, что только распространенность малярии в тропических странах Африки снижает темп роста их экономик как минимум на 2,6% в год. Из такого значения потерь в темпе роста следует, что, если бы малярия была искоренена в 1950 г., доход на душу населения в странах тропической Африки сейчас был бы в 2 раза выше. Если мы добавим к этому влияние других заболеваний, мы получим еще больший эффект от избавления от инфекционных болезней.

Третья версия географической гипотезы может оказаться намного более правдоподобной, чем первые две, в особенности принимая во внимание результаты микроэкономических исследований, утверждающих, что люди с плохим здоровьем являются менее производительными и возможно менее способны к образованию и поэтому к накоплению человеческого капитала. В следующих двух параграфах мы более подробно обсудим как общую формулировку географической гипотезы, так и ее специфические версии. Однако прежде необходимо сделать важное предостережение. Высокое бремя инфекционных болезней в бедных странах в наше время является во многом следствием, а не причиной их бедности. Население Европы также страдало от множества заболеваний в XVIII и даже в XIX вв. Однако именно процесс экономического развития позволил народам Европы избавиться от этих болезней и создать более здоровую окружающую среду. Поэтому высокая распространенность инфекционных заболеваний в бедных странах, по меньшей мере частично, является следствием их низкого уровня экономического развития.

4.3.3. Институты

Другой фундаментальной причиной межстрановых различий в темпе экономического роста и в уровне дохода на душу населения являются институты. Главной проблемой институциональной гипотезы представляется сложность в определении значения понятия «институты». В повседневной жизни слово «институты» связано с множеством различных понятий, а в академической литературе строгое определение этого термина зачастую отсутствует.

к сравнительным преимуществам развития сельского хозяйства, а не промышленности. Однако такая аргументация также не является полностью убедительной по причине того, что, как показано в главе 20, производительность в сельском хозяйстве, так же как и производительность в промышленности, в большинстве менее развитых стран сейчас ниже, чем в относительно развитых странах.

Экономический историк Дуглас Норт был награжден Нобелевской премией по экономике в основном за свои работы, подчеркивающие важность институтов в процессе исторического развития общества. В работе [North 1990, p. 3; Норт 1997] он предлагает следующее определение понятия «институты»:

> Институты — это правила игры в обществе, или, более строго, это создаваемые обществом ограничения, которые формируют механизмы взаимодействия между его членами.

Далее он выделяет основной канал влияния институтов на общественную жизнь:

> Следовательно, институты определяют стимулы для человеческого взаимодействия, будь то политические, общественные или экономические стимулы.

Это определение включает в себя три важных элемента, составляющих понятие институтов. Во-первых, они создаются обществом, в отличие от географии, которая находится вне контроля общества, институты связаны с факторами, создаваемыми людьми. Институты говорят о влиянии общественного выбора на экономическое развитие общества. Во-вторых, институты накладывают ограничения на человеческое поведение. Эти ограничения не являются непреодолимыми, любой закон может быть нарушен, любые правила могут быть проигнорированы. Несмотря на это, политические действия, законы и правила, запрещающие определенный тип поведения и поощряющие другой тип поведения, несомненно будут воздействовать на поведение членов общества. Ограничения, накладываемые институтами на поведение членов общества, формируют структуру человеческих взаимоотношений и влияют на стимулы. В некотором глубоком смысле институты выделяют важность стимулов в намного большей мере, чем другие возможные фундаментальные причины экономического роста.

Читатель может заметить, что предложенное выше определение делает концепцию институтов довольно широкой. Действительно, мы будем пользоваться ей в этой книге именно в таком смысле: под институтами мы будем понимать большой набор правил и механизмов, которые определяют структуру различных экономических взаимодействий между членами общества. Они включают в себя структуру экономических, политических и общественных отношений между домохозяйствами, индивидами и фирмами. Трудно переоценить важность политических институтов, которые определяют механизм коллективного принятия решений в обществе. Мы остановимся на них подробно в части VIII данной книги.

Очевидной начальной точкой в изучении фундаментальных причин межстрановых различий в уровне дохода будут *экономические институты*, которые состоят из таких элементов, как структура прав собственности, наличие и (хорошее или плохое) устройство рыночных механизмов и доступные фирмам и индивидам возможности заключения контрактов. Экономические институты важны, так как они определяют структуру экономических стимулов в обществе. Например, в отсутствие хорошо определенных прав собственности у агентов нет стимулов к накоплению физического и человеческого капитала или к внедрению более эффективных технологий. Экономические институты также важны, потому что они позволяют достичь самого эффективного распределения ресурсов в экономике и определить, кто именно получает прибыль, выручку и остаточные права контроля в обществе. Например, при отсутствии или игнорировании рыночных механизмов (как в случае большинства социалистических экономик в недавнем прошлом) выгоды от торговли не используются и ресурсы в экономике распределяются неоптимальным образом. Поэтому из экономической теории следует вывод о том, что общества, в которых экономические институты способствуют накоплению факторов производства, инновациям, эффективному распределению ресурсов и поощряют этот процесс, будут становиться более богатыми, чем общества, в которых подобные институты отсутствуют.

Гипотеза о том, что различия в структуре экономических институтов являются фундаментальной причиной межстрановых различий в темпе экономического роста, тесно связана с моделями, представленными в этой книге. Основой любой экономической модели является описание экономических институтов в моделируемой экономике, например структуры рынков, множества возможных контрактов и транзакций, распределения активов и прав собственности между членами общества. Более того, во всех таких моделях агенты реагируют на стимулы. И именно экономические институты, понимаемые в широком смысле как структура организации общества, определяемая всеми его членами, формируют эти стимулы. Некоторые способы организации общества поощряют его членов делать инновации, принимать риски, делать сбережения, искать пути улучшения своих действий, обучаться и накапливать человеческий капитал, решать проблему коллективного выбора и предоставления общественных благ. Другие способы организации общества не обладают такими свойствами. Рассматриваемые нами теоретические модели показывают, какие именно институциональные переменные и типы экономической политики важны с точки зрения стимулирования или замедления экономического роста.

Теоретический подход к анализу элементов, составляющих понятие «хорошие экономические институты», то есть поощряющих накопление физического и человеческого капитала и разработку и внедрение лучших технологий (хотя хорошие экономические институты могут изменяться со временем и изменениями в окружающей среде) будет развит в части VIII.

Однако читателю уже должно быть очевидно, что институты, накладывающие большие налоги на поощряющую производство активность не будут стимулировать экономический рост. Экономические институты, запрещающие инновации, не будут вести к технологическому прогрессу. Поэтому минимальная защита прав собственности и свободы предпринимательства необходимы. Однако большое значение имеют и другие аспекты понятия экономических институтов. Например, человеческий капитал необходим и для увеличения производительности, и для внедрения новых технологий. При этом в большом количестве стран минимальная степень равенства возможностей является необходимым условием накопления человеческого капитала. Поэтому экономические институты, которые защищают только права собственности богатых членов общества и привилегированных элит в нем, не позволят достигнуть такого равенства возможностей и создадут другие искажения в экономике, тем самым, возможно, замедляя ее рост. В главе 14 подчеркивается важность процесса шумпетерианского созидательного разрушения, в котором новые фирмы улучшают технологии, что приводит к банкротству существующих фирм, как существенного фактора экономического роста. Для шумпетерианского созидательного разрушения необходимо равенство всех фирм, так, чтобы уже существующие фирмы не имели возможности блокировать технологический прогресс. Поэтому для экономического роста, базирующегося на созидательном разрушении, необходимо наличие институтов, гарантирующих некоторую степень равенства возможностей в обществе.

В данный момент читатель может задать следующий вопрос: почему в некоторых обществах возникают экономические и политические институты, тормозящие экономический рост? Разве максимизация размера экономического пирога (уровня ВВП, потребления или темпа экономического роста) не будет выгодна всем членам общества? Существует два возможных ответа на эти вопросы. Первый возвращает нас к концепции множественности равновесий. Может оказаться, что члены общества не могут прийти к согласию относительно структуры «хороших» (то есть стимулирующих экономический рост) институтов. Однако такой ответ не может быть удовлетворительным в силу тех же причин, по которым объяснения, основанные на множественности равновесий, оказываются в большинстве случаев неудовлетворительными. В случае существования равновесия с лучшими институтами, в котором *все* члены общества могут стать богаче или увеличить свое благосостояние, невозможность координированных действий, приводящих к такому равновесию, в течение длительного периода времени представляется маловероятной.

Второй ответ основан на представлении о наличии конфликта интересов между отдельными членами общества. Никакие реформы, изменения или технологический прогресс не могут улучшить благосостояние всех агентов в экономике. Как и в шумпетерианской модели созидательного разрушения, каждая реформа, изменение или появление новой технологии создают победителей и проигравших от этого. В части VIII мы покажем тесную связь между институциональным объяснением экономического роста и конфликтами интересов в обществе. Говоря простым языком, распределение ресурсов не может быть отделено от агрегированных экономических показателей, или, в более общепринятой форме, эффективность экономики и распределение ресурсов в ней не могут быть разделены. Институты, оказывающиеся не в состоянии максимизировать потенциал роста экономики, в то же время могут приносить пользу отдельным группам в обществе, которые впоследствии будут лоббировать сохранение этих институтов. Поэтому для понимания причин институциональных различий нам необходимо изучение и описание победителей и проигравших от тех или иных институциональных реформ. Это может позволить понять, почему, даже в случае, когда рассматриваемые институциональные изменения приводят к увеличению размера национального пирога, победители не в состоянии компенсировать потери проигравших, а также почему победители недостаточно сильны для подавления сопротивления проигравших. Такое исследование не только поможет нам объяснить, почему некоторые общества выбирают или приходят к институтам, которые не стимулируют экономический рост, но и позволит нам делать предсказания о грядущих институциональных изменениях. В конце концов тот факт, что институты могут изменяться и действительно изменяются, характеризует важное отличие институциональной гипотезы от географической и культурной гипотез. Однако важный вопрос о равновесных институтах и об эндогенных институциональных изменениях должен быть отложен до части VIII. Сейчас заметим лишь, что эндогенность институтов имеет важное следствие: эндогенность институтов делает эмпирические исследования роли институтов в экономическом росте очень сложными, потому что в этом случае при статистическом оценивании влияния институтов на экономическое развитие в получаемых оценках коэффициентов будет возникать стандартное смещение, связанное с одновременностью[4].

В этой главе мы остановимся на эмпирических свидетельствах за и против приведенных выше гипотез. Мы будем утверждать, что институциональные различия в структуре экономики являются основными

[4] Заметим, что, несмотря на то что география является «экзогенным» фактором в том смысле, что за некоторыми важными исключениями (например, такие климатические изменения, как глобальное потепление) она не подвержена влиянию экономической деятельности, это не делает ее эконометрически экзогенной. Географические характеристики также могут быть (и, скорее всего, являются) коррелированными с другими факторами, влияющими на экономический рост.

детерминантами экономического процветания общества. Ряд недавних эмпирических работ поддерживает это мнение. Далее мы приведем их краткое описание. Однако важно подчеркнуть, что удача, география и культура также, возможно, могут быть важными факторами и что все четыре фундаментальные причины экономического роста дополняют друг друга. Эмпирические свидетельства говорят о том, что институты являются важнейшей из этих четырех причин, однако это не отменяет потенциальную возможность влияния других факторов, например культурных различий, на экономический рост.

4.3.4. Культура

Последнее фундаментальное объяснение экономического роста базируется на идее, что разные общества (или возможно разные этнические и расовые группы) из-за различий в историческом опыте и религии имеют различные культуры. Некоторые специалисты в общественных науках полагают, что культура является ключевым фактором, определяющим систему ценностей, предпочтений и убеждений отдельных индивидов и общества в целом, и делают отсюда вывод о том, что культурные различия играют главную роль в экономическом развитии.

В некотором смысле мы можем предположить, что культура влияет на равновесную динамику экономики при заданном наборе институтов. Вспомним, что в случае множественности равновесий выбор равновесия оказывается главным элементом модели. Например, в простой игре, которую мы рассмотрели в параграфе 4.3.1, культура может быть одним из факторов, определяющих, станет ли выбор высокого или низкого уровня инвестиций скоординированным выбором членов общества. «Хорошей» культурой мы можем назвать ту, которая направляет общество на выбор лучшего (по Парето) равновесия. Очевидно, что уже приведенный нами аргумент, говорящий о том, что ситуация, когда общество останется в равновесии, в котором уровень благосостояния всех его членов ниже, чем в другом равновесии, представляется маловероятной, свидетельствует против важности именно такой роли культуры в экономическом развитии. С другой стороны, различные культуры порождают различные типы убеждений и поведения людей, и эти различия могут изменить равновесие при заданном наборе институтов (например, некоторые убеждения позволяют использование стратегии наказания, а некоторые — нет).

Наиболее распространенный взгляд на связь между культурой и экономическим развитием общества был предложен Максом Вебером в работе [Weber 1930; Вебер 1990]. Он утверждал, что индустриализацию в странах Западной Европы можно связать с культурными факторами, а именно с Реформацией и зарождением протестантства, а более точно —

кальвинизма. Интересно отметить, что М. Вебер приводит краткое описание своих взглядов в комментарии к работе Ш. Монтескье:

Монтескье говорит об англичанах, как о «добившихся наибольших успехов по сравнению с другими нациями в трех важных вещах: благочестии, коммерции и свободе». Возможно ли то, что их превосходство в коммерции и переход к свободным политическим институтам в некотором смысле связан именно с благочестием, которое Монтескье им приписывает?

М. Вебер утверждает, что благочестие англичан, а именно их протестантская вера стала важной причиной капиталистического развития. Протестантство привело к распространению убеждений о важности работы, бережливости и сбережений. Оно также рассматривает экономический успех как свидетельство праведности и даже как сигнал о ней. Вебер сравнивает эти характеристики протестантства с характеристиками других религий, например католичества, которое, как утверждает Вебер, не содействовало развитию капитализма. Много позже подобные идеи были использованы другими учеными для сравнения воздействия других религий на экономическую деятельность людей. Многие историки и экономисты утверждают, что возникновение капитализма, начало современного экономического роста и индустриализация тесно связаны культурными убеждениями и религиозными верованиями людей. Схожие причины были предложены в качестве объяснения относительной бедности латиноамериканских стран (вследствие их иберийской культуры) и относительного богатства их североамериканских соседей (вследствие англосаксонской культуры).

Похожий аргумент, вышедший из антропологии, базируется на предположении о том, что общество может стать «нефункциональным» в случае, если культурные ценности и система взглядов в нем не поощряет взаимодействие и кооперацию между людьми. Оригинальная и проницательная версия этого аргумента приведена в работе [Banfield 1958], где автор исследует бедность в Южной Италии. Его идеи в дальнейшем были популяризованы Робертом Путманом в книге [Putman 1993], где он ввел понятие общественного капитала как систему культурных ценностей, приводящую к кооперации и другим «хорошим результатам».

Перед теориями экономического роста, основанными на культуре, стоят два вызова. Первый связан с трудностями измерения понятия «культура». Несмотря на определенный прогресс в методах измерения некоторых культурных характеристик с помощью общественных опросов об отношениях в обществе и взглядах и убеждениях людей, утверждение о том, что Север Италии стал богатым, потому что он обладает хорошим общественным капиталом, а Юг остался бедным, потому что он обладает плохим общественным капиталом, представляется рискованным. Вторая проблема объяснений, основанных на культуре, связана с появлением стран-чудес роста, таких как Южная Корея и Сингапур. Как мы уже заметили один раз, если некоторые характеристики азиатской культуры являются важной причиной успешного экономического роста этих стран, очень сложно объяснить, почему эти же культурные характеристики не привели к росту ранее. Почему эти же культурные ценности не привели к экономическому росту в Северной Корее? Если азиатские культурные ценности важны для роста экономики Китая сейчас, почему они не привели к лучшим экономическим показателям во время диктатуры Мао Цзедуна? В принципе, обе описанные проблемы преодолимы. Ученый может построить модель культуры, основанную на данных и связанную с теорией о том, как культура может быстро изменяться в некоторых обстоятельствах. Хотя построение таких теорий в принципе возможно, на данный момент не было построено ни одной из них. Более того, свидетельства, приведенные в следующем параграфе, говорят о том, что культурные различия не являются главной причиной, стоящей за значительными различиями в темпе экономического роста различных стран в течение нескольких последних столетий. Поэтому мы можем рассматривать культурный фактор как дополняющий институциональный, например, как одну из сил, ответственных за устойчивость и персистентность институтов.

4.4. Влияние институтов на экономический рост

В этом параграфе мы остановимся на убедительных эмпирических доказательствах утверждения о том, что различия в экономических институтах являются более важной причиной межстрановых различий в уровне дохода на душу населения, чем удача, география или культура. Мы начнем с взгляда на самые простые корреляции между различными мерами состояния экономических институтов и дохода на душу населения.

На рис. 4.1 показана межстрановая корреляция между логарифмом ВВП на душу населения в 1995 г. и некоторой мерой защиты прав собственности и защиты от риска экспроприации, усредненной за период с 1985 по 1995 г. Источником этой меры состояния экономических институтов является частная компания *Political Risk Services*, которая производит оценку рисков экспроприации иностранных инвестиций в различных странах. Эти данные несовершенны. Они включают в себя субъективные факторы, возникающие при оценке степени защищенности прав собственности. Несмотря на это, они могут быть использованы с пользой в нашем упражнении. Во-первых, они говорят о защищенности прав собственности, что является важной составляющей экономических институтов, особенно в части их влияния на экономические стимулы агентов.

Во-вторых, эти данные приобретаются бизнесменами, рассматривающими возможность осуществлять инвестиции в эти страны, поэтому они отражают степени оценки защищенности прав собственности рынком.

Из рис. 4.1 нетрудно увидеть, что страны с более защищенными правами собственности, и поэтому с лучшими экономическими институтами, имеют более высокий уровень среднего дохода. Однако не следует интерпретировать показанную на рисунке корреляцию как причинно-следственную связь, то есть утверждение о том, что высокий уровень защиты прав собственности ведет к процветанию экономики. Во-первых, корреляция может возникать в результате обратной зависимости, может, например, оказаться, что только достаточно богатые страны могут позволить себе высокую степень защиты прав собственности. Во-вторых, что более важно, в данном случае может возникнуть проблема смещения, связанного с пропущенными переменными. Может оказаться, что некоторые другие факторы, такие как, например, география и культура, одновременно могут объяснить, почему некоторые страны оказываются бедными и имеют плохо защищенные права собственности. Поэтому если некоторые пропущенные факторы одновременно влияют на институты и доход, мы можем сделать ложный вывод о наличии причинно-следственной связи между экономическими институтами и уровнем дохода в том случае, когда в действительности такая связь отсутствует. Это известная в эконометрике проблема идентификации, которая возникает в случае наличия смещения, связанного с одновременностью или с пропущенными переменными. Наконец, степень защищенности прав собственности, как и другие косвенные показатели состояния экономических институтов, является равновесным показателем, возникающим как следствие тех или иных политических институтов и политических конфликтов в обществе. Важность последнего наблюдения состоит в том, что из него вытекает необходимость политико-экономического моделирования взаимодействий агентов в обществе. Мы рассмотрим такие модели в части VIII.

Чтобы более подробно проиллюстрировать возможные проблемы идентификации, предположим, что климат или география оказывают влияние на экономическое развитие страны. Действительно, такую связь легко увидеть на простой диаграмме, связывающей широту (абсолютное значение удаленности местности от экватора) и доход на душу населения, хорошо согласующейся со взглядами Ш. Монтескье и других сторонников географической гипотезы. Интересно отметить тот факт, что Ш. Монтескье не только утверждал, что теплый климат делает людей ленивыми и поэтому непроизводительными, но и то, что в теплом климате невозможно появление демократических политических институтов. Поэтому, по мнению Ш. Монтескье, деспотизм и автократия является «равновесной» политической системой в теплом климате. Поэтому наличие пропущенной переменной, например географии, которая объясняет как структуру экономических институтов, так и степень экономического развития, является возможной причиной корреляций на рис. 4.1. Игнорирование подобных третьих факторов может привести к ошибочным выводам.

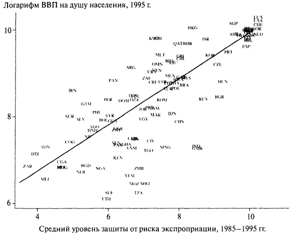


Рис. 4.1. Связь между экономическими институтами, измеренными как среднее значение риска экспроприации в течение 1985–1995 гг. и ВВП на душу населения

Хотя утверждение Ш. Монтескье может показаться нереалистичным и снисходительным с точки зрения современных представлений об обществе, следует серьезно понимать основную идею, изложенную выше: корреляции, показанные на рис. 4.1 и, в дальнейшем, на рис. 4.2, не обязательно отражают причинно-следственные связи в экономике. Как мы уже отметили в контексте влияния религии и общественного капитала на экономическое развитие, диаграммы и корреляции такого типа, а также их многоразмерные аналоги, такие как регрессии, построенные с помощью метода наименьших квадратов, *не в состоянии* отразить причинно-следственные связи. Даже при очень подробном регрессионном анализе необходимо учитывать возможность смещения в оценках из-за возможного наличия пропущенных переменных.

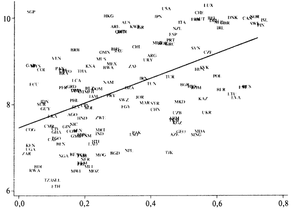


Рис. 4.2. Связь между широтой (расстоянием от столицы страны до экватора) и доходом на душу населения в 1995 г.

Как мы можем преодолеть трудности, возникающие при попытке установить причинно-следственные связи между экономическими институтами и состоянием экономики страны? Ответ на такой вопрос заключается в построении эконометрических моделей, основанных на правдоподобных идентификационных ограничениях. Это можно сделать с помощью оценивания структурных эконометрических моделей или с помощью оценивания моделей в сокращенной форме, используя метод инструментальных переменных. В настоящее время мы не обладаем количеством знаний о развитии экономических институтов и их воздействии на экономическое положение страны, достаточным для построения и оценки полностью структурных эконометрических моделей. Поэтому на первом этапе мы можем остановиться на свидетельствах из некоторых моделей в сокращенной форме, которые несут информацию о причинно-следственной связи между институтами и экономическим ростом. Одна из возможностей состоит в исторических наблюдениях, в частности в анализе естественных экспериментов — редких исторических событий, в течение которых институты изменялись под воздействием некоторых экзогенных факторов, а остальные фундаментальные причины экономического роста оставались неизменными. Далее мы обсудим уроки из двух подобных естественных экспериментов.

4.4.1. Корейский эксперимент

До окончания Второй мировой войны Корея находилась под японской оккупацией. Вскоре после окончания войны Корея получила независимость. Основным опасением США в то время была возможность захвата всего Корейского полуострова Советским Союзом или коммунистическими силами, контролируемыми бывшим командиром боевиков Ким Ир Сеном. Поэтому власти США оказывали поддержку влиятельному лидеру националистов Сингману Ри, который придерживался сепаратистских взглядов, а не объединения с коммунистическим режимом Северной Кореи. В мае 1948 г. при значительном бойкоте со стороны населения, не поддерживающего отделения, на юге были проведены выборы. Вновь избранный парламент приступил к подготовке новой конституции и построению Республики Южная Корея к югу от 38-й параллели. Северная часть полуострова превратилась в Корейскую Народно-Демократическую Республику под контролем Ким Ир Сена.

Два новых независимых государства получили очень сильно отличающиеся типы политического устройства и совершенно различный набор политических и экономических институтов. Власти КНДР пошли по пути, проложенному советским коммунистическим строем и китайской революцией, и полностью ликвидировали частную собственность на капитал и землю. Экономические решения не были основаны на рыночной целесообразности, а диктовались коммунистическим правительством. В свою очередь, власти Южной Кореи сохранили систему с частной собственностью и капиталистическими экономическими институтами.

Северная и Южная Корея имели общие исторические и культурные корни, прежде чем произошли такие значительные институциональные изменения. На самом деле весь Корейский полуостров в огромной степени однороден по этническим, лингвистическим, культурным, географическим и экономическим характеристикам. Географические различия между Севером и Югом очень малы, обе части полуострова имеют схожую структуру распространенности инфекционных заболеваний. Более того, до разделения Север и Юг находились на одном уровне экономического развития, может быть, Север был чуть более промышленно развит. По оценке из работы [Maddison 2001] Северная и Южная Корея имели примерно равный уровень дохода на душу населения в момент разделения.

Поэтому мы можем рассмотреть разделение Корейского полуострова на два государства более 60 лет назад как «естественный эксперимент», который можно использовать для выявления причинно-следственной связи между институтами и богатством нации. Корея была разделена на два государства, каждое с радикально отличающимся устройством, в то время как география, культура и множество других возможных детерминант экономического роста и процветания были одинаковыми в обеих странах. Поэтому разумным представляется вывод о том, что все различия в экономическом развитии двух стран могут быть связаны с выбором институтов в них.

В последовавшие за разделением 66 лет два корейских государства пошли по значительно расходящимся траекториям экономического развития. К концу 1960-х гг. Южная Корея трансформировалась в одну из азиатских чудо-экономик, испытав один из самых быстрых в истории эпизодов роста экономического благосостояния. В то же время экономика Северной Кореи оставалась в застое. К 2000 г. доход на душу населения в Южной Корее составил 16 100 долларов США, а в Северной Корее — лишь 1000 долларов США. Мы можем привести только одно правдоподобное объяснение столь различного экономического развития двух этих государств после 1950 г.: различные экономические институты ведут к различным экономическим результатам. Действительно, Север и Юг имели не только схожую географию, но и общую культуру, поэтому ни географические, ни культурные факторы не могли стать причиной столь различного экономического опыта двух государств. Конечно, можно сказать, что Южной Корее повезло, а Северной — нет (хотя эти различия не связаны с множественностью равновесий, а стали результатом выбора различных типов институтов в двух странах). Однако значительная устойчивость неоптимальных северокорейских институтов говорит о том, что гипотеза везения вряд ли может быть использована в данном случае. Несмотря на огромное количество доказательств того, что северокорейская система привела к бедности и голоду огромного количества населения, лидеры Коммунистической партии в Северной Корее используют все возможные способы для сохранения такого режима.

Однако, несмотря на свою убедительность, свидетельства подобного естественного эксперимента недостаточны для установления значимости экономических институтов как основного фактора, определяющего межстрановые различия в экономическом благосостоянии наций. Во-первых, это только единственный эпизод, а в естественных науках в лабораторных экспериментах большая выборка является необходимым условием. Во-вторых, в данном эксперименте, сравнивая рыночно ориентированную экономику и репрессивный коммунистический режим, мы имеем дело с экстремальным случаем. Консенсус среди специалистов в общественных науках состоит в том, что длительный период тоталитарной власти и центрального планирования приносит экономике значительные издержки. Поэтому наблюдения за опытом Северной и Южной Кореи не позволяют нам утверждать, что различия экономических институтов между капиталистическими или демократическими странами также являются основным фактором, определяющим различия в их траекториях экономического развития. Для того чтобы убедиться в важности роли экономических институтов как фактора, определяющего уровень богатства или бедности нации, нам необходимо обратиться к крупномасштабным «естественным экспериментальным» наблюдениям различных типов экономических институтов.

4.4.2. Колониальный эксперимент: инверсия богатства

Колонизация значительной части планеты европейскими странами позволяет провести такой крупномасштабный естественный эксперимент. С начала XV в., и в особенности с 1492 г., европейцы завоевали значительное количество территорий. Колонизация изменила структуру институтов во многих различных странах, завоеванных или контролируемых европейцами. Для нас наиболее важным является то, что в разных частях своих глобальных империй европейцы устанавливали различные типы институтов. Лучше всего в этом можно убедиться, сравнив институты, основанные на частной собственности и демократии, привнесенные европейцами в северо-восточную часть США с институтами, базирующимися на репрессиях и рабстве, установленными в большинстве карибских плантационных экономик. В результате европейские колонизаторы инициировали значительные изменения в структуре экономических институтов во многих странах, в то время как географические факторы в них оставались неизменными.

Влияние европейской колонизации на структуру экономических институтов лучше всего можно увидеть из следующего единичного наблюдения: множество исторических свидетельств позволяют сделать вывод о значительной инверсии благосостояния и уровня дохода во многих бывших европейских колониях. Такие цивилизации, как моголы в Индии и ацтеки и инки в Северной и Южной Америке в XVI в. были одними из самых развитых и богатых на планете. В то же время государства, которые существуют в границах их территорий обитания сейчас, находятся среди беднейших в начале XXI в. При этом государства, образовавшиеся на территориях, населенных намного менее развитыми цивилизациями Северной Америки, Новой Зеландии и Австралии, сейчас намного богаче этих государств.

Примеры инверсии богатства не ограничиваются подобными сравнениями. Для более подробной иллюстрации инверсии богатства нам необходимы оценки уровня дохода в разных странах 500 лет назад. К счастью, в качестве аппроксимирующих уровень дохода переменных мы можем использовать данные по урбанизации и плотности населения. Появление больших городов и значительная плотность населения возможны лишь в обществах, достигших определенного уровня развития сельскохозяйственных технологий, транспортного сообщения и коммерции. На рис. 4.3 показана связь между уровнем дохода на душу населения

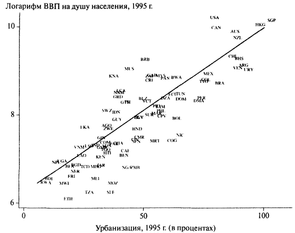


Рис. 4.3. Урбанизация и доход, 1995 г.

и степенью урбанизации (рассчитанную как доля населения, проживающего в городах с населением больше 5000 человек) в 1995 г. Он показывает, что даже в настоящее время, значительно позже окончания эпохи индустриализации, можно проследить значительную связь между степенью урбанизации и благосостоянием нации.

Естественно, высокие показатели урбанизации не означают, что значительная часть населения имеет высокий уровень дохода. Более того, до начала XX в. именно города часто были центрами сосредоточения бедности и слабого здоровья населения. Несмотря на это, урбанизация является хорошей аппроксимирующей переменной для среднего уровня дохода и хорошо соотносится с показателем ВВП на душу населения, переменной, с помощью которой мы измеряем уровень дохода сейчас. Плотность населения, тесно связанная с урбанизацией, является еще одной переменной, подходящей для аппроксимации уровня дохода в доиндустриальную эру.

На рис. 4.4 и 4.5 показана связь между уровнем дохода на душу населения в настоящее время и показателями урбанизации и логарифмом плотности населения в 1500 г. в выборке бывших европейских колоний. Мы выбрали 1500 год по причине того, что в то время европейская колонизация еще не оказывала влияния на эти территории. На обоих рисунках

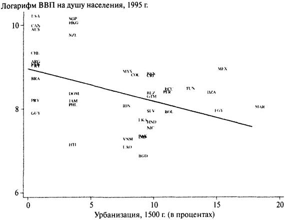


Рис. 4.4. Инверсия богатства: урбанизация в 1500 г. и доход на душу населения в 1995 г. в бывших европейских колониях

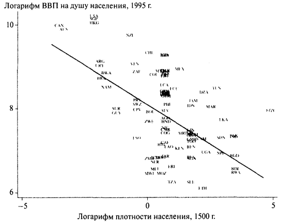


Рис. 4.5. Инверсия богатства: плотность населения в 1500 г. и доход на душу населения в 1995 г. в бывших европейских колониях

хорошо прослеживается значительная убывающая зависимость, означающая инверсию ранжирования стран с точки зрения благосостояния между 1500 г. и настоящим временем. Более того, из рисунков нетрудно убедиться, что в 1500 г. территории с умеренным климатом были менее богаты, чем территории с тропическим климатом. Однако эта зависимость также сменилась на противоположную в начале XX в.

Инверсия богатства является экстраординарным и необычным фактом. Огромное количество эмпирических свидетельств говорят о том, что после первоначального развития сельского хозяйства тенденция к росту урбанизации и плотности населения была на протяжении длительного периода времени общей для множества стран, включая те, которые впоследствии были колонизированы европейцами. Расширение горизонта данных на более ранние периоды времени показывает, что рост урбанизации и богатства наций проходил как минимум в течение пятисот лет до начала колонизации, как в бывших европейских колониях, так и в странах, не подвергшихся колонизации. Несмотря на известные эпизоды падения и распада таких империй, как Древний Египет, Древняя Греция, Римская империя, Карфаген и Венеция, общей тенденцией в мировом развитии был рост урбанизации, плотности населения и богатства. До 1500 г. инверсия доходов не являлась характерной чертой развития мировой экономики. Наблюдения за динамикой всей мировой экономики, не включая бывшие европейские колонии, или динамикой европейской экономики между 1500 и 1995 г. также не выявляет случаев инверсии доходов.

Поэтому у нас нет оснований утверждать, что зависимости, показанные на рис. 4.4 и 4.5, являются в некотором смысле возвращением к долгосрочному среднему значению. Наоборот, инверсия богатства в бывших европейских колониях не была чем-то связанным с их естественным развитием, ее причиной были изменения, принесенные колонизаторами. В основном это были, конечно, институциональные изменения. Европейцы принесли изменения в политическом и экономическом укладе общества во все страны, которые они завоевали. Более того, типы институтов, принесенных европейцами в различные колонии, в огромной степени отличались друг от друга[5]. Скорее всего, именно эти различия лежат у истоков инверсии богатства и экономического развития. В работе [Acemoglu, Johnson, Robinson 2002] показано, что инверсия богатства

[5] В некоторых обществах, например в Центральной Америке и Индии, постколониальные институты были построены на преколониальных институтах. В этом случае важнейшим определяющим фактором развития институтов стали изменения в иерархической структуре правящих элит. Европейцы могли сохранить и развивать далее имеющуюся в обществе структуру иерархии, как она была, например, в империях ацтеков, инков и моголов, или принести новые политические и экономические институты, поощряющие инвестиции и более широкое участие населения в управлении страной.

произошла в основном в XIX в. и тесно связана с процессом индустриализации.

Эти наблюдения очевидно не согласуются с простейшей и общепринятой версией географической гипотезы. В начале XVI в. страны, расположенные в тропической зоне, были относительно богаты, в настоящее же время мы наблюдаем противоположную картину. Поэтому построение теории, описывающей относительное богатство наций, на предположении о неизбежной бедности тропических стран из-за их климатических характеристик, структуры инфекционной заболеваемости и других неизменных факторов, представляется нелогичным.

Несмотря на это, следуя за работой [Diamond 1997; Даймонд 2012], мы можем рассмотреть теорию, названную в работе [Acemoglu, Johnson, Robinson 2002] усложненной географической гипотезой. В ней утверждается, что географические факторы влияют на экономическое развитие, но характер этого влияния изменяется во времени. Например, европейцы создали сельскохозяйственные технологии, такие как тяжелые металлические плуги, применимые только в определенных широтах с умеренным климатом. Их эксплуатация в тропических почвах была невозможна. Поэтому после того, как европейцы завоевали значительную часть территории планеты, они внедряли на завоеванных территориях специфические технологии, которые применимы в определенных странах (таких как США, Аргентина, Австралия) и не применимы в других странах (таких как Перу, Мексика, страны Западной Африки). Однако наблюдение о том, что инверсия богатства в основном произошла в конце XVIII и в XIX в., не согласуется с наиболее правдоподобными формами усложненной географической гипотезы. Европейцы действительно принесли в колонии новые технологии, однако из того, что инверсия богатства произошла в XVIII–XIX вв., следует, что важнейшую роль в этом процесс сыграли промышленные, а не сельскохозяйственные технологии. Поэтому неочевидной кажется причина того, почему промышленные технологии не могли быть применимы в тропическом климате (на самом деле они очень успешно используются в таком климате, например в Сингапуре и Гонконге).

Схожие рассуждения позволяют усомниться и в применимости культурной гипотезы. Хотя обычно культура изменяется достаточно медленно, колониальный эксперимент был достаточно радикален и привел к значительным изменениям культурного уклада во множестве стран, оказавшихся под управлением европейцами. Вдобавок уничтожение коренного населения во множестве колоний и миграция европейцев в них привели к возникновению новой культуры или по меньшей мере к значительному изменению уже существующей. Однако культурная гипотеза не предлагает естественного объяснения причин инверсии богатства и не позволяет ничего сказать о времени ее прохождения. Более того, как будет показано далее, из эконометрических моделей, которые контролируют влияние институтов на уровень доходов, следует, что религиозные и культурные факторы не оказывают существенного влияния на экономическое развитие и богатство наций.

Влияние фактора удачи также представляется ограниченным. Различие в типах институтов, принесенных европейцами, не было их случайным выбором. Наоборот, этот выбор был во многом связан с условиями, которые они наблюдали в завоеванных колониях. Другими словами, тип институтов, принесенных и в дальнейшем развитых европейцами, был эндогенным (равновесным) исходом, и нам необходимо изучить, каким образом он был достигнут.

4.4.3. Инверсия богатства и институциональная гипотеза

Согласуется ли инверсия доходов с предположением о лидирующей роли экономических институтов в определении сравнительного уровня экономического развития и богатства наций? Ответ на этот вопрос утвердительный: да, согласуется. Более того, как только мы поймем различия в структуре экономических институтов, созданных в процессе колонизации, мы убедимся в том, что институциональная гипотеза оказывается способна предсказать инверсию богатства.

Эмпирические свидетельства, представленные в работе [Acemoglu, Johnson, Robinson 2002] говорят о наличии тесной связи между первоначальной плотностью населения, степенью урбанизации и созданием хороших экономических институтов. В частности, из этих свидетельств следует, что при неизменных прочих факторах, увеличение первоначальной плотности населения или рост первоначальной степени урбанизации общества ведут к ухудшению качества институтов, как в момент получения колонией независимости, так и в настоящее время. Эта зависимость показана на рис. 4.6 и 4.7, где в качестве меры экономических институтов используется тот же показатель, что и на рис. 4.1, защита от риска экспроприации собственности в настоящее время. Из них видно, что относительно плотно заселенные и высокоурбанизированные в 1500 г. колонии имеют сейчас худшие институты, а редконаселенные и неурбанизированные территории получили приток европейских мигрантов и развили институты, обладающие высоким уровнем защиты прав собственности для широких слоев населения страны. Таким образом, европейская колонизация привела к инверсии институтов в том смысле, что изначально богатые и густонаселенные территории пришли к «худшим» институтам. Инверсия институтов не означает того, что в изначально густонаселенных территориях институты были лучше. Она говорит лишь о том, что относительно бедные и редконаселенные территории имеют тенденцию к построению институтов, поощряющих экономический рост в большей

Рис. 4.6. Инверсия институтов: уровень урбанизации в 1500 г.
и современные экономические институты в бывших европейских колониях

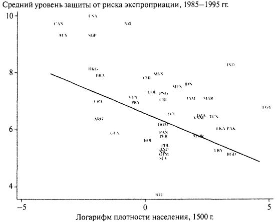


Рис. 4.7. Инверсия институтов: плотность населения в 1500 г.
и современные экономические институты в бывших европейских колониях

степени, чем институты, возникшие на изначально более богатых и густонаселенных территориях.

Как показано в сноске 5, вполне возможно, что во многих из завоеванных стран привитие институтов, тормозящих экономический прогресс, не являлось целью европейцев. Эти институты могли быть унаследованы от предыдущих поколений коренного населения. Империи моголов, ацтеков и инков изначально были довольно автократичны, власть в них была сконцентрирована в руках немногочисленного количества представителей правящей элиты. Их империи были построены на принципе изъятия ресурсов от большинства населения с целью обогащения меньшинства. Во многих случаях европейцы просто принимали институты, уже имеющиеся в колонизируемых странах. Однако для нас важным является тот факт, что в густонаселенных и относительно развитых странах в интересах европейцев было построение институтов, способствующих изъятию ресурсов и не защищающих права собственности для большей части населения страны. С другой стороны, в редконаселенных странах в интересах европейцев было развитие институтов, защищающих права собственности. Именно эти стимулы привели к инверсии институтов.

Инверсия институтов, объединенная с институциональной гипотезой, позволяет предсказать инверсию богатства: изначально относительно богатые территории получили экономические институты относительно худшего качества. А если качество институтов влияет на экономическое развитие общества, это должно привести к тому, что такие страны будут становиться относительно беднее с течением времени.

Более того, институциональная гипотеза согласуется со временем прохождения инверсии богатства. Вспомним, что институциональная гипотеза связывает стимулы к накоплению физического и человеческого капитала и к улучшению технологии со структурой экономических институтов и утверждает, что эти инвестиции являются главным фактором экономического развития общества. Поэтому мы вправе ожидать, что экономические институты, стимулируя появление новых предпринимателей и процесс созидательного разрушения, будут играть более важную роль в развитии страны в те моменты времени, когда появляются новые значительные инвестиционные возможности. Возможность провести индустриализацию стала первой такой инвестиционной возможностью в XIX в. Как мы показали в главе 1, страны, ставшие богатыми сегодня, как среди бывших европейских колоний, так и среди других стран, — это страны, которые провели индустриализацию в течение этого критического периода. Время прохождения инверсии богатства, которая произошла в конце XVIII–XIX в., согласуется с этим взглядом.

Объяснение инверсии богатства, вытекающее из вышеизложенных рассуждений, состоит в том, что различные типы институтов в различных колониях строились европейцами с целью удовлетворения своих собственных экономических интересов. Более того, так как природные условия и уровень дохода сильно различались от колонии к колонии, созданные европейцами типы институтов, которые во многих случаях сохраняются и определяют траекторию экономического развития бывших колоний до настоящего времени, сильно различались между собой. Почему европейцы установили в относительно бедных и редконаселенных колониях институты лучшего качества, чем в относительно богатых и густонаселенных колониях? Мы можем перечислить ряд прозрачных объяснений этого факта, возникших в результате проведенных исследований, не вдаваясь в подробное обсуждение посвященных этой проблеме работ.

Мы вправе ожидать, что с большей вероятностью европейцы строили или сохраняли институты, поддерживающие изъятие ресурсов, на тех территориях, где они ожидали получить значительные выгоды от этого изъятия. Обычно это были территории, контролируемые малым количеством колонизаторов и территории, богатые природными ресурсами, такими как золото и серебро, ценные сельскохозяйственные культуры, например сахар. Однако наиболее важным фактором для колонизаторов было большое количество, пожалуй, самого ценного товара — рабочей силы. На территориях со значительным коренным населением европейцы обладали многими возможностями его эксплуатации: с помощью налогов, других обязательных платежей и сборов, принуждение к работе на шахтах и плантациях. Такой тип колонизации не мог сочетаться с институтами, предоставляющими экономические и гражданские права большинству населения страны. Следовательно, европейцам было намного более выгодно построение институтов худшего качества в более развитых странах и на более густонаселенных территориях.

С другой стороны, на территориях, не богатых природными ресурсами, где возможности их изъятия и обогащения были ограничены, и на редконаселенных территориях, где европейцы сами становились большинством населения, в их интересах было построение институтов, защищающих их собственные права собственности.

4.4.4. Заселение, смертность и развитие

Начальные условия, которые мы описали в предыдущем подпараграфе — плотность населения и степень урбанизации — не были единственными факторами, определяющими колонизационную стратегию европейцев. Колонии также различались по распространенности инфекционных заболеваний, что, очевидно, влияло на привлекательность территории для заселения европейцами. Как было отмечено выше, на территориях, где колонизаторы заселялись сами, они устанавливали институты метрополии, при которых они жили ранее. Поэтому возможность заселения территории колонии европейцами играла огромную роль в дальнейшем развитии институтов в ней. Другими словами, распространенность инфекционных заболеваний двести и более лет назад, в особенности малярии и тропической лихорадки (которые больше всего влияли на смертность среди европейцев), с большой долей вероятности стала одним из факторов, определивших траекторию институционального и экономического развития бывших европейских колоний. Если распространенность инфекционных заболеваний во время колонизации повлияла на экономическое состояние этих стран в настоящее время только через этот канал ее влияния на институты, то мы можем использовать исторические данные по распространенности инфекционных заболеваний как экзогенную причину различий в сегодняшнем состоянии институтов. Говоря языком эконометрики, переменная, описывающая распространенность инфекционных заболеваний, будет подходящим инструментом для оценивания причинно-следственной связи между экономическими институтами и богатством наций. Несмотря на то что показатели смертности среди возможных европейских поселенцев могли быть коррелированы с показателями смертности среди коренного населения, что могло повлиять на уровень дохода в настоящее время, на практике иммунитет к малярии и тропической лихорадке среди коренного населения значительно превышал иммунитет среди белых поселенцев. В работе [Acemoglu, Johnson, Robinson 2001] приведен ряд свидетельств, подтверждающих гипотезу о том, что основное влияние смертности среди европейских поселенцев проходило через институты.

В частности, аргументация Асемоглу, Джонсона и Робинсона кратко может быть описана следующим образом:

Смертность среди возможных поселенцев ⇒ Поселения ⇒
⇒ Ранние институты ⇒ Институты в настоящее время ⇒
⇒ Уровень экономического развития в настоящее время

Другими словами, выбор колонизационной стратегии европейцами зависел от возможности создания поселений на территории колонии. В тех колониях, где европейцы могли поселиться сами (и стать большинством населения) вероятность создания институтов, предоставляющих защиту прав собственности и базовые политические свободы для большей части населения, была выше, а, в свою очередь, создание европейских поселений в колониях, где смертность европейцев была высока, было маловероятным. А так как колониальная политическая система и институты в некоторой степени сохранились и до наших дней, бывшие европейские колонии с меньшей распространенностью инфекционных заболеваний с большей вероятностью имеют лучшие институты в настоящее время.

В работе [Acemoglu, Johnson, Robinson 2001] авторы, основываясь на этой аргументации, используют показатель смертности среди первых европейских поселенцев в качестве инструмента для качества институтов в настоящее время в регрессии на выборке из бывших европейских колоний. Их оценки с помощью метода инструментальных переменных показывают значительное и устойчивое влияние институтов на темп экономического роста и уровень дохода на душу населения. На рис. 4.8 и 4.9 представлен обзор их выводов. На рис. 4.8 показана связь между уровнем смертности среди европейцев и показателем качества экономических институтов, степени защиты от экспроприации собственности, этот показатель мы использовали на рис. 4.1. Из него можно убедиться в наличии значительной зависимости между риском смерти от инфекционного заболевания, стоящим перед европейцами во время колонизации, и степенью защиты права собственности в экономике в настоящее время. Показатель R^2 парной регрессии составляет 0,26. Из рис. 4.8 также можно убедиться в значительных различиях в показателях смертности европейцев в разных колониях. Такие страны, как Австралия, Новая Зеландия, США, имели очень здоровую окружающую среду, у нас даже есть основания считать, что продолжительность жизни в Австралии и Новой Зеландии превышала продолжительность жизни в Великобритании. С другой стороны, в Африке и в некоторых частях Центральной Америки и Юго-Восточной Азии показатели смертности среди европейцев были огромны. Эти различия в уровне смертности в основном были связаны с тропическими инфекционными заболеваниями, такими как малярия и тропическая лихорадка, так как во время колонизации причины возникновения этих заболеваний и методы их лечения и профилактики были неизвестны.

Рис. 4.8 и 4.9 также показывают, что если верно исключающее ограничение о том, что показатель смертности среди возможных европейских поселенцев не влияет на текущий уровень развития страны через иные каналы за исключением институтов, то экономические институты значительно влияют на текущий уровень экономического развития. Этот результат подробно описан в работе [Acemoglu, Johnson, Robinson 2001], где приведен ряд различных тестов на устойчивость, подтверждающих его. Оценки авторов говорят о том, что значительная доля разрыва в уровне дохода между богатыми и бедными странами в настоящее время объясняется различиями в структуре экономических институтов. Например, эмпирические свидетельства говорят о том, что более 75% разрыва в уровне дохода между относительно богатыми и относительно бедными странами может быть объяснено различиями в качестве экономических институтов

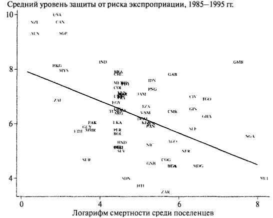


Рис. 4.8. Связь между уровнем смертности возможных европейских поселенцев и качеством институтов в настоящее время

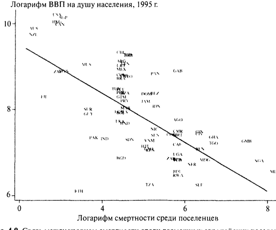


Рис. 4.9. Связь между уровнем смертности среди возможных европейских поселенцев и уровнем дохода на душу населения в 1995 г.

в них (аппроксимированными степенью защиты права собственности). Также необходимо отметить, что после того как эффект влияния институтов на экономическое развитие оценивается с помощью метода инструментальных переменных, географические характеристики, такие как широта, наличие выхода к морю, распространенность инфекционных заболеваний, в настоящее время становятся незначимыми для текущего уровня экономического развития. Подобные свидетельства еще раз убеждают нас в том, что институциональные различия между странами являются основными определяющими факторами их экономического развития, в то время как географические различия оказываются значительно менее важным фактором.

Эти результаты могут быть использованы для интерпретации корреляции между географической широтой и уровнем дохода на душу населения, показанной на рис. 4.2. Эта корреляция является следствием связи между географической широтой местности и колонизационной стратегией, выбранной европейцами для нее. Во времена колонизации европейцы не обладали иммунитетом от тропических инфекционных болезней и поэтому поселения колонистов при прочих равных условиях в основном находились в средних широтах. Поэтому тип созданных европейцами институтов оказался коррелированным с географической широтой. Если исследователь не будет принимать во внимание роль экономических институтов, он придет к выводу о ложной зависимости между широтой и уровнем дохода на душу населения. Однако как только он начнет контролировать влияние экономических институтов на развитие страны, эта зависимость исчезает, поэтому мы можем говорить об отсутствии причинно-следственной связи между географическими факторами и богатством наций в настоящее время[6].

4.4.5. Культура, колониальная самоидентичность и экономическое развитие

Так как европейцы принесли в колонии не только новые институты, но и свою культуру, мы можем предположить, что культурные факторы играли важную роль в развитии колоний. Европейская культура могла повлиять на экономическое развитие бывших европейских колоний через три различных канала. Во-первых, как мы уже упоминали ранее, развитие культуры в различных бывших европейских колониях могло зависеть от типа культуры колонистов. Например, британцы могли принести «более развитую» англосаксонскую культуру в такие страны, как Австралия и США, а испанцы — «менее развитую» иберийскую культуру в латиноамериканские колонии. Во-вторых, европейские колонисты могли

[6] Однако этот вывод не означает, что географические факторы не играли важной роли в процессе экономического развития до 1500 г.

принести культуру, этические и моральные нормы и убеждения, которые могли оказать влияние на экономическое развитие колоний. В-третьих, европейцы могли принести различные религии, которые по-разному влияли на экономическое развитие.

Однако эконометрические выводы, приведенные в работе [Acemoglu, Johnson, Robinson 2001], не согласуются ни с одним из описанных выше взглядов. Аналогично выводу о влиянии географических факторов, модель, основанная на использовании метода инструментальных переменных, убеждает нас в том, что при учете влияния экономических институтов на развитие общества такие факторы, как национальность колонизаторов, доля европейцев в нынешнем населении страны и распространенность различных религий, не оказывают прямого влияния на темп экономического роста и уровень дохода на душу населения в бывших колониях.

Исторические наблюдения подтверждают эти эконометрические выводы. Несмотря на то что ни одна испанская колония не стала так же экономически успешна, как США, в мире есть достаточное количество бедных бывших европейских колоний, например ряд африканских стран, Индия и Бангладеш. Также очевидно, что институты, создаваемые британцами в своих колониях, не повторяли в точности институты метрополии. Например, уже в 1619 г. в североамериканской колонии Вирджиния было установлено всеобщее избирательное право среди мужского населения. В Великобритании оно было установлено лишь в 1919 г. История острова Провиденсия в Карибском бассейне показывает еще один важный пример. В то время как распространение пуританских ценностей часто называют причиной установления демократии и равенства возможностей в северо-восточной части США, пуританская колония на острове Провиденсия ничем не отличалась от других карибских колоний, основанных на институте рабства, несмотря на пуританские убеждения.

Аналогичным образом, несмотря на то что Голландия обладала, пожалуй, лучшими в мире институтами в XVIII в., голландские колонии в Юго-Восточной Азии имели институты, направленные на изъятие ресурсов, и не предоставляющие экономические и гражданские права коренному населению. Поэтому темп экономического роста в этих колониях оказался ниже, чем в других странах.

Таким образом, эконометрические свидетельства не подтверждают гипотезу о важности роли географических факторов типа религии и культуры, принесенной различными национальностями колонизаторов, и доли европейцев среди населения колонии. Поэтому наиболее важной фундаментальной причиной межстрановых различий в темпе экономического роста и уровне дохода на душу населения оказываются институты.

4.5. Какие институты?

Как мы отметили ранее, понятие институтов, используемое в этой книге и в большинстве источников по теории экономического роста, является довольно широким. Оно включает в себя различные типы общественных договоренностей, законов, норм, методов защиты права собственности и т. д. Поэтому читатель вправе заметить, что выделение такого широкого класса институтов как фундаментальной причины экономического роста, не является информативным. Поэтому важно выделить типы институтов, оказывающих наибольшее влияние на экономическое развитие. Такое исследование значимо не только для эмпирического анализа, оно также позволит нам лучше понимать, какой тип моделей необходим для объяснения связей между фундаментальными причинами экономического роста, его непосредственными источниками и конечным экономическим результатом развития страны.

Количество работ, посвященных разделению широкого класса институтов и выделению их конкретных типов, наиболее важных для экономического роста, относительно невелико. Такие исследования еще предстоит сделать в будущем. На данном этапе полезным будет коротко упомянуть ряд работ, посвященных разделению ролей институтов, описывающих структуру заключения контрактов в экономике, и институтов, описывающих методы и степень защиты права собственности. Одна из важнейших задач экономических институтов состоит в способствовании заключению контрактов между кредиторами и должниками и между различными фирмами в экономике. Заключение контрактов возможно лишь в том случае, если законы, суды и правила построены соответствующим образом. Будем называть институционные нормы и соглашения, описывающие структуру заключения контрактов между частными агентами в экономике, контрактными институтами. Другой тип институтов, выделенный выше, связан с ограничениями на экспроприацию собственности государством или другими элитами в обществе. Будем называть их институтами права собственности (так как они способны потенциально защитить право собственности среди большой части населения страны). Несмотря на то что во многих случаях контрактные институты и институты права собственности тесно связаны между собой, между ними существует концептуальное различие. В то время как контрактные институты регулируют горизонтальные связи в обществе между рядовыми агентами, институты права собственности описывают вертикальные связи, то есть степень защиты рядовых граждан от представителей власти, других элит и привилегированных групп. Эти два типа институтов могут различаться и по-разному влиять на развитие экономики.

Работа [Acemoglu, Johnson 2005] посвящена исследованию различий во влиянии этих двух типов институтов. Авторы изучают ряд естественных экспериментов в колониальной истории. Важное наблюдение, позволяющее разделить роли различных типов институтов, состоит в том, что юридическая система, принесенная колонизаторами, сильно влияла на тип контрактных институтов, но очень мало влияла на имеющиеся в обществе способы защиты права собственности. В то же время уровень смертности среди возможных европейских поселенцев и плотность населения в 1500 г. сильно влияли на имеющиеся в то время в колониях институты права собственности, но слабо влияли на контрактные институты. Поэтому мы можем оценить влияние каждого типа институтов отдельно, используя эти два различных источника вариативности институтов на выборке бывших европейских колоний.

Эмпирические свидетельства, полученные из оценок с использованием вышеописанных различий в колониальной истории, показывают, что институты права собственности оказываются более важными при объяснении экономического развития. Страны с большим количеством ограничений на политиков и другие элиты и с большей степенью защиты от риска экспроприации собственности властью или другими привилегированными группами показывают более высокий темп долгосрочного экономического роста и имеют более высокий уровень текущего дохода. Они также имеют значительно более высокий уровень инвестиций и кредита частному сектору. С другой стороны, влияние контрактных институтов на экономическое развитие ограниченно. При контроле влияния институтов на права собственности контрактные институты перестают оказывать влияние на уровень дохода на душу населения, долю инвестиций в ВВП, отношение кредита частному сектору к ВВП. Однако при этом из анализа данных можно увидеть некоторое влияние контрактных институтов на развитие фондового рынка.

Из вышеописанных результатов следует, что контрактные институты формируют развитие механизма финансового посредничества, но не оказывают влияния на экономический рост и инвестиции. Скорее всего, экономика может развиваться без губительных последствий и со слабыми контрактными институтами. При этом высокий уровень риска экспроприации собственности государством или другими мощными силами может иметь значительные последствия для экономического роста. Возможная интерпретация такого вывода состоит в том, что частные контракты и другие механизмы, основанные на репутации, могут, по меньшей мере частично, смягчить проблемы, связанные со слабыми контрактными институтами. Например, в случае возникновения трудностей с обеспечением возврата займов у кредиторов на рынке возрастает процентная ставка, роль банков как институтов, проводящих мониторинг качества заемщиков, возрастает, возникают связи между кредиторами и заемщиками, основывающиеся на репутации. С другой стороны, институты права собственности регламентируют отношения между гражданами и государством. В отсутствие контроля над государством, политиками и другими элитами граждане оказываются не обеспеченными защитой права собственности, необходимой для совершения инвестиций.

Однако при интерпретации результатов работы [Acemoglu, Johnson 2005] необходимо иметь в виду, что, как показано в главе 1, межстрановые различия в уровне дохода на душу населения и норме инвестиций, используемые для выделения влияния различных типов институтов, очень велики. Вполне возможно, что контрактные институты имеют некоторое влияние на экономическое развитие, однако его трудно выделить при сравнении стран с 30-кратным разрывом в уровне дохода на душу населения. Поэтому эти результаты должны быть интерпретированы как свидетельство того, что контрактные институты менее важны для объяснения различий в экономическом развитии, чем институты права собственности, а не как свидетельство того, что они нерелевантные для объяснения этих различий.

4.6. Инфекционные заболевания и развитие

Эмпирические свидетельства, описанные в параграфе 4.4, опровергают гипотезу о важности роли географических факторов в экономическом развитии. Однако одна из версий географической гипотезы заслуживает дальнейшего анализа. Различные наблюдения говорят о том, что люди со слабым здоровьем оказываются менее производительными и в меньшей степени способными накапливать человеческий капитал. Могут ли различия в распространенности инфекционных заболеваний иметь большое влияние на экономическое развитие общества? Может ли бремя заболеваемости стать важным фактором при объяснении очень сильных межстрановых различий в уровне дохода? Например, Дэвид Вейл в своей работе [Weil 2007] оспаривает выводы предыдущего параграфа и утверждает, что физический капитал, человеческий капитал и технологии должны быть скорректированы и в модель должна быть включена переменная, описывающая состояние здоровья работников. Другими словами, агрегированная производственная функция может иметь вид $F(K, H, Q, A)$, где переменная H обозначает эффективное количество рабочей силы (стандартно измеренное количество человеческого капитала), а переменная Q обозначает состояние здоровья работников. Вейл предлагает методологию измерения вклада состояния здоровья в производительность из микроэкономических данных и утверждает, что различия в состоянии здоровья работников оказываются важным фактором при объяснении межстрановых различий в уровне дохода.

Гипотеза о том, что низкая производительность в малоразвитых странах отчасти связана с плохим состоянием здоровья рабочей силы, выглядит интуитивно привлекательной. Имеющиеся у нас эконометрические свидетельства говорят о том, что она также является эмпирически обоснованной. Однако означает ли это, что географические факторы являются важной фундаментальной причиной экономического роста? Не обязательно. Как мы уже отметили, бремя заболеваемости — эндогенный фактор. В настоящее время страны с плохим состоянием здоровья населения являются такими именно потому, что они бедны и не имеют возможности осуществлять инвестиции в здравоохранение, очистку питьевой воды и другие здравоохранительные технологии. В конце концов, в большинстве европейских стран 200 лет назад также были плохое состояние здоровья населения и низкая продолжительность жизни. Эта ситуация изменилась *вместе с* экономическим ростом. В этом случае, даже когда состояние здоровья работников несет вклад в межстрановые различия в уровне дохода, оно само становится непосредственным источником экономического роста, определяемым другими факторами.

В работе [Acemoglu, Johnson 2007] напрямую исследуется влияние изменений в распространенности инфекционных заболеваний на экономическое развитие. Авторы изучают значительное увеличение продолжительности жизни, особенно в относительно бедных странах, которое произошло начиная с 1940-х гг. Такое улучшение состояния здоровья стало возможным благодаря значительной международной финансовой помощи, появлению новых лекарственных препаратов и улучшению государственной политики в сфере здравоохранения. С точки зрения влияния распространенности инфекционных заболеваний на экономический рост важным является то, что эти изменения в здоровье населения были во многом экзогенными для большинства стран. Более того, воздействие этих мер на отдельные страны различалось в зависимости от конкретного типа заболеваний в данной стране и наличия лекарств и вакцин, позволяющих его лечить. Воздействие этих мер было очень значительным, в действительности их можно назвать международным эпидемиологическим переходом, так как они привели к беспрецедентному росту продолжительности жизни в большом количестве стран. На рис. 4.10 показана эта беспрецедентная сходимость продолжительности жизни. На нем представлены данные по продолжительности жизни в странах, которые были изначально (до 1940 г.) бедными, со средним уровнем дохода, и богатыми. Он иллюстрирует, что в то время, как в 1930-х гг. продолжительность жизни была низкая во многих бедных странах и странах со средним уровнем дохода, этот переход сделал ее близкой к продолжительности жизни в богатых странах. В результате этого развития состояние здоровья населения в менее развитых частях планеты сейчас, хотя, конечно, и отчаянно требует дальнейшего улучшения, намного лучше,

Рис. 4.10. Динамика ожидаемой продолжительности жизни в изначально бедных странах, странах с изначально средним уровнем дохода и изначально богатых странах, 1940–2000 гг.

чем в странах Запада в то время, когда они находились на аналогичном уровне экономического развития.

Международный эпидемиологический переход является хорошим эмпирическим наблюдением, позволяющим выделить влияние возможных экзогенных изменений в состоянии здоровья рабочей силы. Воздействие международного эпидемиологического перехода на продолжительность жизни в отдельной стране зависит от того, насколько население в ней было подвержено различным инфекционным заболеваниям, таким как малярия, туберкулез и пневмония, на начальный момент (до 1940 г.) и от времени применения различных мер по улучшению состояния здоровья населения страны. Из этих наблюдений следует, что возможно экзогенные изменения в состоянии здоровья населения страны могут быть измерены с помощью построения показателя предсказанной смертности населения, являющегося функцией от распространенности различных инфекционных заболеваний в начальный момент, и времени международных интервенций по искоренению различных заболеваний. В работе [Acemoglu, Johnson 2007] показано, что такой показатель предсказанной смертности оказывается сильно коррелированным с изменениями в продолжительности жизни после 1940 г., но *не* связан с изменениями в продолжительности жизни до 1940 г. (до начала основных международных интервенций по улучшению состояния здоровья в неразвитых странах). Из этого утверждения следует, что значительное увеличение продолжительности жизни в большинстве стран после 1940 г. в действительности было связано с международными интервенциями по искоренению инфекционных заболеваний.

Авторы работы [Acemoglu, Johnson 2007] делают неудивительное наблюдение о том, что показатель предсказанной смертности и изменения в продолжительности жизни, который он вызывает, имеют значительное воздействие на размер населения страны. Они показывают, что увеличение продолжительности жизни на 1% приводит к росту населения примерно на 1,3–1,8%. Однако, что более удивительно, они не находят свидетельств о положительном влиянии увеличения продолжительности жизни на размер ВВП на душу населения. На рис. 4.11 показана агрегированная версия выводов авторов работы. Он показывает отсутствие сходимости уровней дохода на душу населения между изначально бедными странами, странами со средним уровнем дохода и богатыми странами.

Почему такие столь значительные увеличение продолжительности жизни и улучшение состояния здоровья населения не привели к росту

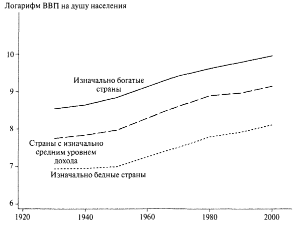


Рис. 4.11. Динамика ВВП на душу населения в изначально бедных странах, странах с изначально средним уровнем дохода и изначально богатых странах, 1940–2000 гг.

ВВП на душу населения? Наиболее очевидный ответ на этот вопрос следует из неоклассической модели экономического роста (представленной в двух предыдущих главах и в главе VIII). Первым следствием увеличения продолжительности жизни является увеличение населения страны, что приводит к сокращению отношения капитала к труду и земли к труду, а таким образом, и к сокращению уровня дохода на душу населения. Это первоначальное сокращение компенсируется ростом дохода позднее, так как размер рабочей силы увеличивается в дальнейшем. Однако у нас нет причин ожидать значительного роста уровня дохода на душу населения, особенно в случае, когда экономики многих из исследуемых стран являются в основном аграрными и в них в результате увеличения населения происходит сокращение количества земли на душу населения. Поэтому небольшое положительное влияние улучшения состояния здоровья населения на производительность может оказаться недостаточным чтобы компенсировать и изменить отрицательное влияние роста населения на уровень дохода на душу населения на периоде продолжительностью в пятьдесят и более лет.

4.7. Политическая экономия институтов: первые мысли

Из свидетельств, представленных в этой главе, следует, что институты являются важной, а может быть и самой важной, фундаментальной причиной экономического роста. Поэтому для того, чтобы понять, почему некоторые страны остаются бедными, а другие страны стали богатыми, мы должны задуматься о том, почему институты и экономическая политика в разных странах различны. В эпилоге к этой книге я также утверждаю, что понимание институциональных изменений в мире является ключом к пониманию причины начала мирового экономического роста около двухсот лет назад.

Однако объяснение межвременных и межстрановых различий в уровне дохода только в терминах институциональных различий также будет неполным. Если, как показано в этой главе, некоторые типы институтов способствуют быстрому экономическому росту, а некоторые другие приводят к застою в экономическом развитии, почему некоторые общества коллективно выбирают институты, ведущие к застою? Ответ на этот вопрос связан со структурой механизма коллективного общественного выбора. Институты и экономическая политика, равно как и другие элементы общественного выбора, не выбираются для блага всего общества, а являются равновесным политическим результатом. Чтобы понять суть политического равновесия, нам необходимо понять структуру конфликтов интересов между различными индивидами и группами в обществе и проанализировать, как они разрешаются различными политическими институтами. Поэтому для надлежащего понимания связи между институтами и экономическим ростом и развитием, а также причин межстрановых различий в типах институтов, нам необходимы политико-экономические модели, которые явным образом изучают, как конфликты интересов между различными индивидами приводят к агрегированному общественному выбору. Политико-экономические модели также позволяют понять, почему отдельные индивиды или группы агентов могут противостоять экономическому росту и предпочитать институты, которые не предоставляют возможности экономического роста.

Таким образом, рассуждения, предложенные в этой главе, показывают необходимость изучения политической экономии при любом детальном исследовании теории экономического роста. Большая часть теории экономического роста связана с изучением структуры различных моделей роста, что позволяет понять механику экономического роста и непосредственные источники межстрановых различий в уровне дохода. Однако определенная часть широкой теории роста должна быть посвящена изучению фундаментальных причин экономического роста, причин, связанных с экономической политикой, институтами, и другими факторами, ведущими к различиям в инвестициях, накоплении капитала и инновационных решениях.

4.8. Основные выводы

В этой главе мы выделили различия между непосредственными источниками экономического роста, связанные с накоплением физического и человеческого капитала и технологией, и фундаментальными причинами, которые оказывают влияние на стимулы к инвестированию в эти факторы производства. Мы утверждаем, что многие вопросы, изучаемые теорией экономического роста, приводят к исследованию фундаментальных причин. Однако понимание фундаментальных причин экономического роста оказывается более полезным в том случае, когда мы можем связать их с параметрами общей модели экономического роста и увидеть, как они воздействуют на механизм роста и какие предсказания следуют из них.

Институциональная гипотеза, которая получает эмпирическую поддержку из свидетельств, представленных в этой главе, заслуживает внимательного теоретического исследования. Институциональный взгляд на теорию экономического роста имеет смысл лишь в том случае, когда в обществе есть группы индивидов, поддерживающие институты, которые не обязательно будут увеличивать потенциал роста экономики. Эти группы будут заинтересованы в таких институтах, потому что они не получают прямых или косвенных выгод от экономического роста. Поэтому нам необходимо развить хорошее понимание распределительных последствий экономического роста (например, как он влияет на относительные цены и относительный уровень доходов и на ренту, получаемую различными группами общества). Затем для анализа обстоятельств, при которых группы, препятствующие экономическому росту, могут оказаться достаточно мощными и удержать институты, неблагоприятствующие росту, нам необходимо будет объединить теоретическое понимание распределительных последствий экономического роста и политико-экономические модели коллективного принятия решений в обществе.

В этой главе наша цель была более скромной (так как большинство моделей экономического роста будут представлены в книге позднее). Мы ограничились широким описанием ряда альтернативных фундаментальных причин экономического роста и первым взглядом на долгосрочные эмпирические свидетельства в пользу каждой из них. Мы утверждаем, что подход, делающий акцент на институциональных различиях (и различиях в экономической политике, законах и правилах) между странами является наиболее подходящим для понимания как нынешних межстрановых различий в темпах экономического роста, так и всего исторического процесса мирового экономического роста. Также необходимо подчеркнуть важность изучения политической экономии институтов как способа понимания причин межстрановых различий в институтах и расхождений в траектории экономического развития.

4.9. Литература

Первая часть этой главы основана на работе [Acemoglu, Jonhson, Robinson 2005a], в которой описываются различия между непосредственными и фундаментальными причинами экономического роста и различные подходы к описанию фундаментальных причин. Работа [North, Thomas 1973] стала первой, где была предложена критика теорий экономического роста, основанных только на непосредственных источниках и игнорирующих фундаментальные причины экономического роста. Объяснения различия между непосредственными источниками и фундаментальными причинами роста также представлены в работе [Diamond 1997; Даймонд 2012].

Модель, описанная в параграфе 4.2, основана на работе [Simon 1977] и более поздней работе Майкла Кремера [Kremer 1993]. В работе [Kremer 1993] доказывается важность экономии масштаба и возрастающей отдачи от населения, происходящей благодаря ускорению темпа роста мирового населения. Другой важный аргумент, связывающий рост населения и технологический прогресс, предложен в работе Эстер Боузруп [Boserup 1965]. Он основан на предположении о том, что увеличение населения приводит к редкости ресурсов, что заставляет общество увеличивать свою производительность. Другие работы, основанные на гипотезе возрастающей отдачи от населения и описывающие процесс перехода мировой экономики от медленного роста или отсутствия такового к быстрому экономическому росту, включают работы [Galor, Wail 2000], [Galor, Moav 2002] и [Hansen, Prescott 2002]. Некоторые из этих статей также пытаются согласованно описать динамику ускорения роста населения, приведшую к технологическому прогрессу, и современную демографическую динамику. Отличный обзор и подробное обсуждение литературы на эту тему можно найти в работе [Galor 2005]. Краткое описание исторической динамики мирового населения и относительно надежные данные вплоть до 10 000 года до н.э. приведены в работе [McEvedy, Jones 1978]. В ней авторы утверждают, что данные свидетельствуют о том, что население Азии последовательно превышало население Западной Европы в течение этого периода времени.

Географическая гипотеза имеет достаточно большое количество сторонников среди экономистов и философов. Ш. Монтескье и Никколо Макиавелли были одними из первых, кто заявил о важности климата и других географических характеристик. Среди экономистов наиболее четко сформулированные версии географической гипотезы предложили А. Маршалл и Г. Мюрдаль [Marshall 1890; Маршалл 1993], [Myrdal 1968]. В недавнее время она была популяризована в работах: [Sachs 2001] и [Bloom, Sachs 1998]. В работе [Diamond 1997; Даймонд 2012] приведена более сложная версия географической гипотезы, в которой наличие различных типов сельскохозяйственных культур и видов скота, а также возможность транспортного сообщения внутри континента оказывают влияние на время начала оседлого земледелия и, таким образом, появление возможности развития общественных отношений. Поэтому теория П. Даймонда основывается не только на географических различиях, но и на институциональных факторах как причинах экономического развития.

Среди ученых, подчеркивающих важность различных типов институтов для экономического развития, необходимо выделить Джона Локка, Адама Смита, Джона Стюарта Милля, Артура Льюса, Дугласа Норта и Роберта Томаса. В современной экономической литературе можно найти множество моделей, придающих большое значение важности защиты права собственности, например в работах: [Skaperdas 1992; Tornell, Velasco 1992; Acemoglu 1995; Grossman, Kim 1995; Hirshleifer 2001; Dixit 2004]. Другие работы подчеркивают важность экономической политики внутри заданного набора институтов. Широкоизвестные примеры такого подхода включают работы: [Saint-Paul, Verdier 1993; Alesina, Rodrik 1994; Persson, Tabellini 1994; Krussel, Rios-Rull 1999; Bourguignon, Verdier 2000]. Литература об эндогенных институтах и влиянии таких институтов на экономическое развитие намного более узка. Обзор статей на эту тему представлен в работах: [Acemoglu 2007b; Acemoglu, Robinson, 2006a]. Обзор и очень подробное обсуждение литературы о влиянии экономических институтов на экономический рост представлен в работе [Acemoglu, Johnson, Robinson 2005a]. В ней же можно найти обзор эмпирической литературы на эту тему. Мы вернемся ко многим из этих вопросов в части VIII этой книги.

Важность влияния религии на экономическое развитие наиболее убедительно аргументируется в работах Макса Вебера, например в книгах [Weber 1930, 1958; Вебер 1990]. Многие другие ученые после этого использовали его идеи и говорили о важности религии. Известные примеры включают различные статьи в сборнике [Harrison, Huntington 2000] и работу [Landes 1998]. А. Ландес, например, пытается объяснить расцвет западной цивилизации, основываясь на культурных и религиозных факторах. Его выводы критикуются в работе [Acemoglu, Johnson, Robinson 2005a]. В работе [Barro, McClearly 2003] приведены свидетельства, говорящие о положительной корреляции между распространенностью религиозных взглядов и экономическим ростом. Однако при интерпретации этой корреляции как причинно-следственной связи необходимо быть осторожным, так как религиозные взгляды являются эндогенным фактором и могут быть следствием как экономического роста, так и других фундаментальных причин экономического роста.

Акцент на важности культурных факторов или общественного капитала восходит к работе [Banfield 1958] и был популяризован в относительно недавней работе [Putnam 1993; Патнэм 1996]. Основа такого подхода состоит в выделении роли культуры или общественного капитала в выборе лучшего равновесия. Схожие идеи предложены в работе [Greif 1994]. В работах многих экономистов, включая [Veliz 1994; North, Summerhill, Weingast 2000] и [Wiarda 2001], подчеркивается важность культурных факторов как причины экономического отставания латиноамериканских стран. В работах [Knack, Keefer 1997] и [Durlauf, Fafchamps 2005] задокументирована положительная корреляция между показателями общественного капитала и различными экономическими переменными. Ни одна из этих работ не приводит доказательства наличия причинно-следственной связи в силу возможной эндогенности культуры и общественного капитала. В ряде недавних работ предпринята попытка преодолеть эти трудности, например в работах [Guiso, Sapienza, Zingales 2004] и [Tabellini 2007]. Обсуждение истории пуританской колонии на острове Провиденсия основано на работе [Kupperman 1993].

Число работ, посвященных влиянию экономических институтов и политики на экономический рост, достаточно велико. Авторы большинства статей по регрессиям роста включают показатели качества институтов и экономической политики в качестве контрольных переменных и получают значимые коэффициенты перед ними (см., например, результаты таких регрессий в работе [Barro, Sala-i-Martin 2004]. Одной из первых статей, исследовавших межстрановые корреляции показателей степени защиты права собственности и темпа экономического роста, была работа [Knack, Keefer 1995]. Авторы этих работ не в состоянии выявить причинно-следственную связь между качеством институтов и показателями экономического развития ввиду значительных сложностей, возникающих из-за возможной одновременности и эндогенности переменных. Первые оценки влияния качества институтов (коррупции) на долгосрочное экономическое развитие, полученные с помощью метода инструментальных переменных, приведены в работах: [Mauro 1995; Hall, Jones 1999].

Свидетельства, приведенные в этой главе, использующие для применения метода инструментальных переменных различия в колониальном развитии, основаны на работах [Acemoglu, Johnson, Robinson 2001, 2002]. Данные по степени урбанизации и плотности населения, используемые нами, взяты из работы [Acemoglu, Johnson, Robinson 2002], авторы которой построили их используя данные из работ: [McEvedy, Jones 1978; Chandler 1987; Bairoch 1988; Bairoch, Batou, Chevre 1988; Eggimann 1999]. Детали и эконометрические результаты приведены в работе [Acemoglu, Johnson, Robinson 2002]. Данные по показателю смертности среди возможных поселенцев взяты из работы [Acemoglu, Johnson, Robinson 2001], авторы которой построили их базируясь на работах [Gutierezz 1986; Curtin 1989, 1998]. В этой работе приведено также большое количество тестов на устойчивость результатов. Авторы делают выводы о значительном влиянии экономических институтов на темп экономического роста. Они также утверждают, что другие факторы, такие как религия и география, при надлежавшей оценке воздействия институтов имеют очень ограниченное влияние на долгосрочное экономическое развитие.

Обсуждение роли политических лидеров и их воздействия на темп экономического роста основано на работе [Jones, Olken 1995]. Подробности исторического опыта Южной Кореи и Северной Кореи приведены в работах [Acemoglu 2003c] и [Acemoglu, Johnson, Robinson 2005a]. Обсуждение воздействия различных типов институтов на экономическое развитие базируется на работе [Acemoglu, Johnson 2005].

Обсуждение влияния распространенности инфекционных заболеваний на экономическое развитие основано на работах [Weil 2007] и в особенности [Acemoglu, Johnson 2007]. В последней работе авторы используют эконометрическую стратегию, описанную в тексте. Рис. 4.10 и 4.11 взяты из работы [Acemoglu, Johnson 2007]. В качестве изначально бедных стран на них взяты страны с уровнем дохода на душу населения в 1940 г. ниже, чем в Испании. Это Бангладеш, Бразилия, Гондурас, Индия, Индонезия, Китай, Корея, Малайзия, Мьянма, Никарагуа, Пакистан, Сальвадор, Таиланд, Филиппины и Шри-Ланка. В качестве изначально богатых стран взяты страны с уровнем дохода на душу населения в 1940 г. выше, чем в Аргентине. Это Бельгия, Нидерланды, Швеция, Дания, Канада, Германия, Австралия, Новая Зеландия, Швейцария, Великобритания и США. В работе [Young 2005] исследуется влияние эпидемии СПИДа в Южной Африке. Автор приходит к выводам, схожим с приведенными в этой главе, однако его анализ базируется на калибровке модели Солоу, а не на эконометрическом оценивании.

4.10. Упражнения

4.1. Выведите уравнения (4.3) и (4.4).

4.2. Выведите уравнение (4.5). Объясните, как и почему динамика технологии, следующая из этого уравнения, отличается от динамики, описываемой уравнением (4.4). Находите ли вы более правдоподобными предположения, приводящие к уравнению (4.4), или предположения, приводящие к уравнению (4.5)?

4.3. **(a)** Покажите, что в моделях, приводящих к уравнениям (4.4) и (4.5), уровень дохода на душу населения не изменяется со временем.

(b) Вместо уравнения (4.2) предположите следующую зависимость:

$$L(t) = \phi Y(t)^{\beta},$$

где $\beta \in (0, 1)$. Дайте интуитивное объяснение этого уравнения и выведите закон, описывающий динамику технологии и уровня дохода на душу населения при двух сценариях, рассмотренных в параграфе 4.2. Являются ли выводы из такой модели более разумными, чем выводы из модели, рассмотренной в тексте главы?

Часть II

НА ПУТИ К НЕОКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Эта часть книги является подготовительной перед изложением дальнейшего материала. В некотором смысле часть II можно рассматривать как материал, предваряющий все последующее изложение. Основной ее задачей будет обогащение базовой модели Солоу с помощью добавления в нее явным образом заданных предпочтений домохозяйств и оптимизации. Таким образом, мы сможем увидеть взаимосвязь между теорией экономического роста и теорией общего равновесия. Это позволит нам открыть «черный ящик» сбережений и накопления капитала, превращая его в модель принятия инвестиционных решений, основанных на ожиданиях о будущем. Это также позволит нам делать выводы о благосостоянии и отвечать на вопрос: как «является ли темп роста экономики слишком медленным, слишком быстрым или как раз подходящим с точки зрения достижения максимума полезности агентов (оптимальным по Парето)?». Инструментарий, который мы рассмотрим в этой части книги, также будет ключевым для нашего анализа технологии как еще одного способа инвестиций, производимых фирмами, учеными, домохозяйствами и основанных на ожиданиях о будущем. Однако мы отложим этот анализ до частей III и IV книги.

В трех главах этой части представлен материал, необходимый для понимания структуры моделей, описанных в последующих главах. В следующей главе будет показана явная связь между моделями экономического роста и теорией общего равновесия. В двух последующих главах будет развит математический аппарат, используемый в динамической оптимизации в дискретном и непрерывном времени. Для того чтобы эти главы не выглядели исключительно математическими, в качестве примеров мы будем использовать ряд экономических моделей, некоторым образом связанных с теорией экономического роста, и приведем ряд результатов о свойствах равновесия и оптимальной траектории роста в них. Однако материал в трех последующих главах остается в значительной мере более математизированным, чем в любой другой части книги (исключая приложения в конце книги). Поэтому неподготовленному читателю может быть полезным вначале изучить приложения и/или при первом чтении пропустить ряд доказательств, представленных в трех последующих главах.

Глава 5
Основания неоклассической теории экономического роста

Модель экономического роста Солоу основывается на предположении о постоянстве нормы сбережений. Однако более информативный подход к моделированию, по аналогии со стандартной теорией общего равновесия, состоит в явном описании предпочтений домохозяйств (индивидов) и выводе их решений как результат оптимизации. Такой подход позволит нам лучше описать факторы, влияющие на принятие решений о сбережениях, а также изучить оптимальность равновесия, другими словами, поставить вопрос о возможности улучшения конкурентного равновесия в моделях экономического роста и ответить на него. Термин «улучшение» равновесия в данном случае опирается на стандартное понятие оптимальности по Парето. Равновесие называется неулучшаемым по Парето, если в нем невозможно увеличить уровень благосостояния некоторого агента без ухудшения благосостояния других агентов. Естественно, мы можем говорить об улучшении и ухудшении благосостояния только в том случае, когда предпочтения агентов заданы явным образом.

5.1. Вводные замечания

Рассмотрим экономику, населенную единичной мерой бесконечно живущих домохозяйств. Под «единичной мерой домохозяйств» мы будем понимать несчетное множество домохозяйств, имеющее меру 1. Например, множество домохозяйств $\mathcal{H}$ может быть представлено как единичный отрезок $[0, 1]$. Мы делаем такое абстрактное предположение для простоты, оно означает, что каждое домохозяйство является бесконечно малым и его поведение не влияет на значения агрегированных макроэкономических переменных. Ни один из дальнейших выводов не базируется на этом предположении. Читатель, если ему это более удобно, без ограничения общности может предполагать, что множество домохозяйств $\mathcal{H}$ является счетным, например, $\mathcal{H} = \mathbb{N}$. Преимущество предположения о единичной мере состоит в том, что в этом случае средние значения переменных совпадают с их агрегированными значениями, что позволит нам сократить количество необходимых обозначений. Еще проще было бы предположить, что множество домохозяйств $\mathcal{H}$ конечно, $\mathcal{H} = \{1, 2, ..., M\}$. Такое предположение будет подходящим для большинства моделей, однако в модели перекрывающихся поколений, рассмотренной в главе 9, предполагается наличие бесконечного числа домохозяйств.

Домохозяйства в такой модели могут в действительности быть «бесконечно живущими» или состоять из перекрывающихся поколений с полным (или частичным) альтруизмом, связывающим поколения внутри домохозяйства. Мы не будем делать различий между домохозяйством и составляющими его агентами, тем самым игнорируя все возможные источники конфликтов между ними или различий предпочтений внутри домохозяйства. Другими словами, мы будем предполагать, что домохозяйство обладает строго определенными предпочтениями.

Так же как и в базовой теории общего равновесия, предположим, что предпочтения домохозяйств могут быть описаны с помощью функции полезности. В частности, предположим, что в экономике имеется единственное потребительское благо и каждое домохозяйство h обладает *моментальной функцией полезности*, заданной как

$$u^h(c^h(t)),$$

где $c^h(t)$ обозначает потребление домохозяйства h и функция u: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ является возрастающей и вогнутой. Мы предположим, что областью определения функции u является множество $\mathbb{R}_+$, а не множество $\mathbb{R}$, тем самым не позволяя потреблению принимать отрицательные значения. Несмотря на то что в некоторых хорошо известных экономических моделях потребление может принимать отрицательные значения, интерпретация отрицательного потребления затруднительна в рамках общего равновесия и теории экономического роста. Поэтому такое ограничение выглядит разумным в большинстве моделей.

Моментальная функция полезности описывает полезность, которую индивид (домохозяйство) получает от потребления в момент времени t. Поэтому она не является функцией полезности, полностью описывающей предпочтения на множестве всех благ, в данном случае различные блага соответствуют потреблению в различные периоды времени. По этой причине моментальную функцию полезности иногда называют функцией счастья.

Предположение о таком виде моментальной функции полезности основано на двух важных допущениях. Во-первых, мы будем считать, что домохозяйства не получают полезности от потребления других домохозяйств, то есть внешние эффекты от потребления отсутствуют. Во-вторых, такая форма моментальной функции полезности изначально требует, чтобы общая полезность была *сепарабельна по времени и стационарна*,

то есть значение моментальной полезности в момент времени t не зависит от значений потребления в прошлые и будущие периоды времени и задается одной и той же функцией u^h во все моменты времени. Второе допущение важно для нас с точки зрения возможности построения несложных моделей динамической оптимизации.

Наконец, третье предположение состоит в том, что домохозяйства дисконтируют будущее экспоненциальным образом, то есть пропорционально. В дискретном времени и в отсутствие неопределенности из этого предположения следует, что предпочтения домохозяйств или их полезность (начиная с момента времени $t = 0$) могут быть записаны в виде

$$U^h\left(c^h(1), c^h(2), \ldots, c^h(T)\right) \equiv \sum_{t=0}^{T} \left(\beta^h\right)^t u^h\left(c^h(t)\right), \tag{5.1}$$

где константа $\beta^h \in (0, 1)$ обозначает дисконт потребителя h, а временной горизонт T может быть конечным или бесконечным (то есть значение $T = \infty$ допустимо). Функция U^h обозначает полезность потребителя h, заданную на всем потоке значений его потребления, а функция u^h является описанной выше моментальной функцией полезности. Стоит остановиться на различии между двумя этими функциями. Функциональная форма функции полезности U^h включает в себя экспоненциальное дисконтирование и сепарабельность во времени. Это означает, что вес полезности от потребления в следующий период времени равен доле β^h от текущей полезности, вес полезности от потребления через два периода времени равен доле $(\beta^h)^2$ от текущей полезности, и так далее. Экспоненциальное дисконтирование и сепарабельность во времени удобны, так как они естественным образом гарантируют состоятельное во времени поведение агентов.

Решение $\{x(t)\}_{t=0}^{T}$ (где T может быть бесконечным) является состоятельным во времени, если истинно следующее утверждение: в случае, если $\{x(t)\}_{t=0}^{T}$ является решением задачи начиная с периода времени $t = 0$, $\{x(t)\}_{t=t'}^{T}$ является решением аналогичной задачи динамической оптимизации начиная с периода времени $t = t' > 0$. В случае если решение не является состоятельным во времени, его называют *несостоятельным во времени*. Состоятельное во времени решение является более удобным для описания и удовлетворяет всем стандартным аксиомам теории рационального принятия решений. Хотя несостоятельные во времени предпочтения могут быть использованы для моделирования определенных типов поведения, например зависимости или самоконтроля, состоятельные во времени предпочтения идеально подходят для этой книги, так как они просты, достаточно гибки и являются хорошей аппроксимацией реальности в контексте агрегированных моделей. Следует также отметить, что многие типы предпочтений, которые не описываются с помощью экспоненциального сепарабельного во времени дисконтирования, несмотря на это являются состоятельными во времени. Более подробно свойство состоятельности во времени обсуждается в упражнении 5.1. В нем показано, каким образом неэкспоненциальное дисконтирование может привести к несостоятельным во времени предпочтениям. В упражнении 5.2 представлены некоторые стандартные формы несепарабельных во времени предпочтений, которые являются состоятельными во времени.

Схожим образом можно ввести естественный аналог уравнения (5.1) в непрерывном времени. Отложим его обсуждение до главы 7.

В уравнении 5.1 не учитывается наличие неопределенности в экономике в том смысле, что набор значений потребления домохозяйства h $\left\{c^h(t)\right\}_{t=0}^{T}$ известен заранее с вероятностью 1. Если бы в экономике присутствовала неопределенность, нам следовало бы формулировать задачу в терминах максимизации ожидаемой полезности. Большинство моделей экономического роста не рассматривает случай наличия неопределенности, однако стохастическая версия неоклассической модели роста является базовой моделью большинства других разделов современной макроэкономики. Мы рассмотрим ее в главе 17. В данный момент достаточно заметить, что в случае наличия неопределенности функция $u^h(\cdot)$ становится *функцией полезности Бернулли*, определенная на множестве лотерей, и поэтому предпочтения домохозяйства h в момент времени $t = 0$ могут быть заданы с помощью следующей *функции ожидаемой полезности фон Неймана—Моргенштерна:*

$$U^h \equiv \mathbb{E}_0^h \sum_{t=0}^{T} \left(\beta^h\right)^t u^h\left(c^h(t)\right),$$

где $\mathbb{E}_0^h$ является оператором условного математического ожидания на множестве информации, доступной домохозяйству h в момент времени $t = 0$. В этом выражении мы не выписываем явно аргументы функции ожидаемой полезности U^h. В данном случае она определена не на множестве различных значений потребления в различные моменты времени, а на множестве функций распределения вероятности этих значений. На данный момент у нас нет необходимости вводить все требуемые для этого обозначения (см. главу 16).

В поставленной формулировке задачи мы индексируем функцию моментальной полезности $u^h(\cdot)$ и дисконт β^h символом «h», подразумевая под этим то, что эти параметры предпочтений, возможно, отличаются от одного домохозяйства к другому. Домохозяйства также могут различаться по набору своих доходов. Например, каждое домохозяйство может обладать набором запаса эффективных единиц труда $\left\{e^h(t)\right\}_{t=0}^{T}$ и поэтому набором трудовых доходов $\left\{e^h(t)w(t)\right\}_{t=0}^T$, где переменная $w(t)$ обозначает равновесную заработную плату единицы эффективного труда.

К сожалению, поставленная задача неразрешима в явном виде на таком уровне общности. Несмотря на то что мы можем доказать существование равновесия при некоторых предположениях о регулярности функций, мы не сможем охарактеризовать это равновесие. Хотя доказательство существования равновесия в подобном классе моделей представляет теоретический интерес, цель нашего исследования состоит в построении рабочей модели экономического роста, позволяющей описать исторический процесс экономического роста и выявить причины межстрановых различий в уровне дохода. Поэтому мы будем придерживаться стандартного в макроэкономике подхода и предположим существование репрезентативного домохозяйства.

5.2. Репрезентативное домохозяйство

Мы будем говорить, что экономика *допускает существование репрезентативного домохозяйства*, если предпочтения агентов (совокупный спрос) в экономике могут быть описаны в рамках поведения единственного домохозяйства, принимающего решения об агрегированном уровне потребления и сбережениях (а также решения о предложении труда в случае, если они являются эндогенными) при соблюдении требований агрегированного бюджетного ограничения. Предположение о существовании репрезентативного домохозяйства является очень удобным, так как оно позволяет рассматривать равновесие как решение единственной задачи максимизации вместо моделирования предпочтений в экономике как равновесный результат взаимодействий между множеством разнородных агентов. Заметим, что такое описание является исключительно *позитивным* в том смысле, что мы лишь задаемся вопросом о том, может ли агрегированная динамика экономики быть описана так, как будто она населена единственным домохозяйством. Более сильная концепция *нормативного* репрезентативного домохозяйства, которая позволит нам использовать функцию полезности репрезентативного домохозяйства для сравнения благосостояния в экономике, будет введена нами в этом параграфе позже.

Начнем с самого простого случая, приводящего к существованию репрезентативного домохозяйства. Предположим, что все домохозяйства идентичны и являются бесконечно живущими. Другими словами, значения дисконта β и набора единиц эффективного труда $\left\{e^h(t)\right\}_{t=0}^\infty$ равны для всех домохозяйств. Также предположим единый вид моментальной функции полезности:

$$u(c^h(t)),$$

где функция $u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ является возрастающей и вогнутой, а $c^h(t)$ обозначает потребление домохозяйства h в момент времени t. В этом случае в экономике действительно присутствует репрезентативное домохозяйство. Следовательно, снова игнорируя наличие неопределенности, совокупный спрос в экономике может быть описан как решение следующей задачи максимизации начиная с момента времени $t = 0$:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t)), \tag{5.2}$$

где константа $\beta \in (0, 1)$ является общим для всех домохозяйств дисконтом, а $c(t)$ — общим уровнем потребления репрезентативного домохозяйства.

Описанная выше экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства тривиальным образом, так как все домохозяйства в ней идентичны. В этом случае предпочтения репрезентативного домохозяйства (5.2) могут быть использованы не только для позитивного анализа (например, для определения количества сбережений в экономике), но и для нормативного анализа, например для описания оптимальности равновесия.

Предположение о том, что экономика населена множеством идентичных домохозяйств, не является привлекательным. Нас больше интересует вопрос о том, может ли экономика, населенная разнородными агентами, быть описана так, как будто в равновесии агрегированное потребление в ней совпадет с оптимизационным выбором репрезентативного домохозяйства. Для иллюстрации возможных трудностей, которые могут возникнуть при моделировании этого «как будто», рассмотрим простую экономику обмена с конечным количеством товаров и воспользуемся важной теоремой теории общего равновесия. Напомним, что в экономике обмена равновесие может быть описано функциями избыточного спроса на отдельные товары (или, более точно, с помощью соответствий избыточного спроса, см. приложение А). Пусть равновесие в такой экономике описывается функцией совокупного избыточного спроса $\mathbf{x}(p)$, где вектор p является вектором цен. Эта экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства, если функция $\mathbf{x}(p)$ может быть представлена как решение задачи максимизации единственного домохозяйства. Следующая теорема утверждает, что в общем случае это невозможно.

Теорема 5.1. Теорема Зонненшайна—Мантеля—Дебре. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *и* $N \in \mathbb{N}$. *Рассмотрим множество цен* $\mathbf{P}_\varepsilon = \left\{ p \in \mathbb{R}_+^N : p_j / p_{j'} \geq \varepsilon \text{ для всех } j \text{ и } j' \right\}$ *и любую непрерывную функцию* $\mathbf{x}: \mathbf{P}_\varepsilon \to \mathbb{R}_+^N$, *удовлетворяющую закону Вальраса и однородную степени* 0. *Тогда существует экономика обмена с N товарами и* $H < \infty$ *домохозяйствами, такая, что функция сово-*

купного избыточного спроса в ней задается функцией $\mathbf{x}(p)$ *на множестве* $\mathbf{P}_\varepsilon$.

Доказательство. [См.: [Debreu 1974] или [Mas-Colell, Whinston, Green 1995, утверждение 17.E.3; Мас-Колелл, Уинстон, Грин 2016]. ■

Поэтому факт того, что совокупный избыточный спрос является результатом агрегирования оптимизационного поведения отдельных домохозяйств, накладывает недостаточное количество ограничений на вид функции совокупного избыточного спроса. В частности, напомним результат из базовой микроэкономики о том, что функция индивидуального избыточного спроса удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений и обладает симметричной и отрицательно полуопределенной матрицей Слуцкого. Функция совокупного избыточного спроса $\mathbf{x}(p)$ не обязательно обладает этими свойствами. Поэтому представление функции $\mathbf{x}(p)$ как решения задачи максимизации единственного домохозяйства в общем случае невозможно без наложения дополнительных ограничений. Теорема 5.1 является некоторым предостережением при использовании предположения о существовании репрезентативного домохозяйства.

Однако приведенный выше результат является следствием значительного влияния эффекта дохода, которое может приводить к неинтуитивным результатам даже в простой теории потребления (вспомните, например, товары Гиффена). Предположения о специальном, но при этом вполне реалистичном, виде функции предпочтений и об ограничениях на распределение дохода между домохозяйствами позволяют нам избавиться от произвольной формы функции совокупного избыточного спроса. Чтобы показать, что предположение о существовании репрезентативного домохозяйства не так безнадежно, как подсказывает теорема 5.1, рассмотрим частный случай, в котором агрегирование индивидуальных предпочтений оказывается возможным, что позволяет моделировать экономику так, будто совокупный спрос в ней является результатом оптимизации репрезентативным домохозяйством.

Прежде чем перейти к следующей теореме, рассмотрим экономику с конечным числом товаров N и вспомним, что косвенная функция полезности домохозяйства h, $v^h(p, w^h)$, определяет ординальную полезность домохозяйства как функцию от вектора цен $\mathrm{p} = (p_1, ..., p_N)$ и дохода домохозяйства w^h. Естественно, косвенная функция полезности является однородной степени 0 по переменным p и w.

Теорема 5.2. Теорема Гормана об агрегировании. *Рассмотрим экономику с конечным числом товаров* $N < \infty$ *и множеством домохозяйств* $\mathcal{H}$. *Предположим, что предпочтения каждого домохозяйства* $h \in \mathcal{H}$ *могут быть описаны с помощью косвенной функции полезности вида:*

$$v^h(p, w^h) = a^h(p) + b(p)w^h \tag{5.3}$$

и что спрос каждого домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ на каждый товар положителен. Тогда такие предпочтения могут быть агрегированы и представлены как предпочтения репрезентативного домохозяйства с косвенной функцией полезности:

$$v(p, w) = a(p) + b(p)w,$$

где $a(p) \equiv \int_{h \in \mathcal{H}} a^h(p)dh$ и $w \equiv \int_{h \in \mathcal{H}} w^h dh$ является совокупным доходом в экономике.

Доказательство. См. упражнение 5.3. ■

Из этой теоремы следует, что в случае, когда предпочтения могут быть описаны с помощью линейной косвенной функции полезности (5.3), агрегирование поведения домохозяйств действительно может быть представлено как результат оптимизационного поведения единственного домохозяйства. Такой класс предпочтений называют предпочтениями Гормана по имени В.М. (Теренса) Гормана, который был среди первых экономистов, изучавших возможность агрегирования предпочтений, и предложил специальный вид предпочтений, используемых в теореме 5.2. Такие предпочтения оказываются удобными, так как они ведут к линейному виду кривой Энгеля. Напомним, что *кривая Энгеля* представляет собой зависимость между расходами на приобретение определенного товара и уровнем дохода (при неизменных ценах). Если предпочтения домохозяйств являются предпочтениями Гормана, то кривые Энгеля у каждого из них (и для каждого товара) являются линейными функциями с одним углом наклона. Действительно, в предположении, что функции $a^h(p)$ и $b(p)$ дифференцируемы, из *тождества Роя* следует, что функция спроса домохозяйства h на товар j имеет следующий вид:

$$x_j^h\left(p, w^h\right) = -\frac{1}{b(p)}\frac{\partial a^h(p)}{\partial p_j} - \frac{1}{b(p)}\frac{\partial b(p)}{\partial p_j}w^h.$$

Поэтому для любого домохозяйства функция спроса на товар j будет линейной функцией дохода (а следовательно, функция расходов на товар j также будет линейной по уровню дохода) и угол ее наклона будет одним для всех домохозяйств. Это свойство является ключевым для доказательства существования репрезентативного домохозяйства в теореме 5.2. В противном случае для этого мы были бы вынуждены накладывать ограничения на распределения доходов между домохозяйствами. В частности, будем говорить, что экономика допускает существование *репрезентативного домохозяйства в сильной форме*, если вид функций агрегированного спроса на различные товары не изменяется при любом перераспределении доходов или запасов между домохозяйствами. Как показывает теорема 5.2, в случае если предпочтения домохозяйств имеют вид предпочтений Гормана, экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства в сильной форме. Более того, нетрудно убедиться, что если предпочтения домохозяйств не являются предпочтениями Гормана, то, в силу того что в этом случае кривые Энгеля различных домохозяйств имеют разные углы наклона, существует перераспределение доходов, которое изменит вид функций агрегированного спроса на различные товары. Поэтому верно утверждение, обратное к теореме 5.2: для того чтобы экономика допускала существование репрезентативного домохозяйства в сильной форме, необходимо чтобы предпочтения всех домохозяйств были предпочтениями Гормана (с единой функцией $b(p)$ для всех домохозяйств)[1].

Заметим, что вместо суммирования в теореме 5.2 мы интегрируем по множеству домохозяйств $\mathcal{H}$, позволяя ему, таким образом, иметь мощность континуума. Интегрирование надо понимать в смысле интеграла Лебега, поэтому в случае, когда множество $\mathcal{H}$ является конечным или счетным, интеграл $\int\limits_{h\in\mathcal{H}} w^h dh$ действительно равен сумме $\sum\limits_{h\in\mathcal{H}} w^h$[2]. Хотя мы сформулировали теорему 5.2 для экономики с конечным числом товаров, это ограничение было сделано лишь для простоты, утверждение теоремы остается верным и в экономике с бесконечным и даже континуальным множеством товаров.

Наконец, заметим, что теорема 5.2 не требует, чтобы косвенная функция полезности имела вид, описываемый уравнением (5.3). Вместо этого она лишь требует возможности представления ее в таком виде. Напомним, что в отсутствие неопределенности любое монотонно возрастающее преобразование функции полезности или косвенной функции полезности не изменяет предпочтений агента и его поведения, поэтому теорема 5.2 в отсутствие неопределенности требует существования такого монотонного преобразования косвенной функции полезности, приводящего его к виду, описываемому уравнением (5.3).

[1] Конечно, в предположении о некотором специальном типе распределения доходов (богатства) между домохозяйствами мы могли бы найти более широкий класс предпочтений, при которых агрегированная динамика экономики может быть описана как результат оптимизационного поведения единственного репрезентативного домохозяйства. Наиболее экстремальной версией подобного предположения было бы предположение о том, что все домохозяйства обладают общей функцией полезности и равными запасами. Существование репрезентативного домохозяйства в этом случае очевидно.

[2] По мере возможности мы постараемся избегать обращения к теории меры по всей книге, однако мы используем понятие интеграла Лебега несколько раз. Интеграл Лебега является обобщением интеграла Римана. Наше обращение именно к интегралу Лебега говорит о том, что под интегралом необходимо понимать более широкое понятие, так что он может представлять собой ожидаемое значение или среднее даже для дискретных случайных величин и дискретных функций распределения (или смеси дискретных и непрерывных функций распределения). Основные базовые утверждения из теории меры и теории интеграла Лебега приведены в конце главы 16.

Следующий пример показывает, что многие из часто используемых в макроэкономике типов предпочтений являются частным случаем предпочтений Гормана.

Пример 5.1. (Предпочтения ПЭЗ). В теории отраслевых рынков и в макроэкономике очень часто используется тип предпочтений, называемых предпочтениями ПЭЗ, или предпочтениями Диксита—Стиглица, по именам двух экономистов, использовавших такие предпочтения первыми. Предположим, что каждое домохозяйство $h \in \mathcal{H}$ обладает общим доходом w^h и предпочтениями, заданными на множестве товаров $j = 1, ..., N$, следующим образом:

$$U\left(x_1^h, ..., x_N^h\right) = \left[\sum_{j=1}^{N}\left(x_j^h - \xi_j^h\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \tag{5.4}$$

где параметр $\sigma \in (0, \infty)$, а значения констант $\xi_j^h \in \left[-\bar{\xi}, \bar{\xi}\right]$ различны для каждого домохозяйства. Они определяют, является ли определенный товар j необходимостью для домохозяйства h. Например, неравенство $\xi_j^h > 0$ может означать, что домохозяйству h для выживания необходимо потребление товара j в количестве, не меньшем некоторой заданной величины. Функция полезности вида (5.4) называется функцией ПЭЗ по следующей причине: если мы определим потребление каждого домохозяйства как $\hat{x}_j^h = x_j^h - \xi_j^h$, то эластичность замещения между любыми двумя товарами $\hat{x}_j^h$ и $\hat{x}_{j'}^h$ (при $j \neq j'$) будет равна σ.

Каждый потребитель наблюдает вектор цен $p = (p_1, ..., p_N)$, и предположим, что для всех домохозяйств h справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{j=1}^{N} p_j \bar{\xi} < w^h,$$

и, таким образом, каждое домохозяйство $h \in \mathcal{H}$ может позволить себе такой набор потребления, что $\hat{x}_j^h \geq 0$ для всех j. При решении упражнения 5.6 вам потребуется найти оптимальный уровень потребления для каждого домохозяйства и показать, что косвенная функция полезности домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ может быть представлена в следующем виде:

$$v^h(p, w^h) = \frac{\left[-\sum_{j=1}^{N} p_j \xi_j^h + w^h\right]}{\left[\sum_{j=1}^{N} p_j^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}}, \tag{5.5}$$

который является видом функции Гормана (она также является однородной степени 0 по p и w). Поэтому рассматриваемая экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства с косвенной функцией полезности следующего вида:

$$v(p, w) = \frac{\left[-\sum_{j=1}^{N} p_j \xi_j + w\right]}{\left[\sum_{j=1}^{N} p_j^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}},$$

где общий уровень дохода в экономике $w \equiv \int_{h\in\mathcal{H}} w^h dh$ и $\xi_j \equiv \int_{h\in\mathcal{H}} \xi_j^h dh$. Нетрудно убедиться, что функция полезности, ведущая к такой функциональной форме косвенной функции полезности, имеет следующий вид:

$$U\left(x_1, \ldots, x_N\right) = \left[\sum_{j=1}^{N} (x_j - \xi_j)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}. \tag{5.6}$$

В главе 8 будет показано, что предпочтения, тесно связанные с предпочтениями ПЭЗ, рассмотренными выше, играют важную роль не только при агрегировании, но и при доказательстве существования траектории сбалансированного роста. ■

В большинстве, однако (что важно) не во всех, макроэкономических моделей, предполагается существование репрезентативного домохозяйства. Во-первых, во множестве моделей неявным образом предполагается существование репрезентативного домохозяйства в сильной форме, что позволяет избежать вопросов, связанных с распределением доходов и богатства между домохозяйствами и его влияния на агрегированную динамику экономики. Во-вторых, в большинстве теорий также предполагается существование *нормативного репрезентативного домохозяйства*. В этом случае предполагается не только существование репрезентативного домохозяйства, чье оптимизационное поведение приводит к функции совокупного спроса в рассматриваемой экономике, но и то, что функция полезности этого репрезентативного домохозяйства может быть использована при изучении вопросов, связанных с благосостоянием агентов в ней[3]. Более точно — напомним, что распределение ресурсов в экономике называется *оптимальным по Парето* (или Парето-эффективным), если благосостояние ни одного из домохозяйств не может быть улучшено без ухудшения благосостояния некоторого другого домохозяйства (см. определение 5.2 ниже). Эквивалентным образом, оптимальное по Парето распределение ресурсов является решением задачи максимизации взвешенного среднего значения полезностей всех домохозяйств в экономике при соблюдении ресурсных и технологических ограничений (и обычно различные наборы весов приводят к различным оптимальным по Парето распределениям ресурсов).

В случае когда экономика допускает существование нормативного репрезентативного домохозяйства, мы имеем возможность просто моделировать

[3] Лучшим способом подчеркнуть трудности, возникающие в случае использования этого ограничения, не убедившись в том, что экономика допускает существование нормативного репрезентативного домохозяйства, будет привести цитату из книги [Deaton, Muellbauer, 1980, p. 63]: «Вывод микроэкономического поведения на основе макроэкономических наблюдений является очень опасным, в особенности когда его результаты затем используются для оценки экономического благосостояния».

совокупный спрос в ней и использовать полученную модель для утверждения об оптимальности по Парето определенного распределения ресурсов, а также для ответа на вопрос, каким образом это распределение ресурсов может быть улучшено. Предположение о существовании нормативного репрезентативного домохозяйства значительно сильнее предположения о существовании позитивного репрезентативного домохозяйства. Несмотря на это, из предположения о том, что предпочтения агентов являются предпочтениями Гормана в теореме 5.2, следует не только существование репрезентативного домохозяйства в сильной форме (и поэтому возможность агрегирования индивидуальных функций спроса независимо от явного вида распределения доходов между домохозяйствами), но и, в общем случае, существование нормативного репрезентативного домохозяйства. В следующей теореме приведена простая форма этого утверждения.

Теорема 5.3. О существовании нормативного репрезентативного домохозяйства. *Рассмотрим экономику с конечным числом товаров $N < \infty$ и множеством домохозяйств $\mathcal{H}$ и выпуклым множеством производственных возможностей Y. Предположим, что предпочтения каждого домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ могут быть представлены как предпочтения Гормана с косвенной функцией полезности вида $v^h(p, w^h) = a^h(p) + b(p)w^h$, где вектор $p = (p_1, \ldots, p_N)$ является вектором цен. Также предположим, что спрос каждого домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ на каждый товар $j = 1, \ldots, N$ положителен.*

1. *Тогда любое распределение ресурсов, которое максимизирует полезность репрезентативного домохозяйства с косвенной функцией полезности $v(p, w) = \sum_{h\in\mathcal{H}} a^h(p) + b(p)w$, где общий доход $w \equiv \sum_{h\in\mathcal{H}} w^h$, является оптимальным по Парето.*
2. *Более того, если для всех p и для всех домохозяйств $h \in \mathcal{H}$ выполняются равенства $a^h(p) = a^h$, то любое оптимальное по Парето распределение ресурсов является максимумом функции полезности репрезентативного домохозяйства.*

Доказательство. Рассмотрим множество производственных возможностей, включая запасы, Y. Обозначим множество всех максимизирующих прибыль при векторе цен p значений чистого предложения товара j как $Y_j(p)$. Так как множество Y выпукло, общественный планировщик вместо выбора значения $y \in Y$ напрямую имеет эквивалентную возможность выбора вектора цен p и элементов множеств $Y_j(p)$ для каждого товара j (см. теоремы 5.4 и 5.7 далее). Тогда оптимальное по Парето распределение ресурсов в экономике является решением следующей задачи максимизации:

$$\max_{\{y_j\}_{j=1}^N, p, \{w^h\}_{h\in\mathcal{H}}} \sum_{h\in\mathcal{H}} \alpha^h v^h(p, w^h) = $$
$$= \max_{\{y_j\}_{j=1}^N, p, \{w^h\}_{h\in\mathcal{H}}} \sum_{h\in\mathcal{H}} \alpha^h \left(a^h(p) + b(p)w^h\right) \tag{5.7}$$

при ограничениях:

$$-\frac{1}{b(p)}\left(\sum_{h\in\mathcal{H}} \frac{\partial a^h(p)}{\partial p_j} + \frac{\partial b(p)}{\partial p_j} w\right) = y_j \in Y_j(p) \text{ для } j = 1, \ldots, N,$$

$$\sum_{h\in\mathcal{H}} w^h = w \equiv \sum_{j=1}^N p_j y_j,$$

$$\sum_{j=1}^N p_j \omega_j, = w,$$

$$p_j \geq 0 \text{ для всех } j,$$

где набор констант $\left\{\alpha^h\right\}_{h\in\mathcal{H}}$ является множеством неотрицательных весов Парето, удовлетворяющих условию $\sum_{h\in\mathcal{H}} \alpha^h = 1$. В первом множестве ограничений для выражения функции совокупного спроса на товар j и приравнивания ее значения к совокупному предложению товара j, заданному некоторым элементом y_j множества $Y_j(p)$, мы использовали тождество Роя. Во втором уравнении совокупный уровень дохода задается как значение суммы значений чистого предложения всех товаров. В третьем уравнении проверяется условие равенства совокупного уровня доходов сумме всех запасов в экономике. Четвертое множество ограничений состоит в требовании неотрицательности значений всех цен в экономике.

Сравним задачу максимизации (5.7) со следующей задачей максимизации:

$$\max_{\{y_j\}_{j=1}^N, p, \{w^h\}_{h\in\mathcal{H}}} \sum_{h\in\mathcal{H}} a^h(p) + b(p)w \tag{5.8}$$

при тех же ограничениях, что и в задаче (5.7). Единственное различие между этими двумя задачами состоит в том, что во второй веса всех домохозяйств равны. Рассмотрим вектор $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{H}|}$ (заметим, что в наших обозначениях w является некоторым числом, а $\mathbf{w} = \left(w^1, \ldots, w^{|\mathcal{H}|}\right)$ — вектором).

Пусть пара $(p^*, \mathbf{w}^*)$ является решением задачи (5.8), и $w^h = w^*/|\mathcal{H}|$ для всех $h \in \mathcal{H}$, так что все домохозяйства имеют равный доход (вместе со связанным вектором чистого предложения товаров

$\{y_j\}_{j=1}^{N}$). По определению такое распределение доступно и является решением задачи (5.7) при условии на веса $\alpha^h = \alpha$. Следовательно, оно является оптимальным по Парето, что доказывает первую часть теоремы.

Для доказательства второй части теоремы предположим, что $(a^h(p) = a^h$ для всех цен p и для всех домохозяйств $h \in \mathcal{H}$. Доказательство проведем методом от противного. Для построения противоречия предположим, что некоторое доступное распределение ресурсов $\left(p_\alpha^{**}, \mathbf{w}_\alpha^{**}\right)$ и связанный с ним вектор чистого предложения товаров $\{y_j\}_{j=1}^{N}$ являются решением задачи (5.7) при некотором наборе весов $\{\alpha^h\}_{h\in\mathcal{H}}$. Также предположим, что оно не является решением задачи (5.8). Положим

$$\alpha^M = \max_{h\in\mathcal{H}} \alpha^h.$$

Тогда

$$\mathcal{H}^M = \left\{h \in \mathcal{H} \mid \alpha^h = \alpha^M\right\}$$

является множеством домохозяйств с максимальным весом Парето. Пусть пара $(p^*, \mathbf{w}^*)$ является таким решением задачи (5.8), что

$$w^{h*} = 0 \text{ для всех } h \notin \mathcal{H}^M. \tag{5.9}$$

Обозначим $w^* = \sum_{h\in\mathcal{H}^M} w^{h*}$. Заметим, что такое решение существует, так как максимизируемая функция и множество ограничений во второй задаче зависят только от вектора $\left(w^1, \ldots, w^{|\mathcal{H}|}\right)$ посредством равенства $w = \sum_{h\in\mathcal{H}} w_h$.

Так как пара $\left(p_\alpha^{**}, \mathbf{w}_\alpha^{**}\right)$ удовлетворяет ограничениям задачи (5.8) по определению и не является ее решением, то справедливы следующие неравенства:

$$\sum_{h\in\mathcal{H}} a^h + b\left(p^*\right)w^* > \sum_{h\in\mathcal{H}} a^h + b\left(p_\alpha^{**}\right)w_\alpha^{**},$$

$$b\left(p^*\right)w^* > b\left(p_\alpha^{**}\right)w_\alpha^{**}. \tag{5.10}$$

Из предположения о том, что пара $\left(p_\alpha^{**}, \mathbf{w}_\alpha^{**}\right)$ является решением задачи (5.7), следует, что справедливы следующие неравенства:

$$\sum_{h\in\mathcal{H}} \alpha^h a^h + \sum_{h\in\mathcal{H}} \alpha^h b\left(p_\alpha^{**}\right)w_\alpha^{h**} \geq \sum_{h\in\mathcal{H}} \alpha^h a^h + \sum_{h\in\mathcal{H}} \alpha^h b(p^*)w^{h*},$$

$$\sum_{h\in\mathcal{H}} \alpha^h b\left(p_\alpha^{**}\right)w_\alpha^{h**} \geq \sum_{h\in\mathcal{H}} \alpha^h b\left(p^*\right)w^{h*}, \tag{5.11}$$

где переменные w^{h*} и w_{α}^{h**} обозначают h-е элементы векторов $\mathbf{w}^*$ и $\mathbf{w}_{\alpha}^{**}$.

Заметим, что любая пара $(p^{**}, \mathbf{w}^{**})$, являющаяся решением задачи (5.7), удовлетворяет условию $w_{\alpha}^{h**} = 0$ для любого $h \notin \mathcal{H}^M$. Поэтому и в силу выбора пары $(p^*, \mathbf{w}^*)$ в равенстве (5.9) из неравенства (5.11) следует, что

$$\alpha^M b\left(p_{\alpha}^{**}\right) \sum_{h \in \mathcal{H}} w_{\alpha}^{h**} \geq \alpha^M \left(p^*\right) \sum_{h \in \mathcal{H}} w^{h*},$$

$$b\left(p_{\alpha}^{**}\right) w_{\alpha}^{**} \geq b\left(p^*\right) w^*,$$

что противоречит неравенству (5.10). Отсюда следует, что при перечисленных в теореме условиях любое оптимальное по Парето распределение ресурсов является решением задачи максимизации функции полезности репрезентативного домохозяйства. ■

5.3. Бесконечный горизонт планирования

Еще одно важное свойство стандартного типа предпочтений, используемых в теории экономического роста и в макроэкономике, связано с горизонтом планирования домохозяйств. Несмотря на то что в некоторых моделях экономического роста домохозяйства имеют конечный горизонт планирования (см., например, главу 9), в большинстве моделей экономического роста и макроэкономических моделей предполагается, что домохозяйства имеют бесконечный горизонт планирования, как в равенствах (5.2) и (5.16) ниже. Естественным будет вопрос о том, насколько такое предположение является хорошей аппроксимацией реальности. В конце концов, большинство индивидов на планете не живут бесконечно долго.

Можно привести два типа разумных микроэкономических обоснований бесконечного горизонта планирования. Первый связан с «пуассоновской моделью смерти», называемой также *моделью вечной молодости,* которая подробно описана в главе 9. Основная ее идея в том, что даже в случае, когда индивиды имеют конечную жизнь, они не обладают информацией о точном моменте своей смерти. Некоторый индивид, доживший даже до 100 лет, не будет расходовать все имеющиеся у него активы, так как у него есть шанс прожить еще 5 или 10 лет. В самой простой формулировке мы можем рассмотреть модель в дискретном времени и предположить, что вероятность смерти каждого агента в любом возрасте постоянна и равна $v > 0$. Это очень сильное упрощающее предположение, так как в реальности вероятность прожить еще один год является функцией от возраста индивида, а не постоянной величиной (эта вероятность наилучшим образом описывается в актуарных таблицах, широко используемых в индустрии страхования). Несмотря на это, такое предположение является хорошей начальной точкой, так как оно позволяет значительно упростить математику модели. Из него также следует, что средняя продолжительность жизни индивида в модели равна $1/v < \infty$ периодов. Из этого утверждения можно сделать вывод о примерном значении параметра v.

Предположим, что каждый индивид обладает стандартной моментальной функцией полезности $u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ и что истинное значение дисконта равно $\hat{\beta}$. Это означает, что индивид, уверенный в том, что он доживет до следующего периода, будет применять значение дисконта $\hat{\beta}$ для дисконтирования потребления в нем по отношению к потреблению в текущем периоде. Также нормализуем функцию полезности ограничением $u(0) = 0$, так что значение полезности после смерти равно 0. Рассмотрим индивида, планирующего набор потребления $\{c(t)\}_{t=0}^{\infty}$ (при условии дожития). Очевидно, что после смерти агента его план потребления в будущем не имеет значения и не влияет на его полезность. Стандартные рассуждения приводят к выводу о том, что функция ожидаемой полезности индивида в момент времени 0 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U_0(c(0), c(1), \ldots) &= u(c(0)) + \hat{\beta}(1-v)u(c(1)) + \hat{\beta}vu(0) + \\ &+ \hat{\beta}^2(1-v)^2 u(c(2)) + \hat{\beta}^2(1-v)vu(0) + \ldots \\ &= \sum_{t=0}^{\infty}(\hat{\beta}(1-v))^t u(c(t)) \equiv \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c(t)), \end{aligned} \tag{5.12}$$

где во второй строке приведены подобные члены и использовано равенство $u(0) = 0$. В последней строке константа β определена как $\beta \equiv \hat{\beta}(1-v)$. В такой формулировке модель с конечной продолжительностью жизни и случайным моментом смерти приводит индивида к решению задачи максимизации, идентичной задаче в модели с бесконечно живущими домохозяйствами (хотя подходящие значения параметра дисконтирования β в этом случае будут различаться, см. также упражнение (5.7) для вывода схожей модели в непрерывном времени). В моделях, рассмотренных нами ранее, неопределенность отсутствовала, вероятность смерти в данной модели приводит к наличию в ней нетривиальной (в действительности очень важной) неопределенности в жизни индивидов. В результате этого в модели необходимо использовать не стандартную теорию ординальной полезности, а разработанную Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном теорию ожидаемой полезности. В частности, уравнение (5.12) уже описывает ожидаемую полезность индивида. Необходимость использования в ней оператора математического ожидания отсутствует ввиду того, что вероятности уже явным образом введены в уравнение[4].

Второй тип микроэкономических обоснований бесконечного горизонта планирования связан с введением в модель межпоколенческого альтруизма или мотива передачи наследства. В простой формулировке рассмотрим индивида, который живет один период и имеет единственного наследника (который также будет жить один период и обладать единственным наследником и т. д.). Предположим, что индивид получает полезность не только от своего потребления, но и от наследства, которое он оставляет своему потомку. Например, мы можем ввести следующую функцию полезности:

$$U(c(t), b(t)) = u(c(t)) + U^b(b(t)),$$

где переменная $c(t)$ обозначает его потребление, а переменная $b(t)$ — наследство, которое он оставляет своему потомку. Также предположим, что совокупный доход индивида равен $y(t)$, и поэтому его бюджетное ограничение выглядит следующим образом:

$$c(t) + b(t) \le y(t).$$

Функция $U^b(\cdot)$ несет информацию о том, насколько сильно индивид ценит наследство, которое он оставляет своему потомку. В общем случае мы можем привести несколько причин, заставляющих индивидов оставлять наследство (включая незапланированное наследство, которое будет оставлено индивидом ввиду неопределенности точной даты его смерти). Однако естественным будет предположение об альтруизме агента, другими словами, предположение о том, что он заботится и о полезности своего наследника (с некоторым дисконтом)[5]. Обозначим дисконт между поколениями символом β. Также предположим, что в дополнение к наследству потомок обладает доходом w. Тогда функция полезности индивида принимает следующий вид:

$$U(c(t)) + \beta V(b(t) + w),$$

где значение функции $V(\cdot)$ представляет собой полезность от наследства $b(t)$ (а также от собственного дохода w), которую получат потомки. В этом

[4] Во всей книге, за исключением изложения стохастических моделей экономического роста в главах 16 и 17, мы будем использовать функцию ожидаемой полезности домохозяйств в явном виде без использования оператора математического ожидания.

[5] Альтернативой предположению об альтруистических предпочтениях являются модели, где родитель получает полезность от определенного типа наследства или от некоторой части полезности своего ребенка. Такие модели с частичным альтруизмом в некоторых случаях оказываются очень удобными. Мы рассмотрим их в главах 9 и 21.

случае функция стоимости агента в момент времени t приобретает следующий вид:

$$V(y(t)) = \max_{c(t)+b(t)\le y(t)} \{u(c(t)) + \beta V(b(t)+w)\}.$$

Она определяет текущую стоимость индивида с уровнем дохода $y(t)$ и учитывает полезность его потомка от получения наследства. В следующей главе будет показано, что такое представление является канонической формой задачи динамического программирования при максимизации на бесконечном горизонте планирования. Более того, при некоторых умеренных технических предположениях такая задача динамического программирования эквивалентна следующей задаче максимизации в момент времени t:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(c_{t+s}).$$

На интуитивном уровне, несмотря на то что индивид живет лишь один период, он заботится о полезности своего потомка, а также понимает, что его потомок, в свою очередь, заботится о полезности своего собственного потомка, и так далее. Поэтому каждый индивид принимает во внимание полезность всех будущих поколений своей «династии». Такие рассуждения приводят нас к выводу о том, что полностью альтруистическое поведение внутри династии (так называемые династические предпочтения) также приводит нас к ситуации, в которой агент, принимающий решения, действует так, как если бы его горизонт планирования был бесконечен.

5.4. Репрезентативная фирма

Предыдущий параграф был посвящен обсуждению вопроса, при каких ограничениях экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства. Другое, уже введенное нами в главе 2, часто используемое в моделях экономического роста предположение о существовании репрезентативной фирмы. В частности, в модели из главы 2 вся производственная структура экономики была представлена в форме совокупного множества *производственных возможностей, которое может быть* рассмотрено как множество производственных возможностей или производственная функция репрезентативной фирмы. Можно предположить, что, аналогично предположению о существовании репрезентативного домохозяйства, такое представление также требует довольно строгих предположений о производственной структуре экономики. Однако это не так. Несмотря на то что не все экономики допускают существование репрезентативного домохозяйства, стандартные предположения

теории общего равновесия и динамических моделей общего равновесия (в частности, предположения об отсутствии производственных экстерналий и о совершенной конкуренции на всех рынках) являются достаточными для возможности формулировки задачи в терминах репрезентативной фирмы без потери общности.

Этот результат приведен в следующей теореме. Прежде чем перейти к ней, введем следующие обозначения. Для двух векторов p и y одинаковой размерности N, назовем их *скалярным произведением* $p \cdot y$ сумму $p \cdot y = \sum_{j=1}^{N} p_j y_j$. Также обозначим множество фирм в экономике как $\mathcal{F}$. В этом случае *агрегированное множество производственных возможностей* в экономике имеет следующее представление:

$$Y \equiv \left\{ \sum_{f\in\mathcal{F}} y^f : y^f \in Y^f \text{ для всех } f \in \mathcal{F} \right\}. \tag{5.13}$$

Теорема 5.4. Теорема о репрезентативной фирме. *Рассмотрим экономику с совершенной конкуренцией на всех рынках, $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ различными товарами и не более чем счетным множеством фирм $\mathcal{F}$, каждая из которых имеет множество производственных возможностей $Y^f \subset \mathbb{R}^N$. Пусть $p \in \mathbb{R}_+^N$ — вектор цен в такой экономике. Обозначим множество максимизирующего прибыль чистого предложения товаров фирмой $f \in \mathcal{F}$ как $\hat{Y}^f(p) \subset Y^f$ (таким образом для любого $\hat{y}^f \in \hat{Y}^f(p)$ справедливо $p \cdot \hat{y}^f \ge p \cdot y^f$ для всех $y^f \in Y^f$). Тогда существует репрезентативная фирма с множеством производственных возможностей $Y \subset \mathbb{R}^N$ и множеством максимизирующего прибыль чистого предложения товаров $\hat{Y}(p)$, такая, что для любого вектора цен $p \in \mathbb{R}_+^N$ $\hat{y} \in \hat{Y}(p)$ тогда и только тогда, когда при некоторых значениях $\hat{y}^f \in \hat{Y}^f(p)$ для всех фирм $f \in \mathcal{F}$ выполняется условие $\hat{y} = \sum_{f\in\mathcal{F}} \hat{y}^f$.*

Доказательство. Пусть Y является агрегированным множеством производственных возможностей, заданным равенством (5.13). Для доказательства прямого утверждения теоремы зафиксируем вектор цен $p \in \mathbb{R}_+^N$ и построим сумму $\hat{y} = \sum_{f\in\mathcal{F}} \hat{y}^f$ при некоторых значениях $\hat{y}^f \in \hat{Y}^f(p)$ для всех фирм $f \in \mathcal{F}$. Для получения противоречия предположим, что $\hat{y} \notin \hat{Y}(p)$, то есть существует y', такой, что $p \cdot y' > p \cdot \hat{y}$. По определению множества Y отсюда следует, что существует набор $\{y^f\}_{f\in\mathcal{F}}$, где $y^f \in Y^f$, такой, что справедливы следующие неравенства:

$$p \cdot \left(\sum_{f\in\mathcal{F}} y^f \right) > p \cdot \left(\sum_{f\in\mathcal{F}} \hat{y}^f \right),$$

$$\sum_{f\in\mathcal{F}} p\cdot y^f > \sum_{f\in\mathcal{F}} p\cdot \hat{y}^f,$$

и поэтому существует хотя бы одна фирма $f'\in\mathcal{F}$, такая, что

$$p\cdot y^{f'} > p\cdot \hat{y}^{f'},$$

это противоречит предположению, в соответствии с которым $\hat{y}^f\in\hat{Y}^f(p)$ для каждой фирмы $f\in\mathcal{F}$, это завершает первую часть доказательства.

Для доказательства обратного утверждения теоремы обозначим максимизирующий прибыль выбор репрезентативной фирмы как $\hat{y}\in\hat{Y}(p)$. Тогда из условия $\hat{Y}(p)\subset Y$ следует, что

$$\hat{y}=\sum_{f\in\mathcal{F}} y^f$$

при некоторых значениях $y^f\in Y^f$ для каждой фирмы $f\in\mathcal{F}$. Пусть $\hat{y}^f\in\hat{Y}^f(p)$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{f\in\mathcal{F}} p\cdot y^f \le \sum_{f\in\mathcal{F}} p\cdot \hat{y}^f, \tag{5.14}$$

из которого следует, что справедливо неравенство:

$$p\cdot\hat{y}\le p\cdot\sum_{f\in\mathcal{F}}\hat{y}^f.$$

Из сделанных нами предположений следует, что $\sum_{f\in\mathcal{F}}\hat{y}^f\in Y$ и что $\hat{y}\in\hat{Y}(p)$. Поэтому справедливо неравенство:

$$p\cdot\hat{y}\ge p\cdot\sum_{f\in\mathcal{F}}\hat{y}^f.$$

Поэтому неравенство (5.14) выполняется как равенство, и отсюда следует, что $y^f\in\hat{Y}^f(p)$ для всех фирм $f\in\mathcal{F}$. Это завершает доказательство теоремы. ■

Из теоремы 5.4 следует, что в случае отсутствия производственных экстерналий и совершенной конкуренции на рынках факторов производства предположение о существовании агрегированного множества производственных возможностей или, что эквивалентно, репрезентативной фирмы не ведет к потере общности анализа (конечно, в предположении, что репрезентативная фирма рассматривает цены как заданные величины). Почему возникают такие различия между предположениями о существовании репрезентативного домохозяйства и существовании репрезентативной фирмы? Ответ на этот вопрос связан с наличием эффекта дохода. Предположение о существовании репрезентативного домохозяйства выполняется лишь при существенных ограничениях, потому что при изменении цен возникает эффект дохода, который по-разному воздействует на различные домохозяйства. Экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства только в том случае, когда эффект дохода не оказывает влияния, и предположение о предпочтениях Гормана гарантирует это. С другой стороны, в теории фирмы эффект дохода отсутствует и поэтому предположение о существовании репрезентативной фирмы не ограничивает общность анализа.

Необходимо заметить, что возможность моделировать производственную структуру экономики с помощью предположения о существовании репрезентативной фирмы не означает, что различия между фирмами не представляют интерес и не важны. Наоборот, различия в производительности разных фирм и попытки фирм увеличить свою производительность относительно других фирм лежат в центре явлений, которые изучает теория экономического роста. Теорема 5.4 утверждает лишь то, что при совершенной конкуренции на всех рынках производственная структура экономики может быть описана в терминах единственной репрезентативной фирмы или совокупного множества производственных возможностей. Мы вернемся к вопросу гетерогенности между фирмами при изучении монополистической конкуренции в части IV книги.

5.5. Постановка задачи

Рассмотрим экономику в дискретном времени, населенную агентами с бесконечным горизонтом планирования, и предположим, что она допускает существование репрезентативного домохозяйства. Тогда в предположении об отсутствии неопределенности функция полезности репрезентативного домохозяйства (начинающего экономическую деятельность в момент времени $t = 0$) принимает следующий вид:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c(t)), \tag{5.15}$$

где константа $\beta \in (0, 1)$, как и ранее, обозначает дисконт агента. В непрерывном времени функция полезности репрезентативного домохозяйства, заданная уравнением (5.15), принимает следующий вид:

$$\int_0^{\infty} \exp(-\rho t)u(c(t))dt, \tag{5.16}$$

Каким образом возникает экспоненциальная форма дисконтирования в уравнении (5.16)? Мы уже назвали дисконтирование в дискретном случае «экспоненциальным», и поэтому связь должна быть очевидной. Более строго, рассчитаем стоимость одного доллара спустя промежуток времени длины T. Разделим отрезок $[0, T]$ на $T/\Delta t$ отрезков одинаковой длины. Положим процентную ставку на каждом из таких отрезков равной $r\Delta t$. Важно отметить, что значение переменной r умножается на длину отрезка Δt, иначе мы бы были вынуждены изменять значение процентной ставки на единичном интервале времени при изменении длины интервала Δt. Используя стандартную формулу расчета сложных процентов, получаем, что стоимость одного доллара спустя промежуток времени длины T равна:

$$v(T \mid \Delta t) = (1 + r\Delta t)^{T/\Delta t}.$$

Далее перейдем к случаю непрерывного времени с помощью предельного перехода $\Delta t \to 0$. В этом случае стоимость одного доллара спустя промежуток времени длины T становится равной

$$v(T) = \lim_{\Delta t \to 0} v(T|\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0}(1 + r\Delta t)^{T/\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\exp\left(\log(1 + r\Delta t)^{T/\Delta t}\right)\right],$$

где последнее равенство использует тождество $\exp\log(x) = x$ для любого $x > 0$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$v(T) = \exp\left[\lim_{\Delta t \to 0} \log(1 + r\Delta t)^{T/\Delta t}\right] = \exp\left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{T}{\Delta t}\log(1 + r\Delta t)\right].$$

Выражение под знаком логарифма в квадратных скобках представляет собой неопределенность вида 0/0 (или вида ∞ 0). Для вычисления предела преобразуем его следующим образом:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\log(1 + r\Delta t)}{\Delta t/T} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r/(1 + r\Delta t)}{1/T} = rT,$$

где первое равенство получается из правила Лопиталя (см. теорему А.21 приложения А). Следовательно

$$v(T) = \exp(rT).$$

Делая обратные рассуждения, получаем, что приведенная стоимость одного доллара, получаемого T периодов спустя, составляет $\exp(-rT)$. Аналогичные рассуждения применимы и к дисконтированию полезности домохозяйств, поэтому полезность от потребления $c(t)$ в периоде t, рассчитанная в момент времени $t = 0$, составляет $\exp(-\rho t)u(c(t))$, где ρ обозначает норму дисконтирования агента. Эквивалентным образом можно было перейти от экспоненциального дисконтирования в непрерывном времени к дисконтированию в дискретном времени. А именно при заданном значении дисконта $\rho > 0$, фактор дисконтирования, применяемый в дискретном случае к временному интервалу длиной Δt, становится равным $\beta_{\Delta t} = \exp(-\rho\Delta t)$.

5.6. Теоремы экономики благосостояния

Наш основной интерес состоит в изучении равновесной траектории экономического роста. Однако между понятиями оптимальности по Парето и конкурентного равновесия существует очень тесная связь. Мы не могли воспользоваться этой связью в предыдущих главах, так как предпочтения домохозяйств (индивидов) еще не были описаны и введены в модель. Далее мы приведем первую и вторую теоремы экономики благосостояния и покажем используемые нами в дальнейшем связи между теорией экономического роста и динамическими моделями общего равновесия.

Начнем анализ с моделей с конечным числом домохозяйств. В терминах обозначений параграфов 5.1 и 5.2 это значит, что множество $\mathcal{H}$ конечно. На протяжении всего изложения материала мы будем предполагать, что множество товаров бесконечно, так как почти во всех моделях экономического роста экономика развивается в течение бесконечного числа периодов времени и поэтому в ней имеется бесконечное число товаров. Все результаты этого параграфа имеют аналогии для моделей экономик с континуумом товаров (что соответствует динамике экономики в непрерывном времени), однако мы сосредоточим внимание на экономике со счетным множеством товаров. Это позволит упростить анализ и сократить количество технических деталей.

Пронумеруем товары индексом $j \in \mathbb{N}$. Обозначим потребительский выбор домохозяйства h как $x^h \equiv \{x_j^h\}_{j=0}^{\infty}$, а его начальный запас товаров как $\omega^h \equiv \{\omega_j^h\}_{j=0}^{\infty}$. Вдобавок также предположим, что все доступные наборы потребления x^h лежат в некотором *множестве доступного потребления* $X^h \subset \mathbb{R}_+^{\infty}$. Наиболее подходящей интерпретацией такого предположения будет предположение о том, что экономика развивается в течение бесконечного числа дней, пронумерованных, например, индексом t, и что в каждый день $t = 0, 1, \ldots$ каждое домохозяйство принимает решение о потребительском выборе конечномерного вектора товаров $\tilde{x}_t^h = \{\tilde{x}_{1,t}^h, \ldots, \tilde{x}_{N,t}^h\} \in \tilde{X}_t^h \subset \mathbb{R}_+^N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$, а потребительский выбор домохозяйства h имеет вид $x^h = \{\tilde{x}_t^h\}_{j=0}^{\infty}$. Множество доступного потребления является подмножеством $\mathbb{R}_+^{\infty}$, что гарантирует неотрицательность уровня потребления любого товара (можно смягчить это ограничение и позволить некоторым компонентам вектора x^h, например соответствующим различным типам предложения труда, принимать отрицательные значения; такое расширение модели просто, и мы не будем его рассматривать, так как оно лишь увеличивает количество обозначений).

Пусть $\mathbf{X} \equiv \prod_{h\in\mathcal{H}} X^h$ — прямое произведение множеств потребления всех домохозяйств. Его можно рассматривать как агрегированное множество потребления всей экономики. Также введем обозначения $\mathbf{x} \equiv \{x^h\}_{h\in\mathcal{H}}$ и $\omega \equiv \{\omega^h\}_{h\in\mathcal{H}}$ для агрегированных множеств фактического потребления и запасов в экономике. Для доступности агрегированного фактического потребления необходимо выполнение условия $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Каждое домохозяйство $h \in \mathcal{H}$ обладает заданными в явном виде предпочтениями на множестве всех потребительских наборов. Еще раз предположим, что предпочтения каждого домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ могут быть описаны с помощью функции полезности U^h: $X^h \to \mathbb{R}$, принимающей вещественные значения. Областью определения этой функции является множество потребления домохозяйства h $X^h \subset \mathbb{R}^{\infty}_{+}$. Также предположим, что для каждого домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ функция полезности не убывает по каждому из аргументов. Пусть множество $\mathbf{U} \equiv \{U^h\}_{h\in\mathcal{H}}$ обозначает множество всех функций полезности.

Перейдем к описанию производственной структуры экономики. Предположим, что в экономике имеется конечное множество фирм $\mathcal{F}$ и что каждая фирма $f \in \mathcal{F}$ описывается множеством производственных возможностей Y^f. Это множество показывает размер выпуска, который может произвести фирма f, используя заданное количество факторов производства. Другими словами, набор $y^f \equiv \{y_j^f\}_{j=0}^{\infty}$ является доступным производственным планом для фирмы $f \in \mathcal{F}$, если $y^f \in Y^f$. Например, в случае только двух товаров, труда и конечного товара, множество Y^f включает в себя пары $(-l, z)$, такие, что фирма может произвести не более чем z единиц конечного товара, используя l единиц труда (поэтому труд входит с отрицательным знаком). Предположим, что каждое множество Y^f является конусом, то есть если $y^f \in Y^f$, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$ выполняется условие $\lambda y^f \in Y^f$. Из этого предположения следуют два важных свойства. Во-первых, $\underline{0} \in Y^f$ для любой фирмы $f \in \mathcal{F}$ (где $\underline{0}$ обозначает бесконечную последовательность, состоящую из нулей). Во-вторых, каждое множество производственных возможностей Y^f обладает свойством постоянной отдачи от масштаба. В случае убывающей отдачи от масштаба ввиду наличия некоторого редкого фактора производства, как например, предпринимательского таланта, его можно рассмотреть в качестве дополнительного фактора производства, и множество Y^f остается конусом. Обозначим агрегированное множество производственных возможностей в экономике как $\mathbf{Y} \equiv \prod_{f\in\mathcal{F}} Y^f$, а фактическое производство как $\mathbf{y} \equiv \{y^f\}_{f\in\mathcal{F}}$. Условие $y^f \in Y^f$ для всех фирм $f \in \mathcal{F}$ тогда эквивалентно условию $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$[6].

Наконец, необходимо описать структуру прав собственности в экономике. В частности, в случае когда фирма получает прибыль, эта прибыль должна быть распределена между некоторыми агентами в экономике. Мы будем описывать способ распределения прибыли с помощью предположения о существовании набора акций фирм (требований на прибыль), который мы будем обозначать как $\boldsymbol{\theta} \equiv \{\theta_f^h\}_{f\in\mathcal{F}, h\in\mathcal{H}}$, такого что $\theta_f^h \geq 0$ для всех фирм $f \in \mathcal{F}$ и всех домохозяйств $h \in \mathcal{H}$ и выполняется условие $\sum_{h\in\mathcal{H}} \theta_f^h = 1$ для каждой фирмы $f \in \mathcal{F}$. Число θ_f^h определяет долю прибыли фирмы f, получаемую домохозяйством h.

Экономика $\mathcal{E}$ полностью описывается предпочтениями, начальными запасами, множествами производственных возможностей, множествами потребления и распределением акций фирм. Другими словами, $\mathcal{E} \equiv (\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$. Распределением ресурсов в экономике будет пара $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, такая, что $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ доступны, то есть $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ и $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, и

$$\sum_{h\in\mathcal{H}} x_j^h \leq \sum_{h\in\mathcal{H}} \omega_j^h + \sum_{f\in\mathcal{F}} y_j^f$$

для всех товаров $j \in \mathbb{N}$. Последнее неравенство говорит о том, что агрегированное потребление любого товара не может превышать суммы общего количества его запасов и совокупного чистого производства. После того как экономика $\mathcal{E}$ описана, мы можем начать анализ распределения ресурсов (фактического или желаемого) в ней. Например, мы можем рассуждать о *диктаторском распределении*, которое выбирает единственный индивид (в соответствие со своими предпочтениями). С другой стороны, мы можем рассуждать о выборе общественного планировщика, желающего максимизировать взвешенную сумму функций полезности всех домохозяйств в экономике (что, как отмечено выше, тесно связано с оптимальным по Парето распределением ресурсов). Однако наш основной интерес составит анализ *конкурентного равновесия*, которое является результатом максимизационного поведения домохозяйств, ведущих экономическую деятельность в условиях существования определенного множества институтов. В частности, это институты совершенной конкуренции, где из-за наличия большого количества участников домохозяйства и фирмы

[6] В некоторых динамических моделях полезным оказывается потребовать, чтобы совокупное множество производственных возможностей $\mathbf{Y}$ допускало трансформацию товаров в периоде t в капитал в периоде $t + 1$. Однако такое требование не является необходимым в моделях, описанных в этой книге.

рассматривают цены как заданные величины, и эти цены определяются условием равновесия на рынках. Также мы сделаем неявное предположение о *полноте рынков*, что означает, что в экономике существует отдельный рынок каждого товара. В частности, в силу того, что экстерналии возникают в силу нерыночного воздействия действий одного агента на полезность или производительность других агентов, это предположение неявным образом гарантирует отсутствие экстерналий в экономике. Хотя понятие конкурентного равновесия, очевидно, абстрактно и не точно описывает реальность, оно служит хорошей аппроксимацией поведения агентов в различных обстоятельствах. Именно в этом заключается основная причина использования конкурентного равновесия в качестве базового типа распределения ресурсов в значительной части экономических моделей.

Основным элементом конкурентного равновесия является система цен. Под *системой цен* мы будем понимать набор $p \equiv \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$, такой, что $p_j \geq 0$ для любого товара j. Один из товаров мы назовем единицей измерения стоимости и нормализуем его цену значением, равным 1. Напомним, что мы обозначаем скалярное произведение двух последовательностей p и z (где, например, $z = x^h$ или $z = y^f$) как $p \cdot z$, то есть $p \cdot z \equiv \sum_{j=0}^{\infty} p_j z_j$ [7]. Тогда конкурентное равновесие, то есть ситуация, когда экстерналии отсутствуют и все фирмы максимизируют прибыль, все домохозяйства максимизируют свою полезность при выполнении бюджетного ограничения и все рынки находятся в равновесии, может быть определено следующим образом.

Определение 5.1. Конкурентное равновесие *в экономике* $\mathcal{E} \equiv \{\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}\}$ *определяется как распределение ресурсов* $\left(\mathbf{x}^* = \{x^{h*}\}_{h \in \mathcal{H}}, \mathbf{y}^* = \{y^{f*}\}_{f \in \mathcal{F}}\right)$ *и система цен* p^*, *такие, что*

1. *Распределение* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ *доступно, то есть* $x^{h*} \in X^h$ *для всех домохозяйств* $h \in \mathcal{H}$, $y^{f*} \in Y^f$ *для всех фирм* $f \in \mathcal{F}$ *и*

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} x_j^{h*} \leq \sum_{h \in \mathcal{H}} \omega_j^h + \sum_{f \in \mathcal{F}} y_j^{f*} \text{ для всех } j \in \mathbb{N}.$$

2. *Для каждой фирмы* $f \in \mathcal{F}$ y^{f*} *максимизирует ее прибыль:*

$$p^* \cdot y^{f*} \geq p^* \cdot y^f \text{ для всех } y^f \in Y^f.$$

[7] Необходимо отметить, что скалярное произведение, определенное таким образом, может не существовать в пространстве с бесконечной размерностью. Мы остановимся на этом вопросе подробно в доказательствах теорем 5.6 и 5.7 далее.

3. *Для каждого домохозяйства* $h \in \mathcal{H}$ x^{h*} *максимизирует его полезность:*

$$U^h\left(x^{h*}\right) \geq U^h\left(x^h\right) \text{ для всех } x, \text{ таких, что}$$

$$x^h \in X^h \text{ и } p^* \cdot x^h \leq p^* \cdot \left(\omega^h + \sum_{f \in \mathcal{F}} \theta_f^h y^f\right).$$

Основной задачей теории общего равновесия является доказательство существования конкурентного равновесия при разумных предположениях о структуре экономики. Это достаточно просто сделать в случае конечного числа товаров и стандартных предположений о выпуклости предпочтений и множеств производственных возможностей (точнее, доказательство существования конкурентного равновесия базируется на простых следствиях из теорем A.16, A.17 и A.18 из приложения A). В случае бесконечного числа товаров, как в случае моделей экономического роста с бесконечным горизонтом планирования, доказательство существования конкурентного равновесия является более трудной задачей и требует использования более сложных результатов. Далее мы приведем первую и вторую теоремы экономики благосостояния, которые утверждают оптимальность по Парето конкурентного равновесия, когда оно существует, и возможность децентрализации эффективного (оптимального по Парето) распределения ресурсов как конкурентного равновесия. Для целей данной книги эти результаты более важны, чем теоремы о существовании, во-первых, потому что в большинстве моделей экономического роста мы можем описать конкурентное равновесие явным образом, и, во-вторых, потому что вторая теорема экономики благосостояния неявно утверждает существование конкурентного равновесия. Следующее определение является стандартным определением оптимальности по Парето.

Определение 5.2. *Доступное распределение ресурсов* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *в экономике* $\mathcal{E} \equiv \{\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}\}$ *называется оптимальным по Парето, если не существует другого доступного распределения ресурсов* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$, *такого, что* $\hat{x}^h \in X^h$ *для всех домохозяйств* $h \in \mathcal{H}$, $\hat{y}^f \in Y^f$ *для всех фирм* $f \in \mathcal{F}$,

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} \hat{x}_j^h \leq \sum_{h \in \mathcal{H}} \omega_j^h + \sum_{f \in \mathcal{F}} \hat{y}_j^f \text{ для всех } j \in \mathbb{N},$$

и

$$U^h\left(\hat{x}^h\right) \geq U^h\left(x^h\right) \text{ для всех домохозяйств } h \in \mathcal{H},$$

и хотя бы одно из неравенств выполняется в строгой форме.

В следующем утверждении приведена знаменитая первая теорема экономики благосостояния для экономики с совершенной конкуренцией.

Прежде чем перейти к ее доказательству, нам необходимо ввести следующее определение.

Определение 5.3. *Назовем предпочтения домохозяйства* $h \in \mathcal{H}$ *локально ненасыщаемыми, если для каждого набора потребления* $x^h \in X^h$ *функция* $U^h(x^h)$ *является локально строго возрастающей хотя бы по одному аргументу в окрестности точки* x^h *и выполняется неравенство* $U^h(x^h) < \infty$.

Последнее требование определения выполняется из условия на множество значений функции полезности $U^h: X^h \to \mathbb{R}$, но мы включили его еще раз, потому что оно будет задействовано при доказательстве теоремы. Более того, в случае, когда $U^h(x^h) = \infty$ невозможно строго определить понятие монотонности функции. Заметим также, что из локальной ненасыщаемости предпочтений следует, что при любом векторе цен p выполняется неравенство $p \cdot x^h < \infty$ (см. упражнение 5.5).

Теорема 5.5. Первая теорема экономики благосостояния I. *Предположим, что набор* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, p^*)$ *является конкурентным равновесием в экономике* $\mathcal{E} \equiv \{\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}\}$, *а множество* $\mathcal{H}$ *конечно. Также предположим, что предпочтения всех домохозяйств локально ненасыщаемы. Тогда распределение ресурсов* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ *является оптимальным по Парето.*

Доказательство. Предположим, что конкурентное равновесие задано как набор $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, p^*)$. Проведем доказательство методом от противного. Чтобы получить противоречие, предположим, что существует доступное распределение ресурсов $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$, такое, что $U^h\left(\hat{x}^h\right) \ge U^h\left(x^{h*}\right)$ для всех домохозяйств $h \in \mathcal{H}$ и $U^h\left(\hat{x}^h\right) > U^h\left(x^{h*}\right)$ для всех домохозяйств $h \in \mathcal{H}'$, где множество $\mathcal{H}'$ является непустым подмножеством множества $\mathcal{H}$.

Так как $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, p^*)$ является конкурентным равновесием, для всех домохозяйств $h \in \mathcal{H}$ выполняется следующее неравенство:

$$p^* \cdot \hat{x}^h \ge p^* \cdot x^{h*} = p^* \cdot \left(\omega^h + \sum_{f \in \mathcal{F}} \theta_f^h y^{f*}\right), \tag{5.17}$$

и для всех домохозяйств $h \in \mathcal{H}'$ выполняется следующее неравенство:

$$p^* \cdot \hat{x}^h > p^* \cdot \left(\omega^h + \sum_{f \in \mathcal{F}} \theta_f^h y^{f*}\right). \tag{5.18}$$

Неравенство (5.18) вытекает из того, что набор x^{h*} является выбором, максимизирующим полезность домохозяйства h, поэтому если выбор $\hat{x}^h$ является строго более предпочтительным, он не может удовлетворять бюджетному ограничению. Аналогичные рассуждения применимы и для доказательства неравенства (5.17). Предположим, что оно не выполняется. Тогда из предположения о локальной ненасыщаемости следует, что функция U^h является строго возрастающей хотя бы по одному аргументу. Предположим, что это j-й компонент вектора x. Построим вектор $\hat{x}^h(\varepsilon)$, такой, что $\hat{x}_j^h(\varepsilon) = \hat{x}_j^h$ и $\hat{x}_{j'}^h(\varepsilon) = \hat{x}_{j'}^h + \varepsilon$ для некоторого значения $\varepsilon > 0$. Если оно достаточно мало, то выбор $\hat{x}^h(\varepsilon)$ удовлетворяет бюджетному ограничению домохозяйства h и приносит строго большую полезность, чем исходный потребительский выбор $\hat{x}^h$, что противоречит предположению о том, что домохозяйство h максимизирует свою полезность. Также заметим, что из предположения о локальной ненасыщаемости предпочтений следует, что $U^h(x^h) < \infty$, и поэтому значения выражений в правой части неравенств (5.17) и (5.18) конечны (и, в частности, для всех домохозяйств $h \in \mathcal{H}$ выполняется неравенство $p^* \cdot x^{h*} < \infty$).

Далее, суммируя неравенства (5.17) по множеству всех домохозяйств $\mathcal{H} \backslash \mathcal{H}'$, неравенства (5.18) по множеству всех домохозяйств $\mathcal{H}'$ и объединяя две суммы, получаем следующее неравенство:

$$p^* \cdot \sum_{h \in \mathcal{H}} \hat{x}^h > p^* \cdot \sum_{h \in \mathcal{H}} \left(\omega^h + \sum_{f \in \mathcal{F}} \theta_f^h y^{f*}\right) =$$

$$= p^* \cdot \left(\sum_{h \in \mathcal{H}} \omega^h + \sum_{f \in \mathcal{F}} y^{f*}\right), \tag{5.19}$$

где последнее равенство следует из возможности изменения порядка суммирования в силу того, что все суммы в неравенстве (5.19) конечны, и из определения акций фирм, требующего, что $\sum_{h \in \mathcal{H}} \theta_f^h = 1$ для всех фирм $f \in \mathcal{F}$. Наконец, из того, что значение $\mathbf{y}^*$ максимизирует прибыль фирм при ценах p^* следует, что

$$p^* \cdot \sum_{f \in \mathcal{F}} y^{f*} \ge p^* \cdot \sum_{f \in \mathcal{F}} y^f \tag{5.20}$$

для любого набора $\left\{y^f\right\}_{f \in \mathcal{F}}$, где $y^f \in Y^f$ для всех фирм $f \in \mathcal{F}$.

Однако из предположения о доступности выбора $\hat{x}^h$ следует, что (условие 1 определения 5.1)

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} \hat{x}_j^h \le \sum_{h \in \mathcal{H}} \omega_j^h + \sum_{f \in \mathcal{F}} \hat{y}_j^f \text{ для всех } j,$$

и, следовательно, переходя к скалярному произведению с вектором p^* в обеих частях неравенства и используя неравенства (5.20) и $p^* \ge \underline{0}$, получаем следующее неравенство:

$$p^* \cdot \sum_{h\in\mathcal{H}} \hat{x}_j^h \le p^* \cdot \left(\sum_{h\in\mathcal{H}} \omega_j^h + \sum_{f\in\mathcal{F}} \hat{y}_j^f\right) \le p^* \cdot \left(\sum_{h\in\mathcal{H}} \omega_j^h + \sum_{f\in\mathcal{F}} y_j^{f^*}\right),$$

которое противоречит неравенству (5.19), доказывая тем самым, что всякое распределение ресурсов в конкурентном равновесии $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ является оптимальным по Парето. ■

Доказательство первой теоремы экономики благосостояния является простым и интуитивно понятным. Оно основано на двух простых идеях. Во-первых, если другое распределение ресурсов доминирует по Парето распределение ресурсов в конкурентном равновесии, то оно должно быть не доступно хотя бы одному домохозяйству в ценах конкурентного равновесия. Во-вторых, из условия максимизации прибыли следует, что в любом конкурентном равновесии максимизируется размер множества доступных распределений ресурсов. Доказательство также является простым, так как в нем используется лишь прием суммирования количества товаров при заданном векторе цен. В нем не используется предположение о выпуклости. При этом важной частью доказательства является предположение о существовании и конечности используемых сумм. В противном случае последний шаг доказательства привел бы к неравенству $\infty < \infty$, которое не всегда ведет к противоречию. Существование сумм, в свою очередь, следует из двух предположений: конечности множества индивидов и локальной ненасыщаемости предпочтений. Однако, как мы уже заметили выше, анализ экономик с конечным множеством домохозяйств (даже в случае бесконечного числа товаров) не всегда достаточен для наших целей. Поэтому в следующей теореме приведена версия первой теоремы экономики благосостояния для экономик с бесконечным числом домохозяйств. Для упрощения доказательства мы предположим, что множество домохозяйств $\mathcal{H}$ является счетным (например $\mathcal{H} = \mathbb{N}$). Следующая теорема является обобщением первой теоремы экономики благосостояния для этого случая. Для работы с бесконечными суммами в ней делается еще одно дополнительное предположение.

Теорема 5.6. Первая теорема экономики благосостояния II. *Предположим, что набор $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, p^*)$ является конкурентным равновесием в экономике $\mathcal{E} \equiv \{\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}\}$, а множество $\mathcal{H}$ является счетным множеством. Предположим, что предпочтения домохозяйств являются локально ненасыщаемыми и что*

$$p^* \cdot \omega^* \equiv \sum_{h\in\mathcal{H}} \sum_{j=0}^{\infty} p_j^* \omega_j^h < \infty.$$

Тогда распределение ресурсов $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, p^*)$ является оптимальным по Парето.

Доказательство. Доказательство во многом повторяет доказательство теоремы 5.5, но с одним важным отличием. Локальная ненасыщаемость предпочтений не гарантирует конечность сумм в неравенстве (5.19) так как в этом случае суммирование ведется по бесконечному множеству домохозяйств. Однако неравенства (5.17) и (5.18) продолжают выполняться и для каждого домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ справедливо $p^* \cdot x^{h^*} < \infty$. Более того, из условия максимизации прибыли фирмами следует, что $p^* \cdot \sum_{f\in\mathcal{F}} y^{f^*} < \infty$. Тогда при условии, что

$$p^* \cdot \omega^* \equiv \sum_{h\in\mathcal{H}} \sum_{j=0}^{\infty} p_j^* \omega_j^h < \infty$$

суммирование неравенств (5.17) по множеству всех домохозяйств $\mathcal{H}\backslash\mathcal{H}'$ и неравенств (5.18) по множеству всех домохозяйств $\mathcal{H}'$ приводит к неравенству (5.19). Далее шаги, аналогичные используемым при доказательстве теоремы 5.5, приводят к противоречию, что завершает доказательство теоремы. ■

Терема 5.6 становится особенно полезной при анализе моделей с перекрывающимися поколениями, рассмотренными в главе 9. Предположение о выполнении неравенства $\sum_{h\in\mathcal{H}} \sum_{j=0}^{\infty} p_j^* \omega_j^h < \infty$ не является значительным ограничением, например в динамических моделях оно в общем случае следует из предположения о дисконтировании будущей полезности. Читатель также может заметить, что это предположение автоматически выполняется при применении теоремы в случае экономики с бесконечным горизонтом планирования и бесконечно живущими агентами (в противном случае свойство локальной ненасыщаемости предпочтений не будет выполняться). Однако при этом существуют разумные и важные экономические модели, например модели с перекрывающимися поколениями, в которых в равновесии выполняется условие $\sum_{h\in\mathcal{H}} \sum_{j=0}^{\infty} p_j^* \omega_j^h = \infty$.

Далее перейдем ко второй теореме экономики благосостояния, которая является утверждением, обратным первой теореме экономики благосостояния. Она отвечает на вопрос о возможности децентрализации оптимального по Парето распределения ресурсов как конкурентного равновесия. Вторая теорема экономики благосостояния требует ряд дополнительных ограничений на предпочтения и производственную структуру экономики, таких как выпуклость предпочтений и множеств потребления и производственных возможностей. В случае бесконечного множества товаров теорема также требует выполнения некоторых технических ограничений (аналог которых тривиальным образом выполняется в случае конечного множества товаров). Предположения о выпуклости оказываются необходимыми, так как во второй теореме экономики благосостояния неявно доказывается существование равновесия, что не всегда возможно при несоблюдении этого предположения. Прежде чем перейти к доказательству теоремы, напомним, что мы обозначаем множество потребления домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ как $X^h \subset \mathbb{R}^{\infty}_{+}$. Типичным элементом множества X^h является последовательность $x^h = \left(x_0^h, x_1^h, x_2^h, \ldots\right)$, где x_t^h может быть проинтерпретирован как вектор (конечной размерности) потребления домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ в момент времени t, то есть $x_t^h = \left(x_{1,t}^h, x_{2,t}^h, \ldots, x_{N,t}^h\right)$. Аналогично, типичный элемент производственного множества Y^f фирмы $f \in \mathcal{F}$ имеет вид: $y^f = \left(y_0^f, y_1^f, y_2^f, \ldots\right)$.

Также определим векторы $x^h[T] = \left(x_0^h, x_1^h, x_2^h, \ldots, x_T^h, 0, 0, \ldots\right)$ и $y^f[T] = \left(y_0^f, y_1^f, y_2^f, \ldots, y_T^f, 0, 0, \ldots\right)$. Другими словами, они являются обрезанными последовательностями и описывают ситуацию нулевого потребления и нулевого производства после наступления некоторого момента времени T. Нетрудно показать, что в топологии прямого произведения (см. параграф А.4 приложения А) $\lim_{t\to\infty} x^h[T] = x^h$ и $\lim_{t\to\infty} y^f[T] = y^f$. Наконец, так как в данном случае x^h (или y^f) являются N-мерными векторами, мы, немного злоупотребляя обозначениями, будем использовать обозначение $p \cdot x^h$ для надлежащим образом определенного скалярного произведения, например:

$$p \cdot x^h = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} p_{j,t} x_{j,t}^h.$$

Теорема 5.7. Вторая теорема экономики благосостояния. *Рассмотрим оптимальное по Парето распределение ресурсов* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ *в экономике с множеством первоначальных запасов* ω, *множествами производственных возможностей* $\left\{Y^f\right\}_{f\in\mathcal{F}}$, *множествами потребления* $\left\{X^h\right\}_{h\in\mathcal{H}}$ *и функциями полезности* $\left\{U^h(\cdot)\right\}_{h\in\mathcal{H}}$. *Предположим, что все множества производственных возможностей и потребления выпуклы, все множества производственных возможностей являются конусами и все функции полезности непрерывны, квазивогнуты и обладают свойством локальной ненасыщаемости предпочтений. Более того, также предположим, что (i) существует константа* $\chi < \infty$, *такая, что* $\sum_{h\in\mathcal{H}} x_{j,t}^h < \chi$ *для всех*

j и t; (ii) $\underline{0} \in X^h$ *для всех домохозяйств h, (iii) для всех h и* $x^h \in X^h$, $\bar{x}^h \in X^h$, *таких, что* $U^h(x^h) > U^h(\bar{x}^h)$ *существует* $\bar{T}$ *(возможно, функция от h,* x^h *и* $\bar{x}^h$*), такая, что* $U^h(x^h[T]) > U^h(\bar{x}^h)$ *для всех* $T \geq \bar{T}$; *и (iv) для любой фирмы* $f \in \mathcal{F}$ *и для любого* $y^f \in Y^f$ *существует* $\tilde{T}$, *такая, что* $y^f[T] \in Y^f$ *для всех* $T \geq \tilde{T}$. *Тогда существует вектор цен* p^* *и наборы запасов и распределения акций всех* $(\boldsymbol{\omega}^*, \boldsymbol{\theta}^*)$, *такие, что в экономике* $\mathcal{E} \equiv \{\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}^*, \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*\}$:

1) *распределение запасов* $\boldsymbol{\omega}^*$ *удовлетворяет условию* $\omega = \sum_{h\in\mathcal{H}} \omega^{h*}$;

2) *для всех фирм* $f \in \mathcal{F}$ *выполняется условие:*

$$p^* \cdot y^{f*} \geq p^* \cdot y^f \text{ для любых } y^f \in Y^f; \text{ и}$$

3) *для всех домохозяйств* $h \in \mathcal{H}$ *выполняется условие:*

если $U^h(x^h) > U^h(x^{h*})$ для некоторого $x^h \in X^h$, то $p^* \cdot x^h \geq p^* \cdot w^{h*}$,

где

$$w^{h*} \equiv \omega^{h*} + \sum_{f\in\mathcal{F}} \theta_f^{h*} y^{f*}.$$

Более того, если выполняется условие $p^* \cdot w^{h*} > 0$ *для всех* $h \in \mathcal{H}$, *то набор* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, p^*)$ *является конкурентным равновесием в экономике* $\mathcal{E}$. ■

Доказательство этой теоремы опирается на приложение геометрической теоремы Хана—Банаха (теорема А.27). Оно достаточно объемно и сложно. По этой причине мы приводим его в следующем (отмеченным символом *) параграфе. Здесь заметим лишь то, что если бы мы ограничили внимание на случае конечного, скажем N, числа товаров, то предположения ii–iv из условия теоремы выполнялись бы автоматически при $\bar{T} = \tilde{T} = N$. Действительно, эти условия опускаются в формулировке второй теоремы экономики благосостояния для экономики с конечным числом товаров. Роль этих условий в динамике экономики заключается в том, чтобы гарантировать, что изменения в распределении ресурсов в далеком будущем не оказывают большого влияния на полезность сегодня. Это условие естественным образом выполняется в экономиках с бесконечным горизонтом планирования, дисконтированием полезности и сепарабельной производственной структурой. Интуитивно, если последовательность значений потребления x^h строго предпочтительнее последовательности $\bar{x}^h$, то предположение о том, что элементы x^h и $\bar{x}^h$ равны нулю в далеком (и поэтому сильно дисконтируемом) будущем, не изменит порядка предпочтения (так как из дисконтирования следует, что набор x^h не может оказаться строго предпочтительнее набора $\bar{x}^h$ из-за более высокого уровня потребления при выборе x^h в произвольно далеком будущем). Аналогичным образом, если некоторый производственный вектор y^f доступен, из сепарабельности производственной структуры следует, что вектор $y^f[T]$, при котором производство равно нулю после некоторого момента времени T, также должен быть доступен. Более формально эти утверждения демонстрируются в упражнении 5.13. Одной из трудностей применения этой теоремы является то, что функция полезности U^h может оказаться не определена в случае, когда некоторые элементы вектора x^h равны нулю (например, когда моментальная функция полезности от потребления является логарифмической $u = \log c$). В упражнении 5.14 показано, что теорема может быть обобщена на случай, когда существует достаточно малая положительная константа $\varepsilon > 0$ и последовательность $\underline{\varepsilon}$, каждый элемент которой равен ε, такие, что для каждого домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ множества потребления X^h ограничены условием $x^h \geq \underline{\varepsilon}$ для всех $x^h \in X^h$.

Условия второй теоремы экономики благосостояния накладывают больше ограничений на экономику, чем условия первой теоремы экономики благосостояния, ввиду наличия среди них требований выпуклости. Во многих смыслах она также является более важной из двух теорем. В то время как первая теорема экономики благосостояния может быть проинтерпретирована как формализация невидимой руки рынка Адама Смита, вторая теорема экономики благосостояния является более сильным результатом. Она утверждает, что любое оптимальное по Парето распределение ресурсов может быть децентрализовано как конкурентное равновесие. Непосредственным следствием из этого является теорема о существовании. Так как оптимальное по Парето равновесие может быть децентрализовано как конкурентное равновесие, конкурентное равновесие должно существовать (по крайней мере при наборе запасов, ведущих к оптимальным по Парето распределениям ресурсов).

Вторая теорема экономики благосостояния позволяет нам вместо явного описания конкурентных равновесий сосредоточить внимание на множестве всех оптимальных по Парето распределений ресурсов. Такой подход наиболее плодотворен в динамических моделях, где описание, а в некоторых случаях и поиск, конкурентных равновесий иногда сопряжено с трудностями, в то время как описание оптимальных по Парето распределений ресурсов обычно является более простой задачей.

Объединение второй теоремы экономики благосостояния с гипотезой о существовании нормативного репрезентативного домохозяйства предоставляет макроэкономистам мощный инструмент для анализа моделей. Напомним, что из теоремы 5.3 следует эквивалентность между оптимальными по Парето распределениями ресурсов и распределениями ресурсов, оптимальными с точки зрения репрезентативного домохозяйства. В некоторых моделях, включая многие, но не все, модели экономического роста, представленные в этой книге, использование второй теоремы экономики благосостояния вместе с гипотезой о существовании нормативного репрезентативного домохозяйства позволяет нам охарактеризовать *оптимальную траекторию экономического роста*, максимизирующую полезность репрезентативного домохозяйства, и убедиться в том, что эта траектория соответствует конкурентному равновесию в экономике.

5.7. Доказательство второй теоремы экономики благосостояния (теоремы 5.7)*

В этом параграфе будет приведено доказательство второй теоремы экономики благосостояния. Для доказательства наиболее важной ее части мы будем использовать геометрическую теорему Хана—Банаха (теорему А.27).

Доказательство теоремы 5.7. Во-первых, докажем существование вектора цен p^* и набора запасов и распределения акций (ω^*, θ^*), таких, что выполняются условия 1–3 теоремы 5.7. Это доказательство состоит их двух частей.

(Часть 1). Эта часть следует из геометрической теоремы Хана—Банаха (теоремы А.27). Определим «наиболее предпочтительные» множества для каждого домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ следующим образом:

$$P^h = \left\{x^h \in X^h \colon U^h\left(x^h\right) > U^h\left(x^{h*}\right)\right\}.$$

Очевидно, что все множества P^h являются выпуклыми множествами. Положим $P = \sum_{h \in \mathcal{H}} P^h$ и $Y' = \sum_{f \in \mathcal{F}} Y^f + \{\omega\}$, где напомним, что $\omega = \sum_{h \in \mathcal{H}} \omega^{h*}$. Таким образом, Y' есть сумма множеств производственных возможностей, сдвинутая на вектор запасов. Множества P и Y' являются выпуклыми множествами (так как все множества P^h и Y^f являются выпуклыми множествами). Положим, что последовательность планов выпуска для каждой фирмы $f \in \mathcal{F}$ является элементом векторного пространства ℓ_∞^N, которое состоит из бесконечных последовательностей векторов вида $y^f = \left(y_0^f, y_1^f, \ldots\right)$, где каждый вектор $y_i^f \in \mathbb{R}_+^N$. Так как каждое множество производственных возможностей является конусом, множество $Y' = \sum_{f \in \mathcal{F}} Y^f + \{\omega\}$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку (доказательство идентично доказательству упражнения А.31 из приложения А). Более того, положим $x^* = \sum_{h \in \mathcal{H}} x^{h*}$ (и аналогично $x = \sum_{h \in \mathcal{H}} x^h$). Из доступности и локальной ненасыщаемости предпочтений следует, что $x^* = \sum_{f\in\mathcal{F}} y^{f*} + \omega$. Тогда справедливо включение $x^* \in Y'$, а также $x^* \in \bar{P}$ (где, напомним, множество $\bar{P}$ является замыканием множества P).

Далее отметим, что $P \cap Y' = \varnothing$. В противном случае нашелся бы элемент $\tilde{y} \in Y'$, также лежащий в множестве P. Из существования такого элемента следовало бы, что при подходящем распределении между домохозяйствами полезность ни одного из домохозяйств не уменьшилась бы и по меньшей мере полезность одного из них увеличилась бы (то есть, по определению множества P, нашелся бы набор $\left\{\tilde{x}^h\right\}_{h\in\mathcal{H}}$, такой, что $\sum_{h\in\mathcal{H}} \tilde{x}^h = \tilde{y}$, $\tilde{x}^h \in X^h$ и $U^h(\tilde{x}^h) \geq U^h(x^{h*})$ и хотя бы для одного из домохозяйств $h \in \mathcal{H}$ последнее неравенство выполняется строго). Это бы противоречило предположению о том, что набор $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ является оптимальным по Парето распределением ресурсов.

Так как множество Y' обладает внутренней точкой, множества P и Y' являются выпуклыми множествами и $P \cap Y' = \varnothing$ из теоремы A.27 следует существование ненулевого непрерывного линейного функционала ϕ, такого, что для всех $y \in Y'$ и для всех $x \in P$ выполняются следующие неравенства:

$$\phi(y) \leq \phi(x^*) \leq \phi(x). \tag{5.21}$$

(Часть 2). Далее покажем, что этот линейный функционал ϕ можно рассматривать как вектор цен, а именно что он имеет представление в форме скалярного произведения. Рассмотрим функционал

$$\bar{\phi}(x) = \lim_{T\to\infty} \phi(x[T]), \tag{5.22}$$

где, напомним, $x^h = \left(x_0^h, x_1^h, x_2^h, \ldots\right)$, $x^h[T] = \left(x_0^h, x_1^h, x_2^h, \ldots, x_T^h, 0, 0, \ldots\right)$. Основная цель этой части доказательства — показать, что функционал $\bar{\phi}$ определен и является непрерывным линейным функционалом, разделяющим множества Y' и P, как в неравенстве (5.21). В дальнейшем в качестве нормы $\|x\|$ будем рассматривать норму $\|\cdot\|_\infty$, а символом $\|\phi\|$ обозначим норму линейного оператора ϕ (см. приложение A).

Во-первых, определим $\underline{x}_t^h \equiv (0, 0, \ldots, x_t^h, 0, \ldots)$. Другими словами, $\underline{x}_t^h$ содержит нули везде, кроме t-ого элемента, равного x_t^h. Далее заметим, что из линейности функционала ϕ следует, что

$$\phi(x[T]) = \sum_{t=0}^{T} \phi(\underline{x}_t).$$

Очевидно, что если предел $\lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} |\phi(\underline{x}_t)|$ существует и конечен, то ряд $\sum_{t=0}^{T} \phi(\underline{x}_t)$ сходится абсолютно и поэтому $\lim_{T\to\infty} \phi(x[T])$ существует (см. факт A.7 (часть IX, приложение A)). Чтобы убедиться в этом, определим $\underline{z}^\phi = \left(\underline{z}_0^\phi, \underline{z}_1^\phi, \ldots\right)$ так, что

$$\underline{z}_t^\phi \equiv \begin{cases} \underline{x}_t, & \text{если} \quad \phi(\underline{x}_t) \geq 0, \\ -\underline{x}_t, & \text{если} \quad \phi(\underline{x}_t) < 0. \end{cases}$$

Тогда, по определению,

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{T} |\phi(\underline{x}_t)| &= \phi\left(\underline{z}^\phi[T]\right) \leq \\ &\leq \|\phi\| \cdot \left\|\underline{z}^\phi[T]\right\| = \\ &= \|\phi\| \cdot \|x[T]\| \leq \\ &\leq \|\phi\| \cdot \|x\|, \end{aligned}$$

где первое равенство использует определение вектора $\underline{z}^\phi$, второе неравенство следует из непрерывности линейного функционала ϕ, третье равенство использует свойство $\|x\| = \|-x\|$, а последнее неравенство следует из свойства $\|x\| \geq \|x[T]\|$. Из этих неравенств следует, что последовательность частичных сумм ряда $\left\{\sum_{t=0}^{T} |\phi(\underline{x}_t)|\right\}_{T=1}^{\infty}$, которая естественным образом доминирует над последовательностью $\left\{\phi(x[T])\right\}_{T=1}^{\infty}$, ограничена сверху (числом $\|\phi\| \cdot \|x\| < \|\phi\|\chi < \infty$, так как по предположению $\|x\| < \chi$). Отсюда следует, что последовательность $\left\{\phi(x[T])\right\}_{T=1}^{\infty}$ сходится и поэтому функционал $\bar{\phi}(x)$ в равенстве 5.22 определен. Из последнего неравенства выше также следует, что $\bar{\phi}(x) \leq \|\phi\| \cdot \|x\|$, то есть функционал $\bar{\phi}$ ограничен, а следовательно, является непрерывным линейным функционалом (см. теорему A.26).

Далее, для любого $t \in \mathbb{N}$ определим $\bar{\phi}_t : X_t \to \mathbb{R}$ как $\bar{\phi}_t : x_t \mapsto \phi(\underline{x}_t)$ (где, напомним, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_t, \ldots)$, $\underline{x} = (0, 0, \ldots, x_t, 0, \ldots)$, $x_t \in X_t$ и $X_t \subset \mathbb{R}_+^N$. Очевидно, что $\bar{\phi}_t$ является линейным функционалом (так как функционал ϕ линеен), и, более того, так как область определения $\bar{\phi}_t$ является подмножеством евклидова пространства, он имеет представление в виде скалярного произведения, в частности существует вектор $p_t^* \in \mathbb{R}^N$, такой, что

$$\bar{\phi}_t(x_t) = p_t^* \cdot x_t \text{ для всех } x_t \in \mathbb{R}^N.$$

Из этого представления также следует, что

$$\bar{\phi}(x) = \lim_{T\to\infty} \phi(x[T]) = \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \bar{\phi}_t(x_t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} p_t^* \cdot x_t,$$

поэтому функционал $\bar{\phi}$ является непрерывным линейным функционалом, допускающим представление в виде скалярного произведения.

Для завершения этой части доказательства нам необходимо показать, что функционал $\bar{\phi}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\phi}(x_j)$ может быть использован вместо функционала ϕ в неравенствах (5.21). Вначале докажем следующие четыре неравенства:

(a) $\phi(x^*) \le \bar{\phi}(x)$ для всех $x \in P$,
(b) $\phi(x^*) \ge \bar{\phi}(y')$ для всех $y' \in Y'$,
(c) $\bar{\phi}(x^*) \le \phi(x^*)$,
(d) $\phi(x^*) \le \bar{\phi}(x^*)$.

Требуемый результат будет следовать из этих четырех неравенств. Для доказательства каждого из них мы будем использовать предположение о том, что $\underline{0} \in X^h$ для каждого домохозяйства $h \in \mathcal{H}$, а также что (i) для каждого домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ и наборов потребления $x^h \in X^h$, $\bar{x}^h \in X^h$, таких, что $U^h(x^h) > U^h(\bar{x}^h)$ существует константа $\tilde{T}^h$, такая, что $U^h(x^h[T]) > U^h(\bar{x}^h)$ для всех $T \ge \tilde{T}^h$, и (ii) для любой фирмы $f \in \mathcal{F}$ и $y^f \in Y^f$ существует константа $\tilde{T}$, такая, что $y^f[T] \in Y^f$ для всех $T \ge \tilde{T}$.

В частности, рассмотрим $x \in P$ и вспомним, что $x = \sum_{h\in\mathcal{H}} x^h$, где $x^h \in P^h$. Положим $T^h(T) \equiv \max\{\bar{T}^h, \tilde{T}, T\}$, и в дальнейшем для упрощения обозначения отбросим зависимость от T. Так как для каждого значения x^h для любого домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ выполняется неравенство $U^h(x^h) > U^h(x^{h*})$, для каждого домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ также выполняется неравенство $U^h(x^h[T^h]) > U^h(x^{h*})$. Более того, так как $\sum_{h\in\mathcal{H}} x^h[T^h]$ лежит в множестве P, также справедливо неравенство:

$$\phi(x^*) \le \phi\left(\sum_{h\in\mathcal{H}} x^h[T^h]\right)$$

(где, как и ранее, $x^* = \sum_{h\in\mathcal{H}} x^{h*}$). Так как функционал ϕ линеен, мы также имеем:

$$\phi\left(\sum_{h\in\mathcal{H}} x^h[T^h]\right) = \sum_{h\in\mathcal{H}} \phi(x^h[T^h]).$$

По определению $\lim_{T\to\infty} \phi(x^h[T^h] = \bar{\phi}(x^h)$ (где, напомним, $T^h = T^h(T)$). Так как каждый функционал $\bar{\phi}(x^h)$ определен, а функционал ϕ линеен, из этого следует, что при $T \to \infty$ $\phi\left(\sum_{h\in\mathcal{H}} x^h[T^h]\right) \to \bar{\phi}(x)$, из чего вытекает неравенство (a).

Далее рассмотрим $y' \in Y'$. По предположению $y'[T] \in Y'$ при достаточно больших T. Тогда

$$\phi(x^*) \ge \phi(y'[T]) = \bar{\phi}(y'[T]) \text{ при достаточно больших } T.$$

Переходя к пределу при $T \to \infty$, получаем неравенство (b).

Далее рассмотрим $y' \in Y'$ и построим последовательность $\{y_n'\}$, положив $y_n' = (1-1/n)x^* + y'/n$. Очевидно, что для любого n $y_n' \in Y'$, и снова, по предположению, $y_n'[T] \in Y'$ при достаточно больших T. Поэтому, пользуясь той же логикой, что и в предыдущем абзаце, для любого n (при достаточно больших T) получаем $\phi(x^*) \ge \phi(y_n'[T])$. Переходя к пределу при $T \to \infty$, а затем при $n \to \infty$ получаем неравенство (c).

Наконец, положим $x_n^* = (1+1/n)x^*$. Из локальной ненасыщаемости предпочтений следует, что $x_n^* \in P$ для любого n. Отсюда следует, что $x_n^*[T] \in P$ при достаточно больших T, и, следовательно,

$$\phi(x_n^*[T]) = \bar{\phi}(x_n^*[T]) \ge \phi(x^*)$$

для всех n при достаточно больших T. Переходим к пределу при $T \to \infty$, а затем при $n \to \infty$ получаем неравенство (d).

Объединяя неравенства (a)–(d), получаем, что функционал $\bar{\phi}(x)$ может быть использован в качестве непрерывного линейного функционала, разделяющего множества P и Y'. Как показано выше, функционал $\bar{\phi}(x)$ допускает представление в виде скалярного произведения в виде $\bar{\phi}(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{\phi}_t(x_t) = p^* \cdot x$. Более того, из утверждения, что все функции полезности U^h являются неубывающими по всем из своих аргументов, следует неравенство $p^* \ge \underline{0}$, и поэтому вектор p^* может быть проинтерпретирован как вектор цен.

Таким образом, в частях 1 и 2 мы доказали существование вектора цен p^*, удовлетворяющего условиям 1–3 теоремы. Далее, условие 1 из определения 5.1 выполнено по предположению о доступности. Условие 2 теоремы является достаточным для того, чтобы показать, что все фирмы максимизируют прибыль при векторе цен p^*

(условие 2 из определения 5.1). Для того чтобы показать, что все домохозяйства максимизируют полезность при векторе цен p^* (условие 3 из определения 5.1), будем использовать предположение о том, что $p^* \cdot w^{h*} > 0$ для каждого домохозяйства $h \in \mathcal{H}$. Из условия 3 теоремы нам известно, что если для $x^h \in X^h$ выполняется неравенство $U^h\left(x^h\right) > U^h\left(x^{h*}\right)$, то $p^* \cdot x^h \geq p^* \cdot w^{h*}$. Из этого нетрудно показать, что не существует набора потребления x^h, строго предпочитаемого набору x^{h*} и удовлетворяющего неравенству $p^* \cdot x^h \leq p^* \cdot w^{h*}$. В частности, положим $\underline{\varepsilon} = (0, 0, \ldots, \varepsilon, 0, \ldots)$, где ε соответствует некоторому $x^h_{j,t} > 0$ (такое строго положительное значение $x^h_{j,t}$ существует так как $p^* \cdot x^h \geq p^* \cdot w^{h*} > 0$). Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ $x^h - \underline{\varepsilon} \in X^h$ и выполняются следующие неравенства:

$$U^h\left(x^h - \underline{\varepsilon}\right) > U^h\left(x^{h*}\right) \text{ и } p^* \cdot \left(x^h - \underline{\varepsilon}\right) < p^* \cdot w^{h*},$$

что нарушает условие 3 теоремы. Отсюда следует, что для всех $x^h \in X^h$, удовлетворяющих условию $p^* \cdot x^h \leq p^* \cdot w^{h*}$ выполняется неравенство $U^h\left(x^h\right) \leq U^h\left(x^{h*}\right)$, и поэтому условие 3 определения 5.1 выполняется и все домохозяйства максимизируют полезность при векторе цен p^*. Следовательно, набор $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, p^*)$ является конкурентным равновесием. ■

5.8. Последовательная торговля

Еще одной темой, заслуживающей обсуждения на данном этапе, является *последовательная торговля*. В стандартных моделях теории общего равновесия, основанных на понятии *равновесия Эрроу—Дебре*, предполагается, что торговля всеми товарами происходит в заданный момент времени, раз и навсегда. В контексте динамических моделей, где часть из различных товаров соответствует одному и тому же товару в разные моменты времени, это означает, что вся торговля происходит в начальный момент времени, а в будущем сделки между агентами не заключаются. Как мы уже убедились в случае модели экономического роста Солоу в главе 2, это предположение не является хорошей аппроксимацией реальности. Обычно в моделях экономического роста предполагается, что фирмы принимают решения о найме труда и капитала в каждый момент времени t. Аналогично, потребители выбирают набор потребления для момента времени t именно в этот момент времени. Изменяются ли характеристики общего равновесия в случае такой последовательной структуры торговли в экономике? В случае если ответ на такой вопрос утвердителен, применимость результатов теории общего равновесия к анализу динамических макроэкономических моделей будет ограниченной. К счастью, в предположении о полноте рынков последовательная структура торговли не изменяет результатов модели общего равновесия Эрроу—Дебре, в которой предполагается торговля в один момент времени.

Более точно, в равновесии Эрроу—Дебре для динамической модели общего равновесия в момент времени $t = 0$ домохозяйства принимают решения обо всех будущих сделках (включая торговлю еще не произведенными товарами). С другой стороны, при последовательной торговле отдельные рынки открываются в каждый момент времени t и домохозяйства торгуют трудом, капиталом и потребительскими товарами на каждом из таких рынков в каждый момент времени. Очевидно, что как для математической простоты, так и для реалистичности модели, макроэкономические модели с последовательной торговлей на отдельных рынках в каждый момент времени являются более предпочтительными.

Основной результат о сравнении моделей с торговлей в единственный момент времени и моделей с последовательной структурой торговли был получен Кеннетом Эрроу в работе [Arrow 1964]. В ней изучается торговля требованиями на поставку товара при условии реализации определенного состояния природы. Однако из полученных им результатов следует эквивалентность экономики с полными рынками и торговлей в единственный момент времени и экономики с полными рынками и последовательной торговлей. Наиболее простым способом убедиться в этом можно рассмотрев требования Эрроу, уже упомянутые в главе 2. Простое требование Эрроу предоставляет возможность переноса ресурсов между различными моментами времени и различными состояниями природы. Поэтому вместо совершения всех сделок в единственный момент времени, допустим в момент времени $t = 0$, домохозяйства могут торговать требованиями Эрроу, а затем использовать эти требования для покупки товаров в различные моменты времени при реализации различных состояний природы. Несмотря на то что требования Эрроу наиболее часто используются при наличии в экономике неопределенности, а не только для анализа ее временной динамики, для наших целей достаточным будет рассмотреть лишь случай переноса ресурсов между различными моментами времени.

Причина, по которой равновесие с последовательной торговлей совпадает с равновесием с торговлей в единственный момент времени, проста. По определению конкурентного равновесия ожидания домохозяйств относительно всех цен в экономике в будущем (и при всех реализациях состояния природы) совпадают с их фактическими значениями, и поэтому они приобретают достаточное количество требований Эрроу для покрытия всех расходов во все будущие периоды при всех реализациях состояния природы. Другими словами, вместо покупки требования $x^h_{j,t'}$ на товар $j = 1, \ldots, N$ в момент времени $t' > 0$ при ценах $(p_{1,t'}, \ldots, p_{N,t'})$ домохозяйству достаточно иметь доход, равный $\sum_{j=1}^{N} p_{j,t'} x^h_{j,t'}$ и быть уверенным в том, что оно сможет приобрести любое желаемое количество товаров по ценам $(p_{1,t}, \ldots, p_{N,t})$.

Этот результат можно сформулировать в немного более строгом виде. Рассмотрим динамическую экономику обмена, существующую в периоды времени $t = 0, 1, \ldots, T$, где, возможно, $T = \infty$ (будем полагать, что в случае $T = \infty$ все рассматриваемые нами ряды сходятся). Предположение о том, что экономика является экономикой обмена, никак не ограничивает общность выводов, мы делаем его лишь потому, что отсутствие производственной структуры значительно упрощает обозначения. Предположим, что в каждый момент времени t в экономике существует N товаров, и обозначим их вектором $(x_{1,t}, \ldots, x_{N,t})$. Потребление товара j домохозяйством h в момент времени t обозначим переменной $x^h_{j,t}$. Предположим, что товар является портящимся и поэтому потребление действительно происходит в момент времени t. Обозначим множество домохозяйств символом $\mathcal{H}$ и предположим, что каждое домохозяйство $h \in \mathcal{H}$ наделено в момент времени t вектором запасов $(\omega^h_{1,t}, \ldots, \omega^h_{N,t})$, а его предпочтения задаются сепарабельной по времени функцией полезности вида:

$$\sum_{t=0}^{T} \left(\beta^h\right)^t u^h\left(x^h_{1,t}, \ldots, x^h_{N,t}\right),$$

при некоторой $\beta^h \in (0, 1)$. Из такого вида функции полезности следует отсутствие экстерналий и согласованность предпочтений во времени.

Рассмотрим равновесие Эрроу—Дебре, заданное как пара $(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$, где $\mathbf{x}^*$ представляет собой полный набор векторов потребления каждого домохозяйства $h \in \mathcal{H}$, то есть

$$\mathbf{x}^* = (x_{1,0}, \ldots, x_{N,0}, \ldots, x_{1,T}, \ldots, x_{N,T}),$$

где $x_{j,t} = \left\{x^h_{j,t}\right\}_{h \in \mathcal{H}}$ для каждого товара j и момента времени t, а $\mathbf{p}^*$ является вектором всех цен в экономике

$$\mathbf{p}^* = \left(p^*_{1,0}, \ldots, p^*_{N,0}, \ldots, p^*_{1,T}, \ldots, p^*_{N,T}\right),$$

где одна цена, допустим, $p^*_{1,0}$ принята единицей измерения, и поэтому $p^*_{1,0} = 1$. В равновесии Эрроу—Дебре каждое домохозяйство $h \in \mathcal{H}$ покупает и продает требования на каждый из товаров только в момент времени $t = 0$ и поэтому выбирает распределение ресурсов, удовлетворяющее бюджетному ограничению:

$$\sum_{t=0}^{T}\sum_{j=1}^{N} p^*_{j,t} x^h_{j,t} \le \sum_{t=0}^{T}\sum_{j=1}^{N} p^*_{j,t} \omega^h_{j,t}.$$

Условие равновесия на рынках описывается следующим неравенством:

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} x^h_{j,t} \le \sum_{h \in \mathcal{H}} \omega^h_{j,t}$$

для каждого товара $j = 1, \ldots, N$ и момента времени $t = 0, 1, \ldots, T$.

В равновесии с последовательной торговлей рынок потребления товара в момент времени t открывается во время t. В нем также имеются T облигаций — требований Эрроу, которыми домохозяйства торгуют между собой в момент времени $t = 0$. Чистое предложение каждого из требований Эрроу равно нулю[8]. Владелец облигации с индексом t имеет право получить единицу одного из товаров, допустим, товара $j = 1$ в момент времени $t = 0$. Обозначим цены этих облигаций в периоде $t = 0$ (в терминах товара $j = 1$ в силу предположения о выборе единицы измерения) как $(q_1, \ldots, q_T)$. В этом случае домохозяйство имеет возможность приобрести одну облигацию t в момент времени 0, заплатив за нее q_t единиц товара 1 (или, наоборот, осуществить короткую продажу одной такой облигации). Обозначим количество облигаций t, приобретенных домохозяйством $h \in \mathcal{H}$, как $b^h_t \in \mathbb{R}$. Так как чистое предложение каждой облигации равно нулю, в рыночном равновесии выполняется следующее условие:

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} b^h_t = 0 \text{ для всех моментов времени } t = 0, 1, \ldots, T.$$

Заметим, что в такой формулировке мы предполагаем, что количество облигаций (требований Эрроу) равно T. В общем случае мы могли ввести дополнительные облигации, например требования на поставку одного товара 1 в момент времени t', торговля которыми происходит в момент времени $t < t'$. Предположение о том, что число облигаций равно T, не ограничивает общности рассуждений (см. упражнение 5.10).

В случае последовательной торговли каждый индивид использует свои запасы и доходы (или выплаты) от соответствующей облигации в каждый момент времени t. Так как в этом случае товарные рынки открываются в каждый момент времени t, более удобным для анализа будет выделить отдельную единицу измерения в каждый момент времени t. Снова предположим, что ею будет товар 1, и поэтому $p^{**}_{1,t} = 1$ для всех t. Следовательно, бюджетное ограничение домохозяйства $h \in \mathcal{H}$ в момент времени t при равновесном векторе цен на товары и облигации $(\mathbf{p}^{**}, \mathbf{q}^{**})$ имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{N} p^{**}_{j,t} x^h_{j,t} \le \sum_{j=1}^{N} p^{**}_{j,t} \omega^h_{j,t} + b^h_t \qquad (5.23)$$

[8] Заметим, что требования Эрроу не соответствуют технологии по переносу товаров в момент времени t в товары в момент времени $t' > t$. Они лишь являются мерой стоимости, определяющей уровень дохода различных домохозяйств в различные моменты времени.

для каждого момента времени $t = 0, 1, ..., T$ вместе с требованием $\sum_{t=0}^{T} q_t^{**} b_t^h \leq 0$ и условием нормализации $q_0^{**} = 1$. Обозначим равновесие в экономике с последовательной торговлей как $(\mathbf{p}^{**}, \mathbf{q}^{**}, \mathbf{x}^{**}, \mathbf{b}^{**})$, где, как и ранее, переменные $\mathbf{p}^{**}$ и $\mathbf{x}^{**}$ обозначают полный набор цен потребительских товаров и уровня потребления всех домохозяйств, а переменные $\mathbf{q}^{**}$ и $\mathbf{b}^{**}$ — векторы всех цен облигаций и размера их покупок каждым домохозяйством. Используя эти обозначения, сформулируем следующую теорему.

Теорема 5.8. О последовательной торговле. *Если в экономике, описанной выше, набор $(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$ является равновесием Эрроу—Дебре, то в ней существует равновесие с последовательной торговлей $(\mathbf{p}^{**}, \mathbf{q}^{**}, \mathbf{x}^{**}, \mathbf{b}^{**})$, такое, что $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{**}$, $p_{j,t}^{**} = p_{j,t}^* / p_{j,1}^*$ для каждого товара j и момента времени t и $q_t^{**} = p_{1,t}^*$ для всех $t > 0$. Справедливо и обратное. Если набор $(\mathbf{p}^{**}, \mathbf{q}^{**}, \mathbf{x}^{**}, \mathbf{b}^{**})$ является равновесием с последовательной торговлей, то существует равновесие Эрроу—Дебре $(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$, такое, что, $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{x}^*$, $p_{j,t}^* = p_{j,t}^{**} p_{1,t}^*$ для каждого товара j и момента времени t и $p_{1,t}^* = q_t^{**}$ для всех $t > 0$.*

Доказательство. См. упражнение 5.9. ■

Из этой теоремы следует, что все утверждения теории равновесия Эрроу—Дебре могут применяться при анализе экономики с последовательной торговлей. В большинстве моделей, представленных в этой книге, мы будем изучать экономики с последовательной торговлей и (кроме случая моделей с явно описанным финансовым рынком и возможными несовершенствами на рынке кредитов) будем предполагать существование требований Эрроу, позволяющих домохозяйствам переносить ресурсы между разными моментами времени. Такими требованиями могут быть безрисковые облигации с нулевым чистым предложением или в детерминистских моделях их роль обычно играют акции фирм. Мы будем следовать подходу теоремы 5.8 и нормализуем цену одного товара единицей в каждый момент времени. Таким образом, в экономике с единственным потребительским товаром, как, например, в модели Солоу или в неоклассической модели экономического роста, цена потребительского товара равна 1 в каждый момент времени t и поэтому межвременная относительная цена потребительских товаров напрямую задается процентной ставкой. Это является обоснованием для рассмотрения процентной ставки как ключевой относительной цены в макроэкономических моделях и моделях экономического роста. Необходимо также подчеркнуть, что существование требований Эрроу, позволяющих переносить ресурсы между различными моментами времени, делает рынок капитала (финансовый рынок) совершенным и, в частности, на нем отсутствуют кредитные ограничения. При наличии таких ограничений мы вынуждены быть намного строже в описании возможностей и способов переноса ресурсов между различными моментами времени, доступных домохозяйствам (см., например, главу 21).

В рассуждениях, приводящих к теореме 5.8, необходимо выделить еще один важный, неявно используемый, момент. Эквивалентность равновесия Эрроу—Дебре и равновесия с последовательной торговлей основывается на требовании о том, что бюджетные ограничения каждого домохозяйства совпадают в обеих формулировках. Несмотря на то что такое условие может показаться очевидным, доказательство того, что бюджетные ограничения домохозяйств в равновесии Эрроу—Дебре и в равновесии с последовательной торговлей совпадают, не всегда тривиально. Мы остановимся на этом вопросе подробнее в начале главы 8 при описании неоклассической модели экономического роста.

5.9. Оптимальная траектория роста

Основываясь на рассуждениях в конце параграфа 5.6, начнем анализ с экономики, обладающей агрегированной производственной функцией и допускающей существование нормативного репрезентативного домохозяйства (читателю полезно будет вспомнить теорему 5.3). *Задача оптимального роста* в данном контексте состоит в описании распределения ресурсов, максимизирующего полезность репрезентативного домохозяйства. Например, если экономика состоит из ряда идентичных домохозяйств, задача сводится к поиску оптимального по Парето распределения ресурсов при равных весах Парето для всех домохозяйств (см. определение 5.2)[9]. Следовательно, задача оптимального роста в экономике с дискретным временем, отсутствием неопределенности, отсутствием роста населения и технологического прогресса может быть поставлена следующим образом:

$$\max_{\{c(t),k(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t)), \tag{5.24}$$

при ограничениях

$$k(t+1) = f(k(t)) + (1-\delta)k(t) - c(t), \tag{5.25}$$

и $k(t) \geq 0$ при условии $k(0) > 0$. Функция $u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ является моментальной функцией полезности репрезентативного домохозяйства. Задача домохозяйства состоит в максимизации дисконтированной суммы значений

[9] Можно также рассмотреть другое распределение ресурсов, в котором ex ante идентичным домохозяйствам присваиваются различные веса Парето и они достигают различных уровней полезности. В случае когда экономика допускает существование нормативного репрезентативного домохозяйства, мы по всей книге будем следовать стандартному подходу и изучать оптимальное распределение ресурсов с равными весами Парето.

своей моментальной полезности. Ограничение (5.25) также легко интерпретируется: суммарный выпуск на душу населения $f(k(t))$, который производится с использованием эффективного капитала $k(t)$ (капитала на душу населения), вместе с долей $1 - \delta$ капитала, сохранившегося после амортизации, составляют общее количество доступных в экономике в периоде t ресурсов. Часть этих ресурсов $c(t)$ используется на потребление на душу населения, остаток является эффективным капиталом (капиталом на душу населения) в следующем периоде $k(t + 1)$.

Задача оптимального роста требует от общественного планировщика выбора всей последовательности значений потребления и количества капитала, удовлетворяющих ресурсному ограничению (5.25). Других ограничений в задаче нет. Начальное значение капитала $k(0) > 0$ можно интерпретировать как граничное условие. Однако в отличие от базовой модели Солоу, решение данной задачи описывается двумя, а не одним, динамическими (дифференциальными или разностными) уравнениями и поэтому для его получения необходимы два граничных условия. В данном случае дополнительное граничное условие не принимает форму начального условия, а появляется как следствие оптимальности динамического решения в форме условия трансверсальности. Мы обсудим условие трансверсальности, подходящее для данного класса задач в следующих двух главах.

Существует много различных способов решения этой задачи максимизации. Одним из них является построение функции Лагранжа бесконечной размерности. Однако наиболее удобный и общепринятый подход к решению таких задач использует методы динамического программирования, описанию которых посвящена следующая глава.

Важным для нас является вопрос о том, может ли решение задачи оптимального роста быть децентрализовано как конкурентное равновесие; то есть будет ли вторая теорема экономики благосостояния (теорема 5.7) верна в наших предположениях о структуре экономики. Ответ на этот вопрос оказывается положительным. На самом деле основной причиной изложения теоремы 5.7 в этой главе является возможность использовать ее потом в моделях экономического роста с дисконтированием полезности, таких как базовая неоклассическая модель роста, представленная в этой части книги. Подробности метода использования этой теоремы для анализа задачи оптимального роста изложены в упражнениях 5.12–5.14.

Необходимо отметить, что даже если мы не хотим использовать вторую теорему экономики благосостояния и будем напрямую решать задачу поиска конкурентного равновесия, мы вынуждены будем решать задачу максимизации, схожую с задачей поиска максимума функции, заданной условием (5.24) при ограничении (5.25). В частности, для описания равновесия нам необходимо решить задачу максимизации полезности домохозяйством. Так как рассматриваемая экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства, нам достаточно решить задачу лишь для одного домохозяйства. Предположим, что это домохозяйство владеет запасом труда, значение которого мы нормализуем единицей. Также предположим, что предложение труда домохозяйством неэластично по заработной плате. Обозначим совокупные финансовые активы домохозяйства в периоде t переменной $a(t)$. Тогда задача домохозяйства принимает следующий вид:

$$\max_{\{c(t),a(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t))$$

при начальном условии $a(0) > 0$ и бюджетном ограничении

$$a(t+1) = (1 + r(t))a(t) - c(t) + w(t), \tag{5.26}$$

где переменная $r(t)$ обозначает чистую доходность активов (таким образом, валовая процентная ставка равна $1 + r(t)$), а переменная $w(t)$ — равновесную заработную плату (и, соответственно, трудовой доход репрезентативного домохозяйства). Из равновесия на финансовом рынке следует условие $a(t) = k(t)$. Ограничение (5.26) представляет собой потоковое бюджетное ограничение в том смысле, что оно связывает значения активов домохозяйства в текущем и следующем периодах. Нам также необходимо дополнительное условие, гарантирующее, что эти потоковые бюджетные ограничения сходятся (что значит, что переменная $a(t)$ не сходится к минус бесконечности). Для этого мы можем использовать межвременное бюджетное ограничение. Однако так как потоковое бюджетное ограничение является более интуитивным и легким в использовании мы не будем пользоваться межвременным бюджетным ограничением. Вместо этого мы добавим к потоковому бюджетному ограничению граничные условия, которые мы введем и подробно обсудим в следующих трех главах.

Формулировка задачи оптимального роста в модели с непрерывным временем очень схожа. В этом случае задача принимает следующий вид:

$$\max_{[c(t),k(t)]_{t=0}^{\infty}} \int_0^{\infty} \exp(-\rho t)u(c(t))dt \tag{5.27}$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - \delta k(t) \tag{5.28}$$

и $k(t) \geq 0$, и при начальном значении $k(0) > 0$. Функция в выражении (5.27) является прямым аналогом функции в выражении (5.24) для случая непрерывного времени, а уравнение (5.28) представляет собой ресурсное ограничение в экономике, схожее с уравнением (5.25) в дискретном времени. Еще раз заметим, что в поставленной таким образом задаче недостает одного граничного условия, которым является условие трансверсальности. Наиболее удобным методом поиска решения подобной задачи является использование результатов теории оптимального управления, которые мы будем изучать в главе 7.

5.10. Основные выводы

Эта глава посвящена описанию основных элементов моделей, изучаемых в теории оптимального экономического роста. В некотором смысле ее можно рассматривать как главу, посвященную различным несущественным деталям и знакомящую читателя с понятием репрезентативного домохозяйства, задачей динамической оптимизации, теоремами экономики благосостояния и задачей оптимального роста. Однако материал этой главы очень важен, так как хорошее понимание микроэкономических оснований теории экономического роста и теорем экономики благосостояния необходимо для усвоения последующего материала и материала части III.

Наиболее важные результаты этой главы состоят в следующем. Во-первых, все модели, изучаемые в этой книге, принадлежат к более общему классу динамических моделей общего равновесия. Поэтому нам необходимо понимать, какие свойства моделей экономического роста являются общими (в смысле, что они не зависят от упрощающих предположений конкретной модели), а какие результаты зависят от специфики этих предположений. В этой связи очень важны первая и вторая теорема экономики благосостояния. Они показывают, что при условиях совершенной конкуренции на всех товарных рынках и рынках факторов производства и отсутствии в экономике потребительских и производственных экстерналий (и при некоторых относительно мягких технических ограничениях), динамическое конкурентное равновесие является оптимальным по Парето и что любое оптимальное по Парето распределение ресурсов в экономике может быть децентрализовано как динамическое конкурентное равновесие. Эти результаты будут особенно важны в части III, где мы будем изучать экономики с совершенной конкуренцией. С другой стороны, важно отметить, что эти результаты не могут применяться напрямую при анализе моделей технологического прогресса, где товарные рынки имеют монопольную структуру, и в теории экономического развития, где различные рыночные несовершенства играют важную роль в динамике экономики.

Во-вторых, общий класс динамических моделей общего равновесия достаточно широк и сложен для получения четких, легко интерпретируемых выводов о специфике процесса экономического роста. Вследствие этого, мы часто вынуждены будем делать дополнительные упрощающие предположения. Наиболее важным из них является предположение о существовании репрезентативного домохозяйства, которое позволяет нам моделировать совокупный спрос в экономике так, как будто он является результатом оптимизационного поведения единственного домохозяйства. Мы убедились в том, что в общем случае это предположение не выполняется, а также увидели, каким образом в предположении о том, что предпочтения домохозяйств имеют определенный вид (предпочтения Гормана) у нас появляется возможность моделировать экономику так, как будто она допускает существование репрезентативного домохозяйства при любом распределении богатства и доходов в ней.

Наконец, в этой главе мы ознакомились с формулировкой задачи оптимального роста в дискретном и непрерывном времени. Обе эти формулировки будут использованы в качестве примеров в двух последующих главах.

5.11. Литература

В этой главе покрывается достаточно широкий спектр материала и поэтому в целях краткости изложения мы часто опускали множество деталей. Материал этой главы должен быть знаком многим читателям книги. Прекрасное обсуждение вопросов, связанных с проблемой агрегирования и предположением о существовании репрезентативного домохозяйства, можно найти в работах: [Deaton, Muellbauer 1980; Hindelbarnd, Kirman 1988; Mas-Colell, Whinston, Green 1995; Мас-Колелл, Уинстон, Грин 2016]. Некоторые оригинальные результаты приведены в работах: [Gorman 1953, 1959, 1976, 1980] и [Pollak 1971]. В работах В. М. (Теренса) Гормана помимо этих можно найти много других важных результатов о сепарабельности и проблеме агрегирования. Прекрасный обзор работ В. Н. Гормана и следствий, вытекающих из предположения о предпочтениях Гормана, приведены в работе: [Deaton, Muellbauer 1980]. В работе [Caselli, Ventura 2000] предположение о предпочтениях Гормана используется в контексте модели с накоплением капитала и разнородными потребителями. В учебнике [Mas-Colell, Whinston, Green 1995; Мас-Колелл, Уинстон, Грин 2016] авторы подробно анализируют понятия позитивного и нормативного репрезентативного домохозяйства. Определение понятия нормативного репрезентативного домохозяйства, используемое в теореме 5.3, мотивируется его применением в контексте динамических макроэкономических моделей (которые основаны на максимизации полезности репрезентативным домохозяйством и описывают все оптимальные по Парето распределения ресурсов и конкурентные равновесия). Это определение является более сильным, чем в книге [Mas-Colell, Whinston, Green 1995; Мас-Колелл, Уинстон, Грин 2016], в которой авторы определяют нормативное репрезентативное домохозяйство при заданной общественной функции благосостояния.

Теорема Зонненшайна—Мантеля—Дебре (теорема 5.1) впервые была доказана Х. Зонненшайном в работе [Sonnenschein 1972], а затем расширена в работах: [Debreu 1974] и [Mantel 1976]. Ее формулировку и схему доказательства можно найти в книгах [Mas-Colell, Whinston, Green 1995; Мас-Колелл, Уинстон, Грин 2016] и [Hindelbarnd, Kirman 1988]. В работах [Deaton, Muellbauer 1980] и [Hindelbarnd, Kirman 1988] показано, что подобное агрегирование возможно и при более слабых предположениях о виде функции полезности в случае некоторых ограничений на функцию распределения доходов (или запасов) между домохозяйствами.

В этой и многих последующих главах используются некоторые базовые понятия микроэкономической теории, такие как тождество Роя, используемое в теоремах 5.2 и 5.3, закон Вальраса, понятие о единице измерения стоимости и основы теории ожидаемой полезности фон Неймана—Моргенштерна. Мы предполагаем, что читатель знаком с ними. Подробное изложение основ микроэкономической теории можно найти в учебнике [Mas-Colell, Whinston, Green 1995; Мас-Колелл, Уинстон, Грин 2016]. Читателю следует ознакомиться с главой 16 [Mas-Colell, Whinston, Green 1995; Мас-Колелл, Уинстон, Грин 2016] и с работой [Bewley 2007], в которых подробно описаны различные представления оптимальных по Парето распределений ресурсов (включая результат о том, что любое оптимальное по Парето распределение ресурсов является решением задачи максимизации взвешенного среднего значений функций полезности всех домохозяйств в экономике).

Теорема о существовании репрезентативной фирмы (теорема 5.4) довольно проста, однако мы не встречали ее обсуждения в литературе (по меньшей мере в макроэкономической литературе). При этом необходимо отметить, что следует различать предметы изложения этой теоремы и так называемой кембриджской полемики, где обсуждается возможность агрегирования различных типов капитала в единый индекс капитала (см., например, работу [Wan 1971]. Теорема о существовании репрезентативной фирмы не касается изучения этого вопроса.

Наилучшим источником для анализа вопроса существования конкурентного равновесия и теорем экономики благосостояния в экономике с конечным числом домохозяйств и конечным числом товаров является книга Ж. Дебре «Теория стоимости» [Debreu 1959]. В этой короткой книге можно найти прозрачное и понятное описание всего необходимого математического инструментария, используемого в теории общего равновесия. Настолько же ясное и более современное изложение всех технических понятий представлено в книгах [Mas-Colell, Whinston, Green 1995; Мас-Колелл, Уинстон, Грин 2016] и [Bewley 2007]. Читатель также может найти доказательство второй теоремы экономики благосостояния для экономики с конечным числом товаров в главе 16 книги [Mas-Colell, Whinston, Green 1995; Мас-Колелл, Уинстон, Грин 2016] (в теореме 5.7 в этой главе доказывается более общее утверждение для случая бесконечного числа товаров). В обеих этих книгах также можно найти прекрасное обсуждение ограничений на предпочтения, необходимых для того, чтобы они имели представление в виде функции полезности. В главе 19 учебника [Mas-Colell, Whinston, Green 1995; Мас-Колелл, Уинстон, Грин 2016] можно найти доступное изложение понятия требований Эрроу и взаимосвязи между торговлей в единственный момент времени и последовательной торговлей. Классической ссылкой по требованиям Эрроу является работа [Arrow 1964].

Бесконечномерные экономики не рассматриваются ни в книге [Debreu 1959], ни в учебнике [Mas-Colell, Whinston, Green 1995; Мас-Колелл, Уинстон, Грин 2016]. Впервые анализ бесконечномерных экономик был проведен в работе [Debreu 1954]. Ряд важных результатов теории бесконечномерных экономик приведен в книге [Bowley 2007]. В книге [Stokey, Lucas, Prescott 1989, chapter 15] приведены доказательства существования конкурентного равновесия и теорем экономики благосостояния для экономик с конечным числом домохозяйств и счетным множеством товаров. В этих доказательствах используется более сложный, чем в этой книге, математический аппарат, однако, если читатель ознакомится с необходимыми для доказательств математическими техниками, он найдет доказательства одновременно подробными и простыми. Наиболее доступное изложение теоремы Хана—Банаха, которая используется в доказательстве теоремы 5.7 в бесконечномерном пространстве, можно найти в книгах [Luenberger 1969; Kolmogorov, Fomin 1970; Колмогоров, Фомин 1976; Kreiszig 1978]. В книге [Luenberger 1969] читатель может найти прекрасное изложение всех математических утверждений, используемых в работе [Stokey, Lucas, Prescott 1989], а также много других полезных результатов, используемых в теории динамической оптимизации в непрерывном времени.

Анализ различий между коэффициентом относительно неприятия риска и межвременной эластичностью замещения (см. обсуждение в упражнении 5.2) представлен в работах: [Kreps 1988; Epstein, Zin 1989; Becker, Boyd 1997].

5.12. Упражнения

5.1. Напомним, что решение задачи динамической оптимизации $\{x(t)\}_{t=0}^{T}$ называется состоятельным во времени (динамически состоятельным), если выполняется следующее условие: если набор $\{x(t)\}_{t=0}^{T}$ является решением задачи с момента времени $t = 0$, то набор $\{x(t)\}_{t=t'}^{T}$ является решением задачи с момента времени $t = t' > 0$.

(a) Рассмотрите следующую задачу оптимизации:

$$\max_{\{x(t)\}_{t=0}^{T}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(x(t))$$

при ограничениях

$$x(t) \in [0, \bar{x}]$$

$$\text{и } G(x(0), \ldots, x(T)) \leq 0.$$

Хотя это не является необходимым, вы можете предположить, что функция G непрерывна и выпукла, а функция u — непрерывна и вогнута. Покажите, что решение $\{x^*(t)\}_{t=0}^{T}$ этой задачи максимизации будет динамически состоятельным.

(b) Рассмотрите задачу оптимизации

$$\max_{\{x(t)\}_{t=0}^{T}} u(x(0)) + \delta \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(x(t))$$

при ограничениях

$$x(t) \in [0, \bar{x}],$$

$$G(x(0), \ldots, x(T)) \leq 0.$$

Предположите, что в периоде времени 1 целевая функция изменяет свой вид на $u(x(1)) + \delta \sum_{t=2}^{T} \beta^{t-1} u(x(t))$. Проинтерпретируйте эту целевую функцию (такой вид задачи оптимизации часто называют гиперболическим дисконтированием).

(c) Пусть набор $\{x^*(t)\}_{t=0}^{T}$ является решением задачи максимизации из части (b) этого упражнения. Предположите, что индивид выбирает значение переменной $x^*(0)$ в периоде $t = 0$ и получает возможность провести оптимизацию заново в периоде времени $t = 1$. Другими словами, в этом периоде он решает следующую задачу:

$$\max_{\{x(t)\}_{t=0}^{T}} u(x(1)) + \delta \sum_{t=2}^{T} \beta^{t-1} u(x(t))$$

при ограничениях

$$x(t) \in [0, \bar{x}]$$

$$\text{и } G(x^*(0), \ldots, x(T)) \leq 0.$$

Покажите, что решение с периода времени $t = 1$ и далее $\{x^{**}(t)\}_{t=1}^{T}$ не всегда будет совпадать с первоначальным решением $\{x^*(t)\}_{t=1}^{T}$.

(d) Объясните, почему стандартные аксиомы базовой теории общего равновесия не выполняются для предпочтений из частей (b) и (c) данного упражнения.

5.2. В этом упражнении от вас потребуется проанализировать пример, иллюстрирующий различие между коэффициентом относительного неприятия риска и межвременной эластичностью замещения. Рассмотрите домохозяйство со следующими несепарабельными по времени предпочтениями относительно уровня потребления в двух периодах времени:

$$V(c_1, c_2) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{c_1^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \beta\left(\frac{c_2^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

где символ $\mathbb{E}$ обозначает оператор математического ожидания. Бюджетное ограничение домохозяйства имеет следующий вид:

$$c_1 + \frac{1}{1+r} c_2 \leq W,$$

где переменные r и W, обозначающие процентную ставку и общий уровень богатства домохозяйства, могут быть случайными величинами.

(a) Вначале предположите, что переменная W является константой и принимает значение $W_0 > 0$. Опишите выбор домохозяйством потребления c_1 и c_2, максимизирующий функцию полезности.

(b) Теперь предположите, что переменная W является случайной величиной, распределенной на отрезке $[\underline{W}, \overline{W}]$ с некоторой функцией распределения $G(W)$, где $0 < \underline{W} < \overline{W} < \infty$. Опишите выбор домохозяйством потребления c_1 (которое выбирается до реализации переменной W). Определите в данном случае коэффициент относительной нелюбви к риску и межвременную эластичность замещения. Объясните, почему эти две характеристики не всегда будут совпадать.

5.3. Докажите теорему 5.2.

***5.4.** Обобщите теорему 5.3 для экономики с континуальным множеством товаров.

5.5. Покажите, что если домохозяйство выбирает потребительскую корзину x^h при векторе цен p и его предпочтения локально ненасыщаемы, то выполняется неравенство $p \cdot x^h < \infty$.

5.6. **(a)** Выведите функцию спроса домохозяйства из задачи максимизации полезности в примере 5.1 и покажите, что получающаяся косвенная функция полезности задается равенством (5.5).

(b) Покажите, что решение задачи максимизации (5.6) ведет к косвенной функции полезности, соответствующей случаю существования репрезентативного домохозяйства.

(c) Теперь предположите, что функция полезности имеет следующий вид: $U^h\left(x_1^h, \ldots, x_N^h\right) = \sum_{j=1}^{N}\left(x_j^h - \xi_1^h\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$. Повторите вычисления из части (b) и убедитесь в том, что получающаяся косвенная функция полезности является однородной степени 0 по переменным p и y, однако не удовлетворяет условию Гормана. Достаточно ли этого для того, чтобы экономика допускала существование репрезентативного домохозяйства?

5.7. Постройте версию модели с конечным временем жизни и случайным моментом смерти в непрерывном времени (используйте условие (5.12) в тексте главы). В частности, предположите, что событие смерти индивида следует пуассоновскому процессу с параметром $v > 0$, а значение его истинного дисконта равно ρ. Покажите, что в этом случае поведение агента совпадает с поведением агента, живущего бесконечную жизнь и имеющего дисконт, равный $\rho + v$.

5.8. **(a)** Будут ли динамические предпочтения, подобные тем, которые описаны в параграфе 5.2, вести к задаче максимизации с бесконечным горизонтом планирования, если моментальные функции полезностей различных поколений имеют разный вид (функции $u_t(\cdot)$, возможно, имеют разный вид для различных поколений)?

(b) Как изменятся ваши выводы в случае, если агент заботится о полезности своего потомка с дисконтом, равным β, и о полезности потомка своего потомка с меньшим дисконтом, равным δ?

5.9. Докажите теорему 5.8.

5.10. Рассмотрите модель последовательной торговли, изложенную в параграфе 5.8, и предположите, что в момент времени t домохозяйство имеет возможность торговать облигациями на поставку одной единицы товара j в момент времени t'. Обозначьте цену такой облигации переменной $q_{t,t'}$.

(a) Перепишите бюджетное ограничение домохозяйства h в момент времени t (5.23) с учетом возможности торговли такими облигациями.

(b) Докажите для рассматриваемой экономики с расширенным множеством облигаций утверждение, эквивалентное теореме 5.8.

5.11. Рассмотрите двухпериодную экономику, населенную двумя типами домохозяйств. Домохозяйства первого типа в количестве N_A имеют следующую функцию полезности:

$$u\left(c_1^h\right) + \beta_A u\left(c_2^h\right),$$

где переменные c_1^h и c_2^h обозначают потребление домохозяйства h в двух периодах. Оставшиеся N_B домохозяйств второго типа имеют функцию полезности вида:

$$u\left(c_1^h\right) + \beta_B u\left(c_2^h\right),$$

и выполняется неравенство $\beta_A < \beta_B$. Две группы домохозяйств обладают доходами w_A и w_B соответственно. Они также имеют возможность сберегать часть дохода для потребления во втором периоде по некоторой экзогенно заданной валовой процентной ставке $R > 0$. Покажите что при общем виде функции полезности $u(\cdot)$ такая экономика не допускает существования репрезентативного домохозяйства в сильной форме, то есть существования репрезентативного домохозяйства при любом распределении доходов между индивидами. [Подсказка: покажите, что функции спроса будут различными при различных распределениях дохода между домохозяйствами.]

5.12. Рассмотрите экономику, состоящую из H домохозяйств, каждое из которых обладает следующей функцией полезности в момент времени $t = 0$:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left(c^h(t)\right),$$

где $\beta \in (0, 1)$, а переменная $c^h(t)$ обозначает потребление домохозяйства h в момент времени t. Предположите, что $u(0) = 0$. Экономика является экономикой обмена, и начальные запасы составляют $y > 0$ единиц конечного товара. Эти запасы могут быть сохранены на будущее без амортизации и без начисления процента между периодами.

(a) Опишите множество товаров Эрроу—Дебре в этой экономике.

(b) Опишите множество оптимальных по Парето распределений ресурсов в этой экономике.

(c) Докажите, что вторая теорема экономики благосостояния (теорема 5.7) может быть применена к этой экономике.

(d) Рассмотрите распределение $\left\{y^h\right\}_{h=1}^{H}$ запаса y между домохозяйствами, такое, что $\sum_{h=1}^{H} y^h = y$. Найдите единственный вектор цен конкурентного равновесия для такого распределения запаса и соответствующие ему значения потребления.

(e) Будут ли все конкурентные равновесия в ней оптимальны по Парето?

(f) Опишите схему распределения запаса для децентрализации каждого элемента множества всех оптимальных по Парето распределений ресурсов.

5.13. **(a)** Предположите, что функция полезности домохозяйства задана следующим образом:

$$U\left(x^h(0),\, x^h(1),\, \ldots\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t v^h\left(x^h(t)\right),$$

где $x^h(t) \in X \subset \mathbb{R}_+^N$, $v^h\colon X \to \mathbb{R}$, множество X компактно и константа $\beta < 1$. Покажите, что условие теоремы 5.7 (условие iii) о том, что для всех $x^h \in X$, $\bar{x}^h \in X^h$, таких, что выполняется неравенство $U^h(x^h) > U^h(\bar{x}^h)$, существует $\bar{T}$ (функция от x^h и $\bar{x}^h$), такая, что $U^h\left(x^h[T]\right) > U^h(\bar{x}^h)$ для всех $T \geq \bar{T}$ выполняется.

(b) Предположите, что производственная структура в экономике задается с помощью неоклассической производственной функции, а производственный вектор в момент времени t есть функция от значений факторов производства в момент времени t и капитала, выбираемого в момент времени $t - 1$. Также предположите, что увеличение количества используемого капитала ведет к росту производства и что в экономике возможна свободная ликвидация товаров. Покажите, что условие теоремы 5.7, в котором предполагается, что для любого $y^f \in Y^f$ существует $\tilde{T}$, такая, что $y^f[T] \in Y^f$ для всех $T \geq \tilde{T}$ выполняется.

***5.14.** **(a)** Покажите, что теорема 5.7 неприменима к неоклассической модели экономического роста с одним товаром и моментальной функцией полезности вида $u(c) = (c^{1-\theta} - 1)/(1 - \theta)$ при $\theta \geq 1$.

(b) Для $\varepsilon > 0$ постройте последовательность ε, все элементы которой равны ε. Переформулируйте и докажите такую версию теоремы 5.7, что выполняется следующее условие для всех элементов множеств X^h (для всех домохозяйств $h \in \mathcal{H}$): $x^h \geq \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. [Подсказка: переопределите последовательности $x^h[T]$ таким образом, что все элементы начиная с T-го равны ε, а не 0 и переформулируйте условия теоремы соответствующим образом.

(c) Покажите, что измененная таким образом форма теоремы 5.7 применима к экономике, описанной в части (a) упражнения.

Глава 6
Динамическое программирование и оптимизация на бесконечном горизонте планирования

Данная глава посвящена краткому введению в теорию оптимизации на бесконечном горизонте планирования в дискретном времени в случае отсутствия неопределенности. Основной задачей этой главы является ознакомление читателя с методами оптимизации на бесконечном горизонте планирования и динамического программирования. Эти методы будут использоваться нами на протяжении всей книги. В силу того что динамическое программирование стало очень важным инструментом анализа во многих областях экономической науки и в особенности в макроэкономике, значительная часть главы посвящена описанию основных методов, используемых в динамическом программировании.

Материал этой главы разбит на четыре части. В первой части (параграфы 6.1–6.3) мы поставим задачу и приведем ряд результатов, необходимых для применения методов стационарного динамического программирования в анализе оптимизационных задач на бесконечном горизонте планирования. Так как понимание сути этих результатов оказывается полезным при анализе различных задач, во второй части, а именно в параграфах 6.4 и 6.5, описаны дополнительные методы, используемые при более детальном анализе задач динамического программирования и приведены доказательства основных теорем. Материал этих двух параграфов не является обязательным с точки зрения дальнейшего содержания книги, и читатель, желающий лишь ознакомиться с методами динамической оптимизации, может пропустить его. В третьей части приведено несколько результатов из теории нестационарной оптимизации (параграф 6.7). Наконец, четвертая часть этой главы (параграфы 6.6, 6.8 и 6.9) посвящена более подробному обсуждению использования методов динамического программирования в макроэкономике. В ней также приведен ряд результатов теории оптимального роста, получаемых с помощью этих методов.

Основной задачей, которую мы будем изучать в этой главе, является задача максимизации с дисконтированием при отсутствии неопределенности, схожая с задачей максимизации, поставленной в предыдущей главе. Методы стохастической динамической оптимизации описаны в главе 16.

6.1. Оптимизация на бесконечном горизонте планирования в дискретном времени

Каноническая постановка задачи оптимизации на бесконечном горизонте планирования в дискретном времени выглядит следующим образом:

$$\sup_{\{x(t),y(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \tilde{U}(t, x(t), y(t))$$

при ограничениях

$$y(t) \in \tilde{G}(t, x(t)) \text{ для всех } t \geq 0,$$

$$x(t+1) = \tilde{f}(t, x(t), y(t)) \text{ для всех } t \geq 0,$$

$$x(0) \text{ задан},$$

где константа $\beta \in [0, 1)$ обозначает дисконт, $t = 0, 1, \ldots$ — периоды времени, $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^{K_x}$ и $y(t) \in Y \subset \mathbb{R}^{K_y}$ при некоторых $K_x \geq 1$, $K_y \geq 1$. Переменную $x(t)$ будем называть *переменной состояния* (вектором переменных состояния), а переменную $y(t)$ — *переменной управления* (вектором переменных управления) в периоде времени t. Вещественнозначную функцию

$$\tilde{U}: \mathbb{Z}_+ \times X \times Y \to \mathbb{R}$$

будем называть моментальной *функцией выигрыша* задачи (множество $\mathbb{Z}_+$ здесь есть множество неотрицательных целых чисел), а функцию $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \tilde{U}(t, x(t), y(t))$ — *целевой функцией* задачи. Такая постановка задачи уже подразумевает, что целевая функция представляет собой дисконтированную сумму значений моментальных функций выигрыша. Отображение (соответствие, см. приложение А) $\tilde{G}(t, x(t))$, принимающее значения на множестве подмножеств множества Y, может быть описано как

$$\tilde{G}: \mathbb{Z}_+ \times X \rightrightarrows Y.$$

Таким образом, первое ограничение описывает множество допустимых значений вектора переменных управления $y(t)$. В дополнение функция $\tilde{f}(t, x(t), y(t))$ описывает динамику вектора переменных состояния как функции предыдущих значений векторов переменных состояния и управления. Несмотря на то что такая постановка задачи полезна с точки зрения описания различий между переменными состояния и переменными управления, во многих случаях более удобной формой постановки задачи является следующее преобразование задачи оптимизации, позволяющее избавиться от вектора $y(t)$:

Задача 6.1

$$V^*(0, x(0)) = \sup_{\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \tilde{U}(t, x(t), x(t+1))$$

при ограничениях

$$x(t+1) \in G(t, x(t)) \text{ для всех } t \geq 0,$$

$$x(0) \text{ задан}.$$

В данном случае $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^K$ ($K = K_x$ в терминах предыдущей постановки задачи) и вектор $x(t)$ соответствует вектору переменных состояния, в то время как вектор $x(t + 1)$ играет роль вектора переменных управления в периоде t. В дополнение функция $\tilde{U}: \mathbb{Z}_+ \times X \times X \to \mathbb{R}$ теперь с аргументами $x(t)$ и $x(t + 1)$, а не $x(t)$ и $y(t)$, (а также периодом времени t) является моментальной функцией выигрыша, а отображение $\tilde{G}: \mathbb{Z}_+ \times X \rightrightarrows X$ задает ограничивающее соответствие. Наконец мы также определим *функцию стоимости* $V^*: \mathbb{Z}_+ \times X \to \mathbb{R}$, значение которой равно верхней грани (максимальному возможному значению), достигаемой целевой функцией (начиная с некоторых значений вектора переменных состояния $x(t)$ в периоде t).

В такой постановке задачи мы используем обозначение «sup» для верхней грани целевой функции (вместо обозначения «max» для ее максимума), так как мы не можем гарантировать достижения максимального значения при некотором допустимом векторе переменных состояния $x(t)$. Однако во всех задачах, рассмотренных в данной книге, максимальное значение целевой функции достигается и читатель может заменить обозначение «sup» обозначением «max». В том случае, когда максимальное значение целевой функции достигается на некоторой последовательности $\left\{x^*(t+1)\right\}_{t=0}^{\infty} \in X^{\infty}$, мы будем называть такую последовательность решением задачи или *оптимальным планом*[1]. Символ X^{∞} обозначает прямое декартово произведение счетного множества множеств X, поэтому элементами множества X^{∞} являются последовательности элементов множества X (также заметим, что справедливо включение $X^{\infty} \subset l^{\infty}$, где l^{∞} представляет собой векторное нормированное пространство бесконечных ограниченных последовательностей с нормой $\|\cdot\|_{\infty}$, которую для упрощения обозначения мы представим как $\|\cdot\|$, см. приложение А). Особенный интерес для нас в данной главе представляет функция $V^*(t, x)$. Ее можно

[1] Мы также будем использовать слово «решение» для обозначения функции V^*, определенной в задачах 6.1 и 6.2 (или функции V в задаче 6.3), но при этом из контекста использования термина будет очевидно, используется ли слово «решение» для описания оптимального плана или функции V^* или V.

рассматривать как функцию стоимости в том смысле, что она равна стоимости в периоде t при начальных значениях переменных состояния x в случае использовании оптимальной стратегии. Наша задача состоит в описании оптимального плана $\{x^*(t+1)\}_{t=0}^{\infty}$ и значения функции стоимости $V^*(0, x(0))$.

Более общая постановка задачи, не обязательно с дисконтируемой целевой функцией, может быть записана следующим образом:

$$\sup_{\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}} U(x(0), x(1), \ldots).$$

Однако такое обобщение не представляет интереса для большинства задач теории экономического роста. Более того, как показано в предыдущей главе, использование сепарабельной по времени дисконтируемой целевой функции гарантирует состоятельность решения во времени (в частности, это показано в упражнении 5.1).

Постановка задачи 6.1 выглядит довольно абстрактной. Однако ее основное преимущество в том, что она относительно простая и при этом включает в себя как частный случай большое число интересных экономических приложений. Следующий пример показывает, каким образом в таком виде может быть поставлена каноническая задача оптимального роста.

Пример 6.1. Напомним, что задача оптимального роста (5.24) и (5.25), поставленная нами в предыдущей главе, выглядит следующим образом:

$$\max_{\{k(t),c(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t)),$$

при ограничениях

$$k(t+1) = f(k(t)) + (1-\delta)k(t) - c(t),$$

$k(t) \geq 0$ и при заданных значениях $k(0) > 0$ и функции полезности $u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Эту задачу можно сформулировать в общем виде с одномерными векторами переменных состояния и переменных управления. В частности, положим $x(t) = k(t)$ и $x(t+1) = k(t+1)$. Тогда из ресурсного ограничения задачи следует, что

$$c(t) = f(k(t)) - k(t+1) + (1-\delta)k(t).$$

Подставляя это равенство в целевую функцию, получаем следующую задачу максимизации:

$$\max_{\{k(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\big(f(k(t)) - k(t+1) + (1-\delta)k(t)\big),$$

при ограничении $k(t) \geq 0$. Таким образом, такая задача действительно является частным случаем задачи 6.1 с моментальной функцией выигрыша $U(t, k(t), k(t+1)) = u(f(k(t)) - k(t+1) + (1-\delta)k(t))$ и ограничивающем соответствии $G(t, k(t))$ вида $k(t+1) \in [0, f(k(t)) + (1-\delta)k(t)]$ (так как $c(t) \geq 0$). ■

Пример 6.1 иллюстрирует одно важное свойство. В формулировке задачи оптимального роста в терминах задачи 6.1 моментальная функция выигрыша U и ограничивающее соответствие G не зависят от времени явным образом. Это свойство является довольно общим. Многие интересные экономические задачи могут быть сформулированы в такой стационарной форме. Мы будем называть задачу стационарной, если целевая функция представляет собой дисконтированную сумму, а моментальная функция выигрыша U и ограничивающее соответствие G не зависят от времени явным образом. В следующем параграфе мы начнем с анализа стационарных задач динамической оптимизации и вернемся к более общей форме задачи 6.1 в параграфе 6.7.

6.2. Стационарное динамическое программирование

Рассмотрим следующую стационарную форму задачи 6.1:

Задача 6.2

$$V^*(x(0)) = \sup_{\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x(t), x(t+1))$$

при ограничениях

$$x(t+1) \in G(x(t)) \text{ для всех } t \geq 0,$$

$$x(0) \text{ задан.}$$

Продолжим предполагать, что для дисконта выполняется условие $\beta \in [0, 1)$, а ограничивающее соответствие и моментальная функция выигрыша заданы как $G\colon X \rightrightarrows X$ и $U\colon X \times X \to \mathbb{R}$ соответственно. Так как данная задача является стационарной, мы опустим временную зависимость в функции стоимости $V^*(x(0))$.

Задача 6.2, как и задача 6.1, является *итеративной задачей*. Ее решением является последовательность $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty} \in X^{\infty}$. Итеративные задачи в некоторых случаях обладают рядом хороших свойств, однако их решение часто оказывается сложным как в явном аналитическом, так и в приближенном численном виде.

Основная идея динамического программирования состоит в переходе от итеративной задачи к *функциональному уравнению*, таким образом, поиск решения трансформируется в поиск функции, а не последовательности. Подходящее в данном случае функциональное уравнение выглядит следующим образом:

$$V(x) = \sup_{y \in G(x)} \{U(x, y) + \beta V(y)\} \text{ для всех } x \in X. \tag{6.1}$$

Функция V здесь задана как $V: X \to \mathbb{R}$. Далее мы будем использовать обозначение V для функции стоимости в задаче 6.3 и обозначение V^* для функции стоимости в задаче 6.2.

На интуитивном уровне, при решении задачи 6.3 мы, вместо выбора последовательности $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty} \in X^{\infty}$, в постановке 6.1 выбираем *правило*, определяющее значение вектора переменных управления $x(t+1)$ как функцию от значения вектора $U(\cdot, \cdot)$ переменных состояния $x(t)$. Так как моментальная функция выигрыша U явно не зависит от времени, у нас нет оснований полагать, что это правило будет зависеть от времени. Поэтому мы опустим временной индекс у векторов переменных управления и переменных состояния y и x. Поставленная таким образом задача состоит в выборе вектора $y \in G(x) \subset X$ при заданном значении вектора $x \in X$. Математически это соответствует максимизации функции $V(x)$ при любом заданном значении $x \in X$. Единственная тонкость, которую мы объясним далее, состоит в присутствии функции $V(\cdot)$ в обеих частях равенства (6.1). Именно поэтому формулировка (6.1) называется рекурсивной формулировкой: функция $V(x)$ присутствует как в левой, так и в правой частях равенства (6.1) и поэтому определена рекурсивным образом. Функциональное уравнение (6.1) также часто называют уравнением Беллмана по имени Рихарда Беллмана, который первым ввел такую постановку задачи динамического программирования.

На первый взгляд может показаться, что рекурсивная формулировка не обладает преимуществами по сравнению с итеративной формулировкой. Более того, анализ функций может показаться сложнее, чем анализ последовательностей. Несмотря на это, оказывается, что функциональное уравнение динамического программирования во многих случаях может быть легко преобразовано. Оно очень удобно для вычислений и поэтому широко используется в прикладной математике и инженерных науках. Основное преимущество его использования в экономике состоит в том, что оно может быть легко проинтерпретировано экономически, по аналогии со сравнением текущего и следующего периодов времени. В частности, функция $U(x, y)$ представляет собой моментальный выигрыш в текущем периоде, а функция $\beta V(y)$ — суммарный выигрыш со следующего периода до бесконечности, что эквивалентно выигрышу в следующем периоде. Поэтому во многих приложениях мы можем ограничиться интуицией двухпериодной задачи максимизации. Наконец, в некоторых частных, но важных случаях поиск решения задачи 6.3 в явном виде оказывается проще, чем поиск решения соответствующей итеративной задачи (задачи 6.2).

На самом деле формулировка задачи 6.3 вытекает из формулировки задачи 6.2 естественным образом. Предположим, что задача 6.2 обладает максимумом при начальном условии $x(0)$, который достигается на оптимальной последовательности $\{x^*(t)\}_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющей условию $x^*(0) = x(0)$. Тогда, при соблюдении ряда относительно слабых технических условий, выполняются следующие равенства:

$$V^*(x(0)) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x^*(t), x^*(t+1)) =$$

$$= U(x(0), x^*(1)) + \beta \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s U(x^*(s+1), x^*(s+2)) = U(x(0), x^*(1)) + \beta V^*(x(1)).$$

Это уравнение иллюстрирует основной принцип динамического программирования — *принцип оптимальности*, который будет описан более основательно в теореме 6.2. Он состоит в том, что оптимальный план может быть разбит на две части: оптимальный выбор в текущем периоде и оптимальная будущая траектория. Методы динамического программирования основываются на этом принципе.

Особенно важное преимущество формулировки задачи стационарного динамического программирования состоит в том, что решение задачи может быть представлено как не зависящая от времени *функция выбора* (или соответствие выбора)

$$\pi: X \to X,$$

определяющая значения вектора переменных управления $x(t+1)$ при заданном значении вектора переменных состояния $x(t)$. В общем случае при решении могут возникнуть два затруднения. Во-первых, решения, достигающего максимума целевой функции, может не существовать, именно поэтому мы сформулировали задачу в терминах верхней грани, а не максимума. Во-вторых, решением задачи 6.3 может оказаться не функция выбора, а *отображение выбора* $\pi: X \rightrightarrows X$, то есть при некоторых значениях вектора переменных состояния максимум может достигаться при нескольких значениях вектора переменной управления. Мы пока не будем останавливаться на этих затруднениях и предложим эвристическое описание решения. Подробный анализ задачи будет проведен в параграфах 6.3 и 6.5.

После того как мы определили функцию стоимости V, характеристика функции выбора оказывается очень простой. В частности, по определению, оптимальный план должен задаваться функцией выбора $\pi(x)$, удовлетворяющей следующему условию:

$$V(x) = U(x, \pi(x)) + \beta V(\pi(x)) \text{ для всех } x \in X$$

которое является одним из возможных способов определения функции выбора. Это уравнение следует из наблюдения о том, что если функция

$\pi(x)$ является оптимальным выбором, то правая часть равенства (6.1) должна достигать максимума $V(x)$ при $y = \pi(x)$.

Основная польза от использования рекурсивной формулировки задачи 6.3 состоит в том, что мы обладаем достаточно мощными инструментами, позволяющими не только доказать существование решения, но и описать некоторые его свойства. Эти инструменты также используются при решении многих задач теории экономического роста, макроэкономики и других параграфов экономической динамики.

В следующем параграфе мы представим результаты, описывающие связь между решением итеративной задачи (задачи 6.2) и задачи в рекурсивной формулировке (задачи 6.3). Также мы докажем ряд утверждений о вогнутости, монотонности и дифференцируемости функции стоимости $V(\cdot)$ (а также функции стоимости $V^*(\cdot)$ в задаче 6.2).

6.3. Теоремы стационарного динамического программирования

Вначале сделаем ряд предположений в задаче 6.2. Для того чтобы отличать их от предположений о технологии и предпочтений домохозяйств, мы пронумеруем их отдельно. Рассмотрим последовательность $\{x^*(t)\}_{t=0}^{\infty} \in X^{\infty}$, на которой целевая функция задачи 6.2 достигает верхней грани. Наша основная задача — убедиться, что эта последовательность удовлетворяет рекурсивному уравнению динамического программирования, выписанному выше, с помощью подстановки последовательности $\{x^*(t)\}_{t=0}^{\infty}$ (вместо оператора максимума) следующим образом:

$$V(x^*(t)) = U(x^*(t), x^*(t+1) + \beta V(x^*(t+1))) \text{ для всех } t = 0, 1, \ldots \quad (6.2)$$

и что решение уравнения (6.2) также является решением задачи (6.2) в том смысле, что на нем достигается верхняя грань целевой функции. Другими словами, мы планируем доказать эквивалентность решений задач 6.2 и 6.3.

Прежде чем перейти к доказательству, определим множество допустимых последовательностей или *планов*, стартующих с начального значения $x(t)$, следующим образом:

$$\Phi(x(t)) = \{\{x(s)\}_{s=t}^{\infty} : x(s+1) \in G(x(s)) \;\; \text{для всех } s = t, t+1, \ldots\}.$$

Интуитивно множество $\Phi(x(t))$ является множеством допустимого выбора векторов при начальном значении $x(t)$. Обозначим элемент множества $\Phi(x(0))$ как $\mathbf{x} = (x(0), x(1), \ldots) \in \Phi(x(0))$. Наше первое предположение состоит в следующем.

Предположение 6.1. *Множество $G(x)$ не пусто для любого $x(0) \in X$, предел $\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x(t),\ x(t+1))$ существует и конечен.*

Это предположение более сильно, чем предположения, необходимые для доказательства последующих утверждений. Точнее, в большинстве задач динамического программирования достаточным является предположение о существовании предела в предположении 6.1. Однако оптимизационные задачи, в которых домохозяйства или фирмы достигают бесконечных значений целевой функции, не представляют интереса в экономической теории по двум причинам. Во-первых, если некоторые агенты достигают бесконечного значения целевой функции, в большинстве случаев задача оказывается не вполне определенной математически. Во-вторых, в этом случае основные понятия экономической науки, такие как оптимальный выбор при ограниченных ресурсах, перестают иметь смысл.

Предположение 6.2. *Множество X является компактным подмножеством пространства $\mathbb{R}^K$, множество значений отображения G состоит из компактных множеств, не содержит пустого множества и отображение G непрерывно. Более того, функция U: $\mathbf{X}_G \to \mathbb{R}$ непрерывна, где $\mathbf{X}_G = \{(x, y) \in X \times X;\ y \in G(x)\}$.*

Это предположение также выглядит естественным. Мы вынуждены наложить ограничения на элементы множества $G(x)$, так как решение задачи оптимизации на некомпактных множествах не обладает хорошими свойствами (см. приложение А). Предположение о непрерывности функции U не ведет к значительной потере общности в большинстве экономических задач. Во всех моделях этой книги функция U является непрерывной функцией. Наиболее сильным из всех является предположение о том, что вектор переменных состояния лежит в компактном множестве, то есть множество X компактно. Большинство результатов этой главы может быть обобщено для случая, когда множество X не является компактным, однако для этого необходимо более громоздкие обозначение и анализ становится сложнее. Случай, когда множество X не является компактным, представляет интерес в задачах теории экономического роста, потому что в большинстве интересных задач теории роста переменная состояния (например, физический капитал) перманентно растет. Несмотря на это, во многих случаях использование подходящей нормализации переменных позволяет сформулировать математическую задачу, в которой вектор переменных состояния лежит в компактном множестве. Одним из важных типов задач, где такая нормализация невозможна и множество X оказывается некомпактным, являются задачи теории эндогенного роста.

Однако в силу того, что инструментарий, развитый в следующей главе, не требует предположения о компактности множества X, а также потому что для анализа моделей эндогенного роста мы будем часто работать в непрерывном времени, мы упростим изложение в этой главе предположением о компактности множества X.

Заметим также, что, так как множество X компактно, отображение $G(x)$ непрерывно и принимает компактные значения, множество $\mathbf{X}_G$ также будет компактно. Так как непрерывная функция, определенная на компакте, ограничена (следствие A.1 в приложении A), из предположения 6.2 следует, что функция U ограничена, что окажется важным при доказательстве ряда утверждений далее.

Во многих (но не во всех) экономических задачах дополнительно накладываются ограничения на структуру предпочтений домохозяйств и производственную структуру экономики, например предположения о вогнутости и монотонности моментальной функции выигрыша U или о выпуклости ограничений. Такие предположения позволяют нам доказать ряд дополнительных важных результатов. Опишем эти предположения более академично.

Предположение 6.3. *Функция U вогнута. То есть для любого значения $\alpha \in (0, 1)$ и для любых пар $(x, y) \in \mathbf{X}_G$, $(x', y') \in \mathbf{X}_G$ выполняется следующее неравенство:*

$$U(\alpha x + (1-\alpha)x', \alpha y + (1-\alpha)y')) \geq \alpha U(x, y) + (1-\alpha)U(x', y').$$

Более того, если $x \neq x'$, то

$$U(\alpha x + (1-\alpha)x', \alpha y + (1-\alpha)y') > \alpha U(x, y) + (1-\alpha)U(x', y').$$

Функция G выпукла. То есть для любого значения $\alpha \in [0, 1]$ и для всех $x \in X, x' \in X, y \in X, y' \in X$, таких, что $y \in G(x)$ и $y' \in G(x')$ выполняется следующее включение:

$$\alpha y + (1-\alpha)y' \in G(\alpha x + (1-\alpha)x').$$

Это предположение накладывает ограничения, схожие с используемыми во многих экономических задачах: ограничивающее множество предполагается выпуклым, а моментальная функция выигрыша — вогнутой. Эти условия схожи с условием строгой вогнутости, однако являются более слабыми.

Следующее предположение накладывает дополнительные ограничения на вид моментальной функции выигрыша. В частности, мы потребуем, чтобы функция выигрыша возрастала по переменным состояния (своим первым K аргументам), а также чтобы увеличение значения переменной состояния вело к ослаблению ограничений (то есть чтобы большее значение переменной x означало большую возможность выбора).

Предположение 6.4. *Для любого $y \in X$ функция $U(\cdot, y)$ возрастает по своим первым K аргументам. Отображение G является монотонным в том смысле, что если $x \le x'$, то $G(x) \subset G(x')$.*

Последнее предположение связано с дифференцируемостью функции выигрыша и является стандартным в большинстве экономических моделей. Это предположение позволяет нам использовать аппарат математического анализа.

Предположение 6.5. *Моментальная функция выигрыша U является непрерывно дифференцируемой во всех внутренних точках своей области определения $\mathbf{X}_G$.*

Теперь, используя эти предположения, мы можем сформулировать ряд теорем. Их доказательства будут приведены в параграфе 6.5.

Теорема 6.1. Об эквивалентности значений. *Допустим, что предположение* 6.1 *выполнено. Тогда для любого $x \in X$ любое решение задачи* 6.2 $V^*(x)$ *также является решением задачи* 6.3. *Более того, любое решение задачи* 6.3 $V(x)$ *также является решением задачи* 6.2. *Таким образом, для любого $x \in X$ выполняется равенство $V^*(x) = V(x)$.*

Следовательно, если предположение 6.1 выполняется, значения целевой функции в итеративной задаче и в задаче в рекурсивной формулировке совпадают. В следующей теореме утверждается более важный результат о том, что решения задач 6.2 и 6.3 совпадают.

Теорема 6.2. Принцип оптимальности. *Допустим, что предположение* 6.1 *выполнено. Рассмотрим доступный план $\mathbf{x}^* \in \Phi(x(0))$, на котором функция стоимости задачи* 6.2 *достигает значения $V^*(x(0))$. Тогда для всех $t = 0, 1, \ldots$ при $x^*(0) = x(0)$ выполняется следующее равенство:*

$$V^*(x^*(t)) = U(x^*(t), x^*(t+1)) + \beta V^*(x^*(t+1)). \qquad (6.3)$$

Более того, если некоторый план $\mathbf{x}^* \in \Phi(x(0))$ удовлетворяет равенству (6.3), *то на нем достигается оптимальное значение задачи* 6.2.

Эта теорема является важнейшим концептуальным результатом теории динамического программирования. Она утверждает, что выигрыш от использования оптимального плана (последовательности) $\mathbf{x}^* \in \Phi(x(0))$ может быть разбит на две части: текущий выигрыш $U(x^*(t), x^*(t+1))$ и суммарный выигрыш в будущем $\beta V^*(x^*(t+1))$. Последний представляет собой дисконтированную стоимость задачи при начальном значении, равному значению вектора переменных состояния в следующем периоде $x^*(t+1)$. Так как значения функции V^* в задаче 6.2 и функции V в задаче 6.3 совпадают (см. теорему 6.1), из равенства (6.3) следует равенство (6.2).

Настолько же важна и вторая часть теоремы 6.2. В ней утверждается, что если доступный план $\mathbf{x}^*$ с начальным значением $x(0)$, то есть $x^* \in \Phi(x(0))$, удовлетворяет равенству (6.3), то на нем достигается значение $V^*(x(0))$. Следовательно, в теореме утверждается, что мы можем перейти от решения рекурсивной задачи к решению задачи в оригинальной постановке и наоборот. Следовательно, если предположение 6.1 выполняется, мы не теряем решений задачи при ее рекурсивной формулировке.

В следующих теоремах описано несколько важных свойств функции стоимости V задачи 6.3. С их помощью мы можем описать оптимальный план в задаче динамической оптимизации качественным образом, не прибегая в поиску решения в явном виде.

Теорема 6.3. О существовании решения. *Допустим, что предположения 6.1 и 6.2 выполнены. Тогда существует единственная непрерывная ограниченная функция $V: X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию (6.1). Более того, оптимальный план $\mathbf{x}^* \in \Phi(x(0))$ существует для любого значения $x(0) \in X$.*

В этой теореме формулируются два важных результата. Первый состоит в единственности функции стоимости (а следовательно, и уравнения Беллмана) в задачах динамического программирования. Второй результат говорит о существовании оптимального плана. Из этой теоремы, вместе с теоремой 6.1, вытекает существование оптимальной функции (соответствия) выбора, на которой достигается верхняя грань функции стоимости V^* задачи 6.2. В теореме также утверждается непрерывность и ограниченность функций V и V^*. Однако, несмотря на то что функция стоимости единственна, оптимальный план в задаче 6.2 (или в задаче 6.3) может не быть единственным. Это может произойти в том случае, когда максимум функции стоимости достигается на двух различных доступных последовательностях. Так же как и в статических задачах оптимизации, не единственность решения является следствием невыполнения условия строгой вогнутости целевой функции. Выполнение предположения 6.3 гарантирует единственность оптимального плана. Вначале покажем, что из этого предположения следует строгая вогнутость функции стоимости V.

Теорема 6.4. О вогнутости функции стоимости. *Допустим, что предположения 6.1, 6.2 и 6.3 выполнены. Тогда единственная функция стоимости $V: X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию (6.1), строго вогнута.*

Более того, нетрудно убедиться, что, если при ослаблении предположения 6.3 таким образом, что функция выигрыша U вогнута (без дополнительного требования $x \neq x'$ в предположении), выполняется более слабая версия теоремы 6.4, из которой следует вогнутость функции стоимости V. Из двух вышеприведенных теорем вытекает следствие 6.1.

Следствие 6.1. *Допустим, что предположения* 6.1, 6.2 *и* 6.3 *выполнены. Тогда для любого* $x(0) \in X$ *существует единственный оптимальный план* $\mathbf{x}^* \in \Phi(x(0))$. *Более того, оптимальный план может быть представлен в виде* $x^*(t+1) = \pi(x^*(t))$, *где функция* $\pi\colon X \to X$ — *непрерывная функция выбора.*

В этом следствии утверждается, что «функция выбора» π действительно является функцией, а не соответствием. Поэтому оно представляется достаточно важным. Этот результат является следствием того, что x^* определен единственным образом. Из этого утверждения также следует непрерывность функции выбора π по всем переменным состояния. Более того, в случае существования вектора параметров $\mathbf{z}$, непрерывно изменяющего вид ограничительного соответствия Φ или моментальной функции выигрыша U аналогичным образом можно показать, что функция выбора π является непрерывной и по этому вектору параметров. Это свойство позволяет вести качественный анализ динамических макроэкономических моделей в различных предположениях.

В следующей теореме утверждается, что при выполнении предположения 6.4 функция стоимости V также оказывается строго возрастающей.

Теорема 6.5. О монотонности функции стоимости. *Допустим, что предположения* 6.1, 6.2 *и* 6.4 *выполнены. Пусть функция* $V\colon X \to \mathbb{R}$ *является решением задачи* (6.1). *Тогда функция* V *строго монотонно возрастает по всем своим аргументам.*

Основной причиной использования рекурсивной формулировки является возможность описания решения задачи динамической оптимизации с ее помощью. Так же как и в статических задачах, наиболее простым способом сделать это является использование методов дифференциального исчисления. Основная трудность в использовании методов дифференциального исчисления при решении задачи (6.1) состоит в том, что выражение в правой части равенства (6.1) содержит функцию V, которая определяется эндогенно. Мы можем использовать методы дифференциального исчисления только в том случае, если мы уверены в том, что функция стоимости V действительно является дифференцируемой. Следующая теорема позволяет нам установить этот факт. В этой теореме также, с помощью одной версии теоремы об огибающей (теорема А.31 в приложении А), выводится формула для градиента функции стоимости. Напомним, что символ $\mathrm{int}X$ обозначает множество внутренних точек множества X, символ $D_x f$ — градиент функции f по вектору переменных x, а символ Df — градиент функции f по всем ее аргументам.

Теорема 6.6. О дифференцируемости функции стоимости. *Допустим, что предположения* 6.1, 6.2, 6.3 *и* 6.5 *выполнены. Пусть* $\pi(\cdot)$ *— функция выбора, определенная в следствии* 6.1. *Предположим, что* $x \in \mathrm{int}X$ *и* $\pi(x) \in \mathrm{int}G(x)$. *Тогда функция стоимости* $V(\cdot)$ *является дифференцируемой по вектору переменных* x, *а ее градиент задается следующим равенством:*

$$DV(x) = D_x U(x, \pi(x)). \tag{6.4}$$

Эти результаты позволяют нам использовать методы динамического программирования для решения широкого класса динамических задач. Прежде чем перейти к этому, нам необходимо обсудить доказательства этих утверждений. В следующем параграфе мы представим ряд базовых результатов функционального анализа, необходимых для доказательства вышеприведенных теорем, а в параграфе 6.5 мы докажем теоремы 6.1–6.6.

6.4. Теорема о сжимающем отображении и ее приложения*

В этом параграфе мы представим ряд математических утверждений, необходимых для дальнейшего изучения методов динамического программирования. В некотором смысле материал этого параграфа можно рассматривать как отклонение от основной линии повествования. Поэтому читатель может пропустить этот и следующий параграф без вреда для усвоения дальнейшего материала книги. Вместе с этим материал этого и следующего параграфов полезен для понимания основ динамического программирования, и это понимание позволит читателю лучше усвоить методы динамического программирования. Недостаточно подготовленному математически читателю следует ознакомиться с приложением А прежде чем перейти к чтению данного параграфа.

Напомним из приложения А, что метрическое пространство (S, d) — это множество S с определенной на нем функцией метрики d, обладающей стандартными свойствами (в частности, удовлетворяющей неравенству треугольника, см. определение А.1). Мы будем обозначать метрику символом d от английского слова *distance* (расстояние), так как в некотором смысле метрика определяет расстояние между двумя элементами множества S. Понятие метрического пространства является более общим, чем понятие конечномерного евклидова пространства $\mathbb{R}^K$. Но, так же как и в конечномерных пространствах, наибольший интерес для нас будут представлять функции на метрических пространствах, принимающие значения в них самих. Чтобы отличать их от функций, принимающих вещественные значения, мы будем называть их операторами на метрическом пространстве и часто обозначать буквой T (то есть $T\colon S \to S$). Стандартным обозначением для образа элемента $z \in S$ при применении оператора T будет Tz (вместо более привычного $T(z)$). С другой стороны, образ подмножества метрического пространства (подпространства) $Z \subset S$ будем обозначать как $T(Z)$ (то есть $T(z) = \{x \in S: \exists z \in Z\}$ такая, что $Tz = x$). Далее везде мы будем использовать эти стандартные обозначения.

Определение 6.1. *Пусть (S, d) — метрическое пространство, а $T: S \to S$ — оператор, отображающий его в себя. Будем называть отображение T сжимающим отображением (с модулем β) если существует константа $\beta \in (0, 1)$, такая, что для всех $z_1 \in S$, $z_2 \in S$ выполняется следующее неравенство:*

$$d(Tz_1, Tz_2) \leq \beta d(z_1, z_2).$$

Другими словами, сжимающее отображение равномерно сокращает расстояние между любыми двумя элементами метрического пространства S.

Пример 6.2. *Рассмотрим в качестве метрического пространства отрезок вещественной прямой $S = [a, b]$ со стандартной метрикой на множестве вещественных чисел $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Тогда отображение $T: S \to S$ на нем будет сжимающим, если для некоторой константы $\beta \in (0, 1)$ выполняется следующее неравенство:*

$$\frac{|Tz_1 - Tz_2|}{|z_1 - z_2|} \leq \beta < 1 \text{ для всех } z_1 \in S, z_2 \in S, \text{ таких, что } z_1 \neq z_2. \blacksquare$$

Определение 6.1. *Элемент z метрического пространства S назовем неподвижной точкой отображения T, если выполняется равенство $Tz = z$.*

Напомним, что метрическое пространство (S, d) называется полным, если любая последовательность Коши (т. е. последовательность, чьи элементы становятся ближе друг к другу) элементов множества S сходится к некоторому элементу множества S (см. параграфы А.1 и А.2 в приложении А). Следующая теорема, несмотря на всю простоту ее формулировки, является одним из самых мощных результатов функционального анализа.

Теорема 6.7. Теорема о сжимающем отображении. *Пусть (S, d) — полное метрическое пространство. Предположим, что отображение $T: S \to S$ на нем является сжимающим. Тогда существует единственная неподвижная точка $\hat{z}$ отображения T, такая, что выполняется равенство*

$$T\hat{z} = \hat{z}.$$

Доказательство. (Существование). Для любого натурального $n = 1, 2, \ldots$ определим $T^n z = T(T^{n-1}z)$ (при $T^0 z = z$). Выберем любой элемент пространства $z_0 \in S$ и построим последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов множества S, такую, что $z_{n+1} = Tz_n$. Таким образом,

$$z_n = T^n z_0.$$

Так как отображение T является сжимающим, выполняется следующее неравенство:

$$d(z_2, z_1) = d(Tz_1, Tz_0) \le \beta d(z_1, z_0).$$

Применяя эту выкладку n раз, приходим к следующему неравенству:

$$d(z_{n+1}, z_n) \le \beta^n d(z_1, z_0). \tag{6.5}$$

Следовательно, для любых $m > n$ выполняется

$$d(z_m, z_n) \le d(z_m, z_{m-1}) + \ldots + d(z_{n+2}, z_{n+1}) + d(z_{n+1}, z_n) \le$$

$$\le (\beta^{m-1} + \ldots + \beta^{n+1} + \beta^n) d(z_1, z_0) \le \frac{\beta^n}{1-\beta} d(z_1, z_0), \tag{6.6}$$

где первое неравенство следует из неравенства треугольника (см. приложение A). Второе неравенство использует неравенство (6.5). В последнем неравенстве используется формула суммы геометрической прогрессии:

$$1/(1-\beta) = 1 + \beta + \beta^2 + \ldots > 1 + \beta + \ldots + \beta^{m-n-1}.$$

Из цепочки неравенств (6.6) при достаточно больших m и n элементы z_m и z_n будут стремиться друг к другу, и поэтому последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши. Так как метрическое пространство S полно, любая последовательность Коши на нем имеет предел в множестве S, и поэтому $z_n \to \hat{z}$ при $n \to \infty$.

На следующем шаге покажем, что элемент $\hat{z}$ является неподвижной точкой отображения T. Заметим, что для всех $z_0 \in S$ и $n \in N$ выполняется следующее неравенство:

$$d\left(T\hat{z}, \hat{z}\right) \le d\left(T\hat{z}, T^n z^0\right) + d(T^n z^0, \hat{z}) \le \beta d\left(\hat{z}, T^{n-1} z^0\right) + d\left(T^n z^0, \hat{z}\right),$$

где первое неравенство снова следует из неравенства треугольника, а второе неравенство верно вследствие того, что отображение T является сжимающим отображением. Так как $z_n \to \hat{z}$, оба слагаемых в правой части последнего неравенства стремятся к нулю при $n \to \infty$. Из этого следует, что $d\left(T\hat{z}, \hat{z}\right) = 0$ и, следовательно, $T\hat{z} = \hat{z}$, что завершает доказательство существования неподвижной точки отображения T.

(Единственность.) Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что существуют $\hat{z} \in S$, $z \in S$, такие, что $Tz = z$, $T\hat{z} = \hat{z}$ и $\hat{z} \ne z$. Из этого следует, что

$$0 < d\left(\hat{z}, z\right) = d\left(T\hat{z}, Tz\right) \le \beta d\left(\hat{z}, z\right),$$

что приводит к противоречию в силу предположения $\beta < 1$ и, таким образом, завершает доказательство единственности неподвижной точки отображения T. ■

Теорема о сжимающем отображении используется при доказательстве большого количества хорошо известных утверждений. Следующий пример и пример 6.4 демонстрируют, как она может быть использована при доказательстве существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения. Пример 6.4 показывает, как она используется при доказательстве теоремы о неявной функции (теорема A.25 в приложении A).

Пример 6.3. Рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{6.7}$$

с граничным условием $x(0) = c \in \mathbb{R}$. Допустим, что функция $f: [0, \bar{x}] \to \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица, то есть существует константа $M < \infty$, такая, что для всех $x' \in [0, \bar{x}]$ *и* $x'' \in [0, \bar{x}]$ выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| \le M|x'' - x'|$. Теорема о сжимающем отображении может быть использована для доказательства существования дифференцируемой функции $\dot{x}(t)$, являющейся единственным решением дифференциального уравнения (6.7) на любом компактном множестве, в частности на отрезке $[0, s]$ для любого $s \in [0, \bar{x}]$. Для доказательства этого утверждения рассмотрим метрическое пространство $\mathbf{C}[0, s]$ непрерывных функций на отрезке $[0, s]$ и определим на нем оператор T следующим образом:

$$Tg(z) = c + \int_0^s f(g(x))dx \ \text{ для всех } z \in [0, s]$$

для любой функции $g \in \mathbf{C}[0, s]$. Заметим, что отображение T переводит пространство непрерывных функций на отрезке $[0, s]$ в себя, другими словами T: $\mathbf{C}[0, s] \to$ $\to \mathbf{C}[0, s]$. Более того, несложно показать, что при некотором значении s оно является сжимающим отображением. Это следует из того, что для любого $z \in [0, s]$ по условию Липшица для функции $f(\cdot)$ выполняется следующее неравенство:

$$\left|\int_0^z f(g(x))dx - \int_0^z f(\tilde{g}(x))dx\right| \le \int_0^z M\left|g(x) - \tilde{g}(x)\right|dx. \tag{6.8}$$

Из неравенства (6.8) следует, что

$$\left\|Tg(z) - T\tilde{g}(z)\right\| \le M \times s \times \left\|g - \tilde{g}\right\|,$$

где $\|\cdot\|$ обозначает стандартную норму на пространстве непрерывных функций $\mathbf{C}[0, s]$. Выбирая $s < 1/M$, мы убеждаемся в том, что при достаточно малых значениях s оператор T действительно является сжимающим отображением. Тогда из теоремы 6.7 следует, что он обладает единственной неподвижной точкой на пространстве $\mathbf{C}[0, s]$.

Эта неподвижная точка будет дифференцируемой функцией, являющейся единственным решением дифференциального уравнения (6.7). В упражнении (6.4) читатель сможет повторить шаги доказательства и показать, как оно может быть продолжено для пространства $\mathbf{C}[0, \bar{x}]$. ■

Для нас основная польза от теоремы о сжимающем отображении состоит в том, что с ее помощью мы можем доказать существование и единственность функции стоимости V в задаче 6.3, что значительно облегчает анализ задач динамического программирования. Прежде чем перейти к доказательству, рассмотрим еще один полезный пример. Напомним, что если метрическое пространство (S, d) полно, а его подмножество S' замкнуто в нем по метрике d, то метрическое пространство (S', d) также будет полно.

Теорема 6.8. Приложение теоремы о сжимающем отображении. *Предположим, что метрическое пространство (S, d) полно, а оператор T является сжимающим отображением на нем с неподвижной точкой $\hat{z}$, то есть $T\hat{z} = \hat{z}$. Тогда верны следующие утверждения:*

1. *Если подмножество $S' \subset S$ замкнуто в S и выполняется включение $T(S') \subset S'$, то $\hat{z} \in S'$.*
2. *Более того, если для некоторого подмножества $S'' \subset S$ выполняется включение $T(S') \subset S'' \subset S'$, то $\hat{z} \in S''$.*

Доказательство. Рассмотрим элемент пространства $z_0 \in S'$ и построим последовательность $\left\{T^n z_0\right\}_{n=1}^{\infty}$. Так как выполняется условие $T(S') \subset S'$, каждый элемент этой последовательности лежит в множестве S'. Из теоремы 6.7 следует, что $T^n z_0 \to \hat{z}$ при $n \to \infty$. Так как множество S' замкнуто в S, из этого следует $\hat{z} \in S'$, что завершает доказательство первой части теоремы.

Из первой части доказательства следует, что $\hat{z} \in S'$. Тогда из включения $T(S') \subset S'' \subset S'$ следует, что $\hat{z} = T\hat{z} \in T(S') \subset S''$, это завершает доказательство второй части теоремы. ■

Вторая часть теоремы 6.8 очень важна при доказательстве ряда утверждений, например о строгой вогнутости и строгой монотонности функции стоимости. Это следует из того, что множество (пространство) строго вогнутых функций или множество строго возрастающих функций не являются замкнутыми в пространстве непрерывных функций (и не полны как метрические пространства). Поэтому мы не можем применять теорему о сжимающем отображении для этих функциональных пространств напрямую. Вторая часть теоремы 6.8 позволяет нам обойти эту проблему.

Предыдущие две теоремы показывают, что свойство оператора быть сжимающим отображением является одновременно очень простым и очень мощным. Несмотря на это, за исключением некоторых простых

случаев, таких как пример 6.2, проверка, действительно ли оператор является сжимающим отображением, зачастую трудна. Эта задача оказывается в особенности сложной на пространствах, чьими элементами являются функции, используемые в контексте задач динамического программирования. Следующая теорема описывает простые достаточные условия для того, чтобы оператор на метрическом пространстве ограниченных функций был сжимающим отображением. При доказательстве теоремы мы будем использовать следующее обозначение. Для вещественнозначной функции $f(\cdot)$ и константы $c \in \mathbb{R}$ определим $(f + c)(x) = f(x) + c$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 6.9. Достаточные условия сжимающего отображения Блэквелла. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^K$. Рассмотрим пространство $\mathbf{B}(X)$ ограниченных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$, определенных на множестве X со стандартной нормой верхней грани $\|\cdot\|$. Предположим, что $\mathbf{B}'(X) \subset \mathbf{B}(X)$, и рассмотрим оператор $T\colon \mathbf{B}'(X) \to \mathbf{B}'(X)$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1. *Монотонность. Для любых функций $f \in \mathbf{B}'(X)$, $g \in \mathbf{B}'(X)$, таких, что $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in X$ выполняется неравенство $(Tf)(x) \le (Tg)(x)$ для всех $x \in X$.*
2. *Дисконтирование. Существует константа $\beta \in (0, 1)$ такая, что для всех $f \in \mathbf{B}(X)$, $c \ge 0$ и $x \in X$ выполняется неравенство:*

$$[T(f + c)](x) \le (Tf)(x) + \beta c.$$

Тогда оператор T является сжимающим отображением на пространстве $\mathbf{B}'(X)$ с модулем β.

Доказательство. По определению нормы верхней грани $\|f - g\| = \max_{x \in X}|f(x) - g(x)|$. Тогда для всех функций $f \in \mathbf{B}'(X)$, $g \in \mathbf{B}'(X)$ выполняются следующие неравенства:

$$f(x) \le g(x) + \|f - g\| \text{ для всех } x \in X,$$

$$(Tf)(x) \le T[g + \|f - g\|](x) \text{ для всех } x \in X,$$

$$(Tf)(x) \le (Tg)(x) + \beta\|f - g\| \text{ для всех } x \in X, \tag{6.9}$$

где второе неравенство следует из предположения о монотонности из первого после применения оператора T, а третье использует свойство дисконтирования (а также то, что $\|f - g\|$ — вещественное число). Аналогичным образом можно убедиться в следующем:

$$g(x) \le f(x) + \|f - g\| \text{ для всех } x \in X,$$

$$(Tg)(x) \le T[f + \|g - f\|](x) \text{ для всех } x \in X,$$

$$(Tg)(x) \le (Tf)(x) + \beta\|g - f\| \text{ для всех } x \in X. \tag{6.10}$$

Объединяя неравенства (6.9) и (6.10), получаем следующее неравенство:

$$\|Tf - Tg\| \le \beta\|f - g\|,$$

что показывает, что оператор T является сжимающим отображением и завершает доказательство теоремы. ■

В дальнейшем мы убедимся в том, что достаточные условия Блэквелла легко проверяются во многих экономических задачах, включая задачи оптимального и равновесного экономического роста.

6.5. Доказательства основных теорем динамического программирования*

Далее мы приведем доказательства теорем 6.1–6.6. В начале докажем простую лемму, которая нам понадобится для этих доказательств. Для любой доступной бесконечной последовательности $\mathbf{x} = (x(0), x(1), \ldots) \in \Phi(x(0))$, начинающейся с $x(0) \in X$, обозначим

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x(t), x(t+1))$$

значение целевой функции при выборе этой, возможно неоптимальной, доступной последовательности. Из предположения 6.1 следует, что значение $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})$ определено и конечно. Следующая лемма показывает, что $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})$ может быть представлено как сумма двух слагаемых: текущий выигрыш и суммарный выигрыш в будущем.

Лемма 6.1. *Допустим, что предположение* 6.1 *выполнено. Тогда для любого* $x(0) \in X$ *и для любой последовательности* $\mathbf{x} \in \Phi(x(0))$ *выполняется следующее неравенство:*

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = U(x(0), x(1)) + \beta\bar{\mathbf{U}}(\bar{\mathbf{x}}'),$$

где $\bar{\mathbf{x}}' = (x(1), x(2), \ldots)$.

Доказательство. Так как из предположения 6.1 следует, что значение $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})$ определено и конечно, оно может быть представлено в следующем виде:

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t U(x(t), x(t+1)) =$$

$$= U(x(0), x(1)) + \beta\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s U(x(s+1), x(s+2)) = U(x(0), x(1)) + \beta\bar{\mathbf{U}}(\bar{\mathbf{x}}'),$$

что завершает доказательство леммы. ■

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 6.1, определим явным образом, что означает утверждение о том, что функции V и V^* являются решениями задач 6.2 и 6.3. Используя введенные выше обозначения, для любого $x(0) \in X$

$$V^*(x(0)) = \sup_{\mathbf{x} \in \Phi(x(0))} \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}). \tag{6.11}$$

Так как из предположения 6.1 следует, что все значения выше конечны, из неравенства (6.11) следует, что

$$V^*(x(0)) \ge \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \text{ для всех } \mathbf{x} \in \Phi(x(0)), \tag{6.12}$$

так как по определению верхней грани значение целевой функции не может превышать $V^*(x(0))$ ни на одной доступной последовательности. Однако если некоторая функция $\tilde{V}(\cdot)$ удовлетворяет условию (6.12), любая функция вида $\tilde{V}(\cdot)+\alpha$, где $\alpha > 0$ также будет удовлетворять ему. Поэтому это условие недостаточно. Поэтому мы также потребуем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\mathbf{x}' \in \Phi(x(0))$, такая, что выполняется следующее неравенство:

$$V^*(x(0)) \le \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}') + \varepsilon. \tag{6.13}$$

Введем аналогичные требования и для того, чтобы функция $V(\cdot)$была решением задачи 6.3. А именно: для любого $x(0) \in X$ и для всех $y \in G(x(0))$ выполняется неравенство:

$$V(x(0)) \ge U(x(0), y) + \beta V(y'). \tag{6.14}$$

Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует $y' \in G(x(0))$, такой, что выполняется следующее неравенство:

$$V(x(0)) \le U(x(0), y') + \beta V(y') + \varepsilon. \tag{6.15}$$

Доказательство теоремы 6.1. В случае $\beta = 0$ задачи 6.2 и 6.3 идентичны, поэтому доказательство тривиально. Предположим, что $\beta > 0$, и рассмотрим некоторые $x(0) \in X$ и $x(1) \in G(x(0))$. Из неравенства (6.13) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\mathbf{x}'_\varepsilon \in \Phi(x(1))$, такая, что $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}'_\varepsilon) \ge V^*(x(1)) - \varepsilon$. Более того, из неравенства (6.12) следует, что для любой последовательности $\mathbf{x} = (x(0), x(1), \ldots) \in \Phi(x(0))$, а поэтому и для последовательности $\mathbf{x}_\varepsilon = (x(0), \mathbf{x}'_\varepsilon)$ выполняется неравенство $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_\varepsilon) \le V^*(x(0))$. Тогда из леммы 6.1 следует, что

$$V^*(x(0)) \ge U(x(0), x(1)) + \beta\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}'_\varepsilon) \ge U(x(0), x(1)) + \beta V^*(x(1)) - \beta\varepsilon.$$

Так как значение $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, из последнего неравенства следует, что

$$V^*(x(0)) \ge U(x(0), x(1)) + \beta V^*(x(1)),$$

и поэтому функция $V^*(\cdot)$ удовлетворяет условию (6.14).

Далее. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Из неравенства (6.13) следует, что существует доступная бесконечная последовательность $\mathbf{x}'_\varepsilon = (x(0), x'_\varepsilon(1), x'_\varepsilon(2), \ldots) \in \Phi(x(0))$, такая, что выполняется следующее неравенство:

$$\bar{\mathrm{U}}(\mathbf{x}'_\varepsilon) \ge V^*(x(0)) - \varepsilon.$$

Так как $\mathbf{x}''_\varepsilon = (x'_\varepsilon(1), x'_\varepsilon(2), \ldots) \in \Phi(x'_\varepsilon(1))$, а значение $V^*(x'_\varepsilon(1))$ является верхней гранью задачи 6.2 начиная с $x'_\varepsilon(1)$, из леммы 6.1 следует, что выполняются неравенства:

$$V^*(x(0)) - \varepsilon \le U(x(0), x'_\varepsilon(1)) + \beta \bar{\mathrm{U}}(\mathbf{x}''_\varepsilon) \le U(x(0), x'_\varepsilon(1)) + \beta V^*(x'_\varepsilon(1)).$$

Из последнего неравенства следует, что функция $V^*(\cdot)$ удовлетворяет условию (6.15) в силу того, что $x'_\varepsilon(1) \in G(x(0))$ при любом $\varepsilon > 0$. Из этого следует, что любое решение задачи 6.2, удовлетворяющее условиям (6.14) и (6.15), является и решением задачи 6.3.

Для доказательства обратного утверждения заметим, что из условия (6.14) следует, что для любого $x(1) \in G(x(0))$ выполняется следующее неравенство:

$$V(x(0)) \ge U(x(0), x(1)) + \beta V(x(1)).$$

Далее, делая итеративные подстановки для $V(x(1))$, $V(x(2))$ и так далее и определяя $\mathbf{x} = (x(0), x(1), \ldots)$, получаем следующее неравенство:

$$V(x(0)) \ge \sum_{t=0}^{n} \beta^t U(x(t), x(t+1)) + \beta^{n+1} V(x(n+1)).$$

Более того,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t U(x(t), x(t+1)) = \bar{\mathrm{U}}(\mathbf{x})$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \beta^{n+1} V(x(n+1)) = \lim_{n\to\infty}\left[\beta^{n+1} \lim_{m\to\infty} \sum_{t=n}^{m} \beta^t U(x(t), x(t+1))\right] = 0$$

(так как из предположения 6.1 следует, что предел $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{t=n}^{m} \beta^t U(x(t), x(t+1))$ конечен). Поэтому для любого $\mathbf{x} \in \Phi(x(0))$ выполняется неравенство:

$$V(x(0)) \ge \bar{\mathrm{U}}(\mathbf{x}).$$

Следовательно, функция $V(\cdot)$ удовлетворяет условию (6.12).

Далее. Рассмотрим положительное число $\varepsilon > 0$. Из неравенства (6.15) следует, что любого $\varepsilon' = \varepsilon(1-\beta) > 0$ существует $x_\varepsilon(1) \in G(x(0))$, такой, что выполняется следующее неравенство:

$$V(x(0)) \le U(x(0), x_\varepsilon(1)) + \beta V(x_\varepsilon(1)) + \varepsilon'.$$

Теперь выберем $x_\varepsilon(t) \in G(x(t-1))$, удовлетворяющий условию $x_\varepsilon(0) = x(0)$. Введем обозначение $\mathbf{x}_\varepsilon \equiv (x(0), x_\varepsilon(1), x_\varepsilon(2), \ldots)$. Еще раз делая итеративные подстановки для $V(x_\varepsilon(1))$, $V(x_\varepsilon(2))$, ..., приходим к следующему неравенству:

$$V(x(0)) \le$$

$$\le \sum_{t=0}^{n} \beta^t U(x_\varepsilon(t), x_\varepsilon(t+1)) + \beta^{n+1} V(x(n+1)) + \varepsilon' + \varepsilon'\beta + \ldots + \varepsilon'\beta^n \le \bar{\mathrm{U}}(\mathbf{x}_\varepsilon) + \varepsilon,$$

где последнее неравенство следует из определения ε (а именно из того, что $\varepsilon = \varepsilon' \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t$) и из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{t=0}^{n} \beta^t U(x_\varepsilon(t), x_\varepsilon(t+1)) = \bar{\mathrm{U}}(\mathbf{x}_\varepsilon)$. Из этого неравенства следует, что функция $V(\cdot)$ удовлетворяет условию (6.13), что завершает доказательство теоремы. ■

При решении экономических задач для нас чаще всего представляет интерес не максимальное значение целевой функции, а оптимальный план, на котором это значение достигается. Напомним, что вопрос о том, будут ли оптимальные планы в задачах 6.2 и 6.3 эквивалентны, возник в контексте теоремы 6.2. Далее мы перейдем к доказательству этой теоремы.

Доказательство теоремы 6.2. Из условия теоремы следует, что последовательность $\mathbf{x}^* \equiv (x(0), x^*(1), x^*(2), \ldots)$ является решением задачи 6.2, то есть функция стоимости $V^*(x(0))$ достигает на нем верхней грани при начальном значении $x(0)$. Определим последовательность $\mathbf{x}_t^*$ как $\mathbf{x}_t^* \equiv (x^*(t), x^*(t+1), \ldots)$.

На первом шаге доказательства покажем, что верхняя грань целевой функции достигается на последовательности $\mathbf{x}_t^*$ при начальном значении $x^*(t)$ для любого $t \ge 0$, то есть что

$$\bar{\mathrm{U}}(\mathbf{x}_t^*) = V^*(x^*(t)). \qquad (6.16)$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Справедливость утверждения на базе индукции (в случае $t = 0$) очевидна, так как $\mathbf{x}_0^* = \mathbf{x}^*$ и целевая функция задачи достигает верхней грани $V^*(x(0))$ на последовательности $\mathbf{x}^*$ по условию теоремы.

Далее предположим, что утверждение верно для некоторого t (то есть равенство (6.16) выполняется для t) и покажем, что тогда оно верно и для $t+1$. Из равенства (6.16) следует, что выполняется следующее равенство:

$$V^*(x^*(t)) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_t^*) = U(x^*(t),\ x^*(t+1)) + \beta\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_{t+1}^*). \qquad (6.17)$$

Пусть $\mathbf{x}_{t+1} = (x^*(t+1), x(t+2), \ldots) \in \Phi(x^*(t+1))$ — некоторый доступный план с начальным значением $x^*(t+1)$. По определению $\mathbf{x}_t = (x^*(t), \mathbf{x}_{t+1}) \in \Phi(x^*(t))$. Так как значение $V^*(x^*(t))$ является верхней гранью целевой функции при начальном значении $x^*(t)$, выполняется следующее неравенство:

$$V^*(x^*(t)) \geq \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_t) = U(x^*(t),\ x^*(t+1)) + \beta\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_{t+1}).$$

Объединяя это неравенство с равенством (6.17), получаем следующее неравенство:

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_{t+1}^*) \geq \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_{t+1})$$

для всех планов $\mathbf{x}_{t+1} \in \Phi(x^*(t+1))$. Поэтому при начальном значении $x^*(t+1)$ целевая функция достигает верхней грани на плане $\mathbf{x}_{t+1}^*$, и это завершает доказательство шага индукции. Таким образом, равенство (6.16) выполняется при всех $t \geq 0$.

Из равенства (6.16) также следует, что

$$V^*(x^*(t)) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_t^*) = U(x^*(t),\ x^*(t+1)) + \beta\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_{t+1}^*) =$$
$$= U(x^*(t),\ x^*(t+1)) + \beta V^*(x^*(t+1)).$$

Таким образом, равенство (6.3) выполняется и это завершает доказательство первой части теоремы.

Далее предположим, что равенство (6.3) выполняется для последовательности $\mathbf{x}^* \in \Phi(x(0))$. Тогда, делая итеративные подстановки, получаем следующее равенство:

$$V^*(x(0)) = \sum_{t=0}^{n} \beta^t U(x^*(t),\ x^*(t+1)) + \beta^{n+1} V^*(x(n+1)).$$

Так как функция $V^*(\cdot)$ ограничена (см. предположение 6.1), выполняется следующее равенство:

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}^*) = \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t U(x^*(t),\ x^*(t+1)) = V^*(x(0)).$$

Таким образом, мы убеждаемся в том, что целевая функция задачи (6.2) достигает оптимума на последовательности $\mathbf{x}^*$, что завершает доказательство второй части теоремы 6.2. ■

Из этих двух теорем следует, что при выполнении предположения 6.1 мы можем свободно переходить от задачи 6.2 к задаче 6.3 и наоборот. Наша следующая задача состоит в доказательстве существования оптимального плана, на котором целевая функция достигает верхней грани. Мы приведем два различных доказательства, показывающих, каким образом можно убедиться в существовании оптимального плана в задачах 6.2 и 6.3, используя их эквивалентность. Первое доказательство является более абстрактным и ведется для итеративной постановки задачи (задача 6.2). Такой метод доказательства в особенности полезен при анализе нестационарных задач.

Доказательство теоремы 6.3 (версия 1). Рассмотрим задачу 6.2. Из предположений 6.1 и 6.2, следует, что целевая функция задачи 6.2 является непрерывной в топологии прямого произведения (см. теорему A.12 в приложении A). Более того, ограничивающее множество $\Phi(x(0))$ является замкнутым в пространстве X^∞ (прямом произведении счетного количества пространств X). Так как множество X компактно (по предположению 6.2), из теоремы Тихонова (теорема A.13 в приложении A) следует, что пространство X^∞ компактно в топологии прямого произведения. Так как любое замкнутое подмножество компактного множества компактно (лемма A.2 в приложении A), ограничивающее множество $\Phi(x(0))$ является компактным множеством. Тогда из теоремы Вейерштрасса (теорема A.9 в приложении A) следует, что в задаче 6.2 существует $\mathbf{x} \in \Phi(x(0))$, на котором целевая функция задачи достигает верхней грани $V^*(x(0))$. Более того, ограничивающее множество $\Phi(x(0))$ является непрерывным отображением и поэтому из теоремы Берга о максимуме (теорема A.16 в приложении A) следует, что функция $V^*(x(0))$ непрерывна. Так как $x(0) \in X$ и множество X компактно, из этого следует, что функция $V^*(x(0))$ ограничена (следствие A.1 в приложении A). ■

Доказательство теоремы 6.3 (версия 2). Рассмотрим пространство $\mathbf{C}(X)$ всех непрерывных функций, определенных на множестве X с нормой верхней грани $\|f(x)\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. В силу предположения 6.2 область определения X является компактным множеством, и поэтому все функции в пространстве $\mathbf{C}(X)$ ограничены, так как они являются непрерывными функциями (следствие A.1 в приложении A). Для любой функции $V \in \mathbf{C}(X)$ определим оператор T следующим образом:

$$TV(x) = \max_{y\in G(x)} \left[U(x,\ y) + \beta V(y)\right]. \qquad (6.18)$$

Неподвижная точка этого оператора $V = TV$ является решением задачи 6.3. Вначале докажем существование неподвижной точки этого оператора (решения задачи). Оптимизационная задача в правой части равенства (6.18) является задачей максимизации непрерывной функции на компактном множестве, и поэтому, по теореме Вейерштрасса (теорема А.9 из приложения А) она имеет решение. Следовательно, оператор T однозначно определен. Более того, так как по предположению 6.1 отображение $G(x)$, а пустое множество не лежит в множестве его значений, а также в силу того, что функции $U(x, y)$ и $V(y)$ непрерывны по условию теоремы, из теоремы Берга о максимуме (теорема А.16 из приложения А) следует, что функция

$$\max_{y\in G(x)}\left[U(x, y)+\beta V(y)\right]$$

непрерывна по переменной x. Поэтому $TV(x) \in \mathbf{C}(X)$ и оператор T отображает пространство $\mathbf{C}(X)$ в себя.

Нетрудно убедиться, что оператор T удовлетворяет достаточным условиям сжимающего отображения Блэквелла из теоремы 6.9 (см. упражнение 6.6). Следовательно, из теоремы 6.7 следует, что оператор T, заданный равенством 6.18, обладает единственной неподвижной точкой $V \in \mathbf{C}(X)$ и эта функция является единственным решением задачи 6.3.

Далее перейдем к задаче максимизации 6.3. Так как функции U и V непрерывны, а множество значений отображения $G(x)$ состоит из компактных множеств, из теоремы Вейерштрасса следует, что существует $y \in G(x)$, на котором целевая функция достигает максимума. Это задает непустое множество максимизаторов $\Pi(x)$ в задаче 6.3:

$$\Pi(x)=\arg\max_{y\in G(x)}\left\{U(x, y)+\beta V(y)\right\}. \tag{6.19}$$

Положим $\mathbf{x}^* = (x(0), x^*(1), \ldots)$, где $x^*(t + 1) \in \Pi(x^*(t))$ для всех $t \geq 0$. Тогда из теорем 6.1 и 6.2 следует, что последовательность $\mathbf{x}^*$ является оптимальным планом в задаче 6.2. ■

Дополнительный результат, следующий из второй версии доказательства теоремы 6.3 (который также можно получить из первой версии доказательства, но это потребует дополнительных выкладок), описывает свойство множества $\Pi(x)$ (или, что эквивалентно, отображения $\Pi\colon X \rightrightarrows X$), заданного равенством 6.19. Прямое применение теоремы Берга о максимуме показывает, что отображение Π является полунепрерывным сверху, а его множество значений состоит из компактных множеств. Мы будем использовать это свойство при доказательстве следствия 6.1. Прежде чем перейти к нему, приведем доказательство теоремы 6.4. Это доказательство показывает, каким образом теорема о сжимающем отображении (теорема 6.8) часто используется в анализе задач динамической оптимизации.

Доказательство теоремы 6.4. Напомним, что множество $\mathbf{C}(X)$ представляет собой пространство всех непрерывных (и поэтому ограниченных) функций на компактном множестве X. Обозначим множество всех ограниченных, непрерывных и (нестрого) вогнутых функций на множестве X как $\mathbf{C}'(X) \subset \mathbf{C}(X)$, а множество всех ограниченных, непрерывных и вогнутых функций как $\mathbf{C}''(X) \subset \mathbf{C}'(X)$. Очевидно, что множество $\mathbf{C}'(X)$ замкнуто в полном метрическом пространстве $\mathbf{C}(X)$, однако множество $\mathbf{C}''(X)$ не является замкнутым в нем. Определим оператор T равенством (6.18). Так как он является сжимающим отображением, он обладает единственной неподвижной точкой на пространстве $\mathbf{C}(X)$. Из теоремы 6.8 следует, что доказательство включения $T[\mathbf{C}'(X)] \subset \mathbf{C}''(X) \subset \mathbf{C}'(X)$ будет достаточным условием для того, чтобы эта неподвижная точка лежала в множестве $\mathbf{C}''(X)$ и, следовательно, для того чтобы функция стоимости была строго вогнутой. Рассмотрим функцию $V \in \mathbf{C}'(X)$ и для любого $\alpha \in (0, 1)$ и $x' \neq x''$ введем

$$x_\alpha \equiv \alpha x' + (1 - \alpha)x''.$$

Пусть $y' \in G(x')$ и $y'' \in G(x'')$ являются решениями задачи 6.3 с векторами переменных состояния x' и x'' соответственно. Тогда выполняются следующие равенства:

$$TV(x') = U(x', y') + \beta V(y'),$$

$$TV(x'') = U(x'', y'') + \beta V(y''). \tag{6.20}$$

Из предположения 6.3 (о том, что отображение G вогнуто) следует, что для $y_\alpha \equiv \alpha y' + (1 - \alpha)y'' \in G(x_\alpha)$ выполняется неравенство:

$$\begin{aligned} TV(x_\alpha) &\geq U(x_\alpha, y_\alpha) + \beta V(y_\alpha) > \\ &> \alpha[U(x', y') + \beta V(y')] + (1-\alpha)[U(x'', y'') + \beta V(y'')] = \\ &= \alpha TV(x') + (1-\alpha)TV(x''), \end{aligned}$$

где первое неравенство следует из того, что верхняя грань целевой функции с вектором переменных состояния x_α не обязательно достигается на $y_\alpha \in G(x_\alpha)$. Второе неравенство использует предположение 6.3 (о строгой вогнутости функции выигрыша U и вогнутости функции стоимости V), а третье неравенство следует из определения (6.20). Из этих рассуждений следует, что для любой функции $V \in \mathbf{C}'(X)$ значение оператора T на ней TV будет строго вогнутой функцией, и поэтому выполняется включение $T[\mathbf{C}'(X)] \subset \mathbf{C}''(X)$. Тогда из теоремы 6.8 следует, что единственная неподвижная точка V^* отображения T лежит в множестве $\mathbf{C}''(X)$ и, следовательно, является строго вогнутой функцией. ■

Доказательство следствия 6.1. Из предположения 6.3 следует, что функция выигрыша $U(x, y)$ вогнута по второму аргументу y, а из теоремы 6.4 следует, что при выполнении этого предположения функция стоимости $V(y)$ является строго вогнутой по y. Сумма вогнутой и строго вогнутой функций строго вогнута и правая часть в максимизационной задаче 6.3 строго вогнута по y. Следовательно, учитывая, что множество $G(x)$ выпукло при любом $x \in X$ (снова по предположение 6.3), для любого $x \in X$ существует единственный план $y \in G(x)$, на котором целевая функция задачи достигает верхней грани. Как показано выше, отображение $\Pi(x)$ полунепрерывно сверху, $\pi(x)$ также полунепрерывно сверху. Утверждение следствия 6.3 тогда вытекает из того, что полунепрерывное сверху отображение, принимающее единственное значение на каждом аргументе, является непрерывной функцией. ■

Доказательство теоремы 6.5. Доказательство этой теоремы также следует из теоремы 6.8. Обозначим множество всех ограниченных непрерывных неубывающих функций на метрическом пространстве X как $\mathbf{C}''(X) \subset \mathbf{C}'(X)$, а множество всех ограниченных непрерывных, строго возрастающих функций на X как $\mathbf{C}''(X) \subset X$. Так как множество $\mathbf{C}'(X)$ замкнуто в полном метрическом пространстве $\mathbf{C}(X)$, из теоремы 6.8 следует, что если выполняется включение $T[\mathbf{C}'(X)] \subset \subset \mathbf{C}''(X)$, то неподвижная точка оператора T, определенного в равенстве (6.18) лежит в множестве $\mathbf{C}''(X)$, и поэтому является строго возрастающей функцией. Чтобы убедиться в справедливости включения $T[\mathbf{C}'(X)] \subset \mathbf{C}''(X)$, рассмотрим любую неубывающую функцию $V \in \mathbf{C}'(X)$. Из предположения 6.4 следует, что функция $\max_{y \in G(x)} \{U(x, y)+\beta V(y)\}$ является строго возрастающей. Из этого следует, что $TV \in \mathbf{C}''(X)$, что завершает доказательство теоремы 6.5. ■

Для теоремы 6.6 мы также приведем два доказательства. Первое является более простым и показывает, что функция $V(x)$ обладает всеми частными производными и для нее определен вектор якобиана $DV(x)$. Второе доказательство опирается на более мощный результат из выпуклого анализа и утверждает, что функция $V(x)$ дифференцируема (см. параграф А.9 в приложении А, где приведен пример функции, обладающей всеми частными производными, но не являющейся дифференцируемой). Следует заметить, что второе доказательство более широко известно и чаще используется в литературе. Для первого доказательства введем следующие обозначения. $\varepsilon \downarrow 0$ будет значить, что последовательность ε состоит из положительных элементов и монотонно убывает к нулю, а $\varepsilon \uparrow 0$ что последовательность ε состоит из отрицательных элементов и монотонно возрастает к нулю.

Доказательство теоремы 6.6 (версия 1). Из следствия 6.1 вытекает, что отображение $\Pi(x)$ принимает единственное значение на каждом аргументе и поэтому может быть представлено как функция $\pi(x)$. По условию теоремы $\pi(x) = x' \in \operatorname{Int}G(x)$. Рассмотрим начальное значение $x+\tilde{\varepsilon}_K$, где $\tilde{\varepsilon}_K$ является K-мерным вектором с первым элементом, равным $\varepsilon > 0$, а остальными элементами — равными нулю. Предположим, что значение ε мало. По определению

$$V^*(x) = V(x) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}^*),$$

где вектор $\mathbf{x}^* = (x, x', \ldots) \in \Phi(x^*(0))$ является оптимальным выбором. Теперь рассмотрим другой выбор $\mathbf{x}_\varepsilon = (x+\tilde{\varepsilon}_K, x', \ldots)$ с начальным значением $x+\tilde{\varepsilon}_K$. При достаточно малом значении ε такой выбор будет доступным, то есть $\mathbf{x}_\varepsilon \in \Phi(x+\tilde{\varepsilon}_K)$. Это утверждение следует из того, что $x' \in \operatorname{Int}G(x)$, а G непрерывна по предположению 6.2. Поэтому $x' \in \operatorname{Int} G(x+\tilde{\varepsilon}_K)$. На основании леммы 6.1 и того, что справедливо равенство $V^*(x) = V(x)$, для значения функции стоимости в этом решении задачи оптимизации выполняется следующее неравенство:

$$V(x+\tilde{\varepsilon}_K) \geq U(x+\tilde{\varepsilon}_K, x')+\beta V(x').$$

Следовательно, выполняется неравенство:

$$V(x+\tilde{\varepsilon}_K)-V(x) \geq U(x+V(x+\tilde{\varepsilon}_K, x')-U(x, x').$$

Так как по предположению 6.5 функция выигрыша U является дифференцируемой, выполняется следующее неравенство:

$$V_1^+(x) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{V(x+\tilde{\varepsilon}_K)-V(x)}{\varepsilon} \geq U_1(x, x'), \qquad (6.21)$$

где функция U_1 является частной производной функции выигрыша U по первому элементу вектора x. Далее. Рассмотрим начальное значение $x-\tilde{\varepsilon}_K$. Аналогично рассуждениям выше, так как $x' \in \operatorname{Int}G(x)$, а отображение G непрерывно, вектор $(x-\tilde{\varepsilon}_K, x', \ldots) \in \Phi(x-\tilde{\varepsilon}_K)$. Поэтому так же, как и ранее, нетрудно убедиться в следующем неравенстве:

$$V(x-\tilde{\varepsilon}_K) \geq U(x-\tilde{\varepsilon}_K, x')+\beta V(x').$$

Деля это неравенство на $-\varepsilon$, получаем следующее:

$$V_1^-(x) \equiv \lim_{\varepsilon \uparrow 0} \frac{V(x+\tilde{\varepsilon}_K)-V(x)}{\varepsilon} \leq U_1(x, x'). \qquad (6.22)$$

Подобные рассуждения, очевидно, можно применить к любой частной производной функции выигрыша U, и поэтому для любого $k = 1, 2, \ldots, K$ выполняется следующее неравенство:

$$V_k^-(x) \leq U_k(x, x') \leq V_k^+(x).$$

Так как из теоремы 6.4 следует, что функция стоимости $V(\cdot)$ вогнута, для любого $k = 1, 2, ..., K$ выполняется неравенство $V_k^-(x) \geq V_k^+(x)$. Отсюда следует равенство $V_k^-(x) = V_k^+(x) = U_k(x, x')$. Поэтому градиент функции стоимости $V(\cdot)$ может быть записан как $DV(x) = D_x U(x, \pi(x))$, что завершает доказательство теоремы. ■

Доказательство теоремы 6.6 (версия 2). Из следствия 6.1 следует, что отображение $\Pi(x)$ принимает единственное значение на каждом аргументе и поэтому может быть представлено в виде функции $\pi(x)$. По условию теоремы выполняется включение $\pi(x) = x' \in \operatorname{Int}G(x)$, а по предположению 6.2 отображение G непрерывно. Поэтому существует окрестность $\mathcal{N}(x)$ точки x, такая, что $\pi(x) \in \operatorname{Int}G(x)$ для всех $x' \in \mathcal{N}(x)$. Введем на окрестности $\mathcal{N}(x)$ функцию $W(\cdot)$следующим образом:

$$W(x') = U(x', \pi(x)) + \beta V(\pi(x)) \text{ для всех } x' \in \mathcal{N}(x).$$

Из предположений 6.3 и 6.5, из того, что значение $V(\pi(x))$ не зависит от x' и из вогнутости и дифференцируемости функции выигрыша U, следует, что функция $W(\cdot)$ является вогнутой и дифференцируемой. Более того, так как для всех $x' \in \mathcal{N}(x)$ выполняется включение $\pi(x) \in G(x')$, справедливо следующее неравенство:

$$W(x') \leq \max_{y \in G(x')} \{U(x', y) + \beta V(y)\} = V(x') \text{ для всех } x' \in \mathcal{N}(x), \quad (6.23)$$

где равенство достигается при $x' = x$. Так как функция $V(\cdot)$ вогнута, функция $-V(\cdot)$ является выпуклой функцией, и поэтому в силу стандартных теорем выпуклого анализа она обладает субградиентом. Более того, любой субградиент $-p$ функции $-V(\cdot)$ при любом $x' \in \mathcal{N}(x)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$p \cdot (x' - x) \geq V(x') - V(x) \geq W(x') - W(x),$$

где первое неравенство использует определение субградиента, а второе неравенство следует из неравенства $W(x') \leq V(x')$ со строгим равенством в точке x, что, в свою очередь, вытекает из неравенства (6.23). Поэтому каждый субградиент p функции $-V(\cdot)$ также является субградиентом функции $-W(\cdot)$. Так как функция W дифференцируема по x, ее субградиент p является единственным. Из еще одной базовой теоремы выпуклого анализа следует, что любая выпуклая функция с единственным субградиентом во внутренней точке x дифференцируема в этой точке. Из нее следует, что функция $-V(\cdot)$, а следовательно, и функция $V(\cdot)$ являются дифференцируемыми. Выражение для градиента (6.4) следует из теоремы об огибающей (теорема A.31 в приложении A). ■

6.6. Приложения стационарного динамического программирования

В этом параграфе мы вернемся к основным результатам стационарного динамического программирования и покажем, что они могут помочь в решении большого количества экономических задач. Основным результатом этого параграфа станет теорема 6.10, в которой утверждается, что динамические условия первого порядка (уравнения Эйлера) и условие трансверсальности полностью описывают решение задачи динамической оптимизации. Именно эта теорема, а не основные теоремы динамического программирования, доказанные в предыдущем параграфе, чаще всего применяется на практике.

6.6.1. Основные уравнения

Рассмотрим функциональное уравнение, соответствующее задаче 6.3:

$$V(x) = \max_{y \in G(x)} \{U(x, y) + \beta V(y)\} \text{ для всех } x \in X \tag{6.24}$$

Далее везде будем считать, что предположения 6.1–6.5 выполнены. Тогда по теореме 6.4 задача максимизации (6.24) является строго вогнутой, а по теореме 6.6 максимизируемая функция дифференцируема. Поэтому условия первого порядка являются необходимыми и достаточными условиями оптимума для описания любого внутреннего решения $y \in \mathrm{Int}G(x)$ (рассматривая функцию $V(\cdot)$как заданную). А именно: оптимальное решение может быть описано с помощью следующего удобного *уравнения Эйлера*:

$$D_y U(x, y^*) + \beta DV(y^*) = 0, \tag{6.25}$$

где мы обозначили оптимальное решение звездочкой, а оператор D представляет собой градиент функции (напомним, что в общем случае переменная x является вектором, а не вещественным числом, и поэтому $D_x U$ является вектором частных производных. Мы будем обозначать вектор частных производных функции стоимости $V(\cdot)$в точке y как $DV(y)$). Вплоть до конца этой главы мы будем обозначать вектор частных производных функции выигрыша U по последним K аргументам как $D_y U$ (или как $D_y U(x(t), x(t+1))$), а вектор градиента функции выигрыша U по первым K аргументам как $D_x U$.

Если бы мы знали вид функции $V(\cdot)$, то множество условий первого порядка (6.25) было бы достаточным для описания оптимального правила. Однако, так как эта функция определяется рекурсивно как часть задачи оптимизации, для получения полного набора уравнений, описывающих решение задачи оптимизации необходимо сделать еще один шаг.

К счастью, мы можем использовать вариант теоремы об огибающей для динамического программирования (теорема A.31 в приложении A) и, продифференцировав равенство (6.24) по вектору переменных состояния x, получаем следующее равенство:

$$DV(x) = D_x U(x, y^*). \tag{6.26}$$

Причина, по которой уравнение (6.26) эквивалентно теореме об огибающей, состоит в том, что член $\left[D_y U(x, y^*) + \beta DV(y^*)\right] dy/dx$ (то есть влияние изменения переменной y, помноженное на изменение этой переменной, вызванное изменением переменной x) отсутствует в нем. Это естественным образом вытекает из того, что равенство (6.25) гарантирует, что $D_y U(x, y^*) + \beta DV(y^*) = 0$.

Далее, используя для оптимальной функции выбора обозначение $y^* = \pi(x)$ (которая принимает единственные значения по предположению 6.3 и следствию 6.1), а также тот факт, что $DV(y) = D_x V(\pi(x), \pi(\pi(x)))$, мы можем объединить эти два уравнения и выписать уравнение Эйлера в более простом виде с использованием только функции выигрыша U:

$$D_y U(x, \pi(x)) + \beta D_x U(\pi(x), \pi(\pi(x))) = 0, \tag{6.27}$$

где оператор $D_x U$ представляет собой градиент функции U по первым K аргументам, а оператор $D_y U$ — градиент функции U по последним K аргументам. Заметим, что уравнение (6.27), характеризующее оптимальное правило выбора, является функциональным уравнением с неизвестной функцией $\pi(\cdot)$.

Уравнение Эйлера становится еще более простым и понятным в случае, когда переменные x и y являются вещественными числами. В этом случае уравнение (6.25) преобразуется в следующее уравнение:

$$\frac{\partial U(x, y^*)}{\partial y} + \beta V'(y^*) = 0, \tag{6.28}$$

где функция $V'(\cdot)$ является производной функции $V(\cdot)$по ее единственному аргументу.

Это уравнение легко проинтерпретировать интуитивным образом. Оно значит, что сумма выигрыша от инфинитезимально малого увеличения переменной y в текущем периоде и дисконтированного будущего выигрыша от такого же изменения переменной y в течение всего остального времени должна равняться нулю. Например, мы, как в примере 6.1, можем рассмотреть функцию выигрыша U, которая убывает по переменной y и возрастает по переменной x. Тогда уравнение (6.28) утверждает, что текущие потери, связанные с увеличением переменной y, должны быть в точности компенсированы будущим выигрышем. В контексте экономического роста это условие может быть проинтерпретировано так, что текущие потери, связанные со снижением потребления, должны быть в точности компенсированы ростом потребления в будущем. Так же, как и в уравнении (6.25), полезность от более высокого уровня потребления в этом уравнении выражена через производную функции стоимости $V'(y^*)$, которая является одним из неизвестных в задаче. Найдем выражение для этой производной для одномерного случая уравнения (6.26):

$$V'(x) = \frac{\partial U(x, y^*)}{\partial x}. \tag{6.29}$$

Объединяя уравнения (6.28) и (6.29), получаем следующее простое условие первого порядка:

$$\frac{\partial U(x, \pi(x))}{\partial y} + \beta \frac{\partial U(\pi(x), \pi(\pi(x)))}{\partial x} = 0,$$

где, в соответствии с обозначением для градиента, частная производная функции выигрыша U по первому аргументу обозначена как $\partial U/\partial x$, а ее частная производная по второму аргументу — как $\partial U/\partial y$.

Альтернативная запись уравнения Эйлера с использованием временной переменной выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial U(x(t), x^*(t+1))}{\partial y} + \beta \frac{\partial U(x^*(t+1), x^*(t+2))}{\partial x} = 0. \tag{6.30}$$

Однако уравнение Эйлера (6.30) не является достаточным условием оптимальности. Для описания достаточных условий нам также понадобится условие трансверсальности. Условие трансверсальности очень существенно в бесконечномерных задачах, так как оно гарантирует невозможность увеличения значения целевой функции при одновременном изменении бесконечного числа переменных выбора. С другой стороны, в конечномерных задачах необходимость использования условия трансверсальности отпадает, так как в этом случае мы можем гарантировать невозможность увеличения значения целевой функции при одновременном изменении конечного числа переменных выбора (даже всех переменных задачи) с помощью условий первого порядка. Читатель сможет убедиться в важности роли условия трансверсальности в бесконечномерных задачах после доказательства теоремы 6.10 и последующего обсуждения в подпараграфе 6.6.2.

В общем случае условие трансверсальности принимает следующий вид:

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t D_x U(x^*(t), x^*(t+1)) \cdot x^*(t) = 0, \tag{6.31}$$

где символ «·» обозначает скалярное произведение векторов. В одномерном случае условие трансверсальности может быть записано в более простой форме:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \frac{\partial U(x^*(t), x^*(t+1))}{\partial x} \cdot x^*(t) = 0. \tag{6.32}$$

Оно требует, чтобы произведение предельного выигрыша от переменной состояния x и значения этой переменной состояния не росло асимптотически с темпом, превышающим $1/\beta$.

В следующей теореме будет показано, что условие трансверсальности и уравнения Эйлера (6.27) являются необходимыми и достаточными условиями для описания решения задачи (6.2), а поэтому и задачи (6.3).

Теорема 6.10. Об уравнениях Эйлера и условии трансверсальности. *Пусть $X \subset \mathbb{R}_+^K$ и допустим, что предположения* 6.1–6.5 *выполняются. Тогда последовательность $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$, такая, что $x^*(t+1) \in \mathrm{Int}G(x^*(t))$ для всех $t = 0, 1, \ldots$ является оптимальным планом задачи* 6.2, *если и только если она удовлетворяет условиям* (6.27) *и* (6.31).

Доказательство. (Достаточность.) Рассмотрим любое начальное значение $x(0)$ и построим доступную (неотрицательную) последовательность $\mathbf{x}^* \equiv (x(0), x^*(1), \ldots) \in \Phi(x(0))$, удовлетворяющую условиям (6.27) и (6.31). Сначала покажем, что значение функции стоимости на ней выше, чем на любой другой последовательности $\mathbf{x} \equiv (x(0), x(1), \ldots) \in \Phi(x(0))$. Для любой последовательности $\mathbf{x} \in \Phi(x(0))$ определим переменную $\Delta_{\mathbf{x}}$

$$\Delta_{\mathbf{x}} \equiv \lim_{T\to\infty} \inf \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left[U(x^*(t), x^*(t+1)) - U(x(t), x(t+1))\right]$$

как lim inf разности сумм значений функции выигрыша на последовательностях $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^*$ при устремлении временного горизонта к бесконечности. Мы используем здесь нижний предел lim inf вместо предела, так, для произвольной последовательности $\mathbf{x} \in \Phi(x(0))$ предел может не существовать.

Из предположений 6.2 и 6.5 следует, что функция выигрыша U непрерывна, вогнута и дифференцируема. Так как функция U вогнута, из теоремы А.23 и варианта следствия А.4 в приложении А для нескольких переменных следует следующее неравенство:

$$\Delta_{\mathbf{x}} \ge \lim_{T\to\infty} \inf \sum_{t=0}^{T} \beta^t \Big[D_x U(x^*(t), x^*(t+1)) \cdot (x^*(t) - x(t)) +$$
$$+ D_y U(x^*(t), x^*(t+1)) \cdot (x^*(t) - x(t))\Big]$$

при любом $\mathbf{x} \in \Phi(x(0))$. Так как $x^*(0) = x(0)$, выполняется равенство $D_xU(x^*(0), x^*(1)) \cdot (x^*(0) - x(0)) = 0$. Используя факт А.5(5) из приложения А, мы можем преобразовать выражение под знаком суммы в неравенстве выше и получить следующее неравенство:

$$\Delta_{\mathbf{x}} \geq \liminf_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left[D_yU(x^*(t), x^*(t+1)) + \beta D_xU(x^*(t+1), x^*(t+2)) \right] \cdot$$
$$\cdot (x^*(t+1) - x(t+1)) - \limsup_{T\to\infty} \beta^T D_xU(x^*(T+1), x^*(T+2)) \cdot x^*(T+1) +$$
$$+ \liminf_{T\to\infty} \beta^T D_xU(x^*(T+1), x^*(T+2)) \cdot x(T+1).$$

Так как последовательность $\mathbf{x}^*$ удовлетворяет условиям (6.27), первое слагаемое в правой части неравенства равно нулю. Более того, так как она удовлетворяет условию (6.31), второе слагаемое также равно нулю. Наконец, из предположения 6.4 следует, что функция выигрыша U возрастает по аргументу x, то есть $D_xU \geq 0$, а по условию теоремы $x \geq 0$. Поэтому третье слагаемое в правой части неравенства неотрицательно и, следовательно, $\Delta_{\mathbf{x}} \geq 0$ для любой последовательности $\mathbf{x} \in \Phi(x(0))$. Поэтому значение функции стоимости на последовательности $\mathbf{x}^*$ выше, чем на любой другой допустимой последовательности $\mathbf{x} \in \Phi(x(0))$. Это означает, последовательность $\mathbf{x}^*$ является оптимальным планом.

(Необходимость.) Определим переменную $\Delta_{\mathbf{x}}$ следующим образом

$$\Delta'_{\mathbf{x}} \equiv \limsup_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left[U(x^*(t), x^*(t+1)) - U(x(t), x(t+1)) \right].$$

Предположим, что последовательность $\left\{x^*(t+1)\right\}_{t=0}^{\infty}$, такая, что $x^*(t+1) \in \mathrm{Int}G(x^*(t))$ для всех t является оптимальным планом задачи. Тогда для любой последовательности $\mathbf{x} \in \Phi(x(0))$ значение $\Delta'_{\mathbf{x}}$ неотрицательно. Рассмотрим последовательность $\mathbf{x} \in \Phi(x(0))$, такую, что $x(t) = x^*(t) - \varepsilon z(t)$, где $z(t) \in \mathbb{R}^K$ для любого t, а ε — вещественное число. Такая последовательность существует при достаточно малом значении ε в силу того, что $x^*(t+1) \in \mathrm{Int}G(x^*(t))$ для всех t. Тогда из теоремы А.23 и факта А.5(5) из приложения А следует неравенство:

$$\Delta'_{\mathbf{x}} \leq \limsup_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left[U(x^*(t), x^*(t+1)) \cdot \varepsilon z(t) + \right.$$
$$\left. + D_yU(x^*(t), x^*(t+1)) \cdot \varepsilon z(t+1) \right] + \limsup_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t o(\varepsilon, t),$$

где функция $o(\varepsilon, t)$ является остатком ряда Тейлора для члена, соответствующего периоду t, и удовлетворяет условию $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} o(\varepsilon, t)/\varepsilon = 0$ для любого t. Далее, если условие (6.27) не выполняется при некотором t', положим $y(t) = 0$ для всех $t \neq t'$ и выберем ε и $z'(t)$ таким образом, что выполняется неравенство $D_x U(x^*(t'), x^*(t'+1)) \cdot z(t')$ и $\varepsilon \to 0$. Такой выбор гарантирует выполнение неравенства $\Delta'_x < 0$, что ведет к противоречию с предположением о том, что условие (6.27) не выполняется при t'.

Далее предположим, что условия (6.27) выполняются, а условие (6.31) — нет. Положим $x(t) = (1 - \varepsilon)x^*(t)$. Тогда, повторяя шаги, сделанные выше, убеждаемся в следующем неравенстве:

$$\Delta'_x \le -\varepsilon \lim_{T\to\infty} \inf \beta^T D_x U(x^*(T), x^*(T+1)) \cdot x^*(T+1) +$$
$$+ \lim_{T\to\infty} \sup \sum_{t=0}^{T} \beta^t o(\varepsilon, t), \tag{6.33}$$

где все остальные члены обнуляются, так как условия (6.27) выполняются. Теперь докажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{T\to\infty} \sup \sum_{t=0}^{T} \beta^t \frac{o(\varepsilon, t)}{t}. \tag{6.34}$$

Так как для любого t выполняется условие $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} o(\varepsilon, t)/\varepsilon = 0$, существует константа $M < \infty$, такая, что при достаточно малых значениях ε для всех t выполняется неравенство $|o(\varepsilon, t)/\varepsilon| < M$. Для любого $\delta > 0$ выберем значение $\bar{T}$, такое, что для всех $T > \bar{T}$ выполняется неравенство $M\beta^{\bar{T}+1}/(1 - \beta) \le \delta/2$. Тогда для достаточно малых значений ε выполняется следующее неравенство:

$$\lim_{T\to\infty} \sup \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left|\frac{o(\varepsilon, t)}{\varepsilon}\right| \le \sum_{t=0}^{\bar{T}} \beta^t \left|\frac{o(\varepsilon, t)}{\varepsilon}\right| + \frac{\delta}{2}. \tag{6.35}$$

Более того, так как сумма $\sum_{t=0}^{\bar{T}} \beta^t |o(\varepsilon, t)/\varepsilon|$ конечна, существует значение $\bar{\varepsilon}$, такое, что для всех $\varepsilon \le \bar{\varepsilon}$ выполняется неравенство $\sum_{t=0}^{\bar{T}} \beta^t |o(\varepsilon, t)/\varepsilon| \le \delta/2$. Из этого следует, что значение левой части неравенства (6.35) меньше δ. Так как значение было выбрано любым, из этого следует равенство (6.34). Далее заметим, что если условие (6.31) не выполняется, то первое слагаемое в неравенстве (6.33) можно сделать строго отрицательным (выбирая положительное или отрицательное значение ε). Объединяя это с равенством (6.34), приходим к тому, что $\Delta'_x < 0$, а это противоречит предположению о том, что условие (6.31) не выполняется, тем самым завершая доказательство теоремы. ■

Из теоремы (6.10) следует, что если уравнения Эйлера (6.27) выполняются, то условие трансверсальности в простой форме (6.31) является одновременно необходимым и достаточным условием оптимальности внутреннего решения задачи 6.2. Уравнения Эйлера также являются необходимыми условиями внутреннего оптимума. Поэтому в большинстве случаев теорема 6.10 оказывается достаточной для описания решения задачи динамической оптимизации в дискретном времени.

Далее мы продемонстрируем, каким образом разработанные нами методы могут быть использованы для анализа задачи оптимального роста, которую мы подробно проанализируем в параграфе 6.8.

Пример 6.4. Рассмотрим следующую задачу оптимального роста. Предположим, что предпочтения домохозяйств описываются логарифмической функцией полезности, производственная функция имеет вид функции Кобба—Дугласа, а норма амортизации капитала равна 100%:

$$\max_{\{k(t), c(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c(t)$$

при следующих ограничениях:

$$k(t+1) = k(t)^\alpha - c(t),$$

$$k(0) > 0,$$

где, как и ранее, дисконт $\beta \in (0, 1)$, переменная k обозначает отношение капитала к труду (капиталовооруженность экономики), а ресурсное ограничение следует из агрегированной производственной функции вида $K^\alpha L^{1-\alpha}$, записанной на душу населения.

Такая задача является одним из канонических примеров задач, для которых существует решение в явном виде. Для того чтобы найти его, мы воспользуемся методом примера 6.1 и выпишем задачу максимизации в рекурсивном виде:

$$V(x) = \max_{y \ge 0} \left\{ \log(x^\alpha - y) + \beta V(y) \right\},$$

где переменной состояния x является количество капитала в текущем периоде, а переменной управления y — количество капитала в следующем периоде. Наша основная задача состоит в поиске функции выбора $y = \pi(x)$, которая позволяет найти количество капитала в следующем периоде как функцию от его количества в текущем периоде. После этого мы, используя ресурсное ограничение, легко сможем найти значение потребления как функцию от количества капитала в текущем периоде.

Нетрудно убедиться, что поставленная таким образом задача оптимизации удовлетворяет предположениям 6.1—6.5. А именно: используя те же аргументы, как и в параграфе 6.8 далее, можно показать, что значения переменных x и y можно ограничить некоторым компактным множеством. Следовательно, в этом случае мы можем использовать теоремы 6.1–6.6. В частности, так как функция стоимости $V(\cdot)$ будет дифференцируемой, из уравнения Эйлера для одномерного случая (6.28) следует, что

$$\frac{1}{x^\alpha - y} = \beta V'(y).$$

Из условия (6.29), которое вытекает из теоремы об огибающей, следует, что

$$V'(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{x^\alpha - y}.$$

Тогда, используя обозначение $y = \pi(x)$ и объединяя два этих условия, приходим к следующему равенству:

$$\frac{1}{x^\alpha - \pi(x)} = \beta \frac{\alpha \pi(x)^{\alpha-1}}{\pi(x)^\alpha - \pi(\pi(x))} \text{ для всех } x,$$

которое является функциональным уравнением для единственной неизвестной функции $\pi(x)$. Простого способа поиска решения такого уравнения не существует, однако в большинстве случаев метод предположения с последующей проверкой позволяет найти его решения. В данном случае предположим, что функция $\pi(x)$ имеет следующий вид:

$$\pi(x) = ax^\alpha. \tag{6.36}$$

Подставляя равенство (6.36) в предыдущее уравнение, получаем следующее равенство:

$$\frac{1}{x^\alpha - ax^\alpha} = \beta \frac{\alpha a^{(\alpha-1)} x^{\alpha(\alpha-1)}}{a^\alpha x^{\alpha^2} - a^{1+\alpha} x^{\alpha^2}} = \frac{\beta}{a} \frac{\alpha}{x^\alpha - ax^\alpha},$$

откуда следует, что значение $a = \beta\alpha$ удовлетворяет условиям оптимума. Из вида функции выбора $\pi(x) = \beta\alpha x^\alpha$ получаем, что динамика накопления капитала и оптимальное значение потребления будут задаваться следующими равенствами:

$$k(t+1) = \beta\alpha k(t)^\alpha, \tag{6.37}$$

$$c(t) = (1 - \beta\alpha)k(t)^\alpha.$$

Далее нетрудно показать, что отношение капитала к труду $k(t)$ будет сходиться к стационарному состоянию k^*, что является достаточным для выполнения условия трансверсальности (6.32). Тогда из следствия 6.1 и теоремы 6.10 вытекает, что функция $\pi(x) = \beta\alpha x^\alpha$ является единственной оптимальной функцией выбора для данной задачи. Упражнение 6.7 посвящено более подробному анализу решения этой задачи. В нем также показано, что последовательность отношения капитала к труду сходится на траектории оптимального роста к единственному стационарному состоянию. ■

Теперь коротко рассмотрим задачу межвременной максимизации полезности потребителем при некотором экзогенно заданном потоке доходов.

Пример 6.5. Рассмотрим задачу максимизации полезности бесконечно долго живущим потребителем, обладающим моментальной функцией полезности $u(c)$, зависящей от потребления, где функция $u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ является строго возрастающей, непрерывно дифференцируемой и строго вогнутой. Потребитель экспоненциально дисконтирует будущее с постоянным дисконтом, равным $\beta \in (0, 1)$. Он также владеет некоторым (неотрицательным) потоком трудовых доходов $\{w(t)\}_{t=0}^\infty$ и начинает жизнь с заданным количеством финансовых активов $a(0) \in \mathbb{R}$. Чистая процентная ставка по его активам равна $r > 0$ (то есть валовая процентная ставка равна $1 + r$). Вначале предположим, что трудовой доход потребителя не меняется во времени, то есть $w(t) = w \in \mathbb{R}_+$. Тогда задача максимизации полезности потребителем может быть выписана следующим образом:

$$\max_{\{c(t),a(t)\}_{t=0}^\infty} \sum_{t=0}^\infty \beta^t u(c(t))$$

при следующем потоковом бюджетном ограничении:

$$a(t+1) = (1+r)a(t) + w - c(t),$$

и заданном значении начального запаса финансовых активов $a(0)$. Такая задача максимизации не является хорошо поставленной без введения дополнительных ограничений и на самом деле не описывает задачу максимизации полезности потребителем. В упражнении 6.11 показывается, что в такой постановке задачи потребитель имеет возможность неограниченно накапливать долг (то есть $\lim_{t\to\infty} a(t) = -\infty$). Такое поведение, которое иногда называют игрой Понци, возможно лишь в случае, когда потребитель постоянно привлекает новые займы для покрытия выплаты процентов и основного долга по имеющимся займам. Очевидно, что при наличии возможности сделать так, потребитель предпочтет такое поведение, так как в этом случае он сможет увеличить свое потребление во всех периодах времени. Однако такое решение не имеет смысла с экономической точки зрения. Оно также не будет доступно в рыночной экономике, так как приведет к очень большим потерям на финансовом рынке (среди кредиторов потребителя). Такое поведение потребителя становится возможным при такой постановке задачи, потому что мы пока не ввели подходящего бюджетного ограничения потребителя. Как будет подробно описано в главе 8, потоковое бюджетное ограничение оказывается недостаточным для описания бюджетного ограничения потребителя в течение всей его жизни (что очевидно следует из того, что потребитель имеет возможность неограниченно накапливать долг с $\lim_{t\to\infty} a(t) = -\infty$ при соблюдении всех потоковых ограничений). Для того чтобы отвергнуть возможность участия потребителя в таких играх Понци, нам необходимо наложить дополнительные ограничения на поведение потребителя.

Существует три возможных метода наложения подобных ограничений. Первый, подробно описанный в главе 8, состоит в добавлении ограничения, которое явным образом запрещает агентам участие в схемах Понци. Второй метод состоит в предположении о том, что у потребителя отсутствует возможность привлекать займы, то есть во все периоды времени t выполняется неравенство $a(t+1) \geq 0$. Такое предположение, очевидно, решает проблему, однако оно представляется слишком сильным ограничением. Например, логично было бы позволить агенту привлекать временные заимствования, как происходит на многих финансовых рынках, однако не позволять его долгу становиться неограниченно большим и устремляться к бесконечности. Третий метод состоит в введении некоторого предельного значения для долга потребителя. По сути, такое ограничение сводится к подсчету максимального значения долга, который потребитель может погасить, и требованию о том, чтобы его долг никогда не превышал этого значения. Так как потребление агента является неотрицательной величиной, очевидно, что он будет не в состоянии погасить долг, превышающий общую сумму всех его трудовых доходов в течение его жизни. При постоянных заработной плате w и процентной ставке r чистая приведенная стоимость трудового дохода потребителя равна w/r. Эта величина является конечным числом, так как $w \in \mathbb{R}_+$ и $r > 0$. Следовательно, если в некотором периоде его финансовая позиция опустится ниже значения $-w/r$, он никогда не сможет погасить свой долг. Поэтому естественно будет ожидать, что финансовый рынок никогда не предоставит потребителю такое количество кредитов, что его финансовая позиция достигнет значения $a(t+1) < -w/r$ в любом периоде t даже если у него есть возможность конфисковать весь трудовой доход агента в течение всей его жизни. Таким образом, из предположения о наличии предельного значения долга следует, что финансовая позиция $a(t+1)$ агента в любом периоде времени t удовлетворяет следующему неравенству:

$$a(t+1) \geq \underline{a} \equiv -\frac{w}{r}.$$

Следующая проблема состоит в том, что даже при выполнении условия на естественное предельное значение долга, множество, описывающее чистую финансовую позицию потребителя, не обязательно является компактным. Поэтому для анализа этой задачи мы не можем напрямую использовать теоремы динамического программирования, которые мы доказали выше. Одной из возможностей в данном случае будет попытка усилить эти теоремы таким образом, чтобы они покрывали случай, когда доступное множество (множество X в наших обозначениях), возможно, является неограниченным. Такое усиление теорем возможно, однако для их доказательства понадобится более сложный математический аппарат. Другим путем является попытка использовать экономическую структуру задачи. В частности, в большинстве случаев (однако не всегда, см. упражнение 6.12) мы можем использовать следующий метод. В начале выберем некоторое значение $\bar{a}$ и ограничим финансовую позицию потребителя отрезком $[\underline{a}, \bar{a}]$. Затем решим задачу и убедимся в том, что переменная a всегда лежит во внутренности этого отрезка. В нашем примере, еще раз используя тот факт, что чистая приведенная стоимость трудового дохода потребителя равна w/r, естественным выбором для константы $\bar{a}$ будет значение $\bar{a} = a(0) + w/r < \infty$ (так как $a(0) \in \mathbb{R}$ и $w/r < \infty$). В упражнении 6.12 показаны условия, при которых финансовая позиция потребителя $a(t)$ всегда лежит во внутренности отрезка $[\underline{a}, \bar{a}]$. Такая стратегия поиска верхней границы для значения переменной состояния и, таким образом, гарантирования того, что она принадлежит компактному множеству, часто используется в приложениях.

Наконец, прежде чем перейти к описанию решения задачи, заметим, что бюджетное ограничение потребителя может быть записано в виде $a(t+1) = (1+r)(a(t) + w - c(t))$. Различия между двумя альтернативными формами записи бюджетного ограничения связаны с предположением о времени выплаты процентных доходов. Предположение, которое мы использовали выше, состоит в том, что переменная $a(t)$ описывает финансовые активы потребителя на начало периода t

и поэтому проценты по ним выплачиваются в текущем периоде, перед тем как агент совершает потребление. Альтернативное предположение состоит в том, что потребитель начинает период t с активами $a(t)$, затем получает свой трудовой доход w и совершает потребление $c(t)$. Все оставшиеся у него средства сберегаются до следующего периода по валовой процентной ставке $1 + r$. Результаты анализа задачи оказываются одинаковыми при обоих альтернативных предположениях о времени выплаты процентов по финансовым активам.

В этих предположениях рекурсивная формулировка задачи максимизации потребителя может быть записана очень просто. Финансовая позиция $a(t)$ становится переменной состояния, а переменная управления $c(t)$ выражается следующим образом:

$$c(t) = (1 + r)a(t) + w - a(t + 1).$$

Тогда, используя стандартную аргументацию и обозначая текущее значение переменной состояния как a, а ее значение в следующем периоде как a', мы можем переписать задачу динамической оптимизации в рекурсивной форме следующим образом:

$$V(a) = \max_{a\in[-\bar{a},\bar{a}]} \{u((1+r)a + w - a') + \beta V(a')\}.$$

Очевидно, что функция $u(\cdot)$ строго возрастает по a, непрерывно дифференцируема по a и по a' и строго вогнута по a. Более того, так как функция $u(\cdot)$ непрерывно дифференцируема по всем $a \in (\underline{a}, \bar{a})$, а богатство индивида конечно, значение функции стоимости $V(a(0))$ также является конечным числом. Поэтому все результаты, полученные выше, в частности теоремы 6.1–6.6, применимы к анализу данной задачи и из них следует, что функция $V(a)$ дифференцируема и существует непрерывное решение задачи $a' = \pi(a)$. Более того, для описания оптимального плана потребления мы можем использовать уравнение Эйлера (6.25) или его специальный вид для одномерной задачи (6.28). Поэтому выполняется следующее равенство:

$$u'((1 + r)a + w - a') = u'(c) = \beta V'(a). \tag{6.38}$$

Это важное уравнение часто называют уравнением Эйлера для потребления. В нем утверждается, что предельная полезность от потребления в текущем периоде должна равняться произведению дисконта β и предельного изменения функции стоимости в следующем периоде. В нем явно подчеркивается экономическая интуиция методов динамического программирования, которые сводят сложную задачу бесконечномерной оптимизации к задаче сравнения между текущим и следующим периодами. Как обычно, единственной трудностью здесь является то, что поведение потребителя в следующем периоде включает в себя сложную задачу максимизации, и поэтому значения функции стоимости и ее производной становятся эндогенными величинами. Однако и в этом случае нам на помощь приходит условие (6.29), следующее из теоремы об огибающей. Используя его, приходим к следующему равенству:

$$V'(a) = (1 + r)u'(c'),$$

где переменная c' обозначает потребление в следующем периоде. Используя это равенство, мы можем переписать уравнение Эйлера для потребления (6.38) в следующем виде:

$$u'(c) = \beta(1 + r)u'(c'). \tag{6.39}$$

Это стандартный и более часто используемый вид уравнения Эйлера для потребления. В нем утверждается, что предельная полезность от потребления в текущем периоде должна равняться произведению дисконта, валовой процентной ставки и предельной полезности от потребления в следующем периоде. Так как мы предположили, что дисконт β и валовая процентная ставка $(1 + r)$ постоянны, это соотношение между значением потребления в текущем и следующем периодах не изменяется со временем. В частности, так как мы предположили, что функция $u(\cdot)$ непрерывно дифференцируема и строго вогнута, производная функция $u'(\cdot)$всегда существует и является строго убывающей. Поэтому из межвременной задачи максимизации потребления следуют простые правила:

$$\begin{aligned}
&\text{если } r=\beta^{-1}-1, \text{ то } c=c' \text{ и потребление постоянно во времени,}\\
&\text{если } r>\beta^{-1}-1, \text{ то } c<c' \text{ и потребление возрастает во времени,}\\
&\text{если } r<\beta^{-1}-1, \text{ то } c>c' \text{ и потребление убывает во времени.}
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Важная особенность состоит в том, что это утверждение выполняется при любых значениях начальных финансовых активов $a(0)$ и заработной платы w. Другими словами, эти значения лишь определяют значение потребления в начальный момент времени, а угол наклона оптимальной траектории потребления не зависит от значения начального богатства индивида. В упражнении 6.13 читатель сможет найти начальное значение потребления с помощью условия трансверсальности и межвременного бюджетного ограничения, а выполнив упражнение 6.12, он сможет убедиться в том, что в случае $r<\beta^{-1}-1$ финансовая позиция потребителя удовлетворяет включению $a(t+1)\in(\underline{a}, \overline{a})$ во всех периодах времени t (и, таким образом, искусственное ограничение на значение финансовой позиции, которое мы наложили, не влияет на полученный результат). ■

Так как мы предположили, что заработная плата w не изменяется со временем, пример 6.5 является в некотором смысле ограниченным. Как изменятся наши выводы, если мы предположим, что заработная плата или процентная ставка изменяются со временем, и введем в задачу последовательности их значений $\{w(t)\}_{t=0}^{\infty}$ и $\{r(t)\}_{t=0}^{\infty}$? К сожалению, при изменяющихся со временем заработной плате и процентной ставке задача становится нестационарной и теоремы, которые мы использовали для решения задач 6.2 и 6.3, перестают выполняться. Несмотря на это, многие равновесные задачи обладают таким свойством: в силу того, что рыночные цены могут изменяться со временем, переменные состояния в задаче оптимизации также будут изменяться. Именно это наблюдение является мотивацией для последующего в параграфе 6.7 анализа нестационарных задач динамической оптимизации.

6.6.2. Динамическое программирование и итеративная постановка задачи

Прежде чем перейти к анализу нестационарных задач, сравним постановку задачи в терминах динамического программирования и итеративную задачу и получим условие трансверсальности для итеративной задачи.

Предположим, что вектор переменных состояния x имеет размерность 1, а горизонт планирования конечен и составляет T периодов. Тогда задача максимизации может быть записана в следующем виде:

$$\max_{\{x(t)\}_{t=0}^{T}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(x(t),\, x(t+1)),$$

при ограничениях $x(t + 1) \geq 0$ для любого t и заданном начальном значении $x(0)$. Более того, обозначим полезность в последнем периоде как $U(x(T), x(T + 1))$ со значением переменной состояния по окончанию последнего периода, равным $x(T + 1)$ (это значение полезности можно рассматривать как «ликвидационную стоимость»).

В этом случае оптимизационная задача становится конечномерной и для ее решения нам достаточно просто выписать все условия первого порядка. Как и ранее, предположим, что решение лежит во внутренности множества ограничений, то есть $x^*(t) > 0$, и поэтому у нас нет необходимости записывать условия первого порядка как условия дополнительной нежесткости. В частности, в данном случае они принимают следующий, эквивалентный уравнению Эйлера (6.30), простой вид:

$$\frac{\partial U(x^*(t),\, x^*(t+1))}{\partial y} + \beta \frac{\partial U(x^*(t+1),\, x^*(t+2))}{\partial x} = 0$$

для всех $0 \leq t \leq T - 1$, что совпадает с уравнениями Эйлера для бесконечного горизонта планирования (напомним, что здесь символ $\partial U/\partial x$ обозначает частную производную функции полезности U по первому аргументу, а символ $\partial U/\partial y$ — ее частную производную по второму аргументу. Более того, для конечного значения переменной состояния $x(T + 1)$ необходимым является следующее граничное условие:

$$x^*(T+1) \geq 0 \text{ и } \beta^T \frac{\partial U\left(x^*(T),\, x^*(T+1)\right)}{\partial y} x^*(T+1) = 0. \tag{6.41}$$

На интуитивном уровне это граничное условие говорит о том, что значение переменной состояния $x^*(T + 1)$ может быть положительным только в случае, если максимум ликвидационной стоимости достигается на внутреннем значении $x^*(T + 1)$. Для описания дополнительной интуиции, стоящей за этим условием, вернемся к формулировке задачи оптимального роста в примере 6.1.

Пример 6.6. Напомним, что в задаче оптимального роста функция выигрыша имеет следующий вид:

$$U(x(t), x(t + 1)) = u(f(x(t)) + (1 - \delta)x(t) - x(t + 1)),$$

где $x(t) = k(t)$ и $x(t+1) = k(t+1)$. Предположим, что, в отличие от примера 6.1, экономика прекращает свое существование по окончании периода T. Тогда в последний период времени T выполняется следующее условие:

$$\frac{\partial U(x^*(T), x^*(T+1))}{\partial y} = -u'(c^*(T+1)) < 0.$$

Из условия (6.41) и того факта, что функция U возрастает по первому аргументу (предположение 6.4), следует, что на оптимальной траектории выполняется равенство $k^*(T+1) = x^*(T+1) = 0$. Интуитивно это означает, что на момент окончания существования экономики в ней не должно остаться капитала. Если по окончании существования экономики остаются некоторые ресурсы, индивид мог бы увеличить свое благосостояние, потребив их в последнем или некотором другом предшествующем периоде. ■

Условие трансверсальности теперь может быть получено эвристическим методом как расширение условия (6.41) для случая $T = \infty$. Переходя к пределу, получаем следующее равенство:

$$\frac{\partial U(x^*(T), x^*(T+1))}{\partial y} + \beta \frac{\partial U(x^*(T+1), x^*(T+2))}{\partial x} = 0.$$

Подставляя его в предыдущее уравнение, получаем следующий предел:

$$-\lim_{T\to\infty} \beta^{T+1} \frac{\partial U(x^*(T+1), x^*(T+2))}{\partial x} \cdot x^*(T+1) = 0.$$

Умножая на -1 и сдвигая для удобства временной индекс, приходим к точному виду условия трансверсальности (6.32):

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T \frac{\partial U(x^*(T), x^*(T+1))}{\partial x} \cdot x^*(T) = 0.$$

Такой вывод условия трансверсальности показывает, что оно также может быть записано в следующем эквивалентном виде:

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T \frac{\partial U(x^*(T), x^*(T+1))}{\partial y} \cdot x^*(T+1) = 0.$$

Поэтому правильно будет говорить не о единственном виде условия трансверсальности, а о нескольких различных эквивалентных формах его представления. Все они связаны с «граничным условием на бесконечности», которое запрещает изменения функции стоимости, возникающие вследствие изменения бесконечного количества переменных управления в один и тот же момент времени.

6.7. Нестационарная оптимизация на бесконечном горизонте планирования

6.7.1. Основные результаты

Вернемся еще раз к задаче 6.1. Нестационарность делает ее анализ более сложным, чем анализ задач 6.2 и 6.3. Однако многие из важных экономических задач, например задача максимизации полезности домохозяйством в динамическом конкурентном равновесии, являются такими нестационарными задачами. Один из возможных путей решения подобных задач состоит в введении дополнительных ограничений на функцию U и множество G, что позволит получить результаты, эквивалентные теоремам 6.1–6.6 (см., например, упражнение 6.14). Однако более простой путь состоит в доказательстве существования решения этой задачи и теоремы, эквивалентной теореме 6.10, в которой утверждается, что уравнения Эйлера и условие трансверсальности являются необходимыми и достаточными условиями оптимума. В этом параграфе мы пойдем именно этим путем. В частности, определим множество доступных последовательностей или *планов* с начальным значением переменной состояния $x(t)$ следующим образом:

$$\Phi(t,\, x(t)) = \left\{ \{x(s)\}_{s=t}^{\infty} : x(s+1) \in G(t,\, x(s)) \text{ для всех } s = t,\, t+1,\, \ldots \right\}.$$

Также обозначим элементы этого множества как $\mathbf{x}[t] = (x(t), x(t+1), \ldots) \in \Phi(t,\, x(t))$. Следующие предположения будут ключевыми в последующем анализе.

Предположение 6.1N. *Множество $G(t, x)$ не пусто при всех $x \in X$ и $t \in \mathbb{Z}_+$, а функция $U(t, x, y)$ является равномерно ограниченной сверху, то есть существует константа $M < \infty$, такая, что $U(t, x, y) \le M$ для всех $t \in \mathbb{Z}_+$, $x \in X$ и $y \in G(t, x)$.*

Предположение 6.2N. *Множество X является компактным подмножеством пространства $\mathbb{R}^K$, а отображение G непрерывно и его множество значений состоит из непустых компактных множеств. Более того, функция U: $\mathbf{X}_G \to \mathbb{R}$ является непрерывной по аргументам x и y, где $\mathbf{X}_G = \{(t, x, y) \in X \times X: y \in G(t, x)\}$.*

Предположение 6.3N. *Функция U вогнута. То есть для любого значения $\alpha \in (0, 1)$ и для любых $(t, x, y) \in \mathbf{X}_G$ и $(t', x', y') \in \mathbf{X}_G$ выполняется следующее неравенство:*

$$U(t,\, \alpha x + (1-\alpha)x',\, \alpha y + (1-\alpha)y') \ge \alpha U(t, x, y) + (1-\alpha) U(t', x', y'),$$

Кроме того, если $x \neq x'$, то выполняется неравенство

$$U(t, \alpha x + (1-\alpha)x', \alpha y + (1-\alpha)y') > \alpha U(t, x, y) + (1-\alpha)U(t', x', y').$$

Более того, отображение G выпукло. То есть для любого значения $\alpha \in [0, 1]$ и для всех $x \in X$, $x' \in X$, $y \in X$, $y' \in X$, таких, что $y \in G(t, x)$ и $y' \in G(t, x)$ выполняется следующее включение:

$$\alpha y + (1-\alpha)y' \in G(t, \alpha x + (1-\alpha)x').$$

Предположение 6.4N. *Функция $U(t, x, y)$ является строго возрастающей по каждому элементу вектора x при всех $t \in \mathbb{Z}_+$ и $y \in X$, а отображение G является монотонным по аргументу x в том смысле, что из неравенства $x \leq x'$ следует включение $G(t, x) \subset G(t, x')$ x при всех $t \in \mathbb{Z}_+$.*

Предположение 6.5N. *Функция U является непрерывно дифференцируемой по аргументам x и y на множестве $\mathrm{Int}\mathbf{X}_G$ (где символ $\mathrm{Int}\mathbf{X}_G$ обозначает множество внутренних точек множества $\mathbf{X}_G$ по x и y).*

Далее мы сформулируем два основных утверждения. Доказательства обеих теорем будут приведены в параграфе 6.7.2.

Теорема 6.11. О существовании решения. *Допустим, что предположения 6.1N и 6.2N выполнены. Тогда существует единственная функция стоимости V^*: $\mathbb{Z}_+ \times X \to \mathbb{R}$, являющаяся решением задачи 6.1. Функция V^* является непрерывной по аргументу x и ограниченной. Более того, для любого начального значения $x(0) \in X$ оптимальный план $\mathbf{x}^*[0] \in \Phi(0, x(0))$ существует.*

Теорема 6.12. Уравнения Эйлера и условие трансверсальности. *Рассмотрим множество $X \subset \mathbb{R}_+^K$ и допустим, что предположения 6.1N–6.5N выполнены. Тогда последовательность $\left\{x^*(t+1)\right\}_{t=0}^{\infty}$, такая, что $x^*(t+1) \in \mathrm{Int}G(t, x^*(t))$, $t = 0, 1, \ldots$, является оптимальным планом для задачи 6.1 при начальном значении $x(0)$, если и только если она удовлетворяет уравнению Эйлера*

$$D_yU(t, x^*(t), x^*(t+1)) + \beta D_xU(t+1, x^*(t+1), x^*(t+2)) = 0 \quad (6.42)$$

и условию трансверсальности

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t D_xU(t, x^*(t), x^*(t+1)) \cdot x^*(t) = 0. \quad (6.43)$$

В уравнении (6.42), так же как и ранее в стационарной задаче, символ D_yU обозначает вектор частных производных функции U по всем переменным управления (последним K аргументам), а символ D_xU — вектор частных производных функции U по всем переменным состояния. Символ «·»

в уравнении (6.43), как и ранее, обозначает скалярное произведение двух векторов.

Эти две теоремы предоставляют нам аппарат, необходимый для анализа нестационарных задач оптимизации на бесконечном горизонте планирования в дискретном времени. В частности, теорема 6.11 гарантирует существование решения, а в теореме 6.12 утверждается, что, аналогично стационарному случаю, для описания решения задачи (в случае если оно является внутренним) мы можем использовать уравнения Эйлера и условие трансверсальности.

*6.7.2. Доказательство теорем 6.11 и 6.12**

Доказательство теоремы 6.11. Так как функция U является равномерно ограниченной (предположение 6.1N) и непрерывной (предположение 6.2N), из теоремы A.12 из приложения A следует, что целевая функция задачи 6.1 является непрерывной по аргументу $\mathbf{x}[0]$ в топологии прямого произведения. Более того, ограничивающее множество $\Phi(0, x(0))$ является замкнутым подмножеством пространства X^{∞} (прямого произведения счетного множества пространств X). Так как множество X компактно (предположение 6.2N), из теоремы Тихонова (теорема A.13 из приложения A) следует, что пространство X^{∞} компактно в топологии прямого произведения. Из того, что замкнутое подмножество компактного пространства является компактом (лемма A.2 из приложения A) следует, что множество $\Phi(0, x(0))$ компактно. Применяя теоремы Вейерштрасса (теорема A.9 из приложения A) к задаче 6.1, получаем существование элемента $\mathbf{x}^*[0] \in \Phi(0, x(0))$, на котором функция стоимости достигает значения $V^*(0, x(0))$. Более того, так как ограничивающее множество является непрерывным отображением (в топологии прямого произведения), из теоремы Берга о максимуме (теорема A.16 из приложения A) следует, что функция стоимости $V^*(0, x(0))$ непрерывна по аргументу $x(0)$. Так как $x(0) \in X$ и множество X компактно, отсюда следует, что функция $V^*(0, x(0))$ ограничена (следствие A.1 из приложения A). ■

Доказательство теоремы 6.12. Доказательство схоже с доказательством теоремы 6.10.

(Достаточность.) Рассмотрим произвольное значение $x(0)$ и построим доступную неотрицательную последовательность $\mathbf{x}^*[0] \equiv (x(0), x^*(1), \ldots) \in \Phi(0, x(0))$, удовлетворяющую условиям (6.42) и (6.43). Для любой доступной последовательности $\mathbf{x}[0] \equiv (x(0), x(1), \ldots) \in \Phi(0, x(0))$ определим $\Delta_{\mathbf{x}}$ как разность значений целевой функции на доступных последовательностях $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{x}$:

$$\Delta_{\mathbf{x}} = \lim_{T\to\infty} \inf \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left[U(t, x^*(t), x^*(t+1)) - U(t, x(t), x(t+1)) \right].$$

Из предположений 6.2N и 6.5N следует, что функция U является непрерывной, вогнутой и дифференцируемой. По определению вогнутой функции для любой последовательности $\mathbf{x}[0] \in \Phi(0, x(0))$ выполняется следующее неравенство:

$$\Delta_{\mathbf{x}} \ge \lim_{T\to\infty} \inf \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left[D_x U(t, x^*(t), x^*(t+1)) \cdot (x^*(t) - x(t)) + \right.$$
$$\left. + D_y U(t, x^*(t), x^*(t+1)) \cdot (x^*(t+1) - x(t+1)) \right].$$

Используя равенство $x^*(0) = x(0)$ и перенося члены, получаем следующее неравенство:

$$\Delta_{\mathbf{x}} \ge \lim_{T\to\infty} \inf \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left[D_y U(t, x^*(t), x^*(t+1)) + \right.$$
$$\left. + \beta D_x U(t+1, x^*(t+1), x^*(t+2)) \right] \cdot (x^*(t+1) - x(t+1)) -$$
$$- \lim_{T\to\infty} \sup \beta^T D_x U(T+1, x^*(T+1), x^*(T+2)) \cdot x^*(T+1) +$$
$$+ \lim_{T\to\infty} \inf \beta^T D_x U(T+1, x^*(T+1), x^*(T+2)) \cdot x(T+1).$$

Так как последовательность $\mathbf{x}^*[0]$ удовлетворяет условию (6.42), все члены в первом слагаемом в неравенстве выше равны нулю. Более того, так как она удовлетворяет условию (6.43), второе слагаемое в этом неравенстве также равно нулю. Наконец, из того, что по предположению 6.4N функция U возрастает по аргументу x, следует, что $D_x U \ge 0$. Более того, по условию теоремы $x \ge 0$ и поэтому последнее слагаемое в неравенстве выше неотрицательное. Таким образом, получаем, что для любой последовательности $\mathbf{x}[0] \in \Phi(0, x(0))$ выполняется неравенство $\Delta_{\mathbf{x}} \ge 0$. Следовательно, значение функции стоимости на последовательности $\mathbf{x}^*[0]$ превышает ее значения на любой другой доступной последовательности $\mathbf{x}[0] \in \Phi(0, x(0))$. Отсюда следует оптимальность плана $\mathbf{x}^*[0]$.

(Необходимость.) Теперь определим величину $\Delta_{\mathbf{x}}$ следующим образом:

$$\Delta'_{\mathbf{x}} \equiv \lim_{T\to\infty} \sup \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left[U(t, x^*(t), x^*(t+1)) - U(t, x(t), x(t+1)) \right].$$

Предположим, что последовательность $\left\{x^*(t+1)\right\}_{t=0}^{\infty}$, такая, что $x^*(t+1) \in \operatorname{Int} G(t, x^*(t))$ для любого t, является оптимальным планом задачи. Тогда значение $\Delta'_{\mathbf{x}}$ неотрицательно на любой доступной последовательности $\mathbf{x}[0] \in \Phi(0, x(0))$. Рассмотрим последовательность $\mathbf{x}[0] \in \Phi(x(0))$, такую, что $x(t) = x^*(t) - \varepsilon z(t)$, где вектор $z(t) \in \mathbb{R}^K$, а ε — некоторое вещественное число. При достаточно малых значениях ε такая последовательность $\mathbf{x}[0]$ будет лежать в множестве $\Phi(0, x(0))$ в силу того, что $x^*(t+1) \in \mathrm{Int}G(t, x^*(t))$ для всех t. Тогда, так же как и при доказательстве теоремы 6.10, получаем следующее неравенство:

$$\Delta'_{\mathbf{x}} \le \lim_{T\to\infty} \inf \sum_{t=0}^{T} \beta^t \Big[D_x U(t, x^*(t), x^*(t+1)) \cdot \varepsilon z(t) +$$

$$+ D_x U(t, x^*(t), x^*(t+1)) \cdot \varepsilon z(t+1) \Big] + \lim_{T\to\infty} \sup \sum_{t=0}^{T} \beta^t o(\varepsilon, t),$$

где $\lim\limits_{T\to\infty} o(\varepsilon, t)\big/\varepsilon = 0$. Если при некотором t' условие (6.42) не выполняется, то положим $z(t) = 0$ для всех $t \ne t'$, ε и выберем $z(t')$ таким образом, что выполняется неравенство $D_x U(t, x^*(t'), x^*(t'+1)) \cdot z(t') < 0$. Устремляя ε к нулю, получаем, что $\Delta'_{\mathbf{x}} < 0$, а это противоречит предположению о том, что условие (6.42) не выполняется.

Далее предположим, что условие (6.42) выполняется, а условие (6.43) не выполняется. Выбирая $x(t) = (1 - \varepsilon)x^*(t)$ и повторяя те же шаги, что и при доказательстве теоремы 6.10, приходим к следующему неравенству:

$$\Delta'_{\mathbf{x}} \le -\varepsilon \lim_{T\to\infty} \inf \beta^T D_x U(T, x^*(T), x^*(T+1)) \cdot x^*(T).$$

Если условие (6.43) не выполняется, то, выбирая значение ε положительным или отрицательным, из этого неравенства получаем, что $\Delta'_{\mathbf{x}} < 0$, это противоречит предположению о том, что условие (6.43) не выполняется. ■

6.7.3. Приложения

В качестве приложения теории нестационарных задач оптимизации на бесконечном горизонте планирования в дискретном времени рассмотрим задачу максимизации полезности потребителем в рыночной экономике при возможно изменяющихся во времени заработной плате и процентной ставке.

Пример 6.5 (продолжение). Продолжим предполагать, что горизонт планирования потребителя бесконечен, а его моментальная функция полезности $u(c)$, определенная на множестве значений потребления, где u: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, является строго возрастающей, непрерывной, дифференцируемой и строго вогнутой функцией.

Дисконт $\beta \in (0, 1)$. Предположим, что последовательности трудовых доходов $\{w(t)\}_{t=0}^{\infty}$ и процентных ставок $\{r(t)\}_{t=0}^{\infty}$, возможно, изменяются во времени, однако неопределенность в экономике отсутствует. Потребитель начинает жизнь с заданным значением финансовых активов $a(0)$. Тогда его задача максимизации полезности может быть записана в следующем виде:

$$\max_{\{c(t),a(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t)),$$

при потоковом бюджетном ограничении

$$a(t+1) = (1 + r(t))a(t) + w(t) - c(t)$$

и заданном значении начальной финансовой позиции $a(0)$. Так же, как и в случае с постоянными заработной платой и процентной ставкой, нам необходимо ввести другие ограничения, дополняющие потоковое бюджетное ограничение. Как и ранее, введем естественное предельное значение для размера долга. В упражнении 6.13 показано, что в этом случае ограничение на предельный размер долга принимает следующий вид:

$$a(t) \geq -\sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left(\prod_{j=0}^{s} \frac{1}{1 + r(t+j)} \right) w(t+s) \right\}. \tag{6.44}$$

Более того, предположим, что правая часть неравенства (6.44) ограничена некоторой константой $\bar{W} < \infty$ для всех t. Тогда естественным будет предположение о том, что финансовая позиция потребителя $a(t)$ должна всегда лежать в множестве типа $\left[-\bar{W}, a(0) + \bar{W}\right]$ (см. упражнение 6.13). Повторяя те же шаги, что и в части 1 примера 6.5, мы сможем переписать задачу максимизации полезности потребителем в следующем виде:

$$\max_{\{a(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u((1 + r(t)a(t) + w(t) - a(t+1))$$

при заданном начальном значении финансовых активов $a(0)$. В этом случае уравнение Эйлера в любом периоде времени t принимает следующий вид:

$$u'(c(t)) = \beta(1 + r(t+1))u'(c(t+1)). \tag{6.45}$$

Тогда вместо правила (6.40) мы приходим к следующему, более общему, правилу поведения потребителя:

если $r(t+1) = \beta^{-1} - 1$, то $c(t) = c(t+1)$ и потребление постоянно в t и $t+1$,

если $r(t+1) > \beta^{-1} - 1$, то $c(t) < c(t+1)$ и потребление растет между t и $t+1$,

если $r(t+1) < \beta^{-1} - 1$, то $c(t) > c(t+1)$ и потребление падает между t и $t+1$.

В некотором смысле этот результат еще более замечателен, чем правило (6.40), так как в нем утверждается, что угол наклона траектории потребления не зависит не только от начальной финансовой позиции $a(0)$, но и от значения текущего дохода. Более того, он не зависит от значений дохода во все периоды времени $\{w(t)\}_{t=0}^{\infty}$. ■

6.8. Задача оптимального роста в дискретном времени

Теперь мы можем вернуться к задаче оптимального роста, которую мы поставили в параграфе 5.9 и, используя основные теоремы стационарного динамического программирования, получить описание траектории оптимального роста в неоклассической экономике. Мы уже показали в примере 6.4, как это можно сделать в частном случае логарифмической функции полезности, производственной технологии Кобба—Дугласа и 100%-ной амортизации капитала. В этом параграфе мы проанализируем более общий случай и получим результаты для канонической задачи оптимального роста, описанной в главе 5.

Напомним, что задача оптимального роста в односекторной экономике, допускающей существование репрезентативного домохозяйства с моментальной функцией полезности u и дисконтом $\beta \in (0, 1)$ может быть описана следующим образом:

$$\max_{\{k(t),c(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t)) \tag{6.46}$$

при ресурсных ограничениях

$$k(t+1) = f(k(t)) + (1 - \delta)k(t) - c(t) \text{ и } k(t) \geq 0 \tag{6.47}$$

и заданном начальном значении количества капитала $k(0) > 0$. Будем считать, что стандартные предположения о виде производственной функции (предположения 1 и 2 из главы 2) выполняются. Более того, сделаем следующее предположение.

Предположение 3′. *Функция полезности* u: $[\varepsilon, \infty) \to \mathbb{R}$ *является непрерывно дифференцируемой и строго вогнутой при некотором достаточно малом значении* $\varepsilon > 0$.

Это предположение является намного более строгим, чем необходимо для последующего анализа. На самом деле для доказательства большинства утверждений достаточно предположения о вогнутости или даже просто непрерывности функции полезности u. Однако такое предположение избавляет нас от необходимости использования большого количества несущественных технических деталей. Мы назвали его предположением 3′ для того, чтобы отличать его от очень близкого предположения 3, которое мы введем в главе 8 и будем использовать в последующем в ней и далее анализе.

На первом шаге нам необходимо выписать задачу оптимального роста в виде стационарной задачи динамического программирования. Это можно сделать способом, аналогичным использованному в примерах 6.1 и 6.4. В частности, возьмем в качестве переменной выбора количество капитала в следующем периоде и обозначим ее как s. Тогда из ресурсного ограничения (6.47) следует, что текущий уровень потребления можно выписать как $c(t) = f(k) + (1 - \delta)k - s$, и поэтому задача оптимального роста может быть записана в следующей рекурсивной форме:

$$V(k) = \max_{s \in G(k)} \{u(f(k) + ((1-\delta)k - s) + \beta V(s)\}, \tag{6.48}$$

где ограничивающее множество $G(k)$ является отрезком $[0, f(k) + (1 - \delta)k]$. Такой его вид следует из требования неотрицательности значений потребления и капитала во все периоды времени.

Нетрудно убедиться, что при выполнении предположений 1, 2 и 3' задача оптимального роста удовлетворяет предположениям 6.1–6.5 для задачи динамического программирования. Единственным неочевидным свойством в данном случае является требование, чтобы значения потребления и количества капитала лежали в компактном множестве. Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что экономика никогда не сможет достигнуть уровня отношения капитала к труду большего, чем значение $\bar{k}$, заданное следующим равенством:

$$\delta \bar{k} = f(\bar{k}),$$

так как такое значение отношения капитала к труду соответствует случаю, когда потребление равно нулю во все периоды времени. Если в начальный период времени выполняется условие $k(0) < \bar{k}$, то оно никогда не превысит $\bar{k}$. Если в начальный период времени выполняется условие $k(0) > \bar{k}$, то оно никогда не превысит $k(0)$. Поэтому мы без ограничения общности можем ограничить множество значений потребления и отношения капитала к труду компактным множеством $[0, \bar{\bar{k}}]$, где

$$\bar{\bar{k}} \equiv f(\max\{k(0), \bar{k}\}) + (1-\delta)\max\{k(0), \bar{k}\}.$$

Следовательно, для анализа этой задачи мы можем применять теоремы 6.1–6.6.

Утверждение 6.1. *Если предположения 1, 2 и 3' выполнены, то задача оптимального роста в форме* (6.46) *и* (6.47) *имеет решение, которое описывается единственной функцией стоимости $V(k)$ и функцией потребления $c(k)$. Количество капитала в следующем периоде задается равенством $s(k) = f(k) + (1 - \delta)k - c(k)$. Более того, функция стоимости $V(k)$ является строго возрастающей и строго вогнутой, а функция $s(k)$ не убывает по k.*

Доказательство. Из теорем 6.1 и 6.2 следует, что функция стоимости $V(k)$ (6.48) является решением задачи (6.46)–(6.47). Ее существование следует из теоремы 6.3, а ее монотонность и строгая вогнутость, так же как и то, что отображение выбора является функцией — из теоремы 6.4 и следствия 6.1.

Следовательно, нам необходимо показать лишь то, что функция $s(k)$ является неубывающей. Это можно доказать с помощью метода от противного, используя механизм выявленных предпочтений. Для того чтобы получить противоречие, предположим, что функция $s(k)$ убывает на некотором промежутке, то есть что существуют значения k и $k' > k$, такие, что $s(k) > s(k')$. Так как $k' > k$, то значение $s(k)$ доступно при количестве капитала, равном k'. Более того, так как по предположению $s(k) > s(k')$, то значение $s(k')$ доступно при количестве капитала, равном k. Из оптимальности и доступности следует, что выполняются следующие неравенства:

$$V(k) = u(f(k) + (1-\delta)k - s(k)) + \beta V(s(k)) \geq$$
$$\geq u(f(k) + (1-\delta)k - s(k')) + \beta V(s(k')),$$
$$V(k') = u(f(k') + (1-\delta)k' - s(k)) + \beta V(s(k')) \geq$$
$$\geq u(f(k') + (1-\delta)k' - s(k)) + \beta V(s(k)).$$

Объединяя эти неравенства и перенося члены, получаем следующее неравенство:

$$u(f(k) + (1-\delta)k - s(k)) - u(f(k) + (1-\delta)k - s(k')) \geq \beta[V(s(k')) - V(s(k))] \geq u(f(k') + (1-\delta)k' - s(k)) - u(f(k') + (1-\delta)k' - s(k')).$$

Введем обозначения $z \equiv f(k) + (1-\delta)k$, $x \equiv s(k)$, $z' \equiv f(k') + (1-\delta)k'$ и $x' \equiv s(k')$. Тогда предыдущее неравенство можно переписать в виде

$$u(z - x') - u(z - x) \leq u(z' - x') - u(z' - x). \qquad (6.49)$$

Однако очевидно, что выполняется равенство:

$$(z - x') - (z - x) = (z' - x') - (z' - x) = x - x',$$

откуда вместе с тем, что $z' > z$ (так как $k' > k$), $x > x'$ по предположению, а функция u строго вогнута и возрастает, следует, что выполняется неравенство:

$$u(z - x') - u(z - x) > u(z' - x') - u(z' - x),$$

которое противоречит неравенству (6.49). Это завершает доказательство того, что функция $s(k)$ нигде не убывает. ■

Более того, из предположения 2 следует, что решения для потребления и сбережений являются внутренними решениями. Поэтому из приложения теоремы 6.6 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 6.2. *Если предположения 1, 2 и 3′ выполнены, то функция стоимости $V(k)$, определенная выше, является дифференцируемой.*

Далее используем теорему 6.10 и проанализируем уравнение Эйлера и условие трансверсальности для этой задачи динамической оптимизации. Уравнение Эйлера в форме (6.48) принимает следующий простой вид:

$$u'(c) = \beta V'(s),$$

где переменная s обозначает количество капитала в следующем периоде. Применяя условие, следующее из теоремы об огибающей, получаем равенство:

$$V'(k) = [f'(k) + (1 - \delta)]u'(c).$$

Таким образом, приходим к знакомому условию:

$$u'(c(t)) = \beta[f'(k(t+1)) + (1 - \delta)]u'(c(t+1)). \tag{6.50}$$

Условие трансверсальности также легко следует из более общего вида условия трансверсальности (6.32). В частности, так как в данной задаче моментальная функция выигрыша как функция от текущего значения переменной состояния k и ее будущего значения s имеет вид $u(f(k) + (1 - \delta)k - s)$, условие трансверсальности принимает следующий вид:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\beta^t(f'(k(t))+(1-\delta))u'(c(t))k(t)\right] = 0. \tag{6.51}$$

Как и ранее, стационарным состоянием (для задачи оптимального роста) будем называть распределение ресурсов, при котором значения отношения капитала к труду и потребления не зависят от времени. Продолжая обозначать такое распределение ресурсов звездочкой, получаем следующее условие для отношения капитала к труду в стационарном состоянии:

$$\beta[f'(k^*) + (1 - \delta)] = 1. \tag{6.52}$$

Уравнение (6.52) описывает очень важный результат: значение отношения капитала к труду в стационарном состоянии не зависит ни от каких параметров предпочтений домохозяйств, кроме дисконта. Более точно, значение отношения капитала к труду в стационарном состоянии полностью характеризуется технологией, нормой амортизации и дисконтом.

Далее, так как функция $f(\cdot)$ является строго вогнутой, равенство (6.52) определяет значение k^* единственным образом. Наконец из того, что в стационарном состоянии $k(t) = k^*$, $c(t) = c^*$, $\beta[f'(k^*) + (1 - \delta)] = 1$, а значение дисконта $\beta < 1$, следует, что условие трансверсальности выполняется автоматически. Эти рассуждения приводят нас к следующему важному утверждению.

Утверждение 6.3. *В неоклассической модели оптимального роста, заданной условиями* (6.46) *и* (6.47), *существует единственное значение отношения капитала к труду в стационарном состоянии* k^*. *Оно определяется* *равенством* (6.52). ***Начиная с любого начального значения*** $k(0) > 0$, ***экономика монотонно сходится к этому стационарному состоянию. Другими словами, если*** $k(0) < k^*$, ***то*** $k(t) \uparrow k^*$, ***а если*** $k(0) > k^*$,***то*** $k(t) \downarrow k^*$.

Доказательство. Существование и единственность стационарного состояния доказаны выше. Для доказательства монотонной сходимости начнем с произвольного начального значения капитала $k(0)$ и рассмотрим его значение в следующем периоде. Так как $k(t+1) = s(k(t))$ для всех $t \geq 0$, $k(1) = s(k(0))$. Возможны два случая: $k(1) = s(k(0)) \geq k(0)$ и $k(1) = s(k(0)) < k(0)$.

Рассмотрим первый случай. Так как функция $s(\cdot)$ не убывает и $k(2) = s(k(1))$, в этом случае должно выполняться неравенство $k(2) \geq k(1)$. Используя метод математической индукции, получаем, что $k(t) = s(k(t-1)) \geq k(t-1) = s(k(t-2))$. Более того, по определению $k(t) \in [0, \bar{k}]$. Таким образом, последовательность $\{k(t)\}_{t=0}^{\infty}$ является неубывающей последовательностью на компактном множестве с первым элементом, равным $k(0) > 0$. Поэтому она сходится к некоторому значению $\lim k(\infty) > 0$, которое по определению удовлетворяет условию $k(\infty) = s(k(\infty))$. Так как значение отношения капитала к труду k^* положительно и является единственным стационарным состоянием, отсюда следует, что $k(\infty) = k^*$, и поэтому $k(t) \to k^*$. Более того, так как последовательность $\{k(t)\}_{t=0}^{\infty}$ является неубывающей, она сходится монотонно, то есть $k(t) \uparrow k^*$. Это завершает доказательство утверждения для случая $k(0) \leq k^*$.

Далее рассмотрим случай $k(1) = s(k(0)) < k(0)$. Применяя рассуждения, аналогичные сделанным выше, в обратном порядке, можно убедиться в том, что последовательность $\{k(t)\}_{t=0}^{\infty}$ является невозрастающей последовательностью на компактном множестве $[0, \bar{k}]$ и поэтому сходится к единственному пределу $k(\infty)$. В этом случае существует два возможных варианта для значения $k(\infty)$: $k(\infty) = 0$ или $k(\infty) = k^*$. Однако первый вариант невозможен, так как в упражнении 6.19 показано, что из предположения 2 следует, что при достаточно малых значениях ε выполняется неравенство $s(\varepsilon) > \varepsilon$. Поэтому $k(\infty) = k^*$. Так как последовательность $\{k(t)\}_{t=0}^{\infty}$ является невозрастающей, в этом случае должно выполняться неравенство $k(0) > k^*$ и сходимость будет монотонной, то есть $k(t) \downarrow k^*$, что завершает доказательство утверждения. ■

Следовательно, в модели оптимального роста существует единственное стационарное состояние и экономика монотонно сходится к этому единственному стационарному состоянию, например накапливая все большее количество капитала (в случае когда начальное значение отношения капитала к труду слишком мало).

В следующем утверждении показано, что потребление на траектории сходимости к стационарному состоянию также является монотонно возрастающей (или убывающей) функцией.

Утверждение 6.4. *Функция $c(k)$, определенная в утверждении 6.1, является неубывающей. Более того, если $k(0) < k^*$, то равновесная траектория потребления удовлетворяет условию $c(t) \uparrow c^*$, а если $k(0) > k^*$, то $c(t) \downarrow c^*$, где значение потребления в стационарном состоянии задается следующим равенством:*

$$c^* = f(k^*) - \delta k^*.$$

Доказательство. См. упражнение 6.17. ■

Рассуждения выше показывают, что анализ задачи оптимального роста достаточно прост и что она имеет много общих свойств с моделью экономического роста Солоу. Например, обе модели обладают единственным стационарным состоянием и в обеих моделях экономика глобально монотонно сходится к нему. В силу того что в модели оптимального роста количество сбережений зависит от вида функции полезности и изменяется со временем, в ней отсутствует прямой аналог нормы сбережений в модели Солоу, при этом дисконт в данной модели является параметром, тесно связанным с нормой сбережений.

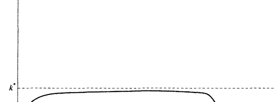


Рис. 6.1. Траектория движения по магистрали в неоклассической модели роста с конечным горизонтом планирования (T периодов) при начальном значении отношения капитала к труду $k(0)$

Сходимость экономики к стационарному состоянию в модели оптимального роста является одновременно важным и замечательным по своей простоте свойством. Такие результаты о сходимости, которые первоначально были получены экономистами для моделей с конечным горизонтом планирования, называют теоремами о магистрали. Чтобы понять смысл такого названия теоремы, предположим, что экономика заканчивает свое существование в некоторый период $T > 0$. Каковы будут оптимальные траектории развития и накопления капитала для такой экономики? В ранних работах по теории оптимального экономического роста показано, что по мере того, как $T \to \infty$, последовательность оптимального отношения капитала к труду $\{k(t)\}_{t=0}^{T}$ сколь угодно близко приближается к значению k^*, определенному равенством (6.52), и лишь в последние несколько периодов времени резко сокращается до нуля, чтобы удовлетворить условию трансверсальности (напомним обсуждение условия трансверсальности в случае конечного горизонта планирования в параграфе 6.6). Поэтому оптимальная траектория отношения капитала к труду схожа с траекторией автомобиля, движущегося из одного пункта в другой по магистрали.

6.9. Экономический рост в равновесии с совершенной конкуренцией

Основной задачей данной книги является не описание оптимальной траектории экономического роста, а анализ равновесной динамики экономики и ее долгосрочного развития. Подробный анализ равновесной траектории экономического роста представлен в главе 8. В данный момент нам будет достаточно ограничиться кратким описанием того, каким образом равновесная траектория экономического роста может быть получена в рамках задачи оптимального роста. Из второй теоремы экономики благосостояния (теорема 5.7 в предыдущей главе) следует, что оптимальная траектория роста, описанная в параграфе 6.8, соответствует равновесной траектории экономического роста (в том смысле, что она может быть децентрализована как конкурентное равновесие). Более того, так как мы анализируем экономику, допускающую существование репрезентативного домохозяйства, наиболее простым конкурентным равновесием будет симметричное равновесие, где все домохозяйства, каждое с функцией полезности $u(c)$ принимают одинаковые решения и имеют одно и то же распределение ресурсов. Далее мы коротко опишем это симметричное конкурентное равновесие (или равновесие с репрезентативным домохозяйством).

Эквивалентность задач оптимального роста и равновесного роста может быть показана напрямую без использования второй теоремы экономики благосостояния. Предположим, что каждое домохозяйство обладает начальным запасом капитала $K(0)$, то есть начальное распределение ресурсов также является симметричным (напомним, что домохозяйства распределены на множестве с мерой 1 и поэтому суммарный начальный запас капитала в экономике также равен $K(0)$). Производственная структура экономики, которая описывается с помощью агрегированной производственной функции, состоит из большого количества конкурирующих фирм. Следующее определение является стандартным определением конкурентного равновесия для такой экономики.

Определение 6.3. Конкурентным равновесием *будем называть набор траекторий потребления, капитала, заработной платы и арендной стоимости капитала* $\{C(t),\ K(t),\ w(t),\ R(t)\}_{t=0}^{\infty}$, *такой, что функция полезности репрезентативного домохозяйства на нем достигает максимума при начальном значении капитала* $K(0)$ *и последовательностях цен факторов производства* $\{w(t),\ R(t)\}_{t=0}^{\infty}$, *а последовательности цен факторов производства* $\{w(t),\ R(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *таковы, что при заданных траекториях капитала и труда* $\{K(t),\ L(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *все рынки находятся в равновесии.*

Фирмы арендуют капитал у домохозяйств. Как и в базовой модели Солоу, домохозяйства получают доход с единицы капитала, равный его арендной стоимости $R(t)$, заданной следующим равенством:

$$R(t) = f'(k(t)),$$

и поэтому валовая доходность аренды единицы капитала в периоде t, рассчитанная в единицах товаров периода $t + 1$, вычисляется как

$$1 + r(t+1) = f'(k(t)) + (1 - \delta). \tag{6.53}$$

Заметим, что мы обозначили валовую доходность актива как $1 + r$ (что позволит нам использовать символ r для обозначения чистой процентной ставки как в моделях с дискретным временем, так и в моделях с непрерывным временем). В дополнение к доходу от аренды капитала домохозяйства в этой экономике получают трудовой доход от предоставления на рынок рабочего времени по рыночной заработной плате, равной $w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t))$.

Далее рассмотрим задачу максимизации репрезентативного домохозяйства:

$$\max_{\{c(t),a(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t))$$

при потоковом бюджетном ограничении:

$$a(t+1) = (1 + r(t+1))a(t) - c(t) + w(t) \tag{6.54}$$

и начальном значении $a(0) > 0$, где переменная $a(t)$ обозначает количество финансовых активов в периоде t, а переменная $w(t)$ — как и ранее, трудовой доход домохозяйства (в силу того что мы нормировали предложение труду единицей). Временная структура экономики, описываемая потоковым бюджетным ограничением (6.54), состоит в том, что домохозяйства сдают фирмам в аренду свой капитал или финансовые активы в начале периода t и фирмы могут использовать его для производства благ в течение этого периода.

Еще раз напомним, что мы накладываем естественное ограничение на максимальное значение долга домохозяйства в виде (6.44), а из условия равновесия на рынках следует равенство $a(t) = k(t)$.

Уравнение Эйлера для задачи максимизации потребителя можно получить, используя рассуждения из примера 6.5. В данном случае оно принимает следующий вид:

$$u'(c(t)) = \beta(1 + r(t+1))u'(c(t+1)). \tag{6.55}$$

В стационарном состоянии потребление не изменяется со временем, то есть $c(t) = c(t+1)$. Следовательно, в стационарном состоянии выполняется следующее равенство:

$$\beta(1 + r(t+1)) = 1.$$

Далее, равновесие на рынке аренды капитала влечет выполнение условия (6.53), и поэтому отношение капитала к труду в конкурентном равновесии задается следующим равенством:

$$\beta[f'(k(t+1)) + (1 - \delta)] = 1.$$

Это условие выполняется и в стационарном состоянии:

$$\beta[f'(k^*) + (1 - \delta)] = 1.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (6.52), которое описывает решение задачи оптимального роста. Используя схожую аргументацию, нетрудно убедиться, что вся траектория конкурентного равновесия совпадает с оптимальной траекторией экономики. В частности, подставляя выражение для $1 + r(t+1)$ из равенства (6.53) в уравнение (6.55), приходим к следующему виду уравнения Эйлера:

$$u'(c(t)) = \beta[(f'(k(t+1)) + (1 - \delta))]u'(c(t+1)), \tag{6.56}$$

который совпадает с уравнением (6.50). Из этого уравнения также следует, что при одинаковых начальных условиях динамика отношения капитала к труду в конкурентном равновесии совпадает с его динамикой в задаче оптимального роста (см. упражнение 6.21). Эти выводы конечно полностью согласуются с первой и второй теоремами экономики благосостояния.

6.10. Вычисления

Все результаты, полученные нами выше, говорят о существовании решения задачи динамической оптимизации и описывают свойства ее решения через функцию стоимости, правило выбора и оптимальный план. Однако методы динамического программирования широко используются и при решении численных задач (упражнение 6.3 в конце главы является полезным первым шагом в таком контексте). На самом деле рекурсивная формулировка задачи динамического программирования предоставляет эффективный метод численного решения задачи. Это является особенно важным так как, как мы уже убедились при анализе примера 6.4, решение в явном виде существует только лишь у очень узкого класса задач динамической оптимизации. Поэтому экономисты, так же как и инженеры, часто используют численные методы для количественного и качественного описания свойств решения задачи оптимизации и равновесной траектории экономики. Рекурсивная формулировка часто является начальной точкой при численном решении таких задач.

Обсуждение различных подходов, используемых при решении задач динамической оптимизации и того, как методы динамического программирования могут быть использованы в этом случае, выходит за рамки этой книги. Однако это ни в коей мере не снижает важности численных упражнений в теории экономического роста и полезности методов динамического программирования для получения численных решений различных экономических задач. Читатель может найти прекрасное и подробное описание численных методов, используемых в экономике и роли динамического программирования в книге [Judd 1998]. Краткое введение в теорию и приложения численных методов в макроэкономике также можно найти в книге [Ljungqvist, Sargent 2005].

6.11. Основные выводы

Эта глава посвящена описанию основных методов динамического программирования для бесконечномерных задач в дискретном времени. Эти методы не только являются ключевыми в анализе задач теории экономического роста, но и широко используются во многих других разделах макроэкономики и экономической динамики. Хорошее знание этих методов является важнейшим условием для понимания механики экономического роста. В частности, они помогают разобраться в том, как работают различные модели экономического роста, как они могут быть улучшены и как они могут быть использованы для анализа экономических данных. По этой причине мы включили эту главу в основной материал книги, а не в заключительную ее часть вместе с другими математическими приложениями.

В этой главе мы также показали ряд экономических приложений динамического программирования, включая предварительный анализ односекторной модели оптимального экономического роста. Читатель мог увидеть параллели между этой моделью и базовой моделью Солоу, представленной в главе 2. Мы поговорим о них подробнее в главе 8. Мы также затронули вопрос децентрализации оптимальной траектории роста и кратко описали задачу максимизации полезности потребителем в динамическом конкурентном равновесии.

Важно отметить тот факт, что при изложении материала этой главы мы пропустили ряд сложных технических деталей. Во-первых, мы остановились на задачах с дисконтированием, которые являются более простыми, чем задачи без дисконтирования. Однако недисконтируемая целевая функция ($\beta = 1$, а не $\beta \in [0, 1)$) встречается в экономике лишь в очень малом количестве задач. Наиболее важными упрощениями были наши предположения о том, то функция выигрыша является ограниченной, а вектор переменных состояния принимает значения на некотором компактном подмножестве метрического пространства X. Эти ограничения не позволяют применять разработанные нами методы при анализе ряда интересных задач, таких как задача эндогенного роста, где элементы вектора переменных состояния растут со временем. Необходимо отметить, что почти все результаты, полученные в этой главе, имеют аналоги, справедливые при более мягких ограничениях, однако для их доказательства необходим более сложный математический аппарат.

6.12. Литература

Принцип оптимальности, основной принцип динамического программирования, в некотором смысле очень прост. Однако по мере того как мы будем получать различные следствия из него, мы убедимся в том, что он является очень мощным инструментом анализа. Основные идеи динамического программирования, включая принцип оптимальности, были введены Ричардом Беллманом в его известной монографии [Bellman 1957]. В ней читатель может найти большинство результатов для задач конечномерного и бесконечномерного динамического программирования. Большинство утверждений также содержится в книге [Shapley 1953], посвященной стохастической теории игр. В ней изучаются характеристики равновесия в стохастических играх с нулевой суммой. Формулировка игр в книге Л. Шепли приводит к задачам, которые затем экономисты стали называть марковскими задачами. Эти задачи тесно связаны с задачами динамического программирования. Более того, Л. Шепли использует идеи, схожие с принципом оптимальности и теоремой о сжимающем отображении для того, чтобы доказать существование и единственность равновесия в таких динамических играх с нулевой суммой. Более подробное описание марковских задач можно найти в работе [Puterman 1994]. В ней также обсуждается взаимосвязь между работой Л. Шепли [Shapley1953], общей теорией марковских задач и динамическим программированием.

Насколько нам известно, первое простое доказательство принципа оптимальности было дано в работе [Karlin 1955]. Это доказательство схоже с доказательством, приведенным в данной главе. В работе [Denardo1967] показано, каким образом теорема о сжимающем отображении может быть использована в теории динамического программирования. Более подробный анализ дисконтированных задач стохастического динамического программирования можно найти в работе [Puterman 1994]. Доказательство достаточных условий Блэквелла для сжимающего отображения впервые сделано в работе [Blackwell 1965]. В ней также показаны приложения этих условий в контексте дисконтированных задач стохастического динамического программирования. Утверждение о дифференцируемости функции стоимости впервые было доказано в работе [Benveniste, Scheinkman 1979]. Вторая версия доказательства теоремы 6.6 в этой главе во многом схожа с этим доказательством. Первая версия доказательства этой теоремы является расширением более раннего доказательства из работы [Mirman, Zilcha 1975], которое было сделано авторами лишь для неоклассической модели экономического роста.

Наиболее подробный анализ дисконтированных задач стохастического динамического программирования представлен в книге [Stokey, Lucas, Prescott 1989]. Изложение материала в данной главе во многом базируется на ней и использует много выводов из их работы. Однако некоторые доказательства, приведенные здесь, были упрощены, так как мы ограничились анализом случая ограниченной функции выигрыша и компактным множеством значений переменных состояния. Обобщение теорем 6.1–6.6 для определенных задач с неограниченными функцией выигрыша и множеством значений переменных состояния читатель может найти в книге [Stokey, Lucas, Prescott 1989, chapter 4]. В отличие от книги Н. Стоки, Р. Лукаса и Э. Прескотта, мы в данной главе привели необходимые и достаточные условия оптимума для нестационарных задач оптимизации с бесконечным горизонтом планирования.

Вопрос необходимости и достаточности условия трансверсальности, затронутый в теореме 6.10, кратко обсуждается в книге [Stokey, Lucas, Prescott 1989] и более подробно в работах: [Ekeland, Scheinkman 1986; Kamihigashi 2001]. В работе [Kamihigashi 2001] приведена более слабая и общая версия условия трансверсальности, однако версия, приведенная в данной главе, достаточна для большинства экономических задач. Более простое, но интуитивно понятное описание методов динамического программирования читатель может найти в работе [Sundaram 1996]. В ней также приведено доказательство теоремы 6.1, схожее с ее доказательством в данной главе.

Среди полезных ссылок на теорему о сжимающем отображении и ее приложении стоит выделить книги: [Denardo 1967; Kolmogorov, Fomin 1970; Колмогоров, Фомин 1976; Kreiszig 1978] и очень хорошо написанную книгу [Bryant 1985], в которой приведены следствия из теоремы о сжимающем отображении, необходимые для доказательства существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и теоремы о неявной функции. Для описания различных методов анализа решений функциональных уравнений читатель может обратиться к учебнику [Aczel 1966].

6.13. Упражнения

6.1. Рассмотрите постановку задачи оптимального роста из примера 6.1. Покажите, что при выполнении предположений 1 и 2 в такой постановке задачи оптимального роста в дискретном времени она удовлетворяет предположениям 6.1–6.5.

***6.2.** Покажите, что если при некотором натуральном $n \in \mathbb{N}$ отображение T^n на полном метрическом пространстве (S, d) является сжимающим отображением, то отображение T обладает единственной неподвижной точкой на множестве S.

***6.3.** Предположите, что, если отображение T на метрическом пространстве (S, d) является сжимающим отображением с модулем, $\beta \in (0, 1)$. Покажите, что для любых точек $z \in S$, $z' \in S$ и любого натурального $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство:

$$d(T^n z, z') \leq \beta^n d(z, z').$$

Опишите, каким образом этот результат может быть использован в численных задачах?

***6.4.** **(a)** Докажите утверждения из примера 6.3 и покажите, что дифференциальное уравнение (6.7) обладает единственным непрерывным решением.

(b) Рассмотрите неравенство (6.8) из примера 6.3. Используйте аналогичные рассуждения для Tg и $T\tilde{g}$ и покажите, что выполняется неравенство:

$$\| T^2 g - T^2 \tilde{g} \| \leq M^2 \times \frac{s^2}{2} \times \| g - \tilde{g} \|.$$

(c) Используя рекуррентный метод, докажите, что для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство:

$$\| T^n g - T^n \tilde{g} \| \leq M^n \times \frac{s^n}{n!} \times \| g - \tilde{g} \|.$$

(d) Используйте неравенство из части (c), тот факт, что для любого вещественного $B < \infty$ предел $B^n/n! \to 0$ при $n \to 0$ и результат упражнения 6.2 для доказательства существования и единственности непрерывного решения дифференциального уравнения (6.7) на компактном множестве $[0, s]$ для любого положительного вещественного $s \in \mathbb{R}_+$.

***6.5.** Вспомните теорему о неявной функции (теорема A.25 из приложения A). Рассмотрите ее немного упрощенную версию в следующей форме. Пусть дана функция $\phi(y, x)$, такая, что отображение $\phi: \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$ является непрерывно дифференцируемым с ограниченной первой производной. Другими словами, существуют вещественные $0 < m < M < \infty$, такие, что для всех x и y выполняются следующие неравенства:

$$m \le \frac{\partial \phi(y, x)}{\partial y} \le M.$$

В теореме о неявной функции утверждается существование непрерывно дифференцируемой функции y: $[a, b] \to \mathbb{R}$, такой, что для всех вещественных $x \in [a, b]$ выполняется равенство:

$$\phi(y(x), x) = 0.$$

Докажите это утверждение используя теорему о сжимающем отображении. Для этого сделайте следующие шаги:

(a) Обозначим метрическое пространство непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ как $\mathbf{C}^1([a, b])$. Для каждой функции $y \in \mathbf{C}^1([a, b])$ рассмотрите оператор T, определенный следующим образом:

$$Ty = y(x) - \frac{\phi(y, x)}{M} \quad \text{для всех } x \in [a, b].$$

Покажите, что оператор T: $\mathbf{C}^1([a, b]) \to \mathbf{C}^1([a, b])$ является сжимающим отображением.

(b) Докажите теорему о неявной функции, используя теорему 6.7.

***6.6.** Докажите, что оператор T, определенный равенством (6.18), является сжимающим отображением.

6.7. Вернитесь к примеру 6.4.

(a) Покажите, что траектория капитала, определенная уравнением его динамики (6.37), монотонно сходится к единственному стационарному значению k^* при любом начальном значении $k_0 > 0$. Опишите динамику потребления $c(t)$ на траектории достижения стационарного состояния.

(b) Далее предположите, что вместо равенства (6.37) вы используете следующий вид функции выбора:

$$\pi(x) = ax^{\alpha} + bx + c.$$

Покажите, что рассуждения, аналогичные сделанным в примере 6.4, приводят к равенствам $b = c = 0$ и $a = \beta\alpha$.

(c) Далее вернитесь к описанию явного вида решения задачи с помощью предположения о виде функции стоимости и его последующей проверки. В частности предположите, что функция стоимости имеет следующий вид: $V(x) = A\log x$. Используйте это предположение и условия первого порядка для получения решения задачи в явном виде.

6.8. Рассмотрите следующую задачу оптимального роста в дискретном времени с полной амортизацией капитала:

$$\max_{\{k(t), c(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(c(t) - \frac{a}{2} c(t)^2 \right),$$

при ограничении

$$k(t+1) = Ak(t) - c(t)$$

с начальным условием $k(0) = k_0 > 0$. Предположите, что $k(t) \in \left[0, \bar{k}\right]$ и что $a < \bar{k}^{-1}$, так что функция полезности всегда остается возрастающей по потреблению.

(a) Переформулируйте задачу максимизации как задачу динамического программирования.

(b) Не решая задачу, покажите, что существуют единственная функция стоимости $V(k)$ и единственное правило выбора $c = \pi(k)$, определяющее значение потребления $c(t)$ как функцию от количества капитала $k(t)$.

(c) Найдите явный вид функции стоимости $V(k)$ и правила выбора $\pi(k)$ [Подсказка: сделайте предположение о виде функции стоимости $V(k)$ и используйте его вместе с уравнениями Беллмана и Эйлера для проверки того, что предположенный вами вид функции $V(k)$ удовлетворяет всем условиям первого порядка. Затем покажите, что решение задачи единственно.]

6.9. Рассмотрите задачу 6.2 или задачу 6.3. Пусть выполняются предположения 6.1–6.3 и 6.5 и условие $\partial^2 U(x, y)/\partial x \partial y \ge 0$. Покажите, что в таком случае оптимальное правило выбора $y = \pi(x)$ является неубывающей функцией.

6.10. Покажите, что в теореме 6.10 последовательность $\{x'(t)\}_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющая уравнениям Эйлера, но не удовлетворяющая условию трансверсальности, может не быть оптимальным планом.

6.11. Рассмотрите задачу максимизации полезности потребителем из примера 6.5 без ограничения на максимальный размер долга (то есть только с потоковыми бюджетными ограничениями). Покажите, что для любой траектории потребления $\{c(t)\}_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющей потоковым бюджетным ограничениям при начальном запасе финансовых активов $a(0)$, траектория потребления $\{c'(t)\}_{t=0}^{\infty}$, такая, что $c'(t) = c(t) + \gamma$ при вещественном $\gamma > 0$ для любого t также удовлетворяет потоковым бюджетным ограничениям. Используя этот результат, покажите, что, выбирая траекторию потребления $\{c(t)\}_{t=0}^{\infty}$, такую, что $\lim_{t\to\infty} a(t) = -\infty$ потребитель может достичь бесконечного значения полезности.

6.12. Рассмотрите пример 6.5 с условиями $w(t) = w$ и $r(t) = r$ для всех t.

(a) Покажите, что если выполняется неравенство $r \le \beta^{-1} - 1$, то $a(t) \in [\underline{a}, \bar{a}]$ при всех t, где $\bar{a} \equiv a(0) + w/r$, а $\underline{a} = -w/r$.

(b) Покажите, что если выполняется неравенство $r > \beta^{-1} - 1$, то не существует такого вещественного числа $\bar{a} < \infty$, что при всех t выполняется включение $a(t) \in [\underline{a}, \bar{a}]$.

6.13. Рассмотрите следующее продолжение примера 6.5.

(a) Покажите, что естественное ограничение на максимальный размер долга принимает вид (6.44).

(b) Введите следующее обозначение:

$$\bar{W} = \max_{t=0,1,\dots}\left\{\sum_{s=0}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{s}\frac{1}{1+r(t+j)}\right)w(t+s)\right\}$$

и предположите, что $\bar{W} < \infty$. Найдите условия, при которых для всех t выполняется ограничение $a(t) \in [-\bar{W}, a(0) + \bar{W}]$.

(c) Используйте условие трансверсальности и найдите значение потребления в начальном периоде времени $c(0)$ в явном виде как функцию от начального запаса финансовых активов $a(0)$ и значений трудовых доходов $\{w(t)\}_{t=0}^{\infty}$ и процентной ставки $\{r(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Как изменяется потребление в начальном периоде времени при росте начального запаса финансовых активов $a(0)$?

(d) Предположите, что $r(t) = r$ при всех t. Рассмотрите другую последовательность трудовых доходов $\{\tilde{w}(t)\}_{t=0}^{\infty}$, такую, что существует натуральное T, такое, что $w(t) < \tilde{w}(t)$ при всех $t < T$, $w(t) \ge \tilde{w}(t)$ при всех $t \ge T$ и выполняется следующее равенство:

$$\sum_{t=0}^{\infty}(1+r)^{-t}w(t) = \sum_{t=0}^{\infty}(1+r)^{-t}\tilde{w}(t).$$

Каким образом такое изменение трудовых доходов повлияет на потребление в начальном периоде времени и на всю траекторию потребления? Дайте подробное экономическое обоснование вашего вывода.

***6.14.** Рассмотрите нестационарную задачу динамической оптимизации в дискретном времени с бесконечным горизонтом планирования, которую мы обсуждали в параграфе 6.7. Найдите условия на отображения G и U, при которых оператор T, определенный на пространстве $\mathbf{C}(\mathbb{Z}_+ \times X)$ как

$$TV(t, x) = \max_{y\in G(t,x)}\{U(t, x, y) + \beta V(t+1, y)\},$$

где $V \in \mathbf{C}(\mathbb{Z}_+ \times X)$, является сжимающим отображением. Используйте эти условия и сформулируйте аналоги теорем 6.2–6.6 для нестационарной задачи динамической оптимизации. Наметьте план их доказательства.

6.15. Рассмотрите следующую модель оптимального роста в дискретном времени:

$$\max_{\{k(t),c(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} u(c(t))$$

при ограничении $k(t+1) = k(t) - c(t)$ и начальном условии $k(0) \in (0, \infty)$. Предположите, что функция полезности $u(\cdot)$ является строго возрастающей, строго вогнутой и ограниченной. Покажите, что такая задача максимизации не имеет решения. Объясните почему.

6.16. Рассмотрите следующую модель оптимального роста в дискретном времени с полной амортизацией:

$$\max_{\{k(t),c(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t)),$$

при ограничении $k(t+1) = f(k(t)) - c(t)$ и начальном условии

$$k(0) = k_0 > 0.$$

Предположите, что функция полезности $u(\cdot)$ является строго вогнутой и возрастающей при $c \ge 0$, а функция $f(\cdot)$ является вогнутой и возрастающей.

(a) Переформулируйте задачу максимизации в виде задачи динамического программирования.

(b) Докажите, что существует единственная функция стоимости $V(k)$ и единственное правило выбора $c = \pi(k)$. Покажите, что функция стоимости $V(k)$ непрерывна и строго вогнута, а функция выбора непрерывна и возрастает по k.

(c) При каких условиях функция стоимости $V(k)$ является дифференцируемой?

(d) Предположите, что функция стоимости $V(k)$ и остальные функции в задаче являются дифференцируемыми. Опишите уравнение Эйлера, которое определяет оптимальные траектории потребления и накопления капитала.

(e) Является ли уравнение Эйлера достаточным условием для нахождения решения задачи? Если нет, то какое условие необходимо добавить? Выпишите это условие и интуитивно объясните его смысл.

6.17. Докажите утверждение 6.4 о том, что если в базовой модели оптимального роста в дискретном времени оптимальный план потребления $c(k)$ является неубывающей функцией и если начальное значение капитала удовлетворяет неравенству $k_0 < k^*$, то на оптимальной траектории потребление монотонно сходится к стационарному состоянию, то есть $c(t) \uparrow c^*$.

***6.18.** Рассмотрите модель оптимального роста с конечным горизонтом планирования, которую мы обсудили в конце параграфа 6.8. Обозначьте последовательность отношения капитала к труду в экономике с конечным горизонтом планирования T с начальным значением капитала $k^T(0) > 0$ как $\left\{k^T(t)\right\}_{t=0}^{T}$. Покажите, что для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существуют натуральные $T < \infty$ и $t < T$, такие, что $|k^T(t') - k^*| < \varepsilon$. Покажите, что $k^T(T) = 0$. Затем покажите, что в предположении значение $k^T(0)$ достаточно мало, оптимальная траектория отношения капитала к труду выглядит так, как показано на рис. 6.1.

6.19. Покажите, что, как доказано в утверждении 6.3, из предположения 2 следует, что $s(\varepsilon) > \varepsilon$ для всех достаточно малых ε. Объясните, почему вы так считаете.

***6.20.** Приведите доказательство утверждения 6.1 без предположения о дифференцируемости функции полезности $u(\cdot)$ (которое накладывается в предположении 3′).

6.21. Докажите, что оптимальная траектория роста с начальным значением отношения капитала к труду $k(0)$, удовлетворяющая условию (6.50), совпадает с траекторией конкурентного равновесия при том же начальном значении отношения капитала к труду, на которой также выполняется условие (6.50) (или, что эквивалентно, условие (6.56)).

Глава 7
Введение в теорию оптимального управления

В предыдущей главе мы познакомились с основными методами динамической оптимизации в дискретном времени. В этой главе мы остановимся на основных результатах теории динамической оптимизации в непрерывном времени, в частности на так называемой теории оптимального управления. Динамическая оптимизация, как в дискретном, так и в непрерывном времени, является очень важным методом в макроэкономике и в других разделах динамического анализа экономики. Ни один из двух подходов не является предпочтительным, как мы увидим далее, некоторые задачи проще анализировать в дискретном времени, в то время как другие естественным образом проще формулируются в непрерывном времени.

Для анализа методов оптимизации в непрерывном времени нам понадобятся несколько новых математических концепций, в основном в силу того, что даже при конечном горизонте планирования максимизация в данном случае происходит на бесконечномерном пространстве (а именно на пространстве функций y: $[t_0, t_1] \to \mathbb{R}$). Поэтому нам понадобится краткий обзор некоторых основных результатов теории вариационного исчисления и оптимального управления. Основные методы и идеи, необходимые для изложения материала данной книги, не сложны и представлены здесь в наиболее простом виде. Читатель, желающий лишь научиться применять основные методы, может пропустить почти весь материал этой главы и сразу перейти к основным теоремам, в особенности к теоремам 7.13 и 7.14 и к их приложениям к канонической задаче оптимального роста в непрерывном времени в параграфе 7.7.

В оставшейся части этой главы мы вначале рассмотрим задачу максимизации в непрерывном времени на конечном горизонте планирования и предложим наиболее простой способ решения этой задачи (который более схож с методами вариационного исчисления, а не с методами теории оптимального управления). Затем мы перейдем к более сильным теоремам оптимального управления, доказанным Л. С. Понтрягиным и его коллегами.

Каноническая задача оптимизации в непрерывном времени может быть записана следующим образом:

$$\max_{\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)} W(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{y}(t)) \equiv \int_{t_0}^{t_1} f(t,\, \mathbf{x}(t),\, \mathbf{y}(t))dt \tag{7.1}$$

при ограничениях

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = G(t,\, \mathbf{x}(t),\, \mathbf{y}(t))$$

и

$$\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X}(t), \mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y}(t) \text{ при всех } t \text{ и } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

где $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ являются конечномерными векторами при всех значениях t (то есть $\mathcal{X}(t) \subset \mathbb{R}^{K_x}$ и $\mathcal{Y}(t) \subset \mathbb{R}^{K_y}$ при некоторых натуральных $K_x \in \mathbb{N}$ и $K_y \in \mathbb{N}$). Кроме того, мы имеем функции f: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{K_x} \times \mathbb{R}^{K_y} \to \mathbb{R}$ и g: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{K_x} \times \mathbb{R}^{K_y} \to \to \mathbb{R}^{K_x}$. Вектор $\mathbf{x}$ в данном случае обозначает вектор переменных состояния. Динамика этого вектора определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений при заданном значении вектора переменных управления $\mathbf{y}$ (или, другими словами, при заданной функции управления $\mathbf{y}(t)$). Конечный момент времени на горизонте планирования t_1 может быть равен бесконечности. Функция $W(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ описывает значение целевой функции в случае, когда переменные управления заданы вектором $\mathbf{y}(t)$, а поведение переменных состояния описано вектором $\mathbf{x}(t)$[1]. Мы также будем называть функцию f (моментальной) функцией выигрыша, а функцию G — ограничивающей функцией (заметим, однако, что множество значений функции G лежит в пространстве $\mathbb{R}^{K_x}$). Такая формулировка задачи является достаточно общей и, так как функция выигрыша f и ограничивающая функция G зависят явным образом от времени, позволяет включить в себя задачи с дисконтированием и изменяющимся во времени ограничением. Мы начнем анализ со случая конечного горизонта планирования, а затем перейдем к случаю бесконечного горизонта планирования, в основном останавливаясь на задаче с экспоненциальным дисконтированием.

7.1. Метод малых вариаций

Рассмотрим следующий частный случай задачи (7.1) с конечным горизонтом планирования и одномерными векторами переменных состояния и управления. Такая задача может быть записана следующим образом:

[1] Заметим, что функция $W(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ в равенстве (7.1) не является значением максимума, а определяется как значение целевой функции $\int_{t_0}^{t_1} f(t,\, \mathbf{x}(t),\, \mathbf{y}(t))$ на заданных векторах функций состояния и управления $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$.

$$\max_{x(t),y(t),x_1} W(x(t), y(t)) \equiv \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), y(t))dt \tag{7.2}$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), y(t)) \tag{7.3}$$

и

$$x(t) \in \mathcal{X}, y(t) \in \mathcal{Y} \text{ при всех } t \text{ и } x(0) = x_0 \text{ и } x(t_1) = x_1. \tag{7.4}$$

В данном случае переменная состояния $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ является одномерной, и ее динамика описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (7.3). Переменная управления $y(t)$ лежит в множестве $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$ (здесь мы для простоты предполагаем, что множества $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{Y}(t)$ в более общей постановке задачи (7.1) в данном случае не изменяются со временем). Следовательно, функции f и g определены как $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Далее мы везде будем предполагать, что множества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ непусты и выпуклы.

Пару функций $(x(t), y(t))$, удовлетворяющую условиям (7.3) и (7.4), будем называть допустимой парой[2]. Далее, как и предыдущей главе, везде будем предполагать, что значение целевой функции конечно, то есть $W(x(t), y(t)) < \infty$ для любой допустимой пары $(x(t), y(t))$.

Предположим, что $t_1 < \infty$, и, таким образом, мы имеем задачу оптимизации на конечном горизонте планирования. Заметим, что в ней также есть граничное условие $x(t_1) = x_1$, однако переменная x_1 включена в лист переменных выбора. Поэтому конечное значение переменной x может быть любым. Формулировка задачи, где значение x_1 не является переменной выбора, может быть проще в контексте экономических задач с конечным горизонтом планирования (см. пример 7.1), однако более естественным будет начать анализ со случая, когда конечное значение x_1 не зафиксировано.

---

[2] Более точно, будем называть пару функций $(x(t), y(t))$ допустимой парой, если функция $x(t)$ является абсолютно непрерывной, а функция $y(t)$ — измеримой по Лебегу. Понятие абсолютной непрерывности функции определено в приложении А и является усилением понятия непрерывности функции. В частности, функция, определенная как $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ при $x \in [0, X]$, является абсолютно непрерывной на отрезке $[0, X]$, если функция $f(s)$ является кусочно-непрерывной на нем (или в более слабой форме $f(s)$ интегрируема). В факте А.17 в приложении А утверждается, что абсолютная непрерывность следует из дифференцируемости (хотя является более слабым условием, чем дифференцируемость). Мы везде, кроме параграфа 7.6, будем предполагать, что функция $x(t)$ является дифференцируемой и поэтому будем опускать явную ссылку на ее абсолютную непрерывность. Требование об измеримости функции $y(t)$ также не является слишком строгим. Так как в этой книге мы не вводим явно понятия теории меры, мы не будем давать формального определения понятия измеримости функции.

Далее, чтобы упростить изложение материала, везде будем предполагать, что функции f и g являются непрерывно дифференцируемыми по аргументам x, y и t и записывать это утверждение просто как «функции f и g являются непрерывно дифференцируемыми».

Трудности, возникающие при описании оптимального решения такой задачи, можно связать со следующими двумя причинами:

1. Решением задачи является функция y: $[0, t_1] \to \mathcal{Y}$, а не вектор или другой конечномерный объект.
2. Ограничение в задаче имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения, а не множества неравенств и равенств.

Эти свойства задачи приводят к трудностям при описании оптимального правила выбора переменной управления. Например, функция y может не быть непрерывной. Она также может оказаться на границе допустимого множества, что соответствует случаю углового решения. К счастью, структура большинства экономических задач такова, что их решение является непрерывной функцией. Более того, из выполнения условий Инада (предположение 2 из главы 2) в большинстве макроэкономических приложений и задач теории экономического роста следует, что решение соответствующей динамической задачи оптимизации лежит во внутренности допустимого множества. Эти свойства значительно упрощают процесс поиска решения. Мы покажем, что если функция y является непрерывной по времени и лежит во внутренности допустимого множества, то решение задачи оптимизации может быть описано с помощью метода малых вариаций в контексте теории вариационного исчисления, схожего с методами, разработанными Эйлером, Лагранжем и другими. Мы начнем именно с этого метода, так как он является более простым и интуитивно понятным по сравнению с методом теории оптимального управления.

При применении *метода малых вариаций* мы вначале делаем упрощающее предположение о том, что существует непрерывная функция $\hat{y}$, везде лежащая во внутренности множества $\mathcal{Y}$ (а значит, переменная состояния $\hat{x}$ везде лежит во внутренности множества $\mathcal{X}$), которая является решением задачи оптимизации. Затем мы описываем свойства этого решения (см. упражнение 7.3)[3].

Более формально, предположим, что пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ является такой допустимой парой, что функция $\hat{y}(t)$ непрерывна на отрезке $[0, t_1]$ и выполняются условия $\hat{x}(t) \in \operatorname{Int}\mathcal{X}$ и $\hat{y}(t) \in \operatorname{Int}\mathcal{Y}$ (или, что эквивалентно,

[3] Следует отметить, что в методе малых вариаций возможное решение сравнивается с другими непрерывными траекториями. При применении метода теории оптимального управления, который мы используем в теореме 7.9 ниже, возможное решение сравнивается со всеми допустимыми траекториями (см. сноску 2).

$(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \in \text{Int } \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ и для всех допустимых пар $(x(t), y(t))$ выполняется следующее неравенство:

$$W(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \geq W(x(t), y(t)).$$

Важным и строгим предположением здесь является предположение о том, что пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ является внутренним решением и всюду непрерывна. Несмотря на то что это предположение выполняется в большинстве экономических задач, с точки зрения математики оно является очень сильным предположением. Напомним, например, что в предыдущей главе мы не делали подобного предположения, а вместо этого вначале доказали утверждение о существовании решения, а затем перешли к его описанию (например, доказательству непрерывности и дифференцируемости функции стоимости). Однако задача оптимизации в непрерывном времени достаточно сложна и поэтому доказательство существования ее решения далеко нетривиально. Мы вернемся к этому вопросу позднее, а пока, следуя стандартной практике, предположим, что внутреннее непрерывное решение задачи $(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \in \text{Int}\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ существует. Затем также, из того, что динамика переменной состояния x задается дифференциальным уравнением (7.3), следует, что если функция $y(t)$ непрерывна, то функция $\dot{x}(t)$ также непрерывна, и поэтому *функция $x(t)$ является непрерывно дифференцируемой*.

Далее мы используем это свойство для того, чтобы вывести необходимое условие, которому должно удовлетворять внутреннее решение задачи. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $\eta(t)$ и некоторое вещественное число $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Определим функцию $y(t, \varepsilon)$ как *вариацию* функции $\hat{y}(t)$ следующим образом:

$$y(t, \varepsilon) \equiv \hat{y}(t) + \varepsilon\eta(t).$$

Такое название обусловлено тем, что при заданной функции $\eta(t)$ функция $y(t, \varepsilon)$ получается изменением параметра ε. Конечно, некоторые из этих вариаций могут оказаться недопустимыми, то есть при некотором t $y(t, \varepsilon) \notin \mathcal{Y}$. Однако так как функция $\hat{y}(t)$ лежит во внутренности множества $\mathcal{Y}$, а непрерывная функция на компактном множестве $[0, t_1]$ является ограниченной и равномерно непрерывной, то для любой функции $\eta(t)$ всегда можно найти вещественное $\varepsilon'_\eta > 0$, такое, что

$$y(t, \varepsilon) \equiv \hat{y}(t) + \varepsilon\eta(t) \in \text{Int}\mathcal{Y}$$

при всех $t \in [0, t_1]$ и при всех $\varepsilon \in [-\varepsilon'_\eta, \varepsilon'_\eta]$, и, таким образом, функция $y(t, \varepsilon)$ будет *допустимой вариацией*. Следовательно, при достаточно малых значениях ε мы вправе использовать вариационный метод. Тот факт, что значение ε

должно быть достаточно малым, не препятствует выводу необходимых условий оптимальности. По аналогии со стандартным результатом математического анализа, необходимое условие оптимальности состоит в том, что при малых изменениях переменной управления значение целевой функции оставалось бы неизменным.

Определим также функцию $x(t, \varepsilon)$ как траекторию переменной состояния, соответствующую динамике переменной управления $y(t, \varepsilon)$. То есть

$$\dot{x}(t, \varepsilon) = g(t, x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) \text{ для всех } t \in [0, t_1] \text{ при } x(0, \varepsilon) = x_0. \quad (7.5)$$

Из того, что $\hat{x}(t) \in \operatorname{Int}\mathcal{X}$, следует, что при достаточно малых значениях ε, а именно при $\varepsilon \in [-\varepsilon_\eta, \varepsilon_\eta] \subset [-\varepsilon'_\eta, \varepsilon'_\eta]$ для некоторого $\varepsilon_\eta \leq \varepsilon'_\eta$, выполняется включение $x(t, \varepsilon) \in \operatorname{Int}\mathcal{X}$ (так как решение обыкновенного дифференциального уравнения является непрерывной функцией, см., например, теорему B.13 из приложения B). Отсюда следует, что пара функций $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ является допустимой парой при любом значении $\varepsilon \in [-\varepsilon_\eta, \varepsilon_\eta]$. Определим функцию $\mathcal{W}(\varepsilon)$ следующим образом:

$$\mathcal{W}(\varepsilon) \equiv W(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) = \int_0^{t_1} f(t, x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))dt. \quad (7.6)$$

Из того, что функция $\hat{y}(t)$ является оптимумом, а функции $x(t, \varepsilon)$ и $y(t, \varepsilon)$ являются допустимыми при всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_\eta, \varepsilon_\eta]$ следует, что выполняется следующее неравенство:

$$\mathcal{W}(\varepsilon) \leq \mathcal{W}(0) \text{ при всех } \varepsilon \in [-\varepsilon_\eta, \varepsilon_\eta].$$

Далее, перепишем уравнение (7.5) в следующем виде:

$$g(t, x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) - \dot{x}(t, \varepsilon) = 0$$

при всех $t \in [0, t_1]$. Из него следует, что, так как выражение в квадратных скобках ниже тождественно равно нулю, для любой функции $\lambda: [0, t_1] \to \mathbb{R}$ выполняется следующее равенство:

$$\int_0^{t_1} \lambda(t)[g(t, x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) - \dot{x}(t, \varepsilon)]dt = 0. \quad (7.7)$$

Далее предположим, что функция $\lambda(\cdot)$ является непрерывно дифференцируемой. По аналогии с множителем Лагранжа для стандартной задачи оптимизации при ограничениях будем называть такую функцию, выбранную соответствующим образом, сопряженной функцией. Так же как и множитель Лагранжа, правильным образом выбранная функция $\lambda(\cdot)$ будет играть роль сопряженной переменной.

Складывая уравнения (7.6) и (7.7), получаем следующее равенство:

$$\mathcal{W}(\varepsilon)=\int_0^{t_1}\{f(t,\, x(t,\,\varepsilon),\, y(t,\,\varepsilon))+\lambda(t)[g(t,\, x(t,\,\varepsilon),\, y(t,\,\varepsilon))-\dot{x}(t,\,\varepsilon)]\}dt. \quad (7.8)$$

Для того чтобы вычислить значение выражения (7.8), сначала рассмотрим интеграл $\int_0^{t_1}\lambda(t)\dot{x}(t,\,\varepsilon)dt$. Интегрируя его по частям (см. теорему В.3 из приложения В), получаем:

$$\int_0^{t_1}\lambda(t)\dot{x}(t,\,\varepsilon)dt=\lambda(t_1)x(t_1,\,\varepsilon)-\lambda(0)x_0-\int_0^{t_1}\dot{\lambda}(t)x(t,\,\varepsilon)dt.$$

Подставляя это выражение в уравнение (7.8), получаем следующее равенство:

$$\mathcal{W}(\varepsilon)=\int_0^{t_1}[f(t,\, x(t,\,\varepsilon),\, y(t,\,\varepsilon))+\lambda(t)g(t,\, x(t,\,\varepsilon),\, y(t,\,\varepsilon))+\dot{\lambda}(t)x(t,\,\varepsilon)]dt-$$

$$-\lambda(t_1)x(t_1,\,\varepsilon)+\lambda(0)x_0. \quad (7.9)$$

Из того, что функции f и g являются непрерывно дифференцируемыми, а функция $y(t,\,\varepsilon)$ непрерывно дифференцируема по аргументу ε по построению, следует, что функция $x(t,\,\varepsilon)$ также непрерывно дифференцируема по ε. Обозначим частные производные функций x и y по ε как x_ε и y_ε соответственно, частные производные функций f и g как f_t, f_x, f_y и т.д. Дифференцируя уравнение (7.9) по ε (и используя правило Лейбница [теорема В.4 из приложения В]), приходим к следующему равенству:

$$\mathcal{W}'(\varepsilon)\equiv\int_0^{t_1}[f_x(t,\, x(t,\,\varepsilon),\, y(t,\,\varepsilon))+\lambda(t)g_x(t,\, x(t,\,\varepsilon),\, y(t,\,\varepsilon))+\dot{\lambda}(t)]x_\varepsilon(t,\,\varepsilon)dt+$$

$$+\int_0^{t_1}[f_y(t,\, x(t,\,\varepsilon),\, y(t,\,\varepsilon))+\lambda(t)g_y(t,\, x(t,\,\varepsilon),\, y(t,\,\varepsilon))]\eta(t)dt-$$

$$-\lambda(t_1)x_\varepsilon(t,\,\varepsilon).$$

Далее вычислим значение этой производной в точке $\varepsilon=0$:

$$\mathcal{W}'(0)\equiv\int_0^{t_1}[f_x(t,\,\hat{x}(t),\,\hat{y}(t))+\lambda(t)g_x(t,\,\hat{x}(t),\,\hat{y}(t))+\dot{\lambda}(t)]x_\varepsilon(t,\,0)dt+$$

$$+\int_0^{t_1}[f_y(t,\,\hat{x}(t),\,\hat{y}(t))+\lambda(t)g_y(t,\,\hat{x}(t),\,\hat{y}(t))]\eta(t)dt-\lambda(t_1)x_\varepsilon(t_1,\,0),$$

где, как и ранее, функция $\hat{x}(t) = x(t, \varepsilon = 0)$ является траекторией переменной состояния, соответствующей оптимальному плану $\hat{y}(t)$. Так же как и в случае стандартной конечномерной оптимизации, при существовании функции $\eta(t)$, такой, что для нее $\mathcal{W}(0) \neq 0$, значение $W(x(t), y(t))$ может быть увеличено и поэтому пара $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ не может быть решением задачи оптимизации. Следовательно, оптимальность требует выполнения следующего условия:

$$\mathcal{W}'(0) = 0 \text{ для всех } \eta(t). \tag{7.10}$$

Заметим, что полученное выражение для $\mathcal{W}'(0)$ верно при любой непрерывно дифференцируемой функции $\lambda(t)$. Рассмотрим в качестве функции $\lambda(t)$ решение следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{\lambda}(t) = -\left[f_x\left(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)\right) + \lambda(t) g_x\left(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)\right)\right] \tag{7.11}$$

с граничным условием $\lambda(t_1) = 0$. Так как функции f_x и g_x являются непрерывными (по предположению о том, что функции f и g непрерывно дифференцируемы), они ограничены на отрезке $t \in [0, t_1]$. Из теоремы B.8 из приложения B тогда следует, что такое дифференциальное уравнение имеет решение (при заданной паре функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$. Так как функция $\eta(t)$ может быть выбрана произвольным образом, функция $\lambda(t)$ и решение задачи $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ должны удовлетворять следующему условию:

$$f_y\left(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)\right) + \lambda(t) g_y\left(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)\right) = 0 \text{ для всех } t \in [0, t_1]. \tag{7.12}$$

Следовательно, для всех функций $\eta(t)$ выполняется следующее равенство:

$$\int_0^{t_1} [f_y\left(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)\right) + \lambda(t) g_y\left(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)\right)] \eta(t) dt = 0.$$

Наоборот, если бы равенство (7.12) не выполнялось, тогда существовала бы некоторая вариация $\eta(t)$, на которой предыдущий интеграл принимал бы положительное или отрицательное значение и поэтому необходимое условие (7.10) не выполнялось бы. Такие рассуждения приводят нас к необходимым условиям того, чтобы пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ была непрерывным внутренним решением задачи оптимизации (7.2) при ограничениях (7.3) и (7.4). Эти необходимые условия состоят в том, что должна существовать непрерывно дифференцируемая функция $\lambda(t)$, удовлетворяющая равенствам (7.11) и (7.12) и граничному условию $\lambda(t_1) = 0$. В упражнении 7.1 приведена другая цепочка рассуждений, приводящая к этому выводу.

Граничное условие $\lambda(t_1) = 0$ называют *условием трансверсальности* для задачи оптимизации в непрерывном времени. Оно естественным образом связано с условием трансверсальности, которое мы обсуждали в предыдущей главе. На интуитивном уровне оно утверждает, что по окончании горизонта планирования большее (или меньшее) значение переменной x не увеличивает стоимости задачи. Из выводов, сделанных выше, вытекает следующая теорема (см. также параграф 7.3).

Теорема 7.1. Необходимые условия оптимума. *Рассмотрим задачу оптимизации* (7.2) *с ограничениями* (7.3) *и* (7.4) *при непрерывно дифференцируемых функциях* f *и* g. *Предположим, что она имеет непрерывное внутреннее решение* $(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \in \mathrm{Int}\,\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. *Тогда существует непрерывно дифференцируемая сопряженная функция* $\lambda(\cdot)$, *определенная на отрезке* $t \in [0, t_1]$, *такая, что выполняются условия* (7.3), (7.11) *и* (7.12) *и, более того,* $\lambda(t_1) = 0$.

Заметим, что теорема дает необходимые условия лишь для непрерывного внутреннего решения. Решения, которые не являются внутренними, могут не удовлетворять условиям (7.3), (7.11) и (7.12). Наша стратегия будет состоять в использовании необходимых условий для поиска возможной оптимально траектории, а затем в проверке того, что она действительно является решением задачи с помощью достаточных условий, которые мы сформулируем далее.

Далее рассмотрим немного измененную версию теоремы 7.1, в которой конечное значение переменной состояния x_1 задано. Другими словами, эта задача может быть записана следующим образом:

$$\max_{x(t),y(t)} W(x(t), y(t)) \equiv \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), y(t))dt \tag{7.13}$$

при ограничениях (7.3) и (7.4). Единственное отличие состоит в том, что в данном случае выбор осуществляется при фиксированном значении $x(t_1)$. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 7.2. Необходимые условия оптимума II. *Рассмотрим задачу оптимизации* (7.13) *с ограничениями* (7.3) *и* (7.4) *при непрерывно дифференцируемых функциях* f *и* g. *Предположим, что она имеет непрерывное внутреннее решение* $(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \in \mathrm{Int}\,\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. *Тогда существует непрерывно дифференцируемая сопряженная функция* $\lambda(\cdot)$, *определенная на отрезке* $t \in [0, t_1]$, *такая, что выполняются условия* (7.3), (7.11) *и* (7.12).

Доказательство. Доказательство схоже с рассуждениями при доказательстве теоремы 7.1 в упражнении 7.1. Основное отличие состоит в том, что в данном случае по условию задачи должно выполняться равенство $x(t_1, \varepsilon) = x_1$, и поэтому $x_\varepsilon(t_1, 0) = 0$, а значение $\lambda(t_1)$ может быть любым. Упражнение 7.5 посвящено полному доказательству этой теоремы. ■

Отличительным свойством этой теоремы является отсутствие в ней условия трансверсальности $\lambda(t_1) = 0$. В данном случае роль этого ограничения играет конечное значение переменной состояния x[4]. Мы начнем с применения необходимых условий из теоремы 7.2 к простой экономической задаче. Далее в главе и упражнениях к ней мы остановимся на более интересных экономических задачах.

Пример 7.1. Рассмотрим задачу максимизации полезности потребителем на горизонте планирования между моментами времени 0 и 1. Предположим, что функция полезности задана как $u(c)$ и что агент дисконтирует будущее экспоненциально с дисконтом, равным $\rho > 0$. Допустим, что функция полезности u: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ является строго возрастающей, непрерывно дифференцируемой и строго вогнутой. Предположим, что потребитель начинает жизнь с начальным запасом финансовых активов $a(0) > 0$, приносящих доход по постоянной процентной ставке, равной r, а также имеет постоянный поток трудовых доходов, равных w. Также предположим, что финансовая позиция потребителя не может быть отрицательной, то есть в любой момент времени t выполняется неравенство $a(t) \geq 0$. Следовательно, задача максимизации полезности может быть записана следующим образом:

$$\max_{[c(t), a(t)]_{t=0}^{1}} \int_0^1 \exp(-\rho t) u(c(t)) dt$$

при ограничениях

$$\dot{a}(t) = ra(t) + w - c(t)$$

и с начальным условием $a(t) \geq 0$.

В данной задаче переменной управления является потребление, а переменной состояния — финансовая позиция потребителя.

Для того чтобы применить теорему 7.2, нам понадобится граничное условие для переменной $a(t)$, то есть некоторое число a_1, такое, что $a(1) = a_1$. Экономическое содержание задачи состоит в том, что потребитель не будет иметь финансовых активов по окончании своего горизонта планирования (так как он может использовать эти активы для увеличения потребления в момент времени $t = 1$ или чуть ранее и, таким образом, увеличить свою полезность, так как функция полезности является строго возрастающей). Поэтому граничным условием задачи будет равенство $a(1) = 0$.

Приняв такое ограничение, из теоремы 7.2 получаем следующие необходимые условия внутреннего непрерывного решения задачи: существует непрерывно дифференцируемая сопряженная функция $\lambda(t)$, такая, что оптимальная траектория потребления и финансовой позиции агента $(\hat{c}(t), \hat{a}(t))$ удовлетворяет уравнению Эйлера для потребления, схожему с уравнением (6.38) в примере 6.5 в предыдущей главе:

$$\exp(-\rho t) u'(\hat{c}(t)) = \lambda(t). \tag{7.14}$$

[4] Стоит отметить тот факт, что в данном случае предположение о существовании внутреннего решения задачи является более сильным, чем в теореме 7.1. Это следует из того, что теперь множество допустимых значений переменных управления и состояния Ω может оказаться пустым или иметь пустую внутренность, и в этом случае внутреннего решения задачи не существует. См. пример в упражнении 7.23. Формальное определение множества Ω дано в параграфе 7.6.

Более того, как мы увидим позднее, функция $\lambda(t)$ связана с производной функции стоимости аналогично уравнению (6.38) в примере 6.5.

Следующее необходимое условие оптимума определяет динамику функции $\lambda(t)$:

$$\dot{\lambda}(t) = -r\lambda(t). \tag{7.15}$$

Объединяя это условие с уравнением Эйлера для потребления, получаем простое выражение для оптимального уровня потребления в момент времени t:

$$\hat{c}(t) = u'^{-1}[r\lambda(0)\exp((\rho - r)t)],$$

где функция $u'^{-1}[\cdot]$является обратной функцией к предельной полезности u'. Эта обратная функция существует и является строго убывающей, в силу того что функция полезности u является строго вогнутой. Из этого уравнения следует, что в случае когда $\rho = r$, то есть когда дисконт и доходность финансовых активов совпадают, функция потребления агента будет постоянной. В случае когда $\rho > r$, аргумент функции u'^{-1} возрастает со временем, поэтому потребление должно убывать. Поэтому, если индивид дисконтирует будущее более сильно, чем по текущей рыночной процентной ставке, он будет стремиться иметь высокое потребление на начальном этапе жизни. С другой стороны, в случае когда $\rho < r$, применяя противоположную аргументацию, можно показать, что он будет стремиться иметь высокое потребление в конце жизни. Эти выводы в точности совпадают с выводами, которые мы сделали для задачи межвременной оптимизации потребления в дискретном времени в задаче 6.5, а именно с условиями (6.40).

Единственной переменной, которую нам осталось определить для полного описания траектории потребления, является начальное значение сопряженной функции (что позволит найти начальное значение потребления). Это можно сделать, используя наблюдение о том, что потребитель должен использовать все финансовые активы к окончанию своего горизонта планирования, то есть из условия $a(1) = 0$. Используя оптимальное правило для потребления, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{a}(t) = ra(t) + w - u'^{-1}[r\lambda(0)\exp((\rho - r)t)].$$

Начальное значение сопряженной переменной $\lambda(0)$ должно быть выбрано таким образом, чтобы решение этого уравнения удовлетворяло граничному условию $a(1) = 0$. Подробный анализ этого шага читатель может найти в упражнении 7.6. ■

В примере 7.1 мы применили теорему 7.2 для описания решения задачи максимизации. На первый взгляд читателю может показаться, что более удобным методом будет использование теоремы 7.1, так как она позволяет напрямую сформулировать задачу динамической оптимизации, не прибегая к поиску конечного значения переменной состояния $a(1)$ (что мы делали в примере 7.1). Однако, как будет видно из продолжения предыдущего примера, это не всегда так.

Пример 7.1 (продолжение). Попробуем применить теорему 7.1 для описания экономики примера 7.1. Необходимое условие первого порядка остается без изменений и имеет следующий вид:

$$\lambda(t) = \lambda(0)\exp(-rt).$$

Однако в силу того, что выполняется равенство $\lambda(1) = 0$, решением этого уравнения будет постоянная функция $\lambda(t) = 0$ для всех $t \in [0, 1]$. При этом также должно выполняться уравнение Эйлера:

$$\exp(-\rho t)u'(\hat{c}(t)) = \lambda(t),$$

что невозможно, так как функция полезности строго вогнута и $u' > 0$. Поэтому в случае, когда конечное значение финансовых активов агента $a(1)$ является переменной выбора, задача динамической оптимизации не имеет решения (по меньшей мере внутреннего решения с непрерывной переменной управления). Почему это происходит?

Ответ на этот вопрос состоит в том, что теорема 7.1 не может быть использована при решении этой задачи, так как мы наложили дополнительное ограничение $a(t) \geq 0$. Поэтому нам необходима версия теоремы 7.1 с ограничениями в виде неравенств. В этом случае необходимые условия оптимума оказываются более сложными. Поэтому использование экономической интуиции и наблюдение о том, что конечное значение финансовых активов индивида должно равняться нулю, и последующее применение теоремы 7.2 значительно упрощает анализ задачи. ■

Подобные рассуждения приводят нас к тому, что для анализа некоторых задач необходима версия теоремы 7.2, в которой граничное условие на конечное значение переменной состояния представлено в виде неравенства $x(t_1) \geq x_1$, а не равенства $x(t_1) = x_1$. Такая версия теоремы представлена далее.

Теорема 7.3. Необходимые условия оптимума III. *Рассмотрим задачу оптимизации* (7.2) *с ограничениями* (7.3) *и* $x(0) = x_0$, $x(t_1) \geq x_1$ *для всех* $(x(t), y(t)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ *при всех* t *с непрерывно дифференцируемыми функциями* f *и* g. *Предположим, что она имеет непрерывное внутреннее решение* $(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \in \operatorname{Int}\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. *Тогда существует непрерывно дифференцируемая сопряженная функция* $\lambda(t)$, *заданная на отрезке* $t \in [0, t_1]$, *такая, что выполняются условия* (7.3), (7.11) *и* (7.12). *Более того, выполняется равенство* $\lambda(t_1)(x(t_1) - x_1) = 0$.

Доказательство. См. упражнение 7.9. ■

7.2. Принцип максимума: первое знакомство

7.2.1. Гамильтониан и принцип максимума

По аналогии с лагранжианом более экономичный способ формулировки теоремы 7.2 состоит в построении *гамильтониана* задачи:

$$H(t, x(t), y(t), \lambda(t)) \equiv f(t, x(t), y(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), y(t)). \tag{7.16}$$

Для упрощения обозначения мы часто будем записывать гамильтониан как $H(t, x, y, \lambda)$, опуская временной индекс[5]. Так как функции f и g

[5] В общем случае гамильтониан записывается в виде:

$$H(t, x, y, \lambda) = \lambda_0 f(t, x(t), y(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), y(t))$$

непрерывно дифференцируемы, функция H также является непрерывно дифференцируемой. Обозначим частные производные гамильтониана по аргументам $x(t)$, $y(t)$ и $\lambda(t)$ как H_x, H_y и H_λ соответственно. Тогда из теоремы 7.2 вытекает следующий результат.

Теорема 7.4. Упрощенный принцип максимума. *Рассмотрим задачу оптимизации (7.2) с ограничениями (7.3) и (7.4) при непрерывно дифференцируемых функциях f и g. Предположим, что она имеет непрерывное внутреннее решение $(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \in \operatorname{Int}\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Тогда существует непрерывно дифференцируемая сопряженная функция $\lambda(t)$, заданная на отрезке $t \in [0, t_1]$, такая, что оптимальное решение для переменной управления $\hat{y}(t)$ и соответствующая ему траектория переменной состояния $\hat{x}(t)$ удовлетворяют следующим необходимым условиям оптимума:*

$$H_y\left(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{\lambda}(t)\right) = 0 \text{ для всех } t \in [0, t_1], \tag{7.17}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -H_x\left(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)\right) \text{ для всех } t \in [0, t_1] \tag{7.18}$$

и

$$\dot{x}(t) = H_\lambda\left(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)\right) \text{ для всех } t \in [0, t_1], \tag{7.19}$$

при граничных условиях $x(0) = x_0$ и $\lambda(t_1) = 0$, а гамильтониан $H(t, x, y, \lambda)$ определяется равенством (7.16). Более того, гамильтониан $H(t, x, y, \lambda)$ удовлетворяет принципу максимума *в виде следующего неравенства:*

$$H\left(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)\right) \geq H\left(t, \hat{x}(t), y(t), \lambda(t)\right) \text{ для всех } y \in \mathcal{Y}$$

при всех $t \in [0, t_1]$.

В условии (7.19) мы для упрощения обозначения использовали запись $\dot{x}(t)$ вместо записи $\dot{\hat{x}}(t) (= d\hat{x}(t)/dt)$. Полная запись слишком сложна и мы воздержимся от ее использования во всех случаях, когда из контекста понятно, что обозначает выражение $\dot{x}(t)$ [6].

при некотором вещественном $\lambda_0 \geq 0$. В некоторых вырожденных случаях это неравенство выполняется как равенство $\lambda_0 = 0$. Однако этого не происходит ни в одном из экономических приложений, поэтому $\lambda_0 > 0$. Если выполняется неравенство $\lambda_0 > 0$, то мы можем нормализовать значение λ_0 единицей без потери общности. Поэтому определение гамильтониана в равенстве (7.16) является подходящим для экономических приложений.

[6] Из условий (7.18) и (7.19) становится понятно, почему функция H названа гамильтонианом. *Гамильтоновой динамической системой* называют динамическую систему для векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$ (множество обыкновенных дифференциальных уравнений), имеющую представление в виде $\dot{\mathbf{x}} = D_{\mathbf{z}} H(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ и $\dot{\mathbf{z}} = -D_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ при некоторой функции H. Функция Гамильтона в этом случае играет роль потенциальной энергии и постоянна на траекториях решения этой динамической системы (см., например, работу [Perko 2001]). Если бы функция H в теореме 7.4 не зависела от времени, она бы действительно была такой функцией, а динамическая система, описывающая задачу, была бы гамильтоновой системой. В общем случае, когда функция H зависит от времени, например при дисконтировании будущего, это не так.

Теорема 7.4 является упрощенной версией широко известного *принципа максимума* Понтрягина. Мы приведем более общую версию принципа максимума ниже. На данном этапе полезным будет сделать следующие наблюдения.

1. Так же как и в случае стандартной задачи условной оптимизации, решение описывается совместно как множество «множителей», в данном случае *сопряженной* переменной $\lambda(t)$, и оптимальными траекториями переменных управления и состояния $\hat{y}(t)$ и $\hat{x}(t)$.
2. Так же, как и множители Лагранжа в стандартной задаче условной оптимизации, сопряженная переменная $\lambda(t)$ несет информацию о стоимости отмены ограничений (в момент времени t). В частности, значение $\lambda(t)$ равно увеличению стоимости при инфинитезимальном увеличении переменной состояния $x(t)$ в момент времени t (см. параграф 7.3.4).
3. В такой интерпретации становится очевидным, что равенство $\lambda(t_1) = 0$ является одним из необходимых условий оптимума. Большее (или меньшее) значение переменной состояния x по окончании горизонта не изменяют стоимости задачи. Таким образом, это условие является эквивалентом условия трансверсальности из предыдущей главы для конечного горизонта планирования.

Как мы уже отметили выше, теорема 7.4 описывает необходимые условия внутреннего непрерывного решения задачи динамической оптимизации. Однако мы не можем быть уверены в том, что такое решение действительно существует. Более того, эти необходимые условия могут описывать стационарную точку, а не максимум в задаче, или локальный, а не глобальный максимум. Поэтому в задачах, рассматриваемых нами, достаточные условия являются более важными, чем в конечномерных задачах оптимизации. Как и в конечномерном случае, достаточность является следствием ограничения о вогнутости. Следующая теорема, впервые доказанная М. М. Мангасаряном, показывает, что из предположения о вогнутости гамильтониана следует, что условия (7.17)–(7.19) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями максимума в задаче динамической оптимизации.

Теорема 7.5. Достаточные условия Мангасаряна. *Рассмотрим задачу максимизации* (7.2) *при ограничениях* (7.3) *и* (7.4) *с непрерывно дифференцируемыми функциями f и g. Определим гамильтониан $H(t, x, y, \lambda)$ так, как в равенстве* (7.16), *и предположим, что внутренняя пара непрерывных функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \in \operatorname{Int} \times \mathcal{Y}$ существует и удовлетворяет условиям* (7.17)–(7.19). *Предположим также, что множество $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ выпукло и функция $H(t, x, y, \lambda)$ является вогнутой по $(x, y) \in \operatorname{Int}\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ при соответствующей сопряженной переменной $\lambda(t)$ для всех $t \in [0, t_1]$.*

Тогда целевая функция задачи (7.2) *достигает глобального максимума на паре* $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$. *Более того, если функция* $H(t, x, y, \lambda)$ *является строго вогнутой по* (x, y) *для всех* $t \in [0, t_1]$, *то пара функций* $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ *является единственным решением задачи* (7.2).

Доказательство теоремы 7.5 следует из доказательства следующей теоремы[7]. В теореме 7.6, впервые доказанной К. Эрроу, ослаблено предположение о том, что функция $H(t, x, y, \lambda)$ является вогнутой по (x, y). Прежде чем сформулировать ее утверждение, определим *максимальный гамильтониан* следующим образом:

$$M(t, x(t), \lambda(t)) \equiv \max_{y \in \mathcal{Y}} H(t, x(t), y(t), \lambda(t)), \tag{7.20}$$

где функция $H(t, x(t), y(t), \lambda(t))$ определена так, как в равенстве (7.16). Очевидно, что условие (7.17) является необходимым условием внутреннего максимума (7.20). Следовательно, если внутренняя пара переменных состояния и управления $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ удовлетворяет условиям (7.17)–(7.19), то $M(t, \hat{x}(t), \lambda(t)) \equiv H(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t))$.

Теорема 7.6. Достаточные условия Эрроу. *Рассмотрим задачу максимизации* (7.2) *при ограничениях* (7.3) *и* (7.4) *с непрерывно дифференцируемыми функциями f и g. Определим гамильтониан* $H(t, x, y, \lambda)$ *так, как в равенстве* (7.16) *и предположим, что внутренняя пара непрерывных функций* $(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \in \mathrm{Int}\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ *существует и удовлетворяет условиям* (7.17)–(7.19). *Определим максимальный гамильтониан* $M(t, x, \lambda)$ *при соответствующей сопряженной переменной* $\lambda(t)$ *так, как в равенстве* (7.20). *Если множество* $\mathcal{X}$ *является выпуклым, а функция* $M(t, x, \lambda)$ *вогнута по* $x \in \mathcal{X}$ *при всех* $t \in [0, t_1]$, *то глобальный максимум задачи* (7.2) *достигается на паре функций* $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$. *Более того, если функция* $M(t, x, \lambda)$ *является строго вогнутой по* $x \in \mathcal{X}$ *при всех* $t \in [0, t_1]$, *то пара функций* $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ *является единственным решением задачи* (7.2).

Доказательство. Рассмотрим допустимую пару функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$, удовлетворяющую условиям (7.17)–(7.19), а также условиям (7.3) и (7.4). Также рассмотрим произвольную пару функций $(x(t), y(t))$, удовлетворяющую условиям (7.3) и (7.4), и определим функцию $M(t, x, \lambda)$ так, как в равенстве (7.20). Так как функции *f* и *g*

[7] Утверждение о том, что пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ единственна в последней части теоремы, требует пояснения. Если задача формулируется в наиболее общем виде, функция $\hat{y}(t)$ должна быть измерима по Лебегу и тогда пара $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ будет единственной в смысле понятия «почти всюду», хотя функция продолжит оставаться определенной единственным образом. Если функция $\hat{y}(t)$ предполагается непрерывной или кусочно-непрерывной, то такое пояснение не требуется и она также будет определена единственным образом. В дальнейшем мы не будем останавливаться на этом наблюдении.

дифференцируемы, функции $H(t, x(t), y(t), \lambda(t))$ и $M(t, x(t), \lambda(t))$ также будут дифференцируемы по x в момент времени t. Обозначим частную производную функции M по аргументу x как M_x. Из того, что функция M вогнута, вытекает следующее неравенство (см., например, следствие A.4 в приложении A):

$$M(t, x(t), \lambda(t)) \le M(t, \hat{x}(t), \lambda(t)) + M_x(t, \hat{x}(t), \lambda(t))(x(t) - \hat{x}(t))$$

для всех $t \in [0, t_1]$.

Интегрируя его на отрезке $[0, t_1]$, получаем:

$$\int_0^{t_1} M(t, x(t), \lambda(t))dt \le$$

$$\le \int_0^{t_1} M(t, \hat{x}(t), \lambda(t))dt + \int_0^{t_1} M_x(t, \hat{x}(t), \lambda(t))(x(t) - \hat{x}(t))dt. \quad (7.21)$$

Более того, выполняется следующее равенство:

$$M_x(t, \hat{x}(t), \lambda(t)) = H_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) = -\dot{\lambda}(t), \quad (7.22)$$

где первое равенство следует из рассуждений, вытекающих из теоремы об огибающей (так как из условия (7.17) следует, что $H_y = 0$), а второе равенство — из условия (7.18). Далее, используя определения функции $W(x(t), y(t))$ и максимального гамильтониана (7.2) и (7.20), приходим к следующим выводам:

$$\int_0^{t_1} M(t, x(t), \lambda(t))dt \ge W(x(t), y(t)) + \int_0^{t_1} \lambda(t) g(t, x(t), y(t))dt,$$

$$\int_0^{t_1} M(t, \hat{x}(t), \lambda(t))dt \ge W(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \int_0^{t_1} \lambda(t) g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt.$$

Объединяя эти неравенство и равенство с (7.21) и (7.22), получаем следующее неравенство:

$$W(x(t), y(t)) \le W(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) +$$

$$+ \int_0^{t_1} \lambda(t)[g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) - g(t, x(t), y(t))]dt - \int_0^{t_1} \dot{\lambda}(t)(x(t) - \hat{x}(t))dt. \quad (7.23)$$

Вычисляя последний интеграл по частям (теорема B.3 в приложении B) и используя условие трансверсальности $\lambda(t_1) = 0$ и тот факт, что из допустимости функции $x(t)$ следует, что $\hat{x}(0) = x_0$, получаем следующее равенство:

$$\int_0^{t_1} \dot{\lambda}(t)(x(t) - \hat{x}(t))dt = -\int_0^{t_1} \lambda(t)\left(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)\right)dt.$$

Подставляя это выражение в равенство (7.23), приходим к следующему неравенству:

$$W(x(t), y(t)) \leq W(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) +$$
$$+ \int_0^{t_1} \lambda(t)[g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) - g(t, x(t), y(t))]dt + \int_0^{t_1} \lambda(t)\left(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)\right)dt. \quad (7.24)$$

Из определения допустимых пар функций $(x(t), y(t))$ и $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ следует, что $\dot{\hat{x}}(t) = g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))$ и $\dot{x}(t) = g(t, x(t), y(t))$. Тогда из неравенства (7.24) следует, что для любой допустимой пары функций $(x(t), y(t))$ выполняется неравенство $W(x(t), y(t)) \leq W(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$, что завершает доказательство первой части теоремы.

Если функция M является строго вогнутой по x, то неравенство (7.21) становится строгим. Поэтому, используя аналогичные рассуждения, в этом случае приходим к неравенству $W(x(t), y(t)) < W(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$, и поэтому значение $W(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ не достигается ни на одной другой допустимой паре функций $(x(t), y(t))$, что завершает доказательство второй части теоремы. ■

После доказательства теоремы 7.6 теорема 7.5 становится ее прямым следствием. Если функция $H(t, x, y, \lambda)$ является строго вогнутой по (x, y), то функция $M(t, x, \lambda) \equiv \max_y H(t, x, y, \lambda)$ также будет строго вогнутой по x (см. упражнение 7.7). Несмотря на это, в некоторых приложениях оказывается проще убедиться в том, что функция $H(t, x, y, \lambda)$ является строго вогнутой по (x, y), чем анализировать свойства максимального гамильтониана. Более того, в некоторых задачах функция $M(t, x, \lambda)$ может оказаться вогнутой по x, а функция $H(t, x, y, \lambda)$ — вогнутой по (x, y) и строго вогнутой по y и эта информация может быть использована для доказательства единственности решения задачи оптимизации (см. упражнение 8.11). Однако в целях экономии мы ограничимся доказательством теорем о достаточных условиях, схожих с теоремой 7.6.

Достаточные условия из теорем 7.5 и 7.6 играют важную роль в приложениях теории оптимального управления. Из них следует, что допустимая пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$, удовлетворяющая необходимым условиям, сформулированным в теореме 7.4, действительно является решением задачи динамической оптимизации. Они являются важными утверждениями, так как без достаточных условий из теоремы 7.4 не следует существование непрерывного внутреннего решения задачи. Поэтому допустимая пара функций, удовлетворяющая условиям теоремы, может не быть оптимумом, а оптимальное решение может не удовлетворять этим «необходимым условиям» (потому что оно не будет непрерывной функцией или не будет внутренним решением). Достаточные условия позволяют избавиться от таких трудностей, так как из них следует, что подходящая допустимая пара функций (удовлетворяющая необходимым условиям непрерывного внутреннего оптимума) является глобальным максимумом или единственным глобальным максимумом.

Одна из трудностей проверки того, что условия теорем 7.5 и 7.6 выполняются, состоит в том, что ни выпуклость, ни вогнутость функции g не гарантируют вогнутости гамильтониана в отсутствие информации о знаке сопряженной переменной $\lambda(t)$. Однако во многих интересных экономических задачах можно показать, что сопряженная переменная $\lambda(t)$ оказывается везде неотрицательной. Например, условия $f_y(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) \geq 0$ и $g_y(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) \leq 0$ являются достаточными для выполнения неравенства $\lambda(t) \geq 0$. Если сопряженная переменная является везде неотрицательной функцией, то проверка условий теорем 7.5 и 7.6 оказывается значительно более простой, особенно когда функции f и g являются вогнутыми функциями.

7.2.2. Обобщения

Теоремы предыдущего подпараграфа могут быть обобщены для случая, когда переменные управления и состояния являются векторами, а также для случая, когда в задаче имеются дополнительные ограничения. В задаче оптимизации с дополнительными ограничениями, так же как и в стандартной задаче конечномерной оптимизации, необходимо вводить дополнительные условия на вид этих ограничений (см. например теоремы A.29 и A.30 в приложении A). В бесконечномерном случае эти условия оказываются более сложными. Так как мы не будем рассматривать задачи оптимизации с дополнительными ограничениями в данной книге (кроме упражнения 10.7 в главе 10), мы лишь коротко остановимся на таких задачах в упражнении 10.7.

Теоремы для многомерных переменных управления и состояния являются прямым обобщением теорем, доказанных выше. Они могут быть использованы в задачах теории экономического роста с несколькими типами капитальных товаров. В частности рассмотрим следующую задачу динамической оптимизации:

$$\max_{\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{x}_1} W(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \equiv \int_0^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))dt \tag{7.25}$$

при ограничениях

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = G(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \tag{7.26}$$

и

$$\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} \text{ и } \mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y} \text{ для всех } t, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \text{ и } \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1, \tag{7.27}$$

где $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{K_x}$ и $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{K_y}$ (при натуральных $K_x \in \mathbb{N}$ и $K_y \in \mathbb{N}$).

Теорема 7.7. Принцип максимума для задачи с несколькими переменными. *Допустим, что задача динамической оптимизации* (7.25) *при ограничениях* (7.26) *и* (7.27) *и непрерывно дифференцируемых функциях f и G имеет непрерывное внутреннее решение* $(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t)) \in \operatorname{Int}\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. *Определим гамильтониан следующим образом:*

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) \equiv f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) + \lambda(t) \cdot G(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)), \tag{7.28}$$

где $\lambda(t) \in \mathbb{R}^{K_x}$ *(а символ* $\lambda \cdot G$ *обозначает скалярное произведение векторов* λ *и* G*). Тогда оптимальный вектор переменных управления* $\hat{\mathbf{y}}(t)$ *и соответствующий ему вектор переменных состояния* $\hat{\mathbf{x}}(t)$ *удовлетворяют следующим необходимым условиям оптимума:*

$$D_{\mathbf{y}} H(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t), \lambda(t)) = 0 \text{ для всех } t \in [0, t_1], \tag{7.29}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -D_{\mathbf{x}} H(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t), \lambda(t)) \text{ для всех } t \in [0, t_1], \tag{7.30}$$

и

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = D_{\lambda} H(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t), \lambda(t)) \\ \text{для всех } t \in [0, t_1], \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \text{ и } \lambda(t_1) = 0. \tag{7.31}$$

Доказательство. См. упражнение 7.11. ■

Заметим, что некоторые ограничения в этой теореме, так же как и в ее одномерной версии, теореме 7.4, могут быть ослаблены далее. Например, требование $(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t)) \in \operatorname{Int}\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ не является необходимым. В случае когда одна из переменных состояния или управления оказывается на границе множества $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, переменная управления может измениться дискретно и гамильтониан в этом случае может не быть дифференцируемым везде (см. ниже). Эти обобщения можно учесть, предполагая, что функция $\hat{\mathbf{y}}(t)$ является кусочно-непрерывной. Однако, так как в большинстве экономических задач переменные состояния и управления лежат во внутренности множества $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ и, соответственно, гамильтониан дифференцируем везде, формулировка теоремы 7.7 в таком виде оказывается достаточной для большинства интересующих нас задач.

Достаточные условия оптимума, доказанные в предыдущем подпараграфе, также могут быть напрямую продолжены для случая многомерного вектора переменных управления и состояния. Они представлены в следующей теореме.

Теорема 7.8. Достаточные условия для многомерного случая. *Рассмотрим задачу максимизации* (7.25) *при ограничениях* (7.26) *и* (7.27) *с непрерывно дифференцируемыми функциями f и G. Определим гамильтониан* $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)$ *так, как в равенстве* (7.28), *и предположим, что пара непрерывных функций* $(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t)) \in \operatorname{Int}\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, *лежащих во внутренности* *множества $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, удовлетворяет условиям* (7.29)–(7.31). *Если множество $\mathcal{X}$ является выпуклым, а функция* $M(t, \mathbf{x}, \lambda) \equiv \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)$ *вогнута по $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ при всех $t \in [0, t_1]$, то глобальный максимум задачи* (7.25) *достигается на паре функций* $(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t))$. *Более того, если функция $M(t, \mathbf{x}, \lambda)$ является строго вогнутой по $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, то пара функций* $(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t))$ *является единственным решением задачи* (7.25).

Доказательство. См. упражнение 7.12. ■

7.2.3. Ограничения

Ограничения теорем, представленных выше, очевидны. Во-первых, мы просто предположили существование непрерывного внутреннего решения задачи оптимального управления. Во-вторых, что столь же важно, мы ограничили анализ лишь случаем конечного горизонта планирования, в то время как большинство задач экономического роста формулируются на бесконечном горизонте планирования. Для того чтобы обойти эти ограничения, мы должны обратиться к более современным методам теории оптимального управления. Этому посвящен следующий параграф книги.

7.3. Оптимальное управление на бесконечном горизонте планирования

Основная польза результатов, уже доказанных нами, состоит в том, что они позволяют понять интуицию, стоящую за методами решения задач динамической оптимизации в непрерывном времени. Несмотря на то что в некоторых экономических задачах агенты имеют конечный горизонт планирования, большинство экономических задач, включая почти все задачи теории экономического роста, естественным образом формулируются на бесконечном горизонте планирования. Это очевидно в контексте задач теории экономического роста, однако в большинстве задач теории повторяющихся игр, политической экономии, теории отраслевых рынков, где, несмотря на то что игра или срок жизни агентов могут быть конечными, их временная протяженность может быть случайной величиной и горизонт планирования также бесконечен. Поэтому канонической моделью динамической оптимизации в экономических задачах является модель с бесконечным горизонтом планирования. Далее мы докажем необходимые и достаточные условия оптимума в задаче оптимального управления на бесконечном горизонте планирования. Так как в большинстве экономических приложений векторы переменных управления и состояния в задаче динамической оптимизации являются одномерными, мы упростим дальнейшее изложение материала и ограничимся этим случаем. Анализу более общего многомерного случая посвящен параграф 7.6, где мы вернемся к вопросу существования решения задачи динамической оптимизации и опишем свойства функции стоимости.

7.3.1. Основная задача: необходимые и достаточные условия

Мы остановимся на задаче оптимального управления на бесконечном горизонте планирования с единственной переменной управления и единственной переменной состояния. По причинам, которые станут понятны далее, мы обобщим граничное условие на конечное значение переменной состояния. Для этого введем функцию b: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, такую, что предел $\lim_{t\to\infty} b(t) < \infty$ существует и конечен. Тогда граничное условие для переменной состояния принимает следующий вид: $\lim_{t\to\infty} b(t)x(t) \geq x_1$ при некотором вещественном $x_1 \in \mathbb{R}$. В частном случае, когда функция $b(t)$ является постоянной $b(t) = 1$ (для всех t), оно принимает вид $\lim_{t\to\infty} x(t) \geq x_1$ и является достаточным в большинстве экономических приложений. Однако для анализа конкурентного равновесия в непрерывном времени нам понадобится граничное условие вида $\lim_{t\to\infty} b(t)x(t) \geq x_1$. Используя те же обозначения, что и ранее, мы можем записать задачу оптимального управления на бесконечном горизонте планирования следующим образом:

$$\max_{x(t),y(t)} W(x(t), y(t)) \equiv \int_0^\infty f(t, x(t), y(t))dt \tag{7.32}$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), y(t)) \tag{7.33}$$

и

$$x(t) \in \mathcal{X} \text{ и } y(t) \in \mathcal{Y} \text{ для всех } t, x(0) = x_0 \text{ и } \lim_{t\to\infty} b(t)x(t) \geq x_1, \tag{7.34}$$

где, как и ранее f: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и g: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Основное отличие этой задачи от задач, рассмотренных нами ранее, состоит в том, что в ней время идет до бесконечности. Заметим, что так как в задаче нет конечного момента времени, в ней конечное значение x_1 неявным образом становится переменной выбора. Ограничение на минимальное значение этого значения накладывает последнее неравенство в условии (7.34). Также заметим, что мы не предполагаем, что множества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ являются ограниченными и поэтому результаты этого параграфа могут быть использованы для анализа задач теории эндогенного роста.

Определим допустимую пару функций $(x(t), y(t))$ таким же образом, что и ранее, однако позволим при этом функции $y(t)$ быть кусочно-непрерывной (см. также ссылку 2). Так как функция $x(t)$ задается обыкновенным дифференциальным уравнением, она будет дифференцируема, если функция $y(t)$ непрерывна. Если функция $y(t)$ кусочно-непрерывна, то функция $x(t)$ будет непрерывна и дифференцируема почти всюду.

Так же как и в задачах с дискретным временем, при анализе моделей с бесконечным горизонтом планирования в непрерывном времени возникают некоторые дополнительные технические трудности. Основной среди них является то, что в данном случае значение функционала (7.32) может быть не определено. Мы остановимся на анализе этой проблемы в параграфе 7.6.

Прежде чем перейти к более общей версии принципа максимума, подходящей для анализа задач на бесконечном горизонте планирования, напомним, что гамильтониан задается равенством (7.16) с единственным отличием в том, что горизонт планирования становится бесконечным. Далее, введем функцию стоимости, аналогичную функции стоимости в задаче динамического программирования в дискретном времени, рассмотренной в предыдущей главе, следующим образом:

$$V(t_0, x(t_0)) = \sup_{(x(t),y(t))\in \mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \int_{t_0}^{\infty} f(t, x(t), y(t))dt \qquad (7.35)$$

при ограничениях $\dot{x}(t) = g(t, x(t), y(t))$ и $\lim_{t\to\infty} b(t)x(t) \ge x_1$.

Другими словами, значение функции $V(t_0, x(t_0))$ стоимости равно оптимальному значению целевой функции задачи динамической оптимизации в момент времени t_0 при начальном значении переменной состояния $x(t_0)$. Очевидно, что для любой допустимой пары функций $(x(t), y(t))$ выполняется следующее неравенство:

$$V(t_0, x(t_0)) \ge \int_{t_0}^{\infty} f(t, x(t), y(t))dt. \qquad (7.36)$$

Мы остановимся на анализе задач, в которых функция стоимости достигает своего конечного значения $V(t_0, x(t_0)) < \infty$ на некоторых допустимых парах функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ (для достаточных условий их существования см. теорему 7.15 ниже). Если пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ является такой парой, то выполняется следующее равенство:

$$V(t_0, x(t_0)) = \int_{t_0}^{\infty} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt. \qquad (7.37)$$

Нашим первым утверждением будет ослабленная версия принципа оптимальности, который мы уже изучили в предыдущей главе в контексте динамического программирования в дискретном времени.

Лемма 7.1. Принцип оптимальности. *Предположим, что пара функций* $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ *является решением задачи* (7.32) *при ограничениях* (7.33) *и* (7.34), *то есть на ней функция стоимости* $V(t_0, x(t_0))$ *достигает максимального значения. Тогда для всех* $t_1 \ge t_0$ *выполняется следующее равенство:*

$$V(t_0, x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt + V(t_1, \hat{x}(t_1)). \qquad (7.38)$$

Доказательство. Из свойств определенного интеграла имеем:

$$V(t_0, x(t_0)) = \int_{t_0}^{\infty} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt + \int_{t_1}^{\infty} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt.$$

Доказательство будет завершено, если выполняется равенство $V(t_1, x(t_1)) = \int_{t_1}^{\infty} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt$. По определению функции стоимости для всех допустимых пар функций $(x(t), y(t))$ выполняется неравенство $V(t_1, x(t_1)) \ge \int_{t_1}^{\infty} f(t, x(t), y(t))dt$. Поэтому равенство может не выполняться только в том случае, если

$$V(t_1, x(t_1)) > \int_{t_1}^{\infty} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt.$$

Для того чтобы прийти к противоречию, предположим, что неравенство выше истинно. Тогда существует допустимая пара функций $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$, определенная на полуинтервале $[t_1, \infty)$, такая, что $\tilde{x}(t_1) = \hat{x}(t_1)$ и для нее выполняется следующее неравенство:

$$\int_{t_1}^{\infty} f(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t))dt > \int_{t_1}^{\infty} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt.$$

Тогда построим пару функций $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ так, что $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ на отрезке $[t_0, t_1]$ и $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ на полуинтервале $[t_1, \infty)$. Так как пара $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ является допустимой на $[t_1, \infty)$ и $\tilde{x}(t_1) = \hat{x}(t_1)$, пара функций $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ является допустимой. Более того, выполняются следующие равенства:

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))dt + \int_{t_1}^{\infty} f(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt + \int_{t_1}^{\infty} f(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))dt >$$

$$> \int_{t_0}^{t_1} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt + \int_{t_1}^{\infty} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt = V(t_0, x(t_0)),$$

что противоречит неравенству (7.36). Поэтому справедливо равенство $V(t_1, x(t_1)) = \int_{t_1}^{\infty} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt$, а значит и равенство (7.38). ■

Следует обратить внимание на две особенности такой версии принципа оптимальности. Во-первых, в отличие от схожего уравнения (6.3) в предыдущей главе, читатель может подумать, что в равенстве (7.38) отсутствует дисконтирование. Однако это не так, дисконтирование включено в моментальную функцию выигрыша f, и поэтому неявным образом присутствует в функции стоимости $V(t_1, \hat{x}(t_1))$. Во-вторых, читатель может подумать, что лемма 7.1 противоречит нашему обсуждению понятия согласованности во времени в главе 5, так как лемма сформулирована без дополнительных предположений, гарантирующих состоятельность решения во времени. Важным моментом в этом контексте является то, что при обсуждении понятия состоятельности во времени мы рассматривали агента, планирующего изменить свой оптимальный выбор, начиная с момента времени t_1, именно в момент времени t_1. С другой стороны, в лемме 7.1 мы изучаем оптимальность выбора, начиная с момента времени t_1, в момент времени t_0. Вопрос состоятельности выбора во времени, а именно того, будет ли агент изменять свой выбор в момент времени t_1, более подробно обсуждается в упражнении 7.22.

Далее мы сформулируем основную теорему о необходимых условиях оптимума в задаче оптимального управления на бесконечном горизонте планирования. В этой теореме мы также ослабим предположение о непрерывности оптимальной функции управления $\hat{y}(t)$.

Теорема 7.9. Принцип максимума для задачи на бесконечном горизонте планирования. *Предположим, что задача максимизации* (7.32) *при ограничениях* (7.33) *и* (7.34) *с непрерывно дифференцируемыми функциями* f *и* g *имеет кусочно-непрерывное внутреннее решение* $(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \in \mathrm{Int}\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. *Определим гамильтониан* $H(t, x, y, \lambda)$ *так, как в равенстве* (7.16).

Тогда на паре функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ *гамильтониан* $H(t, x, y, \lambda)$ *удовлетворяет следующему принципу максимума:*

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) \geq H(t, \hat{x}(t), y(t), \lambda(t))$$

для всех функций $y(t) \in \mathcal{Y}$ *и для всех вещественных* $t \in \mathbb{R}_+$. *Более того, для всех* $t \in \mathbb{R}_+$, *где функция* $\hat{y}(t)$ *является непрерывной, выполняются следующие необходимые условия максимума:*

$$H_y(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) = 0, \tag{7.39}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -H_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) \tag{7.40}$$

и

$$\dot{x}(t) = H_\lambda(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) \text{ при } x(0) = x_0 \text{ и } \lim_{t\to\infty} b(t)x(t) \geq x_1. \tag{7.41}$$

Доказательство этой теоремы является относительно длинным, и мы приведем его в конце этого параграфа. На данный момент заметим лишь, что если решение в предполагаемом теоремой виде существует, то оно удовлетворяет принципу максимума. Поэтому теорему 7.9 можно рассматривать как усиление теорем, приведенных в предыдущей главе, в особенности потому, что в ней не накладываются дополнительные ограничения на компактность множеств. Несмотря на это, теорема применима лишь в том случае, когда задача максимизации имеет кусочно-непрерывное решение $\hat{y}(t)$. Более того, в теореме 7.9 утверждается, что если оптимальная траектория переменной управления $\hat{y}(t)$ является непрерывной по времени функцией, то условия (7.39)–(7.41) выполняются всюду. Так как функция управления $\hat{y}(t)$ является кусочно-непрерывной, она может иметь точки разрыва, однако они будут встречаться в относительно редких случаях, в частности она будет непрерывна «почти всегда». Обобщение, позволяющее наличие точек разрыва у функции $\hat{y}(t)$ является в чем-то избыточным в большинстве экономических задач, так как чаще всего в экономических задачах присутствует достаточно ограничений, позволяющих гарантировать непрерывность решения $\hat{y}(t)$ по времени. Следовательно, при анализе большинства экономических задач (и всех моделей, рассмотренных в этой книге) достаточно ограничиться проверкой необходимых условий (7.39)–(7.41).

Необходимые условия в теореме 7.9 также могут быть представлены в виде так называемого уравнения *Гамильтона —Якоби — Беллмана* (ГЯБ), которое аналогично формулировке задачи динамического программирования в предыдущей главе.

Теорема 7.10. Уравнение Гамильтона—Якоби—Беллмана. *Определим функцию стоимости* $V(t, x)$ *так, как в равенстве* (7.35) *и предположим, что условия теоремы* 7.9 *выполнены. Тогда функция* $V(t, x)$ *является* *дифференцируемой по (t, x) и оптимальная пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ удовлетворяет следующему уравнению ГЯБ:*

$$f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \frac{\partial V(t, \hat{x}(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \hat{x}(t))}{\partial x} g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) = 0 \quad (7.42)$$

при всех вещественных $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Из леммы 7.1 следует, что на оптимальной паре $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ для всех t выполняется следующее равенство:

$$V(t_0, x(t_0)) = \int_{t_0}^{t} f(s, \hat{x}(s), \hat{y}(s)) ds + V(t, x(t)).$$

Используя дифференцируемость функции стоимости V и дифференцируя это уравнение с помощью правила Лейбница (теорема В.4 приложения В), приходим к следующему равенству:

$$f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \frac{\partial V(t, \hat{x}(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \hat{x}(t))}{\partial x} \dot{x}(t) = 0 \quad \text{при всех } t \geq t_0.$$

Полагая $\dot{x}(t) = g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))$, получаем уравнение (7.42). ■

Уравнение ГЯБ позволяет увидеть интуицию для принципа максимума. Более того, для нас важным будет то, что оно напрямую используется во многих экономических моделях, включая модели эндогенного технологического развития, которые мы рассмотрим в части IV данной книги.

Следует отметить несколько важных свойств уравнения ГЯБ. Во-первых, в предположении о непрерывной дифференцируемости функций f и g предположение о дифференцируемости функции стоимости V не является значительным ограничением, хотя он может не выполняться в некоторых случаях. Из определения (7.35) следует, что функция $V(t, x)$ будет дифференцируемой, если решение задачи $\hat{y}(t)$ непрерывно, а функция $g(t, x, y)$ является дифференцируемой по t. Более того, из рассуждений, построенных на теореме об огибающей, следует, что если функция управления $\hat{y}(t)$ непрерывна, то функция стоимости $V(t, x)$ также будет дифференцируема и по аргументу x (в дифференцируемости функции $V(t, x)$ по x можно убедиться и напрямую, см. теорему 7.17 далее). Во-вторых, так в уравнении (7.42) присутствуют частные производные функции $V(t, x)$ по времени и по переменной состояния x, оно является уравнением с частными производными. В-третьих, это уравнение с частными производными имеет сходство с уравнением Эйлера, которое мы вывели в контексте динамического программирования в дискретном времени. В частности, напомним, что уравнение Эйлера в предыдущей главе в самом простом его виде (6.28) требует, чтобы текущий выигрыш от малого увеличения переменной управления был равен дисконтированной потери стоимости в будущем. Уравнение ГЯБ имеет схожую интерпретацию. Первый член в нем соответствует текущему выигрышу, а последний — возможным дисконтированным потерям стоимости в будущем. Второй член в уравнении ГЯБ возникает в силу того, что максимальное значение целевой функции также может изменяться со временем.

7.3.2. Эвристический вывод стационарного уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана

Уравнение ГЯБ играет очень важную роль в динамическом экономическом анализе и поэтому полезным будет привести его альтернативный эвристический вывод. Для этого сконцентрируемся на более простой стационарной версии уравнения ГЯБ. Такая версия этого уравнения возникает в задаче максимизации с экспоненциальным дисконтированием и не зависящими от времени ограничениями (см., например, параграф 7.7). Другими словами, в этой задаче целевая функция определена как $f(t, x(t), y(t)) = \exp(-\rho t)f(x(t), y(t))$, а динамический закон изменения переменной состояния задается автономным дифференциальным уравнением, то есть $g(t, x(t), y(t)) = g(x(t), y(t))$. В этом случае нетрудно убедиться, что если допустимая пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))_{t\geq 0}$ является оптимальной, начиная с момента времени $t = 0$ при начальном условии $x(0) = x_0$, то она также будет оптимальной начиная с момента времени $s > 0$ при том же начальном условии. Другими словами, пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))_{t\geq s}$ является оптимумом в задаче с начальным условием $x(s) = x_0$ (см. упражнение 7.16). В этом случае определим функцию $v(x)$ как $v(x) \equiv V(0, x)$. Так как пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ является решением задачи независимо от начального момента времени, для всех $t \geq 0$ выполняется следующее равенство:

$$V(t, x(t)) = \exp(-\rho t)v(x(t)). \qquad (7.43)$$

Тогда по определению имеем:

$$\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} = -\rho\exp(-\rho t)v(x(t)).$$

Более того, для изменения функции $v(x)$ со временем (которое возникает только из-за изменения во времени переменной состояния $x(t)$, так как сама функция $v(\cdot)$ не зависит от времени) имеем уравнение:

$$\dot{v}(x(t)) \equiv \frac{dV(t, x(t))}{dt} = \left(\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x}\right)\dot{x}(t).$$

Подставляя это выражение в равенство (7.42) и замечая, что $\dot{x}(t) = g(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$, получаем следующий вид уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана в стационарной форме:

$$\rho v(\hat{x}(t)) = f(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \dot{v}(\hat{x}(t)). \qquad (7.44)$$

Это стационарное уравнение ГЯБ широко используется в динамическом экономическом анализе и может быть проинтерпретировано как «условие отсутствия арбитража в ценообразовании активов» (см. подпараграф 7.3.4). Следующие эвристические рассуждения не только показывают вывод уравнения, но и раскрывают дополнительную интуицию, стоящую за ним.

Эвристический вывод стационарного уравнения ГЯБ (7.44). Рассмотрим задачу динамической оптимизации с экспоненциальным дисконтированием на бесконечном горизонте планирования и предположим, что допустимая пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ является ее решением начиная с момента времени $t = 0$ при начальном условии $x(0)$. Напомним, что функция стоимости при начальном условии $x(0)$ задана следующим образом:

$$v(x(0)) \equiv \int_0^\infty \exp(-\rho t) f(\hat{x}(t), \hat{y}(t))dt$$

при $\hat{x}(0) = x(0)$. Для любого интервала времени $\Delta t > 0$ справедливо следующее равенство:

$$v(x(0)) = \int_0^{\Delta t} \exp(-\rho t) f(\hat{x}(t), \hat{y}(t))dt + \int_{\Delta t}^\infty \exp(-\rho t) f(\hat{x}(t), \hat{y}(t))dt =$$

$$= f(\hat{x}(0), \hat{y}(0))\Delta t + o(\Delta t) + \int_{\Delta t}^\infty \exp(-\rho t) f(\hat{x}(t), \hat{y}(t))dt,$$

где второе равенство использует формулу Тейлора для аппроксимации интеграла $\int_0^{\Delta t} \exp(-\rho t) f(\hat{x}(t), \hat{y}(t))dt$ как $f(\hat{x}(0), \hat{y}(0))\Delta t$, а член $o(\Delta t)$ является остатком ряда Тейлора (который возникает в силу того, что функции $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ не обязательно равны $(\hat{x}(0), \hat{y}(0))$ для всех $t \in [0, \Delta t]$, и из-за того, что агент дисконтирует будущее между моментами времени 0 и Δt). Член $o(\Delta t)$ является бесконечно малым более чем первого порядка при $\Delta t \to 0$ в том смысле, что $\lim_{\Delta t \to 0} o(\Delta t)/\Delta t = 0$. Следовательно, он убывает к нулю быстрее, чем Δt при $\Delta t \to 0$. Далее, используя равенство (7.43), получаем следующее выражение для функции v:

$$v(x(0)) = f(\hat{x}(0), \hat{y}(0))\Delta t + o(\Delta t) + \exp(-\rho \Delta t) v(\hat{x}(\Delta t)).$$

Вычитая $v(\hat{x}(\Delta t))$ из обеих частей этого равенства и деля затем обе его части на Δt, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{v(\hat{x}(0))-v(\hat{x}(\Delta t))}{\Delta t}=f(\hat{x}(0),\ \hat{y}(0))+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}+\frac{\exp(-\rho\Delta t)-1}{\Delta t}v(\hat{x}(\Delta t)). \quad (7.45)$$

Далее перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$. В предположении о том, что функция $v(x)$ дифференцируема в точке $x(0)$ левая часть равенства (7.45) становится равной $-\dot{v}(\hat{x}(0))$. Первое слагаемое в правой части уравнения не зависит от Δt и поэтому не изменяется. Второе слагаемое стремится к нулю по определению. Предел третьего слагаемого можно найти по правилу нахождения предела произведения:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\exp(-\rho\Delta t)-1}{\Delta t}v(\hat{x}(\Delta t))=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\exp(-\rho\Delta t)-1}{\Delta t}\times\lim_{\Delta t\to 0}v(\hat{x}(\Delta t))=-\rho v(x(0)).$$

Первый предел следует из того, что $\exp(-\rho\times 0)=1$, и поэтому при $\Delta t\to 0$ выражение $(\exp(-\rho\Delta t)-1)/\Delta t$ является просто производной функции $\exp(-\rho t)$ в точке $t=0$. Подставляя эти пределы в уравнение (7.45), приходим к следующему равенству:

$$-\dot{v}(x(0))=f(\hat{x}(0),\ \hat{y}(0))-\rho v(x(0)).$$

После элементарных преобразований приходим к уравнению (7.44).

7.3.3. Условие трансверсальности и достаточные условия

Так как в теореме 7.9 отсутствует ограничение на конечное значение переменной состояния вида $x(t_1)=x_1$, мы вправе ожидать, что должно существовать условие трансверсальности, схожее с условием $\lambda(t_1)=0$ в теореме 7.1. Например, обобщая условие $\lambda(t_1)=0$ в теореме 7.1 для бесконечного горизонта планирования, мы можем попробовать записать условие трансверсальности в виде $\lim_{t\to\infty}\lambda(t)=0$. Однако в общем случае это не так. Альтернативным образом условие трансверсальности выглядит как

$$\lim_{t\to\infty}H(t,\ \hat{x}(t),\ \hat{y}(t))=0, \quad (7.46)$$

однако проверка равенства (7.46) может оказаться затруднительной. Условие трансверсальности в более сильном виде возникает в том случае, когда задача имеет более сложный вид (см. параграф 7.4). Однако прежде чем перейти к этому случаю, сформулируем следующее обобщение теоремы о достаточных условиях оптимума для случая бесконечного горизонта планирования.

Теорема 7.11. Достаточные условия оптимума на бесконечном горизонте планирования. *Рассмотрим задачу максимизации (7.32) при ограничениях (7.33) и (7.34) с непрерывно дифференцируемыми функциями f и g.*

Определим гамильтониан $H(t, x, y, \lambda)$ так, как в уравнении (7.16) *и предположим, что допустимая пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ удовлетворяет условиям* (7.39)–(7.41). *Для заданной сопряженной переменной $\lambda(t)$ определим максимальный гамильтониан как в равенстве* (7.20): $M(t, x, y) \equiv \max_{y(t) \in \mathcal{Y}(t)} H(t, x, y, \lambda)$. *Тогда, если множество $\mathcal{X}$ выпукло, функция $M(t, x, y)$ является вогнутой по $x \in \mathcal{X}$ при всех t $\lim_{t\to\infty} \lambda(t)(\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)) \leq 0$ для всех функций $\tilde{x}(t)$, соответствующих допустимым траекториям $\tilde{y}(t)$, то целевая функция задачи* (7.32) *достигает максимума на паре функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$. Более того, если функция $M(t, x, y)$ является строго вогнутой по $x \in \mathcal{X}$, то $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ является единственным решением задачи* (7.32).

Доказательство. См. упражнение 7.13. ■

Следует отметить, что эта теорема о достаточных условиях оптимума включает в себя трудно проверяемое условие $\lim_{t\to\infty} \lambda(t)(x(t) - \tilde{x}(t)) \leq 0$ для всех допустимых функций $\tilde{x}(t)$ (то есть для всех функций $\tilde{x}(t)$, соответствующих допустимой траектории переменной управления $\tilde{y}(t)$). Проверка достаточности станет намного проще после того как мы наложим подходящее условие трансверсальности.

7.3.4. Экономическая интуиция

Принцип максимума является не только мощным математическим инструментом, но и подходящим методом с точки зрения экономического содержания задачи, так как он проливает свет на весьма важную экономическую интуицию для динамических экономических задач. В этом подпараграфе мы приведем два различающихся и дополняющих друг друга типа интуитивных объяснений принципа максимума. Одно из них базируется на его исходной формулировке в теореме 7.4 или теореме 7.9, второе построено на формулировке в терминах динамического программирования (уравнении ГЯБ) в теореме 7.10.

Чтобы увидеть первый тип интуиции, рассмотрим следующую задачу максимизации:

$$\int_0^{t_1} H(t, \hat{x}(t), y(t), \lambda(t))dt = \int_0^{t_1} [f(t, \hat{x}(t), y(t)) + \lambda(t)g(t, \hat{x}(t), y(t))]dt, \quad (7.47)$$

где максимизация происходит по функции $y(t)$ при заданных функциях $\lambda(t)$ и $\hat{x}(t)$, а константа t_1 может быть конечной или равной $+\infty$. Условие $H_y(t, \hat{x}(t), y(t), \lambda(t)) = 0$ является необходимым условием оптимума в такой формулировке задачи максимизации. Следовательно, принцип максимума неявным образом сводится к максимизации суммы исходной целевой функции $\int_0^{t_1} f(t, \hat{x}(t), y(t))dt$ и дополнительного слагаемого $\int_0^{t_1} \lambda(t)g(t, \hat{x}(t), y(t))dt$. Понимание причин такой максимизации позволяет увидеть интуицию для принципа максимума.

Во-первых, напомним, что функция стоимости $V(t, \hat{x}(t))$, определенная в равенстве (7.38), равна значению целевой функции на оптимальной траектории начиная с момента времени t при начальном значении переменной состояния $\hat{x}(t)$. Поэтому, используя теорему об огибающей, получаем следующее равенство:

$$\lambda(t) = \frac{\partial V(t, \hat{x}(t))}{\partial x}.$$

Другими словами, сопряженная переменная $\lambda(t)$ показывает влияние небольшого изменения переменной состояния x на значение целевой функции в оптимуме (см. равенство (7.55) в следующем параграфе). Следовательно, аналогично множителям Лагранжа в конечномерных задачах оптимизации с ограничениями, сопряженная переменная $\lambda(t)$ является (теневой) стоимостью ослабления ограничения (7.33) при небольшом увеличении значения функции $x(t)$ в момент времени t[8]. Более того, напомним, что $\dot{x}(t) = g(t, \hat{x}(t), y(t))$, и поэтому второе слагаемое в гамильтониане равно $\int_0^{t_1} \lambda(t)\dot{x}(t)dt$. Это слагаемое равно теневой стоимости $x(t)$ в момент времени t при увеличении запаса $x(t)$ в этот момент времени. Более того, так как $x(t)$ является переменной состояния, мы можем рассматривать ее как переменную «запаса», в то время как переменная управления $y(t)$ является переменной «потока».

Следовательно, максимизация выражения (7.47) эквивалентна максимизации суммы текущего выигрыша, заданного значением функции $f(t, \hat{x}(t), y(t))$, и стоимости запаса $x(t)$, заданного сопряженной переменной $\lambda(t)$, помноженной на изменение этого запаса, равного $\dot{x}(t)$. Поэтому основной смысл принципа максимума состоит в максимизации суммы потока текущего выигрыша и стоимости текущего запаса переменной состояния. Такая аргументация с точки зрения переменных запаса и потока имеет прозрачную экономическую логику.

[8] Здесь я использую выражение «ослабление ограничения», неявно предполагая, что высокое значение переменной состояния $x(t)$ приводит к увеличению значения целевой функции. Такое выражение облегчает используемую терминологию, однако так как $\lambda(t)$ может принимать отрицательные значения, это предположение выполняется не всегда.

Далее перейдем к интерпретации уравнения на сопряженную переменную:

$$\dot{\lambda}(t) = -H_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) = -f_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) - \lambda(t) g_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)).$$

Оно также имеет простое интуитивное объяснение. Так как сопряженная переменная $\lambda(t)$ является стоимостью запаса переменной состояния $x(t)$, ее производная по времени $\dot{\lambda}(t)$ показывает прирост стоимости переменной состояния. Небольшое увеличение x изменяет сумму текущего выигрыша и стоимости запаса переменной состояния на величину, равную H_x, но оно также изменяет стоимость запаса на величину, равную $\dot{\lambda}(t)$. Принцип максимума утверждает, что этот прирост должен быть равен амортизации стоимости запаса переменной состояния $-\lambda(t)$, в противном случае изменением $x(t)$ можно было бы добиться увеличения функции стоимости в задаче (7.47).

Второе дополняющее интуитивное объяснение принципа максимума можно получить из уравнения ГЯБ (7.42) в теореме 7.10. А именно проанализируем задачу с экспоненциальным дисконтированием, рассмотренную выше (и достаточно подробно в параграфе 7.5). Напомним, что в этом случае стационарная версия уравнения ГЯБ имеет следующий вид:

$$\rho v(\hat{x}(t)) = f(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \dot{v}(\hat{x}(t)), \tag{7.48}$$

где функция зависит только от переменной состояния x и не зависит явным образом от времени. Это широко используемое уравнение (или уравнение ГЯБ в более общем виде (7.42)) может быть проинтерпретировано как условие отсутствия арбитража при ценообразовании активов. Интуитивно мы можем рассмотреть значение функции v как стоимость актива, торгуемого на финансовом рынке, а значение ρ как требуемое большим количеством инвесторов значение доходности актива. В каком случае инвесторы будут готовы владеть этим активом? По меньшей мере актив должен приносить требуемый уровень доходности. Более того, если актив приносит большую доходность, на рынке будет возникать избыточный спрос на него со стороны инвесторов до тех пор, пока его стоимость не скорректируется таким образом, что доходность сравняется с требуемой доходностью. Следовательно, мы можем считать, что в равновесии доходность актива должна быть равна требуемой инвесторами доходности ρ. Существует два источника дохода от владения активом. Первым являются дивиденды, то есть текущая прибыль, выплачиваемая инвесторам. В данном контексте она соответствует текущему выигрышу $f(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$. В случае когда дивиденд не изменяется во времени и равен d, а другие источники дохода отсутствуют, из условия отсутствия арбитража следует, что $v = d/\rho$ или $\rho v = d$. Вторым источником дохода от владения активом является прирост или снижение его стоимости (удорожание или удешевление актива). В данном контексте это соответствует значению $\dot{v}$. Поэтому вместо равенства $\rho v = d$ условие отсутствия арбитража принимает следующий вид:

$$\rho v(x) = d + \dot{v}(x).$$

Таким образом, на интуитивном уровне принцип максимума (для стационарной задачи) говорит о том, что максимальное значение целевой функции задачи динамической оптимизации $v(x)$ и скорость его изменения $\dot{v}(x)$ должны быть согласованы с условием отсутствия арбитража.

*7.3.5. Доказательство теоремы 7.9**

В этом подпараграфе мы приведем набросок доказательства теоремы 7.9. Ее полное строгое доказательство является довольно длинным и использует сложный математический аппарат. Читатель может найти его во многих источниках, упомянутых в параграфе 7.10.

Версия доказательства, приведенная ниже, содержит все основные идеи, однако в ней предполагается, что функция $V(t, x)$ является дважды дифференцируемой по аргументам t и x. Предположение о дифференцируемости функции $V(t, x)$ по t и x не является значительно ограничивающим, и в теореме 7.17 приводятся достаточные условия для дифференцируемости функции $V(t, x)$. Однако дополнительное предположение о дважды дифференцируемости является более строгим.

Основная идея доказательства восходит к работам Л.С. Понтрягина и его коллег. Вместо анализа гладких отклонений от оптимальной траектории функции $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ в данном методе доказательства рассматриваются игольчатые вариации, то есть кусочно-непрерывные траектории переменной управления, которые могут отклоняться от оптимального решения на произвольную величину в течение короткого интервала времени.

Набросок доказательства теоремы 7.9. Предположим, что допустимая пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ при $\hat{y}(t) \in \mathrm{Int}\mathcal{Y}$ и $\hat{x}(t) \in \mathrm{Int}\mathcal{X}$ является решением задачи динамической оптимизации и на ней функция стоимости $V(t, x)$ достигает своего максимума. Выберем произвольное положительное число $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим следующее отклонение от оптимальной траектории: $y_\delta(t) = \hat{y}(t)$ для всех $t \in [0, t_0)$ и $y_\delta(t) = \delta$ для всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$ при некотором вещественном δ и достаточно малом Δt. Более того, положим $y_\delta(t)$ равной оптимальной траектории переменной управления в задаче максимизации $V(t_0 + \Delta t, x_\delta(t_0 + \Delta t))$ для всех $t \geq t_0 + \Delta t$, где функция $x_\delta(t)$ определяет динамику переменной состояния, согласованную с измененной траекторией переменной управления $y_\delta(t)$, а $x_\delta(t_0 + \Delta t)$ является значением этой функции в момент времени $t_0 + \Delta t$. Заметим, что по построению выполняется равенство $x_\delta(t_0) = \hat{x}(t_0)$ (так как $y_\delta(t) = \hat{y}(t)$ для всех $t \in [0, t_0]$).

Из того, что пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ является решением задачи максимизации следует, что

$$V(t_0, \hat{x}(t_0)) = \int_{t_0}^{\infty} f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt \geq \int_{t_0}^{\infty} f(t, x_\delta(t), y_\delta(t))dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t, x_\delta(t), y_\delta(t))dt + V(t_0 + \Delta t, x_\delta(t_0 + \Delta t)),$$

где последнее равенство использует предположение о том, что допустимая пара функций $(x_\delta(t), y_\delta(t))$ является решением задачи максимизации начиная с момента времени $t_0 + \Delta t$ при начальном условии $x(t + \Delta t) = x_\delta(t_0 + \Delta t)$. Группируя слагаемые и деля на Δt, приходим к следующему неравенству:

$$\frac{V(t_0 + \Delta t, x_\delta(t_0 + \Delta t)) - V(t_0, \hat{x}(t_0))}{\Delta t} \leq -\frac{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t, x_\delta(t), y_\delta(t))dt}{\Delta t} \tag{7.49}$$

при всех $\Delta t > 0$. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ и замечая, что $x_\delta(t_0) = \hat{x}(t_0)$, приходим к следующему равенству:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t, x_\delta(t), y_\delta(t))dt}{\Delta t} = f(t_0, x_\delta(t_0), y_\delta(t_0)). \tag{7.50}$$

Далее, обозначим множество точек непрерывности по времени оптимальной траектории переменной управления $\hat{y}(t)$ как $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+$. Заметим, что множество $\mathcal{T}$ является всюду плотным подмножеством $\mathbb{R}_+$, так как функция $\hat{y}(t)$ является кусочно-непрерывной. Используя предположение о дифференцируемости функции стоимости V во всех точках множества $\mathcal{T}$, получаем следующее равенство:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t_0 + \Delta t, x_\delta(t_0 + \Delta t)) - V(t_0, \hat{x}(t_0))}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\partial V(t_0, x_\delta(t_0))}{\partial t} + \frac{\partial V(t_0, x_\delta(t_0))}{\partial x}\dot{x}_\delta(t_0) =$$

$$= \frac{\partial V(t_0, x_\delta(t_0))}{\partial t} + \frac{\partial V(t_0, x_\delta(t_0))}{\partial x} g(t_0, x_\delta(t_0), y_\delta(t_0)), \tag{7.51}$$

где второе равенство вытекает из равенства $\dot{x}_\delta(t_0) = g(t_0, x_\delta(t_0), y_\delta(t_0))$ ввиду (7.33) и траектории переменной управления $y_\delta(t)$. Объединяя условия (7.49)–(7.51), приходим к следующему неравенству:

$$f(t_0, x_\delta(t_0), y_\delta(t_0)) + \frac{\partial V(t_0, x_\delta(t_0))}{\partial t} +$$
$$+ \frac{\partial V(t_0, x_\delta(t_0))}{\partial x} g(t_0, x_\delta(t_0), y_\delta(t_0)) \le 0 \tag{7.52}$$

для всех $t_0 \in \mathcal{T}$(то есть всех точек непрерывности функции $\hat{y}(t)$) для всех допустимых отклонений от оптимального решения $(x_\delta(t), y_\delta(t))$. Более того, из леммы 7.1 (или из рассуждений аналогичных доказательству теоремы 7.10) следует, что для всех $t_0 \in \mathcal{T}$ выполняется следующее равенство:

$$f(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0)) + \frac{\partial V(t_0, \hat{x}(t_0))}{\partial t} +$$
$$+ \frac{\partial V(t_0, \hat{x}(t_0))}{\partial x} g(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{x}(t_0)) = 0. \tag{7.53}$$

Объединяя условия (7.52) и (7.53) и используя равенство $x_\delta(t_0) = \hat{x}(t_0)$, приходим к следующему неравенству:

$$f(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0)) + \frac{\partial V(t_0, \hat{x}(t_0))}{\partial x} g(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0)) \ge$$
$$\ge f(t_0, x_\delta(t_0), y_\delta(t_0)) + \frac{\partial V(t_0, x_\delta(t_0))}{\partial x} g(t_0, x_\delta(t_0), y_\delta(t_0)) \tag{7.54}$$

для всех $t_0 \in \mathcal{T}$ и для всех допустимых отклонений от оптимального решения $(x_\delta(t), y_\delta(t))$. Далее определим $\lambda(t_0)$ следующим образом:

$$\lambda(t_0) \equiv \frac{\partial V(t_0, \hat{x}(t_0))}{\partial x}. \tag{7.55}$$

Тогда неравенство (7.54) может быть записано в следующей форме:

$$f(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0)) + \lambda(t_0) g(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{x}(t_0)) \ge$$
$$\ge f(t_0, x_\delta(t_0), y_\delta(t_0)) + \lambda(t_0) g(t_0, x_\delta(t_0), y_\delta(t_0)),$$

что эквивалентно неравенству

$$H(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0)) \ge H(t_0, \hat{x}(t_0), y_\delta(t_0)) \text{ для всех допустимых } y_\delta(t_0).$$

Так выбор t_0 в начале доказательства был произвольным, отсюда следует, что

$$H(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{y}(t_0)) \ge \max_y H(t_0, \hat{x}(t_0), y) \text{ для всех } t,$$

это завершает доказательство принципа максимума.

Необходимое условие (7.39) следует напрямую из принципа максимума и дифференцируемости гамильтониана H по аргументам x

и y (что, в свою очередь, следует из дифференцируемости по x и y функций f и g). Условие (7.41) выполняется потому, что пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ является допустимой. Наконец, условие (7.40) получается с помощью дифференцирования равенства (7.53) по x во всех точках непрерывности функции $\hat{y}(t)$. Таким образом, для всех $t \in \mathcal{T}$ имеем следующее равенство:

$$\frac{\partial f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))}{\partial x} + \frac{\partial^2 (Vt, \hat{x}(t))}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 V(t, \hat{x}(t))}{\partial x^2} g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \\ + \frac{\partial V(t, \hat{x}(t))}{\partial x} \frac{\partial g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))}{\partial x} = 0.$$

Используя определение гамильтониана, получаем, что из этого равенства следует условие (7.40), это завершает доказательство теоремы. ■

7.4. Дополнение об условии трансверсальности

В этом параграфе мы перейдем к более подробному обсуждению граничных условий на бесконечности в задаче динамической оптимизации на бесконечном горизонте планирования в непрерывном времени. Так же как и в задаче оптимизации в дискретном времени, эти граничные условия называют условиями трансверсальности. Как мы уже заметили в подпараграфе 7.3.3, естественным в данном случае будет предположение о том, что, как и на конечном горизонте планирования, условие трансверсальности должно быть схоже с условием из теоремы 7.1 с предельным переходом по t_1 при $t \to \infty$, то есть с условием $\lim_{t \to \infty} \lambda(t) = 0$. Однако следующий пример, который очень близок к оригинальной модели, предложенной Франком Рамсеем в 1828 году, показывает, что это предположение неверно. Более того, верное условие трансверсальности в отсутствие дополнительных предположений задается равенством (7.46).

Пример 7.2. Рассмотрим следующую задачу динамической максимизации без дисконтирования:

$$\max \int_0^\infty [\log(c(t)) - \log c^*] dt$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = k(t)^\alpha - c(t) - \delta k(t),$$

$$k(0) = 1$$

и

$$\lim_{t\to\infty} k(t) \geq 0,$$

где $c^* = (k^*)^\alpha - \delta k^*$ и $k^* = (\alpha/\delta)^{\alpha/(1-\alpha)}$. Другими словами, значение c^* является максимальным уровнем потребления, достижимым в этой задаче в стационарном состоянии, а значение k^* — соответствующим ему количеством капитала в стационарном состоянии. Такой вид представления целевой функции гарантирует сходимость интеграла к конечному значению (так как для любого вещественного $\varepsilon > 0$ значение функции $c(t)$ не может превышать значение $c^* + \varepsilon$ на бесконечном промежутке времени.

Гамильтониан для такой задачи имеет простой вид. Он не зависит от времени и может быть записан в следующем виде:

$$H(k, c, \lambda) = \log c(t) - \log c^* + \lambda(t)[k(t)^\alpha - c(t) - \delta k(t)].$$

Необходимые условия максимума выглядят следующим образом:

$$H_c(k, c, \lambda) = \frac{1}{c(t))} - \lambda(t) = 0$$

и

$$H_k(k, c, \lambda) = \lambda(t)\left[\alpha k(t)^{\alpha-1} - \delta\right] = -\dot{\lambda}(t).$$

Из них нетрудно убедиться, что на любой оптимальной траектории выполняется условие $c(t) \to c^*$ при $t \to \infty$. Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \frac{1}{c^*} > 0 \text{ и } \lim_{t\to\infty} k(t) = k^*.$$

Далее напомним, что из теоремы 7.3 следует, что в задаче максимизации на конечном горизонте планирования условие трансверсальности имеет вид: $\lambda(t_1)k(t_1) = 0$, в то время как в этом примере $\lim_{t\to\infty} \lambda(t)k(t) = \frac{k^*}{c^*} > 0$. Следовательно, условие, эквивалентное условию трансверсальности в задаче на конечном горизонте планирования, не выполняется. Однако нетрудно убедиться, что на оптимальной траектории вместо него выполняется следующее условие:

$$\lim_{t\to\infty} H(k(t), c(t), \lambda(t)) = 0. \ \blacksquare$$

В следующей теореме показано, что это условие действительно является одной из версий условия трансверсальности в задаче динамической оптимизации на бесконечном горизонте планирования.

Теорема 7.12 (условие трансверсальности в задаче динамической оптимизации на бесконечном горизонте планирования). *Предположим, что в задаче максимизации* (7.32) *при ограничениях* (7.33) *и* (7.34) *с непрерывно дифференцируемыми функциями f и g существует решение в виде кусочно-непрерывной оптимальной траектории переменной управления*

$\hat{y}(t) \in \mathrm{Int}\mathcal{Y}(t)$ с соответствующей ей траекторией переменной состояния $\hat{x}(t) \in \mathrm{Int}\mathcal{X}(t)$. Определим функцию стоимости $V(t, x(t))$ так же, как и в равенстве (7.35). *Предположим, что функция $V(t, \hat{x}(t))$ является дифференцируемой по аргументам x и t при достаточно больших значениях t и что $\lim_{t\to\infty} \partial V(t, \hat{x}(t))/\partial t = 0$. Определим гамильтониан $H(t, x, y, \lambda)$ так же, как в равенстве* (7.16). *Тогда пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ удовлетворяет необходимым условиям* (7.39)–(7.41) *и условию трансверсальности*

$$\lim_{t\to\infty} H(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) = 0. \tag{7.56}$$

Доказательство. По условию теоремы функция стоимости $V(t, x)$ дифференцируема по x при достаточно больших значениях t. Поэтому при них $\partial V(t, \hat{x}(t))/\partial x = \lambda(t)$ (см. условие (7.55)). Тогда выполняется уравнение ГЯБ, и из него для достаточно больших значений t вытекают следующие равенства:

$$\frac{\partial V(t, \hat{x}(t))}{\partial t} + f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \lambda(t) g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) = 0, \tag{7.57}$$

$$\frac{\partial V(t, \hat{x}(t))}{\partial t} + H(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) = 0.$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$ и замечая, что по условию теоремы $\lim_{t\to\infty} \partial V(t, \hat{x}(t))/\partial t = 0$, из равенства (7.57) получаем условие трансверсальности (7.56). ■

Как мы уже отметили в предыдущей главе, предположение о конечности предела $\lim_{t\to\infty} \partial V(t, \hat{x}(t))/\partial t$ является естественным, так как в экономических задачах агенты не достигают бесконечных значений релевантных переменных (более того, если этот предел расходится к бесконечности, то максимум целевой функции не достигается ни на одной паре функций $(x(t), y(t))$). Предположение теоремы о равенстве этого предела нулю, $\lim_{t\to\infty} \partial V(t, \hat{x}(t))/\partial t = 0$, является лишь немногим более сильным, чем предположение о том, что предел $\lim_{t\to\infty} V(t, \hat{x}(t))$ существует и конечен. Оно также выполняется почти во всех экономических задачах и во всех моделях, рассмотренных в этой книге. Однако условие трансверсальности (7.56) выглядит не очень удобным в применении. В следующем параграфе мы представим более сильное и более удобное условие трансверсальности, которое применяется при анализе задач динамической оптимизации с дисконтированием на бесконечном горизонте планирования.

Пример 7.3. Одним из важных примеров задач динамической оптимизации на бесконечном горизонте планирования является задача поиска оптимальной траектории использования невозобновляемого ресурса. А именно рассмотрим задачу бесконечно живущего индивида, имеющего доступ к невозобновляемому или исчерпаемому ресурсу в размере 1. Положим $u(y)$, где u: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ является строго возрастающей, непрерывно дифференцируемой и строго вогнутой функцией, моментальной функцией полезности от потребления потока ресурса y. Предположим, что индивид дисконтирует будущее экспоненциально с нормой дисконтирования, равной $\rho > 0$, и что в момент времени $t = 0$ он максимизирует следующую целевую функцию:

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t)u(y(t))dt.$$

Ограничение задачи состоит в том, что оставшееся в момент времени t количество ресурса $x(t)$ изменяется по следующему закону:

$$\dot{x}(t) = -y(t),$$

который описывает тот факт, что ресурс является невозобновляемым и его запас расходуется по мере того, как он используется индивидом. Естественным образом мы будем предполагать, что $x(t) \geq 0$. Гамильтониан задачи принимает следующий вид:

$$H(x(t), y(t), \lambda(t)) = \exp(-\rho t)u(y(t)) - \lambda(t)y(t).$$

Из теоремы 7.9 следует, что пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$, являющаяся внутренним непрерывно дифференцируемым решением этой задачи, должна удовлетворять следующим необходимым условиям оптимума. Существует непрерывно дифференцируемая функция $\lambda(t)$, такая, что выполняются следующие равенства:

$$u'(\hat{y}(t)) = \exp(\rho t)\lambda(t) \tag{7.58}$$

и

$$\dot{\lambda}(t) = 0. \tag{7.59}$$

Второе условие следует из того, что ни ограничение, ни функция выигрыша не зависят от значения функции $x(t)$. Далее, предваряя результаты следующего параграфа, определим функцию $\mu(t)$ как $\mu(t) \equiv \exp(\rho t)\lambda(t)$. Из уравнения (7.58) следует, что функция $\mu(t)$ определяет предельную *стоимость* исчерпаемого ресурса в момент времени t. Дифференцируя определение функции $\mu(t)$ по времени и используя условие (7.59), приходим к знаменитому *правилу Хотеллинга* для оптимального правила эксплуатации исчерпаемого ресурса:

$$\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} = \rho.$$

Это правило утверждает, что при оптимальной эксплуатации исчерпаемого ресурса его теневая стоимость растет со скоростью, равной норме дисконтирования. Из условия (7.58) мы также можем получить более явное описание оптимальной траектории потребления ресурса $y(t)$ во времени:

$$\hat{y}(t) = u'^{-1}\left[\exp(\rho t)\lambda(0)\right],$$

где символ u'^{-1} обозначает функцию, обратную к функции предельной полезности u', которая существует и является строго убывающей в силу того, что функция u строго вогнута (и, очевидно, $\lambda(0) = \mu(0)$). Из этого уравнения сразу следует, что количество потребляемого ресурса монотонно убывает по времени. Этот факт легко объяснить интуитивно с экономической точки зрения: из дисконтирования следует предпочтение более раннего потребления, однако ресурс не потребляется моментально в начальный момент времени в силу того, что агент предпочитает сглаживать потребление (так как функция $u(\cdot)$ является строго вогнутой).

Объединяя предыдущее уравнение с ресурсным ограничением, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}(t) = u'^{-1}\left[\exp(\rho t)\lambda(0)\right].$$

Интегрируя это уравнение и используя ограничение на начальный запас ресурса $x(0) = 1$, приходим к следующему равенству:

$$\hat{x}(t) = 1 - \int_0^t u'^{-1}\left[\exp(\rho s)\lambda(0)\right]ds.$$

Так как на оптимальной траектории ресурс используется полностью, $\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = 0$, также имеем равенство:

$$\int_0^\infty u'^{-1}\left[\exp(\rho s)\lambda(0)\right]ds = 1.$$

Следовательно, начальное значение сопряженной переменной $\lambda(0)$ должно быть выбрано таким образом, чтобы это уравнение выполнялось. В упражнении 7.20 читателю предоставлена возможность убедиться в том, что условие трансверсальности (7.56) в этом случае также выполняется. ■

7.5. Оптимальное управление на бесконечном горизонте планирования с дисконтированием будущего

Основной интерес для нас в этой книге представляют задачи теории экономического роста, в которых агенты дисконтируют будущее экспоненциальным образом. Следовательно, интересные экономические задачи часто принимают следующий специальный вид:

$$\max_{x(t),y(t)} W(x(t), y(t)) \equiv \int_0^\infty \exp(-\rho t) f(x(t), y(t))dt \text{ при } \rho > 0 \tag{7.60}$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), y(t)) \tag{7.61}$$

и

$$x(t) \in \operatorname{Int}\mathcal{X}(t) \text{ и } y(t) \in \operatorname{Int}\mathcal{Y}(t)$$
$$\text{при всех } t,\ x(0) = x_0 \text{ и } \lim_{t\to\infty} b(t)x(t) \geq x_1, \tag{7.62}$$

где, как и ранее, функция b определена как $b\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) < \infty$. Далее везде мы неявно будем предполагать, что агенты дисконтируют будущее, то есть $\rho > 0$.

Специфическая особенность такой задачи состоит в том, что функция выигрыша f зависит от времени только через дисконтирование. В этом случае гамильтониан в задаче имеет следующий вид:

$$H(t, x(t), y(t), \lambda(t)) = \exp(-\rho t) f(x(t), y(t)) + \lambda(t) g(x(t), y(t)) =$$
$$= \exp(-\rho t)\big[f(x(t), y(t)) + \mu(t) g(x(t), y(t))\big],$$

где во втором равенстве мы использовали определение функции $\mu(t)$:

$$\mu(t) \equiv \exp(\rho t)\lambda(t). \tag{7.63}$$

В данном случае вместо работы со стандартным гамильтонианом более удобно пользоваться *текущим гамильтонианом* $\hat{H}$, который мы определим следующим образом:

$$\hat{H}(t, x(t), y(t), \mu(t)) \equiv f(x(t), y(t)) + \mu(t) g(x(t), y(t)). \tag{7.64}$$

В том случае, когда функция $g(t, x(t), y(t))$ в дифференциальном ограничении является автономной и выглядит как $g(x(t), y(t))$, мы, для упрощения, будем писать $\hat{H}(x(t), y(t), \mu(t))$ вместо $\hat{H}(t, x(t), y(t), \mu(t))$.

В следующей теореме утверждается необходимость использования более строгого условия трансверсальности при некоторых дополнительных предположениях. Эти предположения не являются обязательными, однако утверждение теоремы оказывается более понятным и проще доказываемым при их выполнении. Более того, они, как правило, выполняются в большинстве экономических приложений. Далее будем предполагать, что функции f и g являются непрерывно дифференцируемыми на всех допустимых парах $(x(t), y(t))$ (и обозначим их частные производные как f_x, f_y, g_x и g_y).

Предположение 7.1. *В задаче максимизации* (7.60) *при ограничениях* (7.61) *и* (7.62)*:*

1. *Функция f является монотонной (не строго) по аргументам x и y, а функция g является монотонной (не строго) по (t, x, y) (то есть функция f может быть неубывающей по x и невозрастающей по y и т.д.);*
2. *Существует вещественное $m > 0$, такое, что $|g_y(t, x(t), y(t))| \geq m$ для всех t и для всех допустимых пар $(x(t), y(t))$; и*
3. *Существует вещественное $M > 0$, такое, что $|f_y(x, y)| \leq M$ для всех x и y.*

Теорема 7.13. Принцип максимума для задачи с дисконтированием на бесконечном горизонте планирования. *Предположим, что в задаче максимизации (7.60) при ограничениях (7.61) и (7.62) с непрерывно дифференцируемыми функциями f и g существует решение в виде внутренней кусочно-непрерывной оптимальной траектории переменной управления* $\hat{y}(t) \in \mathrm{Int}\mathcal{Y}(t)$ *с соответствующей ей траекторией переменной состояния* $\hat{x}(t) \in \mathrm{Int}\mathcal{X}(t)$. *Определим функцию стоимости* $V(t, x(t))$ *так же, как и в равенстве (7.35). Предположим, что функция* $V(t, \hat{x}(t))$ *является дифференцируемой по аргументам x и t при достаточно больших значениях t и что* $\lim_{t\to\infty} \partial V(t, \hat{x}(t))/\partial t = 0$. *Определим текущий гамильтониан* $\hat{H}(t, x, y, \mu)$ *так же, как в равенстве (7.64). Тогда оптимальная пара функций* $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ *удовлетворяет следующим необходимым условиям оптимума везде, кроме, быть может, точек разрыва функции* $\hat{y}(t)$:

$$\hat{H}_y\left(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)\right) = 0 \text{ для всех } t \in \mathbb{R}_+, \tag{7.65}$$

$$\rho\mu(t) - \dot{\mu}(t) = \hat{H}_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)) \text{ для всех } t \in \mathbb{R}_+, \tag{7.66}$$

и

$$\dot{x}(t) = \hat{H}_\mu(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)) \text{ для всех } t \in \mathbb{R}_+,$$

$$x(0) = x_0 \text{ и } \lim_{t\to\infty} b(t)x(t) \geq x_1, \tag{7.67}$$

и условию трансверсальности

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho t)\hat{H}(t, x(t), y(t), \mu(t))\right]. \tag{7.68}$$

Более того, предположим, что предположение 7.1 выполняется, а также, что $\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = x^* \in \mathbb{R}$ *или что* $\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t)/\hat{x}(t) = \chi \in \mathbb{R}$. *Тогда выполняется условие трансверсальности в более сильном виде:*

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho t)\mu(t)\hat{x}(t)\right] = 0. \tag{7.69}$$

Доказательство. Необходимые условия оптимума (7.65)–(7.67) и условие трансверсальности (7.68) следуют из определения текущего гамильтониана и из теоремы 7.12. Мы оставляем их вывод как упражнение для читателя (см. упражнение 7.14).

Приведем доказательство более сильной версии условия трансверсальности (7.69). Условие трансверсальности в слабом виде (7.68) может быть записано следующим образом:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho t)f(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \exp(-\rho t)\mu(t)g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))\right] = 0. \tag{7.70}$$

Напомним, что функция стоимости задается равенством (7.37):

$$V(t,\,\hat{x}(t)) = \int_t^\infty \exp(-\rho s) f(\hat{x}(s),\,\hat{y}(s))ds.$$

Так как предел $\lim_{t\to\infty} V(t,\,\hat{x}(t))$ существует и конечен, первое слагаемое в пределе (7.70) должно равняться нулю. Следовательно, имеем следующее равенство:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho t)\mu(t)g(t,\,\hat{x}(t),\,\hat{y}(t))\right] = \lim_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho t)\mu(t)\dot{x}(t)\right] = 0. \quad (7.71)$$

В дальнейшей части доказательства для упрощения мы будем обозначать $\lim\limits_{t\to\infty}$ как lim.

Далее приведем результат, который нам понадобится для завершения доказательства теоремы. Мы будем использовать понятие сети, определение которой читатель может найти в приложении A (определение A.7). Из этого определения следует, что функция $[\mu(t)]_{t=0}^\infty$ может рассматриваться как сеть. Будем обозначать ее как $\{\mu(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ или просто как $\{\mu(t)\}$. Тогда $\{\mu(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ при $\mathcal{T}\subset\mathbb{R}_+$ является подсетью сети $\{\mu(t)\}$.

Предложение 7.1. *Функция (сеть)* $[\mu(t)]_{t=0}^\infty$, *определенная в равенстве* (7.71) *является ограниченной в том смысле, что существует вещественное* $B<\infty$, *такое, что* $|\mu(t)| < B$ *для всех* t.

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного. Чтобы получить противоречие, предположим, что сеть $\{\mu(t)\}$ не ограничена. Тогда существует ее подсеть $\{\mu(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$, расходящаяся к $+\infty$ или к $-\infty$ (на множестве $\mathcal{T}\subset\mathbb{R}_+$). Так как выполняется хотя бы одно из неравенств $g_y \geq m > 0$ или $g_y \leq -m < 0$ (см. предположение 7.1, части 1 и 2), то $\lim\limits_{t\in\mathcal{T}} \mu(t) g_y(t,\,\hat{x}(t),\,\hat{y}(t)) = \pm\infty$. Однако в этом случае из условия (7.65) следует, что $\lim\limits_{t\in\mathcal{T}} f_y(\hat{x}(t),\,\hat{y}(t)) = \mp\infty$, что противоречит части 3 предположения 7.1. Отсюда следует, что сеть $\{\mu(t)\}$ является ограниченной. ■

Далее рассмотрим три случая, объединение которых составляет доказательство теоремы.

Во-первых, предположим, что $\lim \hat{x}(t) = x^* \in \mathbb{R}$. Переходя к пределу при $t\to\infty$ в условии (7.65), получаем следующее равенство:

$$\lim\left[f_y(\hat{x}(t),\,\hat{y}(t)) + \mu(t) g_y(t,\,\hat{x}(t),\,\hat{y}(t))\right] = 0. \quad (7.72)$$

Из того, что $\lim \hat{x}(t) = \hat{x}^*$ (и поэтому $\lim|\hat{x}(t)| = |\hat{x}^*|$), $\lim \exp(-\rho t) = 0$ и $|\mu(t)| < B$ получаем следующее неравенство:

$$\lim\left[\exp(-\rho t)\mu(t)\,|\,\hat{x}(t)\,|\right] \le$$
$$\le B\lim\left[\exp(-\rho t)|\hat{x}(t)|\right] = B\,|\,\hat{x}^*\,|\lim\exp(-\rho t) = 0.$$

При этом также выполняется неравенство

$$\lim\left[\exp(-\rho t)\mu(t)\,|\,\hat{x}(t)\,|\right] \ge$$
$$\ge -B\lim\left[\exp(-\rho t)|\hat{x}(t)|\right] = -B\,|\,\hat{x}^*\,|\lim\exp(-\rho t) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim\left[\exp(-\rho t)\mu(t)\,|\,\hat{x}(t)\,|\right] = \lim\left[\exp(-\rho t)\mu(t)\hat{x}(t)\right] = 0,$$

откуда следует условие (7.69).

Во-вторых, предположим, что $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{x}(t)/\hat{x}(t) = \chi \ne 0$. Тогда для любого вещественного $\varepsilon \in (0, \chi)$ существует вещественное $T < \infty$, такое, что для всех $t \ge T$ выполняется следующее неравенство:

$$|\,\dot{x}(t)\,| \ge |\chi - \varepsilon||\hat{x}(t)|.$$

Умножая обе части этого неравенства на $|\exp(-\rho t)\mu(t)|$ и переходя к пределу, получаем следующее неравенство:

$$\lim|\exp(-\rho t)\mu(t)\,\|\,\dot{x}(t)\,| \ge \lim|\exp(-\rho t)\mu(t)\,||\chi - \varepsilon||\hat{x}(t)| \ge 0. \quad (7.73)$$

Из того, что из равенства (7.71) следует, что $\lim|\exp(-\rho t)\mu(t)\,\|\,\dot{x}(t)\,| = 0$, а $|\xi - \chi| > 0$, вытекает, что оба неравенства в (7.73) выполняются как строгие равенства и, следовательно, $\lim\left[\exp(-\rho t)\mu(t)\hat{x}(t)\right] = 0$.

В-третьих, рассмотрим последний случай, когда предел $\lim \hat{x}(t)$ не существует (может быть равен бесконечности) и $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{x}(t)/\hat{x}(t) = 0$. Тогда для любого вещественного $\gamma > 0$ существует вещественное $T < \infty$, такое, что для всех $t \ge T < \infty$ выполняется неравенство $|\,\dot{x}(t)/\hat{x}(t)\,| < \gamma$. Так как $\rho > 0$, отсюда следует, что $\lim|\exp(-\rho t)\,||\hat{x}(t)| = 0$. Тогда из предложения 7.1 вытекает следующее неравенство:

$$0 = -B\lim\left[\exp(-\rho t)\mu(t)|\hat{x}(t)|\right] \le \lim\left[\exp(-\rho t)\mu(t)|\hat{x}(t)|\right] \le$$
$$\le B\,\lim\left[\exp(-\rho t)\mu(t)|\hat{x}(t)|\right] = 0,$$

откуда следует, что $\lim\left[\exp(-\rho t)\mu(t)\hat{x}(t)\right] = 0$, что завершает доказательство теоремы. ■

Доказательство теоремы 7.13 показывает важность предположения о дисконтировании. Например, без предположения о дисконтировании не выполняется ключевое уравнение (7.72). Рассуждения из второй части доказательства также не применимы в этом случае. В упражнении 7.17 обсуждается, каким образом подобные утверждения могут быть доказаны без предположения о дисконтировании при более сильных ограничениях.

Заметим, что в полученном нами условии трансверсальности, в отличие от условия трансверсальности в задаче на конечном горизонте планирования (см., например, теорему 7.1), в условии (7.69) присутствует дополнительный множитель $\exp(-\rho t)$. Это следует из того, что условие трансверсальности формулируется для исходной сопряженной переменной $\lambda(t)$ (то есть $\lim\limits_{t\to\infty}\left[\lambda(t)x(t)\right] = 0$), а, как показано выше, текущая сопряженная переменная $\mu(t)$ определена как $\mu(t) = \exp(\rho t)\lambda(t)$. Также отметим, что условие трансверсальности в сильном виде имеет вид:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho t)\mu(t)\hat{x}(t)\right] = 0,$$

а не более простой вид $\lim\limits_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho t)\mu(t)\right] = 0$. В упражнении 7.19 приведено объяснение этого факта.

Необходимо подчеркнуть, что теорема 7.13 предоставляет лишь необходимые условия непрерывного внутреннего оптимума задачи максимизации (при условиях $\lim\limits_{t\to\infty}\hat{x}(t) = x^* \in \mathbb{R}$ или $\lim\limits_{t\to\infty}\dot{x}(t)/\hat{x}(t) = \chi \in \mathbb{R}$). В этой связи условие (7.69) нужно рассматривать как необходимое условие трансверсальности для решения задачи. При этом условие (7.69) не является ни необходимым, ни достаточным для общего решения (которое может оказаться разрывным или не лежать во внутренности множества допустимых траекторий переменной управления). Однако в следующей теореме показано, что условие (7.69) становится достаточным условием трансверсальности при выполнении подходящих предположений о вогнутости. В этом случае предположение 7.1 и ограничения на пределы из теоремы 7.13 уже не требуются. Поэтому следующая теорема является наиболее важным результатом этой главы, и именно она наиболее часто используется в экономических приложениях теории оптимального управления.

Теорема 7.14. Достаточные условия для задачи с дисконтированием на бесконечном горизонте планирования. *Рассмотрим задачу максимизации* (7.60) *при ограничениях* (7.61) *и* (7.62) *с непрерывно дифференцируемыми функциями f и g. Определим текущий гамильтониан $\hat{H}(t, x, y, \mu)$ так же, как в равенстве* (7.64) *и предположим, что некоторая функция $\hat{y}(t)$ и соответствующая ей траектория переменной состояния*

$\hat{x}(t)$ удовлетворяют условиям (7.65)–(7.68). При заданной текущей сопряженной переменной $\mu(t)$ определим максимальный гамильтониан $M(t, x, \mu)$ как $M(t, x, \mu) \equiv \max\limits_{y(t) \in \mathcal{Y}(t)} \hat{H}(t, x, y, \mu)$. Предположим, что функция стоимости $V(t, \hat{x}(t))$ существует и конечна для всех t (где функция $V(t, x(t))$ определена так же, как и в равенстве (7.38)). Также предположим, что для любой допустимой пары функций $(x(t), y(t))$ $\lim\limits_{t \to \infty} [\exp(-\rho t)\mu(t)x(t)] \geq 0$, и множество $\mathcal{X}(t)$ является выпуклым, а функция $M(t, x, \mu)$ вогнута по $x \in \mathcal{X}(t)$ при всех t. Тогда целевая функция задачи (7.60) достигает глобального максимума на паре функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$. Более того, если функция $M(t, x, \mu)$ является строго вогнутой по $x \in \mathcal{X}(t)$, то пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ является единственным решением задачи (7.60).

Доказательство. Рассмотрим пару функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$, удовлетворяющую условиям (7.65)–(7.68) и другую произвольную допустимую пару функций $(x(t), y(t))$. Используя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 7.6, для всех $t \geq 0$ имеем следующее неравенство:

$$M(t, x(t), \mu(t)) \leq M(t, \hat{x}(t), \mu(t)) + M_x(t, \hat{x}(t), \mu(t))(x(t) - \hat{x}(t)).$$

Умножая его на $\exp(-\rho t)$ и интегрируя обе части на интервале $[0, \infty)$, получаем следующее неравенство:

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t) M(t, x(t), \mu(t))dt \leq \int_0^\infty \exp(-\rho t) M(t, \hat{x}(t), \mu(t))dt +$$

$$+ \int_0^\infty \exp(-\rho t) M_x(t, \hat{x}(t), \mu(t))((x(t) - \hat{x}(t))dt.$$

Более того, по условию теоремы имеем:

$$M_x(t, \hat{x}(t), \mu(t)) = \hat{H}_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \mu(t)) = -\dot{\mu}(t).$$

Далее, из определения максимального гамильтониана следует неравенство

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t) M(t, x(t), \mu(t))dt \geq W(x(t), y(t)) + \int_0^\infty \lambda(t) g(t, x(t), y(t))dt$$

и равенство

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t) M(t, \hat{x}(t), \mu(t))dt = W(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \int_0^\infty \lambda(t) g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))dt,$$

где, как и ранее, $\lambda(t) \equiv \exp(-\rho t)\mu(t)$. Объединяя это уравнения, приходим к следующему неравенству:

$$W(x(t),\, y(t)) \le W(\hat{x}(t),\, \hat{y}(t)) + \\ + \int_0^\infty \lambda(t)[g(t,\, \hat{x}(t),\, \hat{y}(t)) - g(t,\, x(t),\, y(t))]dt - \int_0^\infty \dot{\lambda}(t)(x(t) - \hat{x}(t))dt. \quad (7.74)$$

Интегрируя последнее слагаемое в неравенстве (7.74) по частям и используя равенство $x(0) = \hat{x}(0) = x_0$, получаем следующее равенство:

$$\int_0^\infty \dot{\lambda}(t)(x(t) - \hat{x}(t))dt = \lim_{t\to\infty}\left[\lambda(t)(x(t) - \hat{x}(t))\right] - \int_0^\infty \lambda(t)(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t))dt.$$

Более того, из условия (7.68) вытекает следующее равенство:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho t)\mu(t)\hat{x}(t)\right] = \lim_{t\to\infty}\left[\lambda(t)\hat{x}(t)\right] = 0.$$

Из условия теоремы следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\lambda(t)x(t) \ge 0$, и поэтому выполняется неравенство:

$$\int_0^\infty \dot{\lambda}(t)(x(t) - \hat{x}(t))dt \ge -\int_0^\infty \lambda(t)(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t))dt.$$

Объединяя это неравенство с неравенством (7.74), получаем следующее неравенство:

$$W(x(t),\, y(t)) \le W(\hat{x}(t),\, \hat{y}(t)) + \\ + \int_0^\infty \lambda(t)[g(t,\, \hat{x}(t),\, \hat{y}(t)) - g(t,\, x(t),\, y(t))]dt - \int_0^\infty \lambda(t)\left[\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)\right]dt. \quad (7.75)$$

Из определения допустимых пар функций $(x(t), y(t))$ и $(\hat{x}(t),\, \hat{y}(t))$ следует, что $\dot{\hat{x}}(t) = g(t,\, \hat{x}(t),\, \hat{y}(t))$ и $\dot{x}(t) = g(t,\, x(t),\, y(t))$. Поэтому из неравенства (7.75) следует, что $W(x(t),\, y(t)) \le W(\hat{x}(t),\, \hat{y}(t))$ для любой допустимой пары функций $(x(t), y(t))$, что завершает доказательство первой части теоремы.

Если функция M является строго вогнутой по x, то неравенство (7.75) становится строгим, и, следовательно, используя аналогичные рассуждения, получаем $W(x(t),\, y(t)) < W(\hat{x}(t),\, \hat{y}(t))$ и что значение $W(\hat{x}(t),\, \hat{y}(t))$ не может быть достигнуто ни на какой-либо другой допустимой паре $(\hat{x}(t),\, \hat{y}(t))$, что завершает доказательство второй части теоремы. ■

Теорема 7.14 является очень мощным утверждением и очень полезна в приложениях. В ней утверждается, что допустимая пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$, удовлетворяющая условиям (7.65)–(7.67), а также условию трансверсальности (7.68) гарантированно доминирует любую другую допустимую пару функций $(x(t), y(t))$, для которой выполняется условие $\lim\limits_{t\to\infty}[\exp(-\rho t)\mu(t)x(t)] \geq 0$ (где функция $\mu(t)$ является сопряженной переменной, соответствующей возможному решению задачи $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$). Для выполнения этих достаточных условий максимума проверка выполнения предположения 7.1 не является необходимой. Базируясь на этом результате, в большинстве задач мы будем использовать следующую стратегию анализа:

1. Использовать теорему 7.13 для поиска *возможного внутреннего решения* $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$, удовлетворяющего условиям (7.65)–(7.68).
2. Проверить условия вогнутости из теоремы 7.14 и сделать простую проверку выполнения неравенства $\lim\limits_{t\to\infty}[\exp(-\rho t)\mu(t)x(t)] \geq 0$ для других допустимых пар функций $(x(t), y(t))$ (где функция $\mu(t)$ является сопряженной переменной, соответствующей возможному решению задачи $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$). При выполнении этих условий пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ является глобальным максимумом в задаче динамической оптимизации.

Важным свойством теоремы 7.14 и предложенной выше стратегии анализа является то, что они могут напрямую использоваться при решении неограниченных задач (например, задач теории эндогенного роста). Следовательно, если условия теоремы 7.14 выполняются, то для описания решения задачи максимизации полезности домохозяйством или задачи оптимального роста, нам не нужно делать дополнительные предположения об ограниченности множеств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Напомним, однако, что до сих пор мы предполагали, что функция $V(t, \hat{x}(t))$ существует и принимает конечные значения (при всех t). В случае когда она принимает бесконечное значение на некоторой допустимой паре функций $(x(t), y(t))$, задача перестает быть интересной с экономической точки зрения, а условие трансверсальности становится бессмысленным (и перестает быть как необходимым, так и достаточным условием оптимума).

Теорема 7.14 описывает достаточные условия максимума для вогнутой задачи оптимального управления. В ней не накладываются требования непрерывности на оптимальную траекторию переменной управления $\hat{y}(t)$ (напомним, что в теореме 7.13 предполагается, что функция $\hat{y}(t)$ является кусочно-непрерывной). Однако нетрудно показать, что если задача оптимального управления является строго вогнутой, то функция $\hat{y}(t)$ будет непрерывна. Этот результат сформулирован в следствии 7.1.

Следствие 7.1. *Предположим, что условия теоремы* 7.14 *выполнены, функция* $M(t, x, \mu)$ *является строго вогнутой при всех* t, *а множество* $\mathcal{Y}$ — *компактно. Тогда функция* $\hat{y}(t)$ *непрерывна по* t *на множестве* $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. По теореме 7.14 из строгой вогнутости функции $M(t, x, \mu)$ следует единственность решения задачи $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$. Рассмотрим произвольное положительное $\hat{t} \in \mathbb{R}_+$ и любую последовательность $\{t_n\}$ в $\mathbb{R}_+$, сходящуюся к $\hat{t}$. Так как множество $\mathcal{Y}$ компактно, соответствующая ей последовательность $\{\hat{y}(t_n)\}$ сходится в $\mathcal{Y}$ к некоторому значению y^* (по теореме А.7 из приложения А). Функции $\hat{x}(t)$ и $\mu(t)$ непрерывны, так как они являются решениями дифференциальных уравнений (7.66) и (7.67). Поэтому последовательности $\{\hat{x}(t_n)\}$ и $\{\mu(t_n)\}$ сходятся к $\hat{x}(\hat{t})$ и $\mu(\hat{t})$ соответственно. Более того, из принципа максимума следует, что для всех $y \in \mathcal{Y}$ выполняется неравенство $\hat{H}(t_n, \hat{x}(t_n), \hat{y}(t_n), \mu(t_n)) \geq \hat{H}(t_n, \hat{x}(t_n), y, \mu(t_n))$. Используя непрерывность функции $\hat{H}$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, для всех $y \in \mathcal{Y}$ получаем следующее неравенство:

$$\hat{H}(\hat{t}, \hat{x}(\hat{t}), \hat{y}^*, \mu(\hat{t})) \geq \hat{H}(\hat{t}, \hat{x}(\hat{t}), y, \mu(\hat{t})).$$

Из того, что решение задачи $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ единственно, следует, что $\hat{y}(\hat{t}) = y^*$, и, следовательно, функция $\hat{y}(t)$ непрерывна в точке $\hat{t}$. Из того, что выбор $\hat{t} \in \mathbb{R}_+$ был произвольным, следует непрерывность $\hat{y}(t)$ на всем множестве $\mathbb{R}_+$. ■

Несмотря на то что следствие 7.1 оказывается полезным в некоторых задачах, необходимо отметить, что оно не описывает условия существования непрерывной оптимальной функции управления. Оно формулируется и доказывается в предположении о том, что пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$, удовлетворяющая условиям (7.65)–(7.68), существует. В следующем параграфе мы представим условия на целевую функцию и ограничения задачи, гарантирующие существование ее решения.

7.6. Существование решения, свойства вогнутости и дифференцируемости*

Теоремы, представленные в предыдущих параграфах, описывают свойства решения задачи динамической оптимизации в непрерывном времени. Однако мы до сих пор не поставили естественный вопрос (и не ответили на него) об условиях, гарантирующих существование такого решения. Такой порядок изложения материала может показаться читателю странным в силу того, что при изучении конечномерных задач оптимизации и бесконечномерных задач оптимизации в дискретном времени в предыдущей главе мы начинали анализ с теорем о существовании решения.

Однако мы можем привести уважительную причину именно такого выбора порядка изложения материала в данной главе. Доказательство существования решения в задаче динамической оптимизации в непрерывном времени является значительно более сложной задачей, чем описание свойств решения. Далее мы остановимся на общей теореме существования решения задачи динамической оптимизации в непрерывном времени и двух дополнительных утверждениях, описывающих условия, при которых функция стоимости $V(t, x)$, определенная в равенстве (7.35) и в лемме 7.1 является вогнутой и дифференцируемой.

На данном этапе читатель может задать справедливый вопрос о том, насколько обоснованным является предложенный нами выше подход, состоящий в использовании необходимых условий оптимума, не гарантирующих существования решения задачи оптимизации. Этот вопрос очень важен, и во многих случаях использование такого подхода может привести к возможным ошибкам. Одно из обоснований использования такого подхода состоит в проверке выполнения достаточных условий оптимума, например теорем 7.11 или 7.14 в задаче динамической оптимизации на бесконечном горизонте планирования. Например, если в задаче оптимизации в непрерывном времени мы найдем допустимую пару функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$, удовлетворяющую необходимым условиям оптимума (например, условиям теоремы 7.9), и мы можем убедиться, что задача оптимизации удовлетворяет условиям теорем 7.11 или 7.14, то мы можем быть уверены в том, что пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ действительно является решением задачи и обойтись без теоремы о существовании решения. Поэтому теоремы о достаточных условиях оптимума позволяют нам обойти вопрос проверки существования решения задачи оптимизации (существование в них доказывается прямым построением решения). Несмотря на это, такой метод является обоснованным, только если задача является достаточно выгнутой и удовлетворяет условиям теорем 7.11 или 7.14. Обоснование метода использования необходимых условий оптимума для задач, не обладающих данными свойствами, оказывается намного более затруднительным. Поэтому, а также для того, чтобы провести более полный анализ задачи динамической оптимизации в непрерывном времени, в этом параграфе мы докажем теорему о существовании решения задачи оптимального управления. К сожалению, теоремы существования решения для такого класса задач имеют довольно сложную формулировку, а при их доказательстве используется значительный математический аппарат. В частности, они опираются на ряд сложных теорем теории меры (некоторые из них приведены в параграфе А.5 приложения А). В доказательстве одной из самых мощных и наиболее часто используемых теорем о существовании решения, приведенного далее, мы не будем подробно останавливаться на деталях, связанных с теорией меры.

Мы докажем эту теорему существования для наиболее общей задачи динамической оптимизации в следующем виде:

$$\max_{\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)} W(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \equiv \int_0^\infty f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))dt \tag{7.76}$$

при ограничениях

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = G(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \tag{7.77}$$

и

$$\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X}(t) \text{ и } \mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y}(t) \text{ при всех } t, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \text{ и } \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \geq \mathbf{x}_1, \tag{7.78}$$

где $\mathcal{X}(t) \subset \mathbb{R}^{K_x}$ и $\mathcal{Y}(t) \subset \mathbb{R}^{K_y}$ при натуральных $K_x \in \mathbb{N}$, $K_y \in \mathbb{N}$, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{K_x} \times \times \mathbb{R}^{K_y} \to \mathbb{R}$ и $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{K_x} \times \mathbb{R}^{K_y} \to \mathbb{R}^{K_x}$. Как и ранее, будем предполагать, что функции f и G являются непрерывно дифференцируемыми по всем своим аргументам.

Нетрудно увидеть, что задача на конечном горизонте планирования является частным случаем поставленной выше задачи при $f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \equiv 0$ при всех $t \geq t_1$ при некотором положительном $t_1 > 0$. Для конкретности мы предполагаем, что ограничение на конечное значение вектора переменных состояния имеет специальный вид $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \geq \mathbf{x}_1$. Задача с другими типами ограничения на конечное значение, в которых некоторые переменные состояния могут быть полностью свободными, а ограничения на другие иметь вид строгого равенства, может быть проанализирована с помощью того же метода доказательства, как и в теореме 7.15 далее.

Прежде чем сформулировать теорему о существовании решения задачи динамической оптимизации, введем следующие определения:

$$M \equiv \{(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}): \mathbf{x} \in \mathcal{X}(t), \mathbf{y} \in \mathcal{Y}(t) \text{ и } t \in \mathbb{R}_+\},$$

$$M' \equiv \{(t, \mathbf{x}): \mathbf{x} \in \mathcal{X}(t) \text{ и } t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Напомним, что пара функций $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ называется допустимой, если функция $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X}(t)$ является абсолютно непрерывной, а функция $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y}(t)$ измерима по Лебегу при всех t, $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ удовлетворяют условию (7.77) и функция $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет начальному и конечному условиям, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ и $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \geq \mathbf{x}_1$ (см. ссылку 2 и определение А.26 из приложения А). При заданном начальном условии $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ обозначим множество допустимых пар функций как

$$\Omega(0, \mathbf{x}_0) \equiv \left\{ [\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)]_{t=0}^\infty : (\mathbf{x}(t)), \mathbf{y}(t)) \text{— допустимые функции} \right\},$$

а элемент множества $\Omega(0, \mathbf{x}_0)$ как $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$. В явном виде множество $\Omega(0, \mathbf{x}_0)$ задается следующим образом:

$$\Omega(0, \mathbf{x}_0) \equiv \Big\{ [\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)]_{t=0}^{\infty} : \mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y}(t),$$

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t G(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s))ds + \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}(t) \text{ при всех } t \in \mathbb{R}_+ \text{ и } \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \geq \mathbf{x}_1 \Big\}.$$

Теорема 7.15. О существовании решения задачи оптимального управления. *Рассмотрим задачу максимизации (7.76) при ограничениях (7.77) и (7.78). Предположим, что выполняются следующие условия:*

1. *Множества значений отображений $\mathcal{X}(t)\colon \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^{K_x}$ и $\mathcal{Y}(t)\colon \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^{K_y}$ состоят из компактных и замкнутых множеств, пустое множество $\varnothing$ не лежит в их множестве значений, а сами отображения являются полунепрерывными сверху отображениями.*
2. *Функции f и G являются непрерывными на множестве M.*
3. *Множества $\Omega(0, \mathbf{x}_0)$ и*

$$Q(t, \mathbf{x}) \equiv \Big\{ (p, \mathbf{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{K_x} : p \leq f(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$
$$\text{и } \mathbf{z} = G(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ при некотором } y \in \mathcal{Y}(t) \Big\}$$

не пусты при всех $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}(t)$ и при всех $(t, \mathbf{x}) \in M'$. Более того, отображение $Q(t, \mathbf{x})$ полунепрерывно сверху при всех $(t, \mathbf{x}) \in M'$ и его множество значений состоит из замкнутых выпуклых множеств.

4. *Для любого отрезка при всех $[t_1, t_1 + \delta]$ и для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $\Phi_{t_1\delta\varepsilon}(t)$, такая, что при любом $T \in [0, \infty]$ интеграл $\int_0^T \Phi_{t_1\delta\varepsilon}(t)dt$ существует и его значение меньше или равно $\Phi < \infty$, и для всех $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ и $(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M$ выполняется следующее неравенство:*

$$\varepsilon f(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \Phi_{t_1\delta\varepsilon}(t) - \|G(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\|.$$

5. *Существует неотрицательная функция $\phi(t)$ (то есть $\phi(t) \geq 0$ при всех t), такая, что интеграл $\int_0^\infty \phi(t)dt$ существует и его значение меньше или равно $\phi < \infty$ и*

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \phi(t)$$

при всех $(t, \mathbf{x}, \mathrm{y}) \in M$.

Тогда существует допустимая пара функций $(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t)) \in \Omega(0, \mathbf{x}_0)$, являющаяся решением задачи максимизации (7.76) при ограничении

(7.77) и (7.78). Другими словами, $W(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t)) = \bar{W} \geq W(\mathbf{x}'(t), \mathbf{y}'(t))$ для любой пары допустимых функций $(\mathbf{x}'(t), \mathbf{y}'(t)) \in \Omega(0, \mathbf{x}_0)$.

Доказательство. Из условия 5 следует, что для всех $(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \in M$ выполняется следующее неравенство:

$$\int_0^\infty f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))dt \leq \int_0^\infty \phi(t)dt \leq \phi < \infty.$$

Так как множество $\Omega(0, \mathbf{x}_0)$ не пусто

$$\bar{W} = \sup_{(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t))\in\Omega(0,\mathbf{x}_0)} \int_0^\infty f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))dt \leq \phi < \infty.$$

Для последовательности допустимых пар функций $\{(\mathbf{x}^n(t), \mathbf{y}^n(t))\}_{n=1}^{\infty}$, введем следующие определения:

$$w^n(t) \equiv \int_0^t f(s, \mathbf{x}^n(s), \mathbf{y}^n(s))ds,$$

$$w_+(t) \equiv \int_0^t \phi(s)ds \in [0, \phi],$$

$$w_-^n(t) \equiv -\int_0^t [\phi(s) - f(s, \mathbf{x}^n(s), \mathbf{y}^n(s))]ds,$$

где неравенство $0 \leq w_+(t) \leq \phi$ следует из условия 5. Более того, из условия 5 также следует, что $\phi(t) - f(t, \mathbf{x}^n(t), \mathbf{y}^n(t)) \geq 0$, и поэтому функция $w_-^n(t)$ является неположительной и не возрастающей по t. Также нетрудно увидеть, что

$$w_-^n(t) + w_+(t) = w^n(t).$$

Так как функция $w_-^n(t)$ является невозрастающей, она сходится на расширенной вещественной оси, то есть

$$\lim_{t\to\infty} w_-^n(t) = -W_-^n,$$

где значение W_-^n ограничено сверху (значением $\bar{W} < \infty$ так как $\phi(t) - f(t, \mathbf{x}^n(t), \mathbf{y}^n(t)) \geq 0$ и $\int_0^\infty \phi(t)dt \leq \phi < \infty$) и неположительно так как $w_-^n(t) \leq 0$ при всех t. Следовательно, выполняются следующие равенства:

$$\lim_{t\to\infty} w_-^n(t) = \lim_{t\to\infty}\left[w_-^n(t) + w_+(t) - w_+(t)\right] = \lim_{t\to\infty}\left[w^n(t) - w_+(t)\right] = -W_-^n.$$

Из последнего равенства следует, что предел $\lim_{t\to\infty} w^n(t)$ сходится (на расширенной вещественной оси) к W^n, которое меньше, чем $\phi - W_-^n < \infty$. Следовательно, по определению точной верхней грани последовательность допустимых пар функций $\{(\mathbf{x}^n(t), \mathbf{y}^n(t))\}_{n=1}^{\infty}$ может быть выбрана так, что при некотором вещественном $K > 0$ выполняются следующие неравенства:

$$\bar{W} - \frac{K}{n} \leq \bar{W}^n \leq \bar{W}.$$

Следовательно, предел $\lim_{t\to\infty} \bar{W}^n$ должен существовать и быть равным $\bar{W}$.

Для завершения доказательства нам необходимо показать, что последовательность $\{(\mathbf{x}^n(t), \mathbf{y}^n(t))\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к допустимой паре функций. Сделаем это в четыре шага. Нам необходимо показать: (1) $\mathbf{x}^n(t) \to \hat{\mathbf{x}}(t)$, такой, что $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{X}(t)$; (2) функция $\hat{\mathbf{x}}(t)$ является абсолютно непрерывной; (3) производная $\dot{\mathbf{x}}(t)$ удовлетворяет условию (7.77) во всех точках, где она существует; и (4) $\mathbf{y}^n(t) \to \hat{\mathbf{y}}(t) \in \mathcal{Y}(t)$, где функция $\hat{\mathbf{y}}(t)$ является измеримой по Лебегу.

Из того, что по условию 1 множества значений отображений $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{Y}(t)$ состоят из замкнутых множеств, следует, что множество M замкнуто. Отсюда следует, что множество M' также является замкнутым. Так как отрезок $[t_1, t_1 + \delta]$ является замкнутым компактным множеством и множество $\mathcal{X}(t)$ компактно при всех t, множество $M_{t_1\delta} \equiv M' \cap ([t_1, t_1+\delta] \times \mathbb{R}^{K_x})$ также компактно (лемма А.2 из приложения А), и поэтому любая последовательность векторных функций $\mathbf{x}^n(t) \in M_{t_1\delta}$ на нем будет равномерно ограниченной. Далее покажем, что последовательность непрерывных функций $\{\mathbf{x}^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ в множестве $M_{t_1\delta}$ является равностепенно непрерывной (см. определение А.30 из приложения А). Рассмотрим произвольное положительное $\varepsilon > 0$. Из того, что интеграл $\int_0^T \Phi_{t_1\delta\varepsilon}(t)dt$ существует для любого T, а функция $\Phi_{t_1\delta\varepsilon}(t)$ является непрерывной (условие 4), следует, что существует положительное $\chi > 0$, такое, что выполняется следующее неравенство:

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta} \Phi_{t_1\delta\varepsilon}(t)dt < \frac{\chi}{2}.$$

Еще раз используя условие 4 и полагая

$$\varepsilon \equiv \frac{\chi}{2(\Phi - \bar{W})} > 0$$

для всех натуральных $n = 1, 2, \ldots,$ имеем следующие неравенства:

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta} \| \dot{\mathbf{x}}^n(t) \| dt = \int_{t_1}^{t_1+\delta} \left\| G(t, \mathbf{x}^n(t), \mathbf{y}^n(t)) \right\| dt \leq$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_1+\delta} \left[\Phi_{t\delta\varepsilon}(t) - \varepsilon f\left(t, \mathbf{x}^n(t), \mathbf{y}^n(t)\right) \right] dt \leq$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_1+\delta} \Phi_{t\delta\varepsilon}(t)dt + \varepsilon \int_0^{\infty} \left[\phi(t) - \varepsilon f(t, \mathbf{x}^n(t), \mathbf{y}^n(t)) \right] dt \leq \frac{\chi}{2} + \varepsilon(\Phi - \bar{W}) \leq \chi.$$

Из того, что эти неравенства выполняются при любом натуральном $n = 1, 2, \ldots,$ на любом отрезке $[t_1, t_1 + \delta]$ следует, что семейство векторных функций $\{\mathbf{x}^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ является равностепенно непрерывным на любом отрезке $[t_1, t_1 + \delta]$. Тогда по следствию из теоремы Арцела—Асколи существует подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{n_k}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ последовательности функций $\{\mathbf{x}^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к абсолютно непрерывной на отрезке $[t_1, t_1 + \delta]$ функции $\hat{\mathbf{x}}(t)$, $\mathbf{x}^{n_k}(t) \to \hat{\mathbf{x}}(t)$ при $k \to \infty$ на $[t_1, t_1 + \delta]$. Так как полупрямая $[0, \infty)$ может быть представлена как счетное объединение отрезков вида $[t_1, t_1 + \delta]$, используя вышеприведенное рассуждение счетное число раз, приходим к существованию подпоследовательности $\{\mathbf{x}^{n_{k'}}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ последовательности функций $\{\mathbf{x}^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, такой, что $\mathbf{x}^{n_{k'}}(t) \to \hat{\mathbf{x}}(t)$ при $k \to \infty$ на $[0, \infty)$. Тогда из определения А.26 из приложения А следует, что функция $\hat{\mathbf{x}}(t)$ является абсолютно непрерывной на полупрямой $[0, \infty)$, что завершает доказательство частей 1 и 2 выше.

Для доказательства части 3 нам необходимо показать, что существует функция $a(t)$, такая, что $(a(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \in Q(t, \hat{\mathbf{x}}(t))$ для всех t, где существует производная $\dot{\mathbf{x}}(t)$. Для произвольного вещественного $\varepsilon > 0$ рассмотрим окрестность $Q_\varepsilon(t, \hat{\mathbf{x}})$ множества $Q(t, \hat{\mathbf{x}}(t))$:

$$Q_\varepsilon(t, \hat{\mathbf{x}}) = \{(p, \mathbf{z}) : d((p, \mathbf{z}), Q(t, \hat{\mathbf{x}}(t)) < \varepsilon\},$$

где расстояние d является евклидовой метрикой. Так как множество значений отображения $Q(t, \hat{\mathbf{x}}(t))$ состоит из выпуклых множеств (по условию 3), множество значений отображения $Q_\varepsilon(t, \hat{\mathbf{x}})$

также состоит из выпуклых множеств. По определению допустимой пары функций для последовательности $\{(\mathbf{x}^n(t), \mathbf{y}^n(t))\}_{n=1}^{\infty}$, рассмотренной выше, при всех t выполняется включение $(p^n(t), \dot{\mathbf{x}}^n(t)) \in Q(t, \mathbf{x}^n(t))$ (где $p^n(t) = f(t, \mathbf{x}^n(t), \mathbf{y}^n(t))$). Следовательно, так как $Q(t, \mathbf{x}^n(t)) \subset Q_\varepsilon(t, \mathbf{x}^n(t))$, $(p^n(t), \dot{\mathbf{x}}^n(t)) \in Q_\varepsilon(t, \mathbf{x}^n(t))$. Более того, из того, что $\varepsilon > 0$, следует, что существует вещественное $h > 0$, такое, что для всех $\eta < h$ и для всех натуральных $n = 1, 2, \ldots$, выполняется следующее включение:

$$(p^n(t+\eta), \dot{\mathbf{x}}^n(t+\eta)) \in Q_\varepsilon(t, \mathbf{x}^n(t)).$$

Интегрируя уравнение (7.77) между t и $t + h$ для любой допустимой пары функций $(\mathbf{x}^n(t), \mathbf{y}^n(t))$, получаем следующее равенство:

$$\mathbf{x}^n(t+h) = \int_t^{t+h} G(s, \mathbf{x}^n(s), \mathbf{y}^n(s))ds + \mathbf{x}^n(t),$$

и поэтому для всех натуральных $n = 1, 2, \ldots$, выполняется равенство:

$$\frac{\mathbf{x}^n(t+h) - \mathbf{x}^n(t)}{h} = \frac{\int_t^{t+h} \dot{\mathbf{x}}^n(s)ds}{h}.$$

Так как множество значений отображения $Q_\varepsilon(t, \hat{\mathbf{x}})$ также состоит из выпуклых множеств, а $\dot{\mathbf{x}}^n(s) \in Q_\varepsilon(t, \mathbf{x}^n(t))$ при всех $s \in [t, t + h]$, имеем следующее включение:

$$\left(\int_t^{t+h} \dot{\mathbf{x}}^n(s)ds\right) / h \in \overline{Q_\varepsilon(t, \mathbf{x}^n(t))},$$

где множество $\overline{Q_\varepsilon\left(t, \mathbf{x}^n(t)\right)}$ является замыканием множества $Q_\varepsilon(t, \mathbf{x}^n(t))$. По условию 3 отображение $Q_\varepsilon(t, \mathbf{x}^n(t))$ является полунепрерывным сверху, а его множество значений состоит из замкнутых выпуклых множеств. Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем следующее включение:

$$\frac{\hat{\mathbf{x}}(t+h) - \hat{\mathbf{x}}(t)}{h} \in \overline{Q_\varepsilon(t, \mathbf{x}(t))}.$$

Далее, переходя к пределу при $h \to 0$ и пользуясь предположением о том, что производная $\dot{\mathbf{x}}(t)$ существует, получаем следующее включение:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in \overline{Q_\varepsilon(t, \hat{\mathbf{x}}(t))}.$$

Тогда в силу того, что $\varepsilon > 0$ и t были выбраны произвольным образом, следует, что для всех t выполняется включение:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in \overline{Q(t, \hat{\mathbf{x}}(t))} = Q(t, \hat{\mathbf{x}}(t)),$$

что завершает доказательство части 3.

Для доказательства части 4 заметим, что пара функций $(\mathbf{x}^n(t), \mathbf{y}^n(t))$ является допустимой при всех натуральных $n = 1, 2, \ldots$, и поэтому функция $\mathbf{y}^n(t)$ измерима по Лебегу. Более того, так как множество $\mathcal{Y}(t)$ компактно, по теореме Хелли о выборе (см., например: [Kolmogorov and Fomin 1970, theorem 5, p. 372; Колмогоров, Фомин 1976], существует подпоследовательность $\{\mathbf{y}^{n_k}(t)\}$, такая, что $\mathbf{y}^{n_k}(t) \to \hat{\mathbf{y}}(t)$ при $k \to \infty$. Так как функция $\hat{\mathbf{x}}(t)$ является абсолютно непрерывной, она дифференцируема почти всюду (см. факт A.17 из приложения A). Поэтому производная $\dot{\mathbf{x}}(t)$ существует почти всюду и поэтому измерима по Лебегу. Более того, из абсолютной непрерывности функции $\hat{\mathbf{x}}(t)$ следует, что она измерима по Лебегу. Далее введем множество D следующим образом: $D = \{(t, \hat{\mathbf{y}}(t)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Y}(t)$: $\dot{\mathbf{x}}(t) = G(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t))\}$. Так как полупрямая $\mathbb{R}_+$ может быть представлена как счетное объединение компактных отрезков, а множество $\mathcal{Y}(t)$ компактно, множество D также может быть представлено как счетное объединение компактных множеств. По условию 2 функция G является непрерывной по всем своим аргументам на множестве D, а функция $\dot{\mathbf{x}}(t) = G(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t))$ измерима по Лебегу при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Поэтому функция $\hat{\mathbf{y}}(t)$ также является измеримой по Лебегу при всех $t \in \mathbb{R}_+$. ■

В теореме 7.15 утверждается существование решения задачи динамической оптимизации в непрерывном времени при достаточно мягких ограничениях (по меньшей мере с экономической точки зрения). Условия 1 и 2 являются стандартными предположениями о компактности и непрерывности, необходимыми для существования решения в конечномерной задаче и бесконечномерной задаче в дискретном времени (см., например, теорему A.9 из приложения A). Условия 4 и 5 являются некоторым усилением условий ограниченности, необходимых в конечномерной задаче и задаче оптимизации в дискретном времени (их иногда называют условиями на темп роста, так как они ограничивают темп роста функции выигрыша). Условие 3 в чем-то необычно. Такое предположение о выпуклости не является необходимым в конечномерной задаче и бесконечномерной задаче в дискретном времени. Однако оно не может быть снято в задаче оптимизации в непрерывном времени (см. упражнение 7.24).

В то время как теорема 7.15 показывает условия существования решения, поиск достаточных условий для того, чтобы решение задачи оптимизации (функция управления $\mathbf{y}(t)$) было непрерывным, оказывается намного более трудным. При этом необходимые условия оптимума из теорем 7.9 и/или 7.13 могут показаться недостаточными без уверенности, что решение является непрерывной функцией. Хотя в этом утверждении есть доля истины, напомним, что теоремы 7.9 и 7.13 предоставляют достаточные условия оптимума только для тех моментов времени t, где решение $\mathbf{y}(t)$ непрерывно. Более того, следствие 7.1 описывает условия непрерывности решения для вогнутой задачи оптимизации. Однако для доказательства существования непрерывного решения задачи оптимизации непрямой подход, описанный выше, оказывается более полезным, чем использование этих условий. В частности, в большинстве экономических задач применим следующий метод: (1) описать возможное решение, удовлетворяющее необходимым условиям оптимума из теоремы 7.9 или теоремы 7.13 (при условии, что такое решение существует), и (2) убедиться в том, что выполнены достаточные условия оптимума из теоремы 7.11 или теоремы 7.14. В том случае, когда этот метод применим, он гарантирует существование решения задачи оптимизации и непрерывность функции управления (а также гладкость переменной состояния). Так как он применим во всех моделях, рассмотренных в этой книге, мы будем использовать его в дальнейшем.

Далее перейдем к проверке выполнения условий теоремы 7.15 в задаче оптимального роста, которая будет подробно изучаться нами в следующем параграфе.

Пример 7.4. Рассмотрим следующую задачу динамической оптимизации:

$$\max_{[k(t),c(t)]_{t=0}^{\infty}} \int_0^{\infty} \exp(-\rho t)u(c(t))dt$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \delta k(t) - c(t),$$

$k(t) \geq 0$ при всех t и $k(0) > 0$. Напомним, что функция полезности $u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ является строго возрастающей, непрерывно дифференцируемой и строго вогнутой, а производственная функция f удовлетворяет стандартным условиям (предположения 1 и 2 из главы 2, отсюда следует, что $c(t) \geq 0$ при всех t). Далее проверим выполнение условий 1–5 из теоремы 7.15. Во-первых, заметим, что из условий Инада следует, что существует значение $\bar{k} > 0$, такое, что $f(\bar{k}) = \delta\bar{k}$, и поэтому производная $\dot{k}$ будет строго отрицательной при всех $k > \bar{k}$ (даже в случае, когда $c = 0$). Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением значений капитала на отрезке $[0, \bar{\bar{k}}]$, где $\bar{\bar{k}} = \max\{\bar{k}, k(0)\}$. Поэтому $k(t) \in \mathcal{X}(t) \equiv [0, \bar{\bar{k}}]$, где множество $\mathcal{X}(t)$ компактно, и поэтому отображение $\mathcal{X}(t)$ непрерывно по t и его множество значений состоит из замкнутых множеств. Аналогичным образом, имеем $c(t) \in [0, f(\bar{\bar{k}})]$, поэтому $c(t) \in \mathcal{Y}(t) \equiv [0, f(\bar{\bar{k}})]$, а значит отображение $\mathcal{Y}(t)$ является непрерывным по t и его множество значений состоит из компактных множеств. Следовательно, выполняется условие 1. Функции u и f являются непрерывными, из этого следует выполнение условия 2. Отображение $Q(t, \mathbf{x})$ имеет следующий вид:

$$Q(t, k) = \{(p, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: p \le \exp(-\rho t)u(c),\ z = f(k) - \delta k - c$$
$$\text{и } c \in c(t) \in [0, f(\bar{k})]\}.$$

Нетрудно убедиться, что оно непрерывное по t и его множество значений состоит из выпуклых множеств. Более того, множества значений отображений $Q(t, \mathbf{x})$ и $\Omega(\mathbf{x}_0)$ не содержат пустого множества. Следовательно, условие 3 также выполняется.

Из того, что $c(t) \in [0, f(\bar{k})]$, вытекает следующее неравенство:

$$\exp(-\rho t)u(c) \le \exp(-\rho t)\max\{0,\ u(f(\bar{k}))\},$$

откуда следует, что выполняется условие 5. Наконец, введем следующую функцию:

$$\Phi(t) \equiv \exp(-\rho t)\left[u(\bar{k}) + \max\left\{\bar{k},\ \left[f(\bar{k}) - \delta\bar{k}\right]\right\}\right].$$

Затем, еще раз воспользовавшись тем, что $c(t) \in [0, f(\bar{k})]$ и $k(t) \in [0, \bar{k}]$, получаем, что на любом отрезке $[t_1, t_1 + \delta]$ и при любом вещественном $\varepsilon > 0$ выполняются следующие неравенства:

$$\varepsilon u(c) + |f(k) - \delta k - c| \le \Phi(t)$$

при всех $t \in [t_1, t_1 + \delta]$, и

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t)\Phi(t)dt \le \frac{u(\bar{k}) + \max\left\{\bar{k}, \left[f(\bar{k}) - \delta\bar{k}\right]\right\}}{\rho} < \infty$$

и, следовательно, выполняется условие 4. Таким образом, по теореме 7.15 непрерывное решение рассматриваемой нами задачи максимизации существует. ■

Далее мы коротко остановимся на условиях, при которых функция стоимости $V(t, x)$ является вогнутой и дифференцируемой. Напомним определение функции стоимости $V(t, x)$ (7.35), которое мы дали для случая одномерного вектора переменных состояния. Рассмотрим более общую задачу максимизации (7.76) при ограничениях (7.77) и (7.78). В предположении о том, что ее решение существует, определим функцию стоимости следующим образом:

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) = \max_{[\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)]_{t=0}^{\infty} \in \Omega(t_0, \mathbf{x}_0)} \int_{t_0}^{\infty} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))dt.$$

Заметим, что все ограничения задачи уже учтены в множестве $\Omega(t_0, \mathbf{x}_0)$.

В следующей теореме приведены достаточные условия вогнутости по $\mathbf{x}$ функции стоимости $V(t, \mathbf{x})$. Сама теорема является достаточно простой, однако на практике во многих задачах проверка условий на выпуклость множества $\Omega(t, \mathbf{x})$ может оказаться затруднительной. В частности, множество $\Omega(t_0, \mathbf{x})$ является выпуклым, если из того, что $[\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)]_{t=t_0}^{\infty} \in \Omega(t_0, \mathbf{x}_\alpha)$

и $\left[\mathbf{x}'(t),\ \mathbf{y}'(t)\right]_{t=t_0}^{\infty} \in \Omega(t_0,\ \mathbf{x}')$ следует, что для любого вещественного $\alpha \in [0, 1]$ $\left[\mathbf{x}_\alpha(t),\ \mathbf{y}_\alpha(t)\right]_{t=t_0}^{\infty} \in \Omega(t_0,\ \mathbf{x}_\alpha)$, где

$$\mathbf{x}_\alpha(t) \equiv \alpha\mathbf{x}(t) + (1-\alpha)\mathbf{x}'(t),$$
$$\mathbf{y}_\alpha(t) \equiv \alpha\mathbf{y}(t) + (1-\alpha)\mathbf{y}'(t),$$

и

$$\mathbf{x}_\alpha \equiv \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}'.$$

Например, система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t) + B(t)\mathbf{x}(t) + C(t)\mathbf{y}(t)$ удовлетворяет условию выпуклости.

Теорема 7.16. О вогнутости функции стоимости. *Рассмотрим задачу максимизации* (7.76) *при ограничениях* (7.77) *и* (7.78) *и предположим, что условия теоремы* 7.15 *выполнены и поэтому решение этой задачи максимизации существует. Обозначим функцию стоимости при начальном значении вектора переменных состояния* $\mathbf{x}_0$ *в момент времени* t_0 *как* $V(t_0,\ \mathbf{x}_0)$. *Предположим, что функция* $f(t,\ \mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}(t))$ *является совместно вогнутой по аргументам* $\mathbf{x}(t)$ *и* $\mathbf{y}(t)$ *при всех вещественных* $t \in [t_0,\ \infty)$, *а множество* $\Omega(t_0,\ \mathbf{x})$ *является выпуклым при всех* $\mathbf{x} \in \mathcal{X}(t_0)$. *Тогда функция стоимости* $V(t_0,\ \mathbf{x})$ *является вогнутой по* $\mathbf{x}$.

Доказательство. Предположим, что пары функций

$$\left[\mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}(t)\right]_{t=t_0}^{\infty} \in \Omega(t_0,\ \mathbf{x}) \text{ и } \left[\mathbf{x}'(t),\ \mathbf{y}'(t)\right]_{t=0}^{\infty} \in \Omega(t_0,\ \mathbf{x}')$$

являются решениями задачи максимизации. Тогда по определению функции стоимости имеем:

$$V(t_0,\ \mathbf{x}) = \int_0^\infty f(t,\ \mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}(t))dt \text{ и } V(t_0,\ \mathbf{x}') = \int_0^\infty f(t,\ \mathbf{x}'(t),\ \mathbf{y}(t))dt. \quad (7.79)$$

Далее рассмотрим значение $V(t_0,\ \mathbf{x}_\alpha)$, где $\mathbf{x}_\alpha$ определено выше. Из предположения о том, что множество $\Omega(t_0,\ \mathbf{x})$ является выпуклым, следует, что $\left[\mathbf{x}_\alpha(t),\ \mathbf{y}_\alpha(t)\right]_{t=t_0}^{\infty} \in \Omega(t_0,\ \mathbf{x}_\alpha)$, где функции $\mathbf{x}_\alpha(t)$ и $\mathbf{y}_\alpha(t)$ определены выше. Следовательно, выполняется неравенство:

$$V(t_0,\ \mathbf{x}_\alpha) \geq \int_{t_0}^\infty f(t,\ \mathbf{x}_\alpha(t),\ \mathbf{y}_\alpha(t))dt =$$
$$= \int_{t_0}^\infty f\left(t,\ \alpha\mathbf{x}(t) + (1-\alpha)\mathbf{x}'(t),\ \alpha\mathbf{y}(t) + (1-\alpha)\mathbf{y}'(t)\right)dt \geq$$
$$\geq \alpha\int_{t_0}^\infty f(t,\ \mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}(t))dt + (1-\alpha)\int_{t_0}^\infty f(t,\ \mathbf{x}'(t),\ \mathbf{y}'(t))dt =$$
$$= \alpha V(t_0,\ \mathbf{x}) + (1-\alpha)V(t_0,\ \mathbf{x}'),$$

где первое неравенство следует из того, что пара функций $[\mathbf{x}_\alpha(t), \mathbf{y}_\alpha(t)]_{t=t_0}^{\infty}$ является доступной, и поэтому значение функции стоимости $V(t_0, \mathbf{x}_\alpha)$ должно быть больше значения целевой функции на паре $[\mathbf{x}_\alpha(t), \mathbf{y}_\alpha(t)]_{t=t_0}^{\infty}$ либо равно ему. В следующем равенстве используется явный вид функций $\mathbf{x}_\alpha(t)$ и $\mathbf{y}_\alpha(t)$, а второе неравенство следует из совместной вогнутости функции f. Последнее равенство использует равенство (7.79). Отсюда следует вогнутость функции стоимости $V(t_0, \mathbf{x})$. ■

Теорема 7.17. О дифференцируемости функции стоимости. *Рассмотрим задачу максимизации* (7.76) *при ограничениях* (7.77) *и* (7.78) *и предположим, что условия теорем* 7.15 *и* 7.16 *выполнены и поэтому решение этой задачи максимизации существует и функция стоимости* $V(t_0, \mathbf{x})$ *является вогнутой функцией. Также предположим, что функции* f *и* G *дифференцируемы по* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *при всех* t *и оптимальная пара функций* $(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t))$ *такова, что существует вещественное* $\Delta t > 0$, *такое, что* $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathrm{Int}\mathcal{X}(t)$ *и* $\hat{\mathbf{y}}(t) \in \mathrm{Int}\mathcal{Y}(t)$ *при всех* $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$. *Тогда функция стоимости* $V(t_0, \mathbf{x})$ *является дифференцируемой по* $\mathbf{x}$ *в точке* $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$.

Доказательство. Используя аналог леммы 7.1 для многомерной задачи максимизации, мы можем представить функцию стоимости в точке $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$ в следующем виде:

$$V(t_0, \hat{\mathbf{x}}(t_0)) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t))dt + V(t_0 + \Delta t, \hat{\mathbf{x}}(t_0 + \Delta t)).$$

Из того, что $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathrm{Int}\mathcal{X}(t)$ *и* $\hat{\mathbf{y}}(t) \in \mathrm{Int}\mathcal{Y}(t)$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$ следует, что при достаточно малом вещественном $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность точки $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$ $\mathcal{N}_\varepsilon(\hat{\mathbf{x}}(t_0))$ что для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_\varepsilon(\hat{\mathbf{x}}(t_0))$ существует пара функций $[\mathbf{x}'(t), \mathbf{y}'(t)]_{t=t_0}^{\infty} \in \Omega(t_0, \mathbf{x})$, такая, что $\mathbf{x}'(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t)$ и $[\mathbf{x}'(t), \mathbf{y}'(t)]_{t=t_0+\Delta t}^{\infty} = [\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t)]_{t=t_0+\Delta t}^{\infty}$. Обозначим значение целевой функции на возможно неоптимальной допустимой паре функций как

$$\bar{V}(t_0, \mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t, \mathbf{x}'(t), \mathbf{y}'(t))dt + \bar{V}(t_0, \hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t)).$$

По определению функция $\bar{V}(t_0, \mathbf{x})$ существует и удовлетворяет неравенству $\bar{V}(t_0, \mathbf{x}) \le V(t_0, \mathbf{x})$ при всех $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_\varepsilon(\hat{\mathbf{x}}(t_0))$. Более того, из теоремы 7.16 следует, что функция $V(t_0, \mathbf{x})$ является вогнутой. Тогда, используя те же результаты из выпуклого анализа, которые мы использовали при доказательстве теоремы 6.6 в предыдущей главе, получаем, что выпуклая функция $-V(t_0, \mathbf{x})$ является субдифференцируемой и имеет непустое, замкнутое и выпуклое множество субградинетов, такое, что для любого субградиента $\mathbf{p}$ и для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_\varepsilon(\hat{\mathbf{x}}(t_0))$ выполняется следующее неравенство:

$$\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}(t_0)) \geq V(t_0, \mathbf{x}) - V(t_0, \hat{\mathbf{x}}(t_0)).$$

Более того, из того, что $\bar{V}(t_0, \mathbf{x}) \leq V(t_0, \mathbf{x})$ и $\bar{V}(t_0, \hat{\mathbf{x}}(t_0)) = V(t_0, \hat{\mathbf{x}}(t_0))$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_\varepsilon(\hat{\mathbf{x}}(t_0))$ выполняется следующее неравенство:

$$\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}(t_0)) \geq V(t_0, \mathbf{x}) - V(t_0, \hat{\mathbf{x}}(t_0)) \geq \bar{V}(t_0, \mathbf{x}) - \bar{V}(t_0, \hat{\mathbf{x}}(t_0)).$$

Так как функция $\bar{V}(t_0, \mathbf{x})$ является дифференцируемой по $\mathbf{x}$ во всех точках окрестности $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_\varepsilon(\hat{\mathbf{x}}(t_0))$, субградиент $\mathbf{p}$ определен единственным образом. Следовательно, функция стоимости $V(t_0, \mathbf{x})$ также является дифференцируемой в точке $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$. ■

7.7. Первое знакомство с оптимальным управлением в непрерывном времени

В этом параграфе мы коротко покажем, каким образом основные результаты, полученные нами, теоремы 7.13 и 7.14, могут быть использованы в анализе задачи оптимального роста. Напомним, что задача оптимального роста представляет собой задачу максимизации полезности репрезентативным домохозяйством. Так как ей посвящена следующая глава, мы не станем здесь проводить полный анализ этой задачи. Наша цель состоит в том, чтобы показать, каким образом теоремы 7.13 и 7.14 могут быть использованы при анализе задач теории экономического роста на примере этой канонической задачи. Мы покажем, что для проверки выполнения условий теоремы 7.13 требуются некоторые усилия, в то время как проверка условий теоремы 7.14 оказывается намного более простой. Рассмотрим модель неоклассической экономики с постоянным населением и без технологического прогресса. Задача оптимального роста в такой экономике выглядит следующим образом:

$$\max_{[k(t),c(t)]_{t=0}^{\infty}} \int_0^{\infty} \exp(-\rho t) u(c(t)) dt$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \delta k(t) - c(t),$$

$k(t) \geq 0$ при всех t и $k(0) > 0$. Предположим, что моментальная функция полезности u: $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ или u: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ является строго возрастающей, непрерывно дифференцируемой и строго вогнутой (например, в случае, когда $u(c) = \log c$) областью определения является множество $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Также предположим, что производственная функция $f(\cdot)$ удовлетворяет предположениям 1 и 2 из главы 2 и что $\lim\limits_{c \to 0} u'(c) = \infty$.

На первом шаге построим текущий гамильтониан задачи, который в данном случае не зависит явно от времени и может быть представлен в следующем виде:

$$\hat{H}(k, c, \mu) = u(c(t)) + \mu(t)\left[f(k(t)) - \delta k(t) - c(t)\right], \qquad (7.80)$$

где капитал k является переменной состояния, потребление c — переменной управления, а μ — текущей сопряженной переменной.

Используя необходимые условия оптимума из теоремы 7.13, попытаемся найти траектории капитала и потребления, которые будут удовлетворять условию:

$$\hat{H}_c(k, c, \mu) = u'(c(t)) - \mu(t) = 0 \qquad (7.81)$$

и

$$\hat{H}_k(k, c, \mu) = \mu(t)\left[f'(k(t)) - \delta\right] = \rho\mu(t) - \dot{\mu}(t). \qquad (7.82)$$

В дополнение мы будем использовать сильную форму условия трансверсальности (7.69), которая в данном случае имеет следующий вид:

$$\lim_{t \to \infty}\left[\exp(-\rho t)\mu(t)k(t)\right] = 0. \qquad (7.83)$$

Для того чтобы показать, что это условие трансверсальности является необходимым условием оптимума, нам нужно убедиться в том, что предположение 7.1 выполняется. Во-первых, моментальная функция полезности $u(c)$ возрастает по c и не зависит от k и поэтому является слабо монотонной. Ограничивающая функция $f(k) - \delta k - c$ убывает по c, но может не быть монотонной по k. Однако, не ограничивая общности, мы можем ограничить значение капитала сверху, $k(t) \in [0, \bar{k}]$, где значение $\bar{k}$ определено как $f'(\bar{k}) = \delta$. Это следует из того, что увеличение количества капитала выше, чем $\bar{k}$ ведет к сокращению выпуска, а поэтому и потребления, как в текущий момент, так и в будущем, а значит на оптимальной траектории переменной состояния $k(t) \notin [0, \bar{k}]$ при всех $t > 0$. В случае когда $k(t) \in [0, \bar{k}]$, ограничивающая функция также является слабо монотонной по k. Из этого следует выполнение части 1 предположения 7.1. Выполнение части 2 предположения 7.1 очевидным образом следует из того, что частная производная ограничивающей функции $f(k) - \delta k - c$ по c равна -1 и поэтому равномерно отделена от нуля. Однако часть 3 предположения 7.1 может не выполняться (например, в случае $u(c) = \log c$ $\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$). Несмотря на это, мы можем изменить задачу максимизации, определив моментальную функцию полезности как u: $[\varepsilon, +\infty) \to \mathbb{R}$ при некотором достаточно малом вещественном $\varepsilon > 0$. В этом случае часть 3 предположения 7.1 также будет выполняться. Затем мы можем убедиться в том, что любое решение этой измененной задачи, на котором $c(t) > \varepsilon$ при всех t также является решением исходной задачи, в которой областью определения моментальной функции полезности является множество $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ (см. упражнение 7.25). Более того, можно показать, что для любой задачи оптимального роста в схожей формулировке существует вещественное $\varepsilon > 0$, такое, что $c(t) > \varepsilon$ при всех t (также см. упражнение 7.25). Поэтому выбор множества $[\varepsilon, \infty)$ как области определения моментальной функции полезности не ограничивает общность анализа. Отсюда следует, что необходимые условия оптимума из теоремы 7.13, включая условие трансверсальности в сильной форме, могут быть использованы в решении задачи оптимального роста. Для этой задачи они задаются условиями (7.81)–(7.83).

Однако более прямым методом решения задачи будет использование теоремы 7.14. Напомним, что в ней не требуется выполнение предположения 7.1. Поэтому у нас нет необходимости рассматривать измененную задачу с ограничением $c(t) \in [\varepsilon, +\infty)$. Мы можем просто искать возможное решение, удовлетворяющее условиям (7.81) и (7.82), а также условию трансверсальности (7.83). Во-первых, заметим, что из условия (7.81) следует, что на возможном решении выполняется неравенство $\mu(t) > 0$ (так как $u'(c) > 0$ везде). Следовательно, текущий гамильтониан, заданный равенством (7.80), представляет собой сумму двух строго вогнутых функций и поэтому сам является строго вогнутой функцией (а из того, что функция $\hat{H}(k, c, \mu)$ строго вогнута, следует, что максимальный гамильтониан $M(k, \mu) \equiv \max_c \hat{H}(k, c, \mu)$ также является строго вогнутой функцией). Во-вторых, из того, что $\mu(t) > 0$ и $k(t) > 0$ (на допустимой траектории) при всех t, следует, что возможное решение удовлетворяет условию $\lim_{t \to \infty} [\exp(-\rho t)\mu(t)k(t)] \geq 0$. Следовательно, выполняются условия теоремы 7.14. Поэтому возможное решение, удовлетворяющее условиям (7.81)–(7.83), будет глобальным максимумом задачи максимизации. Заметим, что здесь, применяя теорему 7.14, мы используем достаточное условие трансверсальности для вогнутой задачи (7.83), являющееся эквивалентом условия (7.69) (и поэтому у нас нет необходимости проверять выполнение предположения 7.1).

Подробный анализ оптимальной траектории экономического роста в неоклассической модели будет проведен нами в следующей главе, поэтому здесь мы не будем останавливаться на дополнительных деталях.

7.8. q-теория инвестиций и седловое свойство устойчивости решения

В качестве еще одного приложения методов, разработанных в этой главе, в данном параграфе мы рассмотрим каноническую модель инвестиций при наличии издержек инсталляции капитала, называемую в литературе q-теорией инвестиций. Эта модель представляет собой не только полезную иллюстрацию приложения методов теории оптимального управления, но и является одной из базовых моделей стандартной макроэкономической теории. Более того, мы будем использовать ее для того, чтобы ввести понятие *седловой устойчивости* решения, которое играет важнейшую роль в анализе задач оптимального и равновесного роста.

С экономической точки зрения задача состоит в максимизации приведенной стоимости прибыли фирмы на рынке с совершенной конкуренцией. Единственное отличие этой задачи от всех других задач, рассмотренных нами ранее, состоит в предположении о наличии издержек приспособления, возникающих при изменении фирмой количества капитала. В частности, обозначим количество капитала фирмы как $K(t) \geq 0$ и предположим, что фирма обладает производственной технологией, описываемой производственной функцией $f(K)$, удовлетворяющей предположениям 1 и 2 из главы 2. Для простоты нормализуем единицей стоимость выпуска фирмы в терминах конечного товара во все моменты времени. Издержки изменения количества капитала будем описывать функцией $\phi(I)$ и предположим, что она является строго возрастающей, непрерывно дифференцируемой, строго выпуклой и удовлетворяет условию $\phi(0) = \phi'(0) = 0$. Другими словами, в дополнение к издержкам, связанным с приобретением инвестиционных товаров (которые в предположении о нормализации относительной цены при инвестициях I равны I), фирма несет издержки, связанные с организацией производства, задаваемые выпуклой функцией $\phi(I)$. В некоторых моделях издержки приспособления являются функцией от отношения инвестиций к общему количеству капитала фирмы $\phi(I/K)$, а не $\phi(I)$, однако такая модификация модели не изменяет наших основных выводов. Мы также будем предполагать экспоненциальную амортизацию уже инсталлированного капитала с нормой амортизации δ. Задача фирмы состоит в максимизации приведенной стоимости прибыли с нормой дисконтирования, равной процентной ставке r, которую будем предполагать неизменной.

Таким образом, задача фирмы имеет следующий вид:

$$\max_{[K(t),I(t)]_{t=0}^{\infty}} \int_0^{\infty} \exp(-\rho t)[f(K(t)-I(t)-\phi(I(t))]dt$$

при ограничениях

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \tag{7.84}$$

и $K(t) \geq 0$ и заданном начальном значении капитала $K(0) > 0$. Заметим, что расходы $\phi(I(t))$ не делают вклада в накопление капитала, а являются чистыми издержками. Более того, из выпуклости функции $\phi(I)$ следует, что фирма предпочтет не делать «больших» изменений количества капитала. Таким образом, издержки ϕ являются причиной сглаживания траектории инвестиций во времени.

Чтобы описать оптимальный план инвестиций фирмы, воспользуемся той же стратегией, как и в предыдущем параграфе. В частности, построим текущий гамильтониан, имеющий в данном случае следующий вид:

$$\hat{H}(K, I, q) \equiv [f(K(t) - I(t) - \phi(I(t)))] + q(t)[I(t) - \delta K(t)],$$

где по причинам, которые станут понятны позднее, вместо привычного $\mu(t)$ мы обозначили сопряженную переменную как $q(t)$.

Необходимые условия внутреннего решения данной задачи, включая условие трансверсальности, имеют следующий вид:

$$\hat{H}_I(K, I, q) = -1 - \phi'(I(t)) + q(t) = 0,$$

$$\hat{H}_K(K, I, q) = f'(K(t)) - \delta q(t) = rq(t) - \dot{q}(t), \tag{7.85}$$

$$\lim_{t \to \infty} \exp(-rt) q(t) K(t) = 0.$$

Из первого необходимого условия следует, что

$$q(t) = 1 + \phi'(I(t)) \text{ при всех } t. \tag{7.86}$$

Далее проверим достаточность этих условий. Из того, что $q(t) > 0$ при всех t, следует, что функция $\hat{H}$ является строго вогнутой. Помимо этого, из того, что по допустимости $K(t) \geq 0$, для любой допустимой траектории инвестиций и количества капитала имеем неравенство: $\lim\limits_{t \to \infty} \exp(-rt) q(t) K(t) \geq 0$. Следовательно, мы можем использовать теорему 7.14 и утверждать, что решение системы (7.85) описывает единственную максимизирующую приведенную стоимость прибыли фирмы траекторию инвестиций и количества капитала. Еще раз заметим, что теорема 7.14 оказывается одновременно простым и очень мощным средством анализа. В частности, мы можем использовать условие трансверсальности (7.69) как достаточное условие максимума и поэтому у нас нет необходимости проверять выполнение предположения 7.1.

Далее, дифференцируя условие (7.86) по времени, приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{q}(t) = \phi''(I(t))\dot{I}(t). \qquad (7.87)$$

Подставляя его во второе необходимое условие в системе (7.85), получаем дифференциальное уравнение, описывающее динамику инвестиций:

$$\dot{I}(t) = \frac{1}{\phi''(I(t))}\left[(r+\delta)(1+\phi'(I(t)) - f'(K(t))\right]. \qquad (7.88)$$

Из этих уравнений следуют несколько интересных экономических наблюдений. Во-первых, можно убедиться в том, что по мере того как значение второй производной функции издержек $\phi''(I)$ приближается к нулю, производная $\dot{I}(t)$ расходится к бесконечности, из чего следует, что функция инвестиций имеет разрыв. Более того, можно показать, что этот разрыв таков, что количество капитала фирмы моментально достигает своего равновесного значения в стационарном состоянии (см. упражнение 7.28). Этот результат интуитивен. По мере того как $\phi''(I)$ приближается к нулю, функция издержек приспособления приближается к линейной. В этом случае они просто линейно увеличивают стоимости инвестиций и не создают стимулов для сглаживания их траектории. С другой стороны, в случае когда $\phi''(I) > 0$, у фирмы возникает мотив для сглаживания инвестиций, значение функции $\dot{I}(t)$ становится конечным и инвестиции медленно достигают стационарного состояния. Следовательно, как мы утверждали выше, наличие издержек приспособления ведет фирму к сглаживанию траектории инвестиций.

Мы можем проанализировать динамику инвестиций и количества капитала с помощью дифференциальных уравнений (7.84) и (7.88). Во-первых, нетрудно убедиться, что в модели существует единственное стационарное состояние с положительным количеством капитала фирмы $K^* > 0$ и инвестициями, достаточными в точности для покрытия амортизации выбывающего капитала $I^* = \delta K^*$. Значение количества капитала в стационарном состоянии удовлетворяет следующему условию первого порядка (получающемуся приравниванием правой части уравнения (7.88) к нулю):

$$f'(K^*) = (r + \delta)(1 + \phi'(\delta K^*)).$$

Это условие первого порядка отличается от стандартного «модифицированного золотого правила», в котором утверждается, что предельный продукт капитала должен быть равен сумме процентной ставки и нормы амортизации, так как в данной модели возникают дополнительные издержки от владения капиталом, связанные с тем, что теперь для покрытия выбывающего капитала необходимы большие инвестиции. Этот факт отражает слагаемое $\phi'(\delta K^*)$ в уравнении выше. Существование единственного значения K^*, удовлетворяющего этому условию первого порядка, следует из строгой выпуклости функции ϕ и из того, что функция f является строго вогнутой и удовлетворяет условиям Инада (по предположению 2).

Для анализа динамики модели нам понадобится ряд понятий, отличных от тех, которые мы использовали для анализа базовой модели Солоу (сравните с теоремами 2.4 и 2.5). В частности, в данном случае подходящим понятием будет свойство седловой устойчивости решения, а не его глобальной устойчивости в пространстве $K - I$. Причина этого в том, что в данной модели начальное значение инвестиций $I(0)$ определяется не начальным условием, а граничным условием на бесконечности, а именно условием трансверсальности вида

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-rt)q(t)K(t)\right]=0.$$

Поэтому в контексте данной задачи с одной переменной состояния и одной переменной управления мы приходим к одномерному многообразию (кривой), на которой пары значений капитала и инвестиций сходятся к своему стационарному состоянию. Это многообразие также называют устойчивым многообразием. Начальное значение инвестиций $I(0)$ в данном случае определяется так, что в начальный момент времени экономика оказывается на этой кривой. Действительно, если бы любая пара начальных значений инвестиций и капитала (а не только пары, лежащие на этой кривой) вели к стационарному состоянию, мы были бы не в состоянии определить значение $I(0)$, другими словами, в экономике присутствовала бы множественность равновесий. Математически это означает, что вместо требования о том, чтобы все собственные значения оператора, описывающего динамику линеаризованной системы, были отрицательными, для седловой устойчивости решения мы потребуем, чтобы количество таких собственных значений равнялось числу переменных состояния в модели.

Понятие седловой устойчивости решения является ключевым во многих моделях экономического роста. Далее мы опишем его более точно с помощью следующих обобщений теорем 2.4 и 2.5 (см. приложение B).

Теорема 7.18. *Рассмотрим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{b} \tag{7.89}$$

с начальным значением $\mathbf{x}(0)$, *где вектор* $\mathbf{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ *при всех* t, *а* $\mathbf{A}$ *является матрицей* $n\times n$. *Положим* $\mathbf{x}^*$ *стационарным решением этой системы, заданным равенством* $\mathbf{A}\mathbf{x}^*+\mathbf{b}=0$. *Предположим, что* $m\le n$

собственных значений матрицы **A** *имеют отрицательную вещественную часть. Тогда существует мерное подпространство M линейного пространства* $\mathbb{R}^n$, *такое, что при любом начальном значении* $\mathbf{x}(0) \in M$ *система дифференциальных уравнений* (7.89) *имеет единственное решение и на нем выполняется свойство* $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^*$ *при* $t \to \infty$.

Теорема 7.19. О седловой устойчивости системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. *Рассмотрим следующую систему нелинейных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)) \tag{7.90}$$

с начальным значением $\mathbf{x}(0)$, *где вектор* $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ *при всех t, а функция* **G** *задана как* $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *и является непрерывно дифференцируемой. Положим* $\mathbf{x}^*$ *стационарным решением этой системы, заданным равенством* $\mathbf{G}(\mathbf{x}^*) = 0$. *Определим линейный оператор* **A** *следующим образом:*

$$\mathbf{A} = D\mathbf{G}(\mathbf{x}^*),$$

где $D\mathbf{G}(\mathbf{x}^*)$ *является якобианом функции* **G** *в точке* $\mathbf{x}^*$.

Предположим, что $m \le n$ *собственных значений оператора* **A** *имеют строго отрицательную вещественную часть, а остальные имеют строго положительную вещественную часть. Тогда существует окрестность точки* $\mathbf{x}^*$ $\mathbf{B}(\mathbf{x}^*) \subset \mathbb{R}^n$ *и m-мерное многообразие* $M \subset \mathbf{B}(\mathbf{x}^*)$, *такие, что при любом начальном значении* $\mathbf{x}(0) \in M$ *система дифференциальных уравнений* (7.90) *имеет единственное решение и на нем выполняется свойство* $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^*$ *при* $t \to \infty$.

Другими словами, в этих теоремах утверждается, что решение системы будет устойчивым в некотором подмногообразии исходного многообразия только в том случае, когда существует некоторое непустое подмножество множества собственных значений соответствующего линейного оператора, имеющих отрицательную вещественную часть. К счастью, в контексте нашей задачи это именно то, что нам требуется, чтобы начальное значение $I(0)$ было определено единственным образом так, чтобы начальная пара значений инвестиций и капитала лежала на этом подмногообразии.

Вооружившись этими теоремами, мы можем перейти к анализу переходной динамики в q-теории инвестиций. Чтобы убедиться, что экономика сходится к стационарному значению количества капитала, построим графики уравнений (7.84) и (7.88) в пространстве $K - I$ (см. рис. 7.1). Кривая, соответствующая уравнению $\dot{K} = 0$, направлена вверх, так как при большем количестве капитала для покрытия его амортизации требуется большее количество инвестиций. Над этой кривой находятся точки, где инвестиции превышают количество, необходимое для покрытия амортизации, и поэтому там $\dot{K} > 0$. Во всех точках под этой кривой $\dot{K} < 0$. С другой стороны, график уравнения (7.88) $\dot{I} = 0$ может оказаться немонотонным. Несмотря на это, нетрудно убедиться, что в некоторой окрестности стационарного состояния он направлен вниз (см. упражнение 7.28). Справа от него значение $f'(K)$ меньше, и поэтому $\dot{I} > 0$. Во всех точках слева от него $\dot{I} < 0$. На рис. 7.1 показаны фазовый портрет этой системы и одномерная седловая траектория (многообразие), часто называемая устойчивой траекторией.

Далее нетрудно убедиться, что при произвольном начальном значении капитала $K(0)$ единственное решение задачи описывается инвестициями с начальным значением $I(0)$, сходящимися к их значению в стационарном состоянии $I^* = \delta K^*$. В частности, нетрудно показать, что если $K(0) < K^*$, то $I(0) > I^*$ и инвестиции монотонно убывают во времени к I^* (см. упражнение 7.28). Этот вывод понятен на интуитивном уровне. Издержки приспособления дестимулируют значительные инвестиции и поэтому фирма не может моментально изменить количество капитала до его стационарного значения. Однако в силу наличия убывающей предельной производительности капитала выгода от его увеличения более высока при малом количестве капитала. Следовательно, в начальный момент времени фирма будет готова понести большие издержки приспособления и увеличить количество капитала, поэтому начальное значение инвестиций $I(0)$ будет велико. По мере накопления капитала $K(t) > K(0)$ выгоды от дальнейшего увеличения его количества снижаются, и фирма снижает инвестиции до их стационарного значения.

Существует два способа убедиться, что седловое решение задачи на рис. 7.1, сходящееся к стационарному состоянию (K^*, I^*) и имеющее начальное значение $(K(0), I(0))$, является единственным решением. Первый способ, более строгий и при этом более простой, следует из теоремы 7.14. Как мы отметили выше, условия теоремы выполняются в этой задаче. Отсюда следует, что траектория капитала и инвестиций, удовлетворяющая необходимым условиям оптимума (то есть траектория с начальным значением $(K(0), I(0))$, сходящаяся к стационарному состоянию (K^*, I^*)), является единственной оптимальной траекторией. Поэтому другие траектории, например с начальным значением $I'(0)$ или $I''(0)$ не могут быть оптимальными.

Второй способ, более широко описанный в литературе, не такой строгий и полный, как использование теоремы 7.14. Его задача показать, что на решениях с начальным значением инвестиций, отличным от $I(0)$, не выполняются необходимые условия оптимума первого порядка или условие трансверсальности. Рассмотрим, например, начальное значение инвестиций, равное $I'(0) > I(0)$. Из фазовой диаграммы на рис. 7.1 нетрудно понять, что из необходимых условий оптимума следует, что значения

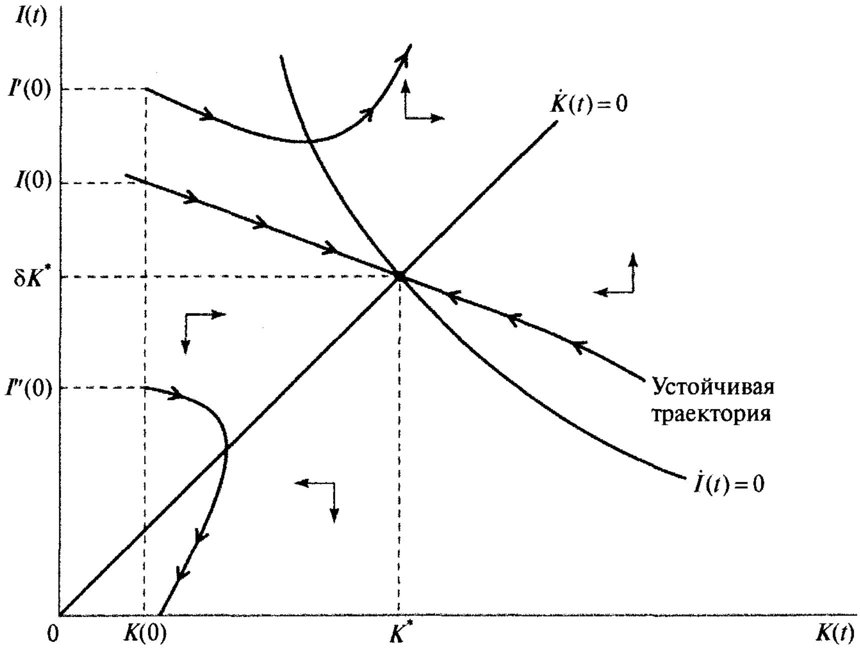


Рис. 7.1. Динамика капитала и инвестиций в q-теории

капитала $K(t)$ и инвестиций $I(t)$ в этом случае расходятся к бесконечности. Отсюда следует, что произведение $q(t)K(t)$ будет расходиться к бесконечности со скоростью, превышающей r, что противоречит условию трансверсальности $\lim\limits_{t\to\infty}\exp(-rt)q(t)K(t)=0$. Чтобы убедиться в этом, формально заметим, что на траектории с начальным значением инвестиций $I'(0)$ выполняется неравенство $\dot K(t)/K(t)>0$ и поэтому

$$\frac{\partial(q(t)K(t))/\partial t}{q(t)K(t)} \geq \frac{\dot q(t)}{q(t)} = \frac{\dot I(t)\phi''(I(t))}{1+\phi'(I(t))} = r+\delta-f'(K(t))/(1+\phi'(I(t))),$$

где первое равенство использует условия (7.86) и (7.87), а второе получается подстановкой условия (7.88). $f'(K(t))\to 0$ при $K(t)\to\infty$, и поэтому мы имеем следующее неравенство:

$$\lim_{t\to\infty}\exp(-rt)q(t)K(t) \geq \lim_{t\to\infty}\exp(-rt)\exp((r+\delta)t) = \lim_{t\to\infty}\exp(\delta t)>0,$$

которое противоречит условию трансверсальности.

С другой стороны, при начальном значении инвестиций $I''(0) < I(0)$ функция инвестиций $I(t)$ примет нулевое значение в некоторый конечный момент времени (на рис. 7.1 траектория решения пересекается с горизонтальной осью). Количество капитала $K(t)$ также будет стремиться к нулю (хотя и не достигнет его за конечный промежуток времени).

Начиная с момента времени, когда $I(t) = 0$, мы также имеем $q(t) = 1$, и поэтому $\dot{q}(t) = 0$ (по условию (7.86)). Более того, из условий Инада следует, что $f'(K(\mathrm{t})) \to \infty$ при $K(t) \to 0$. Следовательно, после того как инвестиции $I(t)$ достигнут нуля, необходимое условие оптимума $\dot{q}(t) = (r+\delta)q(t) - f'(K(t))$ будет нарушено, что говорит о том, что траектория с начальным значением инвестиций $I''(0) < I(0)$ не может быть оптимальной. Причина, по которой подобные рассуждения не являются в точности верными, состоит в том, что они опираются на необходимые условия непрерывного внутреннего оптимума. Однако при $I(0) = 0$ значение инвестиций не лежит во внутренности множества допустимых значений переменной управления (в данном случае множества $\mathbb{R}_+$). Несмотря на возможные проблемы, этот способ часто используется в анализе различных задач (включая неоклассическую задачу роста). Необходимо отметить, что все эти результаты могут быть получены более строгим путем, и поэтому все выводы, получаемые при использовании этого способа, остаются верными (см. упражнение 7.29 в этой главе и упражнение 8.14 в следующей для неоклассической модели роста).

Вернемся к анализу q-теории инвестиций. Джеймс Тобин утверждал, что отношение стоимости дополнительной единицы капитала для фирмы к ее ликвидационной стоимости является для фирмы мерой стоимости ее инвестиций. А именно, в случае когда это отношение высоко, фирма будет делать много инвестиций. В стационарном состоянии его значение становится равным единице или числу, близкому к единице. В нашей формулировке задача q Тобина описывается сопряженной переменной $q(t)$. Чтобы убедиться в этом, обозначим текущую (максимизированную) стоимость фирмы, обладающей запасом капитала $K(t)$, как $V(K(t))$. Из рассуждений, аналогичных сделанным нами выше, следует, что

$$V'(K(t)) = q(t), \tag{7.91}$$

и поэтому значение $q(t)$ в точности показывает насколько изменится стоимость фирмы при увеличении количества капитала на 1 доллар.

В стационарном состоянии выполняется условие $\dot{q}(t) = 0$, и поэтому значение $q^* = f'(K^*)/(r + \delta)$ примерно равно 1 в случае, если значение $\phi'(\delta K^*)$ мало. Однако вне стационарного состояния значение $q(t)$ может значительно отличаться от этой величины. Высокое значение $q(t)$ является сигналом для фирмы о необходимости дополнительных инвестиций. Следовательно, в этой модели q Тобина или, аналогично, сопряженная переменная $q(t)$ описывают стимулы фирмы для проведения инвестиций.

Данная q-теория инвестиций является одной из основных моделей в макроэкономике и финансах, так как прокси-переменная для $q(t)$ может быть построена на основании данных о стоимости акций фирмы и ее бухгалтерской отчетности. Если рыночная капитализация фирмы превышает ее ликвидацонную стоимость, то значение q Тобина для нее оказывается больше единицы, и поэтому стоимость капитала для фирмы превышает его ликвидационную стоимость, находящуюся на балансе. Однако возможность применимости такого подхода для анализа инвестиций широко обсуждается экономистами, отчасти потому что q Тобина не отражает всю необходимую информацию при наличии фиксированных издержек инвестиций или при необратимых инвестициях. Более того, с теоретической точки зрения (и на практике) релевантной переменной является предельное q, описывающее предельное изменение стоимости фирмы при инфинитезимально малых инвестициях (что видно из уравнения (7.91)), в то время как из данных мы можем построить только среднее q. Различия между этими двумя переменными могут быть довольно значительными.

7.9. Основные выводы

В этой главе мы описали основные методы, применяемые в теории динамической оптимизации в непрерывном времени. Вследствие этого она оказалась довольно насыщенной с математической точки зрения. Для многих читателей материал этой главы может оказаться менее знакомым, чем методы динамической оптимизации в дискретном времени, изложенные в главе 6. Основная трудность состоит в том, что при оптимизации в непрерывном времени мы выбираем функцию (даже в случае конечного горизонта планирования), в то время как при оптимизации в дискретном времени оптимизация ведется по векторам или бесконечным последовательностям. Это осложняет задачу и приводит к некоторым техническим трудностям, не имеющим отношения к экономическому содержанию задач. Поэтому в этой главе мы сделали лишь общий обзор основных результатов, уделив основное внимание наиболее часто используемым при анализе экономических задач, и остановились лишь на части доказательств. Эти доказательства были в основном приведены для того, чтобы читатель смог увидеть логику вывода основных результатов и смог развить лучшую интуицию в их понимании.

Опишем вкратце основные результаты данной главы. Для решения большинства задач теории экономического роста и макроэкономики используются методы оптимального управления для задач с дисконтированием будущего на бесконечном горизонте планирования. В теореме 7.13 приведены необходимые условия непрерывного внутреннего оптимума для таких задач. В теореме 7.14 приведены достаточные условия единственного глобального максимума при вогнутости максимального гамильтониана (так как эти условия используют информацию о сопряженной переменной, они постулируют существование возможного решения задачи). Важнее то, что проверить выполнение условий теоремы 7.14

часто проще, чем проверить выполнение условий теоремы 7.13 (в частности, предположения 7.1). Поэтому в книге мы используем следующую стратегию поиска решения задачи максимизации:

1. Использовать необходимые условия оптимума из теоремы 7.13 для поиска *возможного решения*, что можно сделать даже не проверяя выполнение предположения 7.1.
2. Проверить выполнение условия вогнутости для найденного возможного решения. Если они выполняются, то оно действительно является оптимальной траекторией. Если при этом максимальный гамильтониан является строго вогнутым, оно является единственным решением задачи максимизации.

Необходимо отметить, что, несмотря на то, что методы теории оптимального управления могут быть менее знакомы читателю, чем методы динамического программирования в дискретном времени, именно они используются в большинстве задач теории экономического роста и других областей макроэкономики. Более того, хотя некоторые задачи естественным образом формулируются в дискретном времени, анализ многих задач оказывается более простым в непрерывном времени. Некоторые экономисты считают, что это утверждение относится к большинству задач теории экономического роста. Независимо от того, верно ли это утверждение, экономисту необходимо обладать навыками решения задач как в дискретном, так и в непрерывном времени, так как выбор типа модели диктуется ее экономическим содержанием, а не привычками исследователя. Это наблюдение является основной причиной того, что мы в равных пропорциях остановились на описании методов дискретной и непрерывной оптимизации.

Существует еще одна причина для изучения теории оптимального управления. Наиболее мощный результат теории оптимального управления, принцип максимума Понтрягина, является не только математической теоремой, но и во многом экономическим утверждением. Как мы показали в этой главе, принцип максимума имеет естественную интуитивную интерпретацию в рамках максимизации суммы текущего выигрыша и будущей стоимости запаса и в рамках уравнения стоимости актива для целевой функции задачи. Эта экономическая интуиция является не только полезной для иллюстрации сути математического аппарата, но и проливает свет на большое множество задач в макроэкономике, экономике труда, финансах и других областях экономики, в которых используются методы динамической оптимизации.

В этой главе мы завершаем изложение оснований теории экономического роста, включающих в себя понятие общего равновесия в агрегированной модели экономики, а также введение в основные математические методы, используемые в динамическом экономическом анализе. В дальнейшем мы перейдем к изложению материала, имеющего более насыщенное экономическое содержание.

7.10. Литература

Основной материал этой главы изложен во многих прекрасных учебниках по прикладной математике. Наша цель состоит в обзоре результатов, наиболее часто используемых экономистами, и демонстрации упрощенных версий доказательств наиболее важных теорем. Первая часть главы основана на вариационных рассуждениях и свойствах непрерывных функций, поэтому она во многом повторяет основные результаты вариационного исчисления. Однако большинству экономистов не нужно подробно изучать вариационное исчисление, во-первых, потому что теория оптимального управления расширяет его результаты и во-вторых, потому что большинство естественных задач вариационного исчисления возникает в физике и других естественных науках. Интересующийся читатель может обратиться к учебнику [Gelfan, Fomin 2000]. Учебник [Chiang 1995] содержит простое и легко читаемое введение в вариационное исчисление с экономическими примерами.

Теория оптимального управления была разработана в труде [Pontryagin and al 1962]. По этой причине основная теорема о необходимых условиях оптимума называется принципом максимума Понтрягина. Тип задач, который мы рассматриваем в этой книге (и в экономике в целом), в теории оптимального управления называется задачей Лагранжа. Принцип максимума в общем виде формулируется для более простой так называемой задачи Майера или более общей задачи Больца, однако все эти формулировки по сути эквивалентны друг другу и при формулировке задачи в векторной форме исследователь может легко перейти от одной задачи к другой с помощью простых преобразований. Более современный подход, который лежит в основе необходимых условий оптимума для задачи на конечном горизонте планирования, разработан в книге [Rockefeller 1971].

Мы можем предложить читателю ряд учебников по оптимальному управлению различного уровня сложности. Чтение большинства из них достаточно сложно, и при этом доказательства теорем в них не являются полностью строгими. Прекрасным источником, полностью описывающим все результаты на продвинутом уровне, является учебник [Fleming, Rishel 1975]. В первой части этой книги приведен ряд теорем о существовании и непрерывности решения задачи оптимального управления, однако для более частного случая задачи по сравнению с теми, которые покрываются теоремой 7.15 (и возникающими в экономических приложениях). Доказательство теоремы о существовании решения задачи оптимального управления в параграфе 7.6 основано на части доказательства из учебника [Fleming, Rishel 1975, chapter 3] и на некоторых идеях доказательства из работы [Baum 1976], которое, в свою очередь, является расширением классического доказательства теоремы о существовании решения задачи оптимального управления на бесконечном горизонте планирования из работы [Cesari 1976].В частности, последняя часть доказательства теоремы 7.15, в которой утверждается измеримость оптимальной функции управления $\hat{y}(t)$, может быть проведена более подробно с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям В. Флеминга и Р. Ришеля (которые используют теоремы Лузина). В экономической литературе теоремы о существовании решения представлены в работах: [Magill 1981] и [Romer 1986b], однако при большем количестве ограничений. В обеих работах используется другой метод доказательства этих теорем.

Прекрасная (но при этом достаточно абстрактная и сложная) книга [Luenberger 1969] позволяет получить более глубокое понимание достаточных условий существования решения задачи оптимального управления и структуры необходимых условий оптимума. Результаты, приведенные в этой книге, являются достаточно общими и покрывают оптимизацию как в дискретном, так и в непрерывном времени. В ней также хорошо описывается разница между задачами максимизации на функциональном пространстве и конечномерной максимизации, а также причины того, когда и почему задача бесконечномерной оптимизации может не иметь решений.

Основные теоремы для задачи оптимизации на бесконечном горизонте планирования (теоремы 7.9, 7.13, 7.11 и 7.14) представлены нами с граничным условием вида $\lim_{t\to\infty} b(t)x(t) \geq x_1$. Это важно в нашем анализе, так как ограничение на количество финансовых активов домохозяйства в конкурентном равновесии в неоклассической модели экономического роста (условие отсутствия игр Понци) принимает такой вид. Поэтому стандартный результат с граничным условием $\lim_{t\to\infty} x(t) \geq x_1$ не может быть использован напрямую. Большинство авторов предлагают использовать следующую логику: пренебречь граничным условием, применить принцип максимума, и затем в случае необходимости использовать граничное условие в конце. Несмотря на то что подобная процедура дает в большинстве случаев «правильный» ответ, он не является корректной с математической точки зрения. Принцип максимума не может быть применим к экономическим задачам без граничного условия, так как в этом случае решение задачи зачастую не существует (см., например, упражнение 8.2 в следующей главе). Следовательно, использование принципа максимума для решения таких задач невозможно. Эту проблему можно решить некоторым усилением граничного ограничения в принципе максимума.

Заметим также, что в отличие от стандартного подхода в учебниках по теории экономического роста и макроэкономике, мы уделили основное внимание достаточным условиям оптимума в вогнутой задаче оптимального управления, в частности в теореме 7.14. Мы выбрали такой подход к изложению материала, так как принцип максимума описывает только необходимые условия непрерывного внутреннего оптимума. Однако убедиться в существовании такого решения зачастую не просто. Так как большинство экономических задач являются вогнутыми, теорема 7.14 или другие теоремы о достаточных условиях оптимума (например, теоремы 7.5, 7.6, 7.8 или 7.11) позволяют убедиться в том, что возможное решение, удовлетворяющее принципу максимума, действительно является решением задачи, на котором достигается глобальный максимум.

Необходимо отметить, что все теоремы о достаточных условиях оптимума в этой главе были сформулированы и доказаны в предположении о том, что функция управления $y(t)$ (или $\mathbf{y}(t)$) является непрерывной. Схожая логика может быть использована для доказательства теорем в предположении о кусочной непрерывности функции управления. Строгие доказательства для этого случая читатель может найти в учебнике [Seierstad, Sydsaeter 1977].

Существует целый ряд более подходящих для экономистов учебников, в которых авторы уделяют внимание экономическим приложениям теории оптимального управления. Наилучшим из них является учебник [Seierstad, Sydsaeter 1977]. Несмотря на то что изложение материала в нем не настолько строго, как, например, в книге [Fleming, Rishel 1975] и в нем не приведены подробные доказательства многих теорем, он содержит ряд полезных результатов и его изучение может заинтересовать экономистов. В нем также показано, как основные теоремы оптимального управления могут быть использованы для решения экономических задач. Экономические приложения оптимального управления также описаны в книгах [Kamien, Schwartz 1981] и [Leonard, Van Long 1992]. Классическим источником является работа [Arrow, Kurz 1970], в которой покрыт аналогичный материал и представлены важные следствия для задач теории экономического роста и схожих с ними задач. В этой книге также приведена теорема Эрроу о достаточных условиях оптимума, которая впервые была опубликована в работе [Arrow 1968]. Эта теорема является усилением теоремы Мангасаряна о достаточных условиях оптимума (теоремы 7.5), опубликованной в книге [Mangasarian 1966].

Стоит выделить две недавно выпущенные книги, доступные для экономистов: [Weitzman 2003] и [Caputo 2005]. Доказательство теорем о достаточных условиях оптимума в этой главе во многом схоже с доказательствами в книге [Caputo 2005]. В книге [Weitzman 2003] приводится хорошее обсуждение экономических приложений принципа максимума, в особенности в контексте экономики окружающей среды и экономики исчерпаемых природных ресурсов.

Необходимо отметить, что в литературе отсутствует согласие относительно роли условия трансверсальности. Примеры, приведенные в параграфе 7.4, показывают, что условие трансверсальности в сильном виде, полезное в анализе многих экономических задач, выполняется не всегда. Впервые такие примеры были приведены в работе [Halkin 1974]. Условие трансверсальности в слабой форме в виде уравнения (7.56) впервые было выведено в работе [Michel 1982]. Результаты этой работы во многом схожи с теоремой 7.12, однако формулировка теоремы 7.12 в этой главе основана на более сильных предположениях. В работе [Michel 1982] рассматривается стационарная задача и предполагается, что функция выигрыша принимает неотрицательные значения. Также в ней накладывается ряд дополнительных технических предположений, верификация которых не всегда оказывается простой. В этой работе также приведен еще один набор достаточных условий оптимума при условии трансверсальности в сильной форме (7.69). Более общее (слабое) условие трансверсальности, подходящее для экономических задач, представлено в работах: [Benveniste, Scheinkman 1982] и [Araujo, Scheinkman 1983]. Теорема 7.14 в этой главе сформулирована при несколько других условиях, проверка которых более проста.

Классической ссылкой на задачу использования невозобновляемого природного ресурса является работа [Hotelling 1931]. Подробный анализ и детальное обсуждение этой задачи приведено в работе [Weitzman 2003]. Работы [Dasgupta, Heal 1979] и [Conrad 1999] являются другими полезными ссылками на приложения экономики окружающей среды и использования невозобновляемых ресурсов. Классическими ссылками на теорию инвестиций с издержками приспособления капитала и q-теорию инвестиций являются работы [Tobin 1969] и [Hayashi 1982]. Подробный анализ q-теории инвестиций присутствует во всех учебниках по макроэкономике магистерского уровня, например в [Blanchard, Fischer 1989; Бланшар, Фишер 2014] и [Romer 2006; Ромер 2015], а также в книге [Dixit, Pyndyck 1994] по теории инвестиций при наличии неопределенности и в работе [Caballero 1999]. В последней работе также содержится критика q-теории инвестиций.

7.11. Упражнения

7.1. Рассмотрите задачу максимизации (7.2) при ограничениях (7.3) и (7.4) из параграфа 7.1. Предположите, что при заданной паре функций существует интервал (t', t''), где $t' < t''$, такой, что для всех $t \in (t', t'')$ выполняется следующее неравенство:

$$\dot{\lambda}(t) \neq -\left[f_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \lambda(t) g_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))\right].$$

Докажите, что в этом случае пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ не может быть непрерывным внутренним решением задачи максимизации (7.2). Используйте этот вывод и покажите, что условия (7.12), (7.11) и $\lambda(t_1) = 0$ являются необходимыми условиями внутреннего оптимума задачи $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$. [Подсказка: чтобы упростить математические выводы, попробуйте предположить, что $g_y \neq 0$.]

***7.2.** Предположите, что пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ является решением задачи (7.2) при ограничениях (7.3) и (7.4). Покажите, что максимальный гамильтониан $M(t, \hat{x}(t), \lambda(t))$, определенный в равенстве (7.20), является дифференцируемой функцией по аргументу x в точке $\hat{x}(t)$ и при всех $t \in [0, t_1]$ удовлетворяет равенству $\dot{\lambda}(t) = -M_x(t, \hat{x}(t), \lambda(t))$. [Подсказка: используйте тот факт, что мы предполагаем, что решение задачи является непрерывной функцией.]

7.3. Уравнение Эйлера—Лагранжа является основным уравнением вариационного исчисления. Оно описывает решение следующей задачи максимизации (при схожих с условиями теоремы 7.2 предположениях о регулярности):

$$\max_{x(t)} \int_0^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

при ограничении $x(t_1) = 0$. Предположите, что функция F является дифференцируемой по всем своим аргументам и что существует непрерывное внутреннее решение задачи максимизации. Так называемое уравнение Эйлера—Лагранжа, описывающее необходимые условия оптимума, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial F(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial x(t)} - \frac{\partial^2 F(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}(t)\partial t} = 0.$$

Выведите это уравнение из теоремы 7.2. [Подсказка: определите функцию $y(t)$ следующим образом: $y(t) \equiv \dot{x}(t)$.]

7.4. В этом упражнении вам понадобится использовать уравнение Эйлера—Лагранжа, выведенное в упражнении 7.3 для решения канонической задачи поиска кривой кратчайшего расстояния между двумя точками на плоскости, которая мотивировала Эйлера и Лагранжа на разработку методов вариационного исчисления. Рассмотрим на плоскости точки с координатами (z_0, u_0) и (z_1, u_1). Вам необходимо отыскать кривую, соединяющую эти точки и имеющую кратчайшую длину. Такая кривая может быть представлена в виде функции $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такой, что $u = x(z)$, вместе с начальным и конечным условиями $u_0 = x(z_0)$ и $u_1 = x(z_1)$. В дополнение естественным образом предположим, что кривая $u = x(z)$ является гладкой, что соответствует требованию о непрерывной дифференцируемости решения и существованию производной функции $x'(z)$. Для решения задачи вначале отметим, что длина кривой может быть вычислена по следующей формуле:

$$A[x(z)] \equiv \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1+[x'(z)]^2}\,dz.$$

Тогда задача сводится к минимизации такого интеграла по $x(z)$. Без ограничения общности сделаем предположение о том, что $(z_0, u_0) = (0, 0)$, заменим переменную $t = z$ и преобразуем задачу в более знакомую нам задачу максимизации интеграла:

$$-\int_0^{t_1} \sqrt{1+[x'(t)]^2}\,dt.$$

Докажите, что решение этой задачи удовлетворяет следующему условию:

$$\frac{d\left[x'(t)(1+(x'(t))^2)\right]}{dt} = 0.$$

Покажите, что это равенство выполняется, только если $x''(t) = 0$, и поэтому кривой с кратчайшим расстоянием между двумя точками на плоскости является прямая линия.

7.5. Докажите теорему 7.2. Уделите особое внимание построению допустимых вариаций, на которых для всех ε в некоторой окрестности нуля выполняется условие $x(t_1, \varepsilon) = x_1$. Что произойдет в случае, когда таких вариаций не существует?

7.6. **(a)** В примере 7.1 найдите выражение для начального значения потребления $c(0)$ как функции от $a(0)$, w, r и β.

(b) Как изменится начальное значение потребления $c(0)$ при изменении начального запаса $a(0)$? Как изменится траектория потребления $c(t)$?

(c) Как изменится траектория потребления, если вместо постоянного потока трудовых доходов w мы предположим, что трудовой доход потребителя изменяется во времени и задается функцией $[w(t)]_{t=0}^{t=1}$? Подробно объясните логику своих рассуждений.

7.7. Докажите, что если вещественная функция $\phi(x, y)$ является совместно (строго) вогнутой по (x, y), то функция $\Phi(x) = \max_y \phi(x, y)$ является (строго) вогнутой по x.

7.8. Докажите вариант теоремы 7.6, соответствующий теореме 7.2. [Подсказка: вместо уравнения $\lambda(t_1) = 0$ используйте для доказательства равенство $x(1) = \hat{x}(1) = x_1$.]

7.9. Докажите теорему 7.3. [Подсказка: покажите, что если решение задачи оптимизации удовлетворяет условию $x(t_1) > x_1$, то значение $\lambda(t_1)$ должно равняться нулю. Однако это не всегда так, если $x(t_1) = x_1$.]

7.10. Рассмотрим задачу максимизации (7.2) при ограничениях (7.3) и (7.4) и дополнительном ограничении $y(t) \geq 0$ при всех t (вместо предположения $y(t) \in \operatorname{Int}\mathcal{Y}(t)$). Как обычно, предположите, что функции f и g являются непрерывно дифференцируемыми. Покажите, что в этом случае необходимые условия оптимума выглядят следующим образом: $x(0) = x_0$,

$$H_y(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) \leq 0 \text{ для всех } t \in [0, t_1],$$

$$\dot{\lambda}(t) = -H_x(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) \text{ для всех t} \in [0, t_1],$$

$$\dot{x}(t) = H_\lambda(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t))$$

и $\lambda(t_1) = 0$, где гамильтониан $H(t, x, y, \lambda)$ определен таким же образом, как в уравнении (7.16). Более того, покажите, что гамильтониан удовлетворяет принципу максимума: при всех $y(t)$, таких, что $y(t) \geq 0$ и при всех $t \in [0, t_1]$ выполняется следующее неравенство:

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \lambda(t)) \geq H(t, \hat{x}(t), y(t), \lambda(t)).$$

***7.11.** Докажите теорему 7.7.

7.12. Докажите теорему 7.8.

7.13. Докажите теорему 7.11. [Подсказка: используйте метод доказательства теоремы 7.6, однако в данном случае при интегрировании по частям выражения для $\dot{\lambda}$ возникает дополнительное слагаемое. Вам необходимо показать, что оно увеличивает значение правой части неравенства, соответствующего неравенству (7.24).]

7.14. Докажите, что условия (7.65)–(7.67) выполняются в задаче оптимального управления на бесконечном горизонте планирования с дисконтированием, рассмотренной в теореме 7.13. [Подсказка: используйте теорему 7.9.]

7.15. Рассмотрите задачу максимизации на конечном горизонте планирования в непрерывном времени, в которой целевая функция задана следующим образом:

$$W(x(t), y(t)) = \int_0^{t_1} f(t, x(t), y(t))dt$$

при начальном условии $x(0) = x_0$, конечном значении $t_1 < \infty$ и ограничении

$$\dot{x}(t) = g(t,\ x(t),\ y(t)).$$

Предположите, что значение t_1 также является переменной выбора.

(a) Покажите, что функция $W(x(t), y(t))$ может быть представлена в следующем виде:

$$W(x(t),\ y(t)) = \int_0^{t_1} [H(t,\ x(t),\ y(t)) + \dot{\lambda}(t)x(t)]dt - \lambda(t_1)x(t_1) + \lambda(0)x_0,$$

где функция $H(t, x, y) \equiv f(t, x(t), y(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), y(t))$ является гамильтонианом задачи, а $\lambda(t)$ — сопряженной переменной.

(b) Далее предположите, что пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ вместе с некоторым конечным значением $\hat{t}_1$ являются решением этой задачи. Рассмотрите следующий класс вариаций:

$$y(t,\ \varepsilon) = \hat{y}(t_1) + \varepsilon\eta(t) \text{ при } t \in [0,\ \hat{t}_1]$$

и

$$y(t,\ \varepsilon) = \hat{y}(\hat{t}_1) + \varepsilon\eta(t) \text{ при } t \in \left[\hat{t}_1,\ \hat{t}_1 + \varepsilon\Delta t\right],\ t_1 = \hat{t}_1 + \varepsilon\Delta t.$$

Обозначьте соответствующую траекторию переменной состояния как $x(t, \varepsilon)$. Найдите значение целевой функции $W(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ на этой вариации. Объясните, почему эта вариация является допустимой при достаточно малых значениях ε.

(c) Покажите, что для допустимой вариации выполняется следующее равенство:

$$\left.\frac{dW(x(t,\ \varepsilon), y(t,\ \varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_0^{\hat{t}_1} [H_x(t,\ \hat{x}(t),\ \hat{y}(t)) + \dot{\lambda}(t)]\frac{\partial x(t,\ \varepsilon)}{\partial\varepsilon}dt +$$
$$+ \int_0^{\hat{t}_1} H_y(t,\ \hat{x}(t),\ \hat{y}(t))\eta(t)dt +$$
$$+ H\left(\hat{t}_1,\ \hat{x}\left(\hat{t}_1\right),\ \hat{y}\left(\hat{t}_1\right)\right)\Delta t - \lambda\left(\hat{t}_1\right)\frac{\partial x\left(\hat{t}_1,\ \varepsilon\right)}{\partial\varepsilon} + \lambda\left(\hat{t}_1\right)\dot{x}\left(\hat{t}_1\right)\Delta t.$$

(d) Объясните, почему выражение в части (c) этого упражнения должно равняться нулю.

(e) Что произойдет с выражением в части (c) при переходе к пределу при $\hat{t}_1 \to \infty$?

7.16. Рассмотрите задачу с дисконтированием на бесконечном горизонте планирования с функцией выигрыша и ограничивающей функцией вида $f(t, x(t), y(t)) = \exp(-\rho t)f(x(t), y(t))$ и $g(t, x(t), y(t)) = g(x(t), y(t))$. Докажите, что если допустимая пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))_{t\geq 0}$ является решением задачи динамической оптимизации с начальным моментом времени $t = 0$ и с начальным условием $x(0) = x_0$, то при любом вещественном $s \geq 0$ пара функций $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))_{t\geq s}$ также допустима и является решением задачи динамической оптимизации с начальным моментом времени $t = s$ и с начальным условием $x(s) = x_0$.

***7.17.** Рассмотрите задачу оптимального управления на бесконечном горизонте планирования в общем виде с функцией выигрыша вида $f(t, x, y)$. Обобщите условие трансверсальности (7.69) из теоремы 7.13 с помощью усиления предположения 7.1 так, что существует вещественное $M < \infty$, такое, что при некотором вещественном $\kappa > 0$ выполняется неравенство $|f_y(t, x, y)| \leq M\exp(-\kappa t)$.

7.18. Рассмотрите модификацию задачи Хотеллинга об оптимальном использовании исчерпаемого ресурса в следующем виде:

$$\max \int_0^\infty \exp(-\rho t)\log y(t)dt$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = -y(t),$$

$$x(0) = x_0 > 0 \text{ и } \lim_{t\to\infty} x(t) \geq x_1 \in (0, x_0)$$

при $\rho > 0$ и $y \in (0, +\infty)$.

(a) Покажите, что в этой задаче предположение 7.1 не выполняется.

(b) Введите текущий гамильтониан $\hat{H}(x, y, \mu)$ и сопряженную переменную $\mu(t)$ и покажите, что из принципа максимума следуют равенства:

$$\mu(t) = \mu(0)\exp(\rho t)$$

и

$$y(t) = \mu(0)^{-1}\exp(-\rho t)$$

при некотором значении $\mu(0)$.

(c) Покажите, что выполняется условие трансверсальности в слабой форме (7.68). [Подсказка: используйте равенство

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho t)\hat{H}(x, y, \mu)\right] = \lim_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho t)(-\log\mu(0) - \rho t - 1)\right] = 0.]$$

(d) Покажите, что условие трансверсальности в сильной форме не выполняется. [Подсказка: используйте неравенство

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho t)\mu(t)x(t)\right] = \mu(0)x_1 > 0.]$$

(e) Объясните, почему в этой задаче не выполняется условие трансверсальности в сильной форме и как его необходимо изменить. [Подсказка: используйте равенство

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho t)\mu(t)(x(t)-x_1)\right]=0.]$$

***7.19.** Рассмотрите следующую задачу максимизации с дисконтированием на бесконечном горизонте планирования:

$$\max\int_0^\infty \exp(-\rho t)[2y(t)^{\frac{1}{2}}+\log(x(t))]dt$$

при ограничениях $x(0)=\rho^{-1}$ и

$$\dot{x}(t)=-\rho x(t)y(t).$$

(a) Покажите, что эта задача удовлетворяет условиям теоремы 7.14.

(b) Постройте текущий гамильтониан и выведите необходимые условия оптимума для сопряженной переменной $\mu(t)$.

(c) Покажите, что следующие функции являются решением задачи максимизации: $y(t) = 1$, $x(t) = \exp(-\rho t)/\rho$ и $\mu(t) = \exp(\rho t)$ при всех t.

(d) Покажите, что решение из части (c) этого упражнения не удовлетворяет «наивному условию трансверсальности» $\lim_{t\to\infty}\exp(-\rho t)\mu(t)=0$.

Как выглядит подходящее условие трансверсальности в данном случае?

7.20. Рассмотрите задачу потребления невозобновляемого ресурса из примера 7.3. Покажите, что решение, полученное нами в этом примере, удовлетворяет условию трансверсальности (7.56).

7.21. Это упражнение обобщает пример 7.2. Рассмотрите следующую задачу оптимального роста без дисконтирования:

$$\max\int_0^\infty\left[u(c(t))-u(c^*)\right]dt$$

при ограничении

$$\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-\delta k(t)$$

и начальном запасе капитала $k(0) > 0$, где c^* обозначает потребление при золотом правиле:

$$c^*=f(k^*)-\delta k^*.$$

(a) Постройте гамильтониан для этой задачи с сопряженной переменной $\lambda(t)$.

(b) Опишите решение этой задачи оптимального роста.

(c) Покажите, что на этом решении не выполняется условие трансверсальности вида $\lim_{t\to\infty} \lambda(t)k(t) = 0$. Объясните почему.

7.22. Рассмотрите задачу оптимального управления на бесконечном горизонте планирования, заданную условием (7.32) при ограничениях (7.33) и (7.34). Предположите, что задача имеет квазистационарную структуру, а именно что

$$f(t, x, y) \equiv \beta(t) f(x, y)$$

и

$$g(t, x, y) \equiv g(x, y),$$

где функция $\beta(t)$ представляет собой фактор дисконтирования на моменте времени, отстоящего в будущем на t от текущего момента.

(a) Постройте гамильтониан для этой задачи и опишите необходимые условия оптимума.

(b) Покажите, что решение этой задачи является согласованным во времени (то есть решение, выбранное в некоторый момент времени s не может быть улучшено с помощью изменения траектории переменной управления в некоторый будущий момент времени $s' > s$) только если функция $\beta(t)$ имеет вид $\beta(t) = \exp(-\rho t)$.

(c) Проинтерпретируйте результат пункта (b) этого упражнения и объясните, чем он отличается от утверждения леммы 7.1.

7.23. Рассмотрите следующую задачу динамической оптимизации:

$$\max_{[x(t), y(t)]} \int_0^1 f(x(t), y(t))dt$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = y(t)^2,$$

$x(0) = 0$ и $x(1) = 0$, где $y(t) \in \mathbb{R}$, а функция f является произвольной непрерывно дифференцируемой функцией. Покажите, что единственное решение этой задачи максимизации не удовлетворяет необходимым условиям оптимума из теоремы 7.2. Объясните почему и свяжите ваш ответ на этот вопрос с упражнением 7.5.

***7.24.** Рассмотрите следующую задачу динамической оптимизации на бесконечном горизонте планирования:

$$\max \int_0^\infty \exp(-\rho t) u(c(t))dt$$

при начальном запасе капитала $k(0)$ и законе его накопления вида

$$\dot{k}(t)=\begin{cases} f(k(t))-\delta k(t)-c(t) & \text{если} \quad f(k(t))-c(t)\geq \underline{k}, \\ 0 & \text{если} \quad f(k(t))-c(t)<\underline{k}, \end{cases}$$

где $\underline{k} > \delta k^*$ при $k^* = f^{-1}(\rho+\delta)$ обозначает минимальный возможный размер инвестиций. Предположим, что $k(0) = k^*$. Покажите, что такая задача оптимального роста не имеет решения. Объясните почему и свяжите ваш ответ с теоремой 7.15. [Подсказка: покажите, что в данном случае траектория $k(t) = k^*$, которая является оптимальной при отсутствии требования о минимальном размере инвестиций оказывается недопустимой. Далее покажите, что значение функции стоимости на этой траектории может быть аппроксимировано сколь угодно близко выбором правила чередования $f(k(t)) - c(t) = 0$ на временном интервале длины $\Delta_1 > 0$ и $f(k(t)) - c(t) = \underline{k}$ на временном интервале длины $\Delta_2 > 0$ так, что среднее значение количества капитала $k(t)$ остается близко к k^*. Отсюда покажите, что допустимая пара функций $(k(t), c(t))$ всегда может быть улучшена с помощью такого правила.

7.25. (a) Рассмотрим задачу оптимального роста из параграфа 7.7. Покажите, что если моментальная функция полезности имеет вид $u(c) = \log c$, то часть 3 предположения 7.1 не выполняется.

(b) Далее предположим, что моментальная функция полезности u: $\mathbb{R}_+ \setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ является непрерывной, строго возрастающей и вогнутой, а также, что u непрерывно дифференцируема на полупрямой $[\varepsilon, +\infty)$ при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$. Покажите, что если измененная задача, в которой множеством значения функции $c(t)$ является $[\varepsilon, +\infty)$ имеет оптимальное решение, на котором $c(t) > \varepsilon$ при всех t, то такая траектория переменной управления также является решением исходной задачи с моментальной функцией полезности u, заданной на множестве $\mathbb{R}_+ \setminus\{0\}$.

(c) Покажите, что для любой задачи оптимального роста из параграфа 7.7 существует вещественное $\varepsilon > 0$, такое, что для всех t выполняется неравенство $c(t) > \varepsilon$.

7.26. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления с дисконтированием в непрерывном времени на бесконечном горизонте планирования:

$$\max \int_0^\infty \exp(-\rho t)u(c(t))dt$$

при ограничении

$$\dot{x}(t) = g(x(t)) - c(t)$$

и начальном условии $x(0) > 0$. Предположите, что функция $u(\cdot)$ является строго возрастающей и строго вогнутой и что $\lim_{c\to\infty} u'(c) = 0$, $\lim_{c\to 0} u'(c) = \infty$, а функция $g(\cdot)$ является возрастающей и строго вогнутой и $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} g'(x) = \infty$.

(a) Постройте текущий гамильтониан и выведите уравнение Эйлера, описывающее оптимальную траекторию.

(b) Покажите, что стандартное условие трансверсальности и уравнение Эйлера являются необходимыми условиями оптимума в данной задаче.

(c) Опишите оптимальные траектории в этой задаче и их поведение на бесконечности.

7.27. Рассмотрите q-теорию инвестиций из параграфа 7.8.

(a) Убедитесь в том, что предположение 7.1 выполняется в случае, когда $k \in [\varepsilon, \bar{k}]$.

(b) Рассмотрите измененную задачу, в которой $k \in [\varepsilon, \bar{k}]$. Покажите, что если существует решение этой измененной задачи, на котором $k(t) > \varepsilon$ при всех t, то оно также является решением исходной задачи при $k \in \mathbb{R}_+$. [Подсказка: используйте те же рассуждения, что и при решении упражнения 7.25.]

(c) Покажите, что всегда существует достаточно малое $\varepsilon > 0$, такое, что на решении измененной задачи выполняется неравенство $k(t) > \varepsilon$.

7.28. **(a)** В q-теории инвестиций покажите, что если $\phi''(I) = 0$ (для всех I), то оптимальная траектория инвестиций имеет разрыв и капитал моментально достигает своего оптимального значения.

(b) Покажите, что, как показано на рис. 7.1, график уравнения (7.88) имеет наклон вниз в окрестности стационарного состояния модели.

(c) Вместо графического анализа модели линеаризуйте уравнения (7.84) и (7.88) и покажите, что соответствующий линейный оператор имеет одно положительное и одно отрицательное собственные значения. Объясните, почему из этого следует, что оптимальная траектория инвестиций будет сходиться к стационарному состоянию.

(d) Докажите, что если $K(0) < K^*$, то $I(0) > I^*$ и $I \downarrow I^*$.

(e) Выведите дифференциальные уравнения q-теории инвестиций для случая, когда издержки приспособления имеют вид $\phi(I/K)$.

Как в этом случае изменяется значение предельного продукта капитала в стационарном состоянии?

(f) Как будут выглядеть оптимальные траектории капитала инвестиций в случае невозратных инвестиций в том смысле, что инвестиции не могут быть отрицательными, $I \geq 0$.

7.29. Рассмотрите возможную оптимальную траекторию, на которой в некоторый момент времени t' выполняется равенство $I = 0$. Рассмотрите следующее отклонение от оптимума: для малого $\Delta > 0$ и большого $T > t'$ положим $I(t) = \Delta$ при всех $t \geq T$. Проанализируйте это отклонение и покажите, что возможное решение не может быть оптимумом. [Подсказка: обозначьте количество капитала на возможном решении как $K(t)$. Тогда изменение прибыли при рассматриваемом отклонении может быть приближено значением

$$\Delta\Pi = \Delta \times \int_T^{\infty} \exp(-rt)\left[f'(K(t) - 1\right]dt.$$

И покажите, что при достаточно больших $T f'(K(t)) > 1$ при всех $t \geq T$, и поэтому $\Delta\Pi > 0$.]

Часть III

НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Эта часть книги посвящена изложению основных наиболее часто используемых моделей теории экономического роста. Сначала мы рассмотрим неоклассическую теорию роста на бесконечном горизонте планирования, которую мы начали обсуждать в трех предыдущих главах. Глава 9 посвящена тесно связанной с ней модели перекрывающихся поколений Даймонда и Самуэльсона. Несмотря на значительное сходство между этими двумя моделями, из них следуют различные нормативные и позитивные выводы и каждая из них используется для анализа различных задач. Поэтому подробное изложение обеих моделей очень важно для нас.

В этой части книги мы также приступим к изучению теории эндогенного экономического роста и моделей с эндогенными инвестициями в человеческий капитал. Модели с человеческим капиталом играют все более важную роль в теории экономического роста и макроэкономике. Они позволяют нам проанализировать взаимосвязь между накоплением человеческого капитала и экономическим ростом и связать макроэкономическую теорию с микроэкономическими данными об уровне образования населения и отдачи от него на рынке труда.

Наконец, в главе 11 представлены наиболее простые модели устойчивого экономического роста. Мы включили их в эту, а не в следующую, часть книги, потому что все они — модели без технологического прогресса. Несмотря на простоту этих моделей, из них вытекает ряд важных экономических следствий и они являются хорошей начальной точкой для изучения вопросов, которым посвящена часть IV.

Глава 8
Неоклассическая модель экономического роста

Мы начнем анализ со знакомства со стандартной неоклассической моделью экономического роста (также называемой моделью Рамсея или моделью Касса—Купмана). Главное ее отличие от модели Солоу в том, что в ней явным образом описывается оптимизационное поведение потребителя и сбережения становятся эндогенной переменной. Помимо того что модель является базовой моделью теории экономического роста, она широко используется во многих других областях макроэкономики, включая анализ бюджетной и налоговой политики, циклов экономической активности и даже монетарной политики.

В силу того что базовые модели равновесного и оптимального роста в дискретном времени уже описаны в главе 6 в качестве приложений методов динамического программирования, большая часть этой главы посвящена анализу неоклассической модели экономического роста в непрерывном времени. Описанию конкурентного равновесия в дискретном времени посвящен параграф 8.6.

8.1. Предпочтения, технология и демографическая структура экономики

8.1.1. Основные предположения модели

Рассмотрим экономику с бесконечным горизонтом планирования в непрерывном времени и предположим, что она допускает существование *нормативного* репрезентативного домохозяйства (как мы определили его в теореме 5.3) с моментальной функцией полезности:

$$u(c(t)). \tag{8.1}$$

В дальнейшем изложении, если не будет отмечено иначе, мы будем предполагать, что выполняются следующие стандартные предположения о свойствах функции полезности.

Предположение 3 (о неоклассических предпочтениях). *Моментальная функция полезности определена на множестве* $\mathbb{R}_+$ *или на* $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. *Она является строго возрастающей, вогнутой и дважды дифференцируемой. Для всех значений переменной c во внутренности ее области определения выполняются неравенства* $u'(c) > 0$ *и* $u''(c) < 0$.

Для простоты читатель может предположить, что экономика состоит из множества идентичных домохозяйств (нормализуем его меру единицей). Каждое домохозяйство обладает моментальной функцией полезности, заданной условием 8.1. Численность каждого домохозяйства увеличивается с темпом роста n и нормализована единицей в начальный момент времени: $L(0) = 1$. Поэтому население экономики изменяется по следующему закону:

$$L(t) = \exp(nt). \tag{8.2}$$

Все члены домохозяйства неэластично поставляют единицу трудовых ресурсов на рынок труда.

Основными предположениями модели являются предположения о том, что домохозяйства альтруистичны по отношению к своим будущим членам, и о том, что все потребительские решения внутри домохозяйства всегда принимаются совместно. Тогда функция полезности (целевая функция) каждого домохозяйства в начальный момент времени $t = 0$ имеет следующий вид:

$$\int_0^{\infty} \exp(-(\rho - n)t)u(c(t))dt, \tag{8.3}$$

где переменная $c(t)$ обозначает потребление на душу населения, ρ — норму дисконтирования, а фактическая норма дисконтирования равна $\rho - n$, так как домохозяйство в том числе получает полезность от потребления на душу населения всех своих будущих членов. Более формально вид целевой функции (8.3) может быть получен следующим образом. Во-первых, из вогнутости функции $u(\cdot)$ и предположения о том, что потребительские решения внутри домохозяйства принимаются кооперативно, следует, что потребление всех членов домохозяйства будет одинаковым (см. упражнение 8.1). Поэтому потребление каждого члена домохозяйства в момент времени t равно $c(t) \equiv C(t)/L(t)$, где $C(t)$ составляет общее потребление, а $L(t)$ — размер репрезентативного домохозяйства (равный общему населению экономики, так как мера множества домохозяйств равна 1). Отсюда следует, что в момент времени t домохозяйство получает моментальную полезность $u(c(t))$ на каждого своего члена. Поэтому общая моментальная полезность домохозяйства равна $L(t)u(c(t)) = \exp(nt)u(c(t))$. Тогда из того, что в момент времени 0 коэффициент дисконтирования полезности, полученной в момент времени t, равен $\exp(-\rho t)$ следует функция полезности (8.3).

Сделаем еще одно предположение.

Предположение 4′ (о дисконтировании). $\rho > n$.

Из этого предположения следует *дисконтирование* будущего потока полезности. Иначе интеграл (8.3) в общем случае расходится к бесконечности и с экономической точки зрения не будет интересным способом моделирования потребительского поведения домохозяйства (например, в этом случае не выполняется предположение о локальной ненасыщенности из параграфа 5.6 и поэтому оптимальная траектория не может быть описана с помощью стандартных методов). Из предположения 4′ следует, что полезность домохозяйства будет конечна в экономике с нулевым ростом. При переходе к анализу моделей устойчивого роста, мы усилим это предположение до предположения 4 (см. параграф 8.7).

Начнем описание модели с экономики без технологического прогресса. Предположим совершенную конкуренцию на рынках факторов производства и конечного товара и то, что множество производственных возможностей в экономике задается следующей агрегированной производственной функцией:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)),$$

которая является упрощенной формой производственной функции (2.1), которую мы использовали в модели экономического роста Солоу в главе 2. В частности, в ней отсутствует технологическая переменная (далее мы введем трудоинтенсивный технологический прогресс). Как и в модели Солоу, далее везде будем считать, что выполняются предположения 1 и 2 (см. главу 2). Предположение о постоянной отдаче от масштаба позволяет нам перейти к производственной функции на душу населения $f(\cdot)$, и выпуск на душу населения может быть описан следующим образом:

$$y(t) \equiv \frac{Y(t)}{L(t)} = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) \equiv f(k(t)),$$

где, как и ранее, положим

$$k(t) \equiv \frac{K(t)}{L(t)}. \tag{8.4}$$

Из совершенной конкуренции на рынках факторов производства следует, что арендная стоимость капитала и заработная плата равны предельному продукту капитала и труда:

$$R(t) = F_K(K(t), L(t)) = f'(k(t)), \tag{8.5}$$

и

$$w(t) = F_L(K(t), L(t)) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)). \qquad (8.6)$$

Выбор домохозяйством распределения активов между потреблением и сбережениями является решением задачи динамической оптимизации, и поэтому описание совокупного спроса в экономике оказывается более сложным. Прежде чем перейти к нему, обозначим запас финансовых активов репрезентативного домохозяйства в момент времени t переменной $\mathcal{A}(t)$. Тогда динамика запаса активов домохозяйства описывается следующим уравнением:

$$\dot{\mathcal{A}}(t) = r(t)\mathcal{A}(t) + w(t)L(t) - c(t)L(t), \qquad (8.7)$$

где переменная $c(t)$ обозначает потребление на душу населения, $r(t)$ — безрисковую рыночную доходности активов, а $w(t)L(t)$ — моментальное значение трудового дохода домохозяйства. Определим запас финансовых активов на душу населения следующим образом:

$$a(t) \equiv \frac{\mathcal{A}(t)}{L(t)}.$$

Тогда поделив уравнение (8.7) на $L(t)$, подставляя определение $a(t)$ и используя тот факт, что население $L(t)$ растет с темпом n, приходим к следующему закону изменения запаса финансовых активов на душу населения:

$$\dot{a}(t) = (r(t) - n)a(t) + w(t) - c(t). \qquad (8.8)$$

На практике финансовые активы домохозяйства могут состоять из капитала $K(t)$, который домохозяйства предоставляют в аренду фирмам, и государственных облигаций $B(t)$. В моделях с неопределенностью домохозяйства совершают портфельный выбор между капиталом корпоративного сектора и безрисковыми облигациями (эмитентом которых обычно предполагается государственный сектор). Облигации играют важную роль в моделях с неполными рынками и позволяют домохозяйствам сглаживать потребление перед лицом индивидуальных шоков. Так как чистое предложение таких облигаций равно нулю, на агрегированном уровне выполняется равенство $B(t) = 0$, и поэтому в рыночном равновесии запас финансовых активов на душу населения должен равняться количеству капитала на душу населения, то есть выполняется следующее равенство:

$$a(t) = k(t). \qquad (8.9)$$

Так как в модели отсутствует неопределенность, мы не будем рассматривать рынок государственных облигаций (до главы 17)[1]. Из того, что запас финансовых активов домохозяйства совпадает с количеством капи-

[1] В частности, если бы облигации присутствовали в модели, их доходность совпадала бы с доходностью капитала, поэтому они были бы избыточными.

тала, а норма амортизации капитала равна δ, следует, что рыночная доходность активов определяется следующим равенством:

$$r(t) = R(t) - \delta. \tag{8.10}$$

8.1.2. Естественное ограничение на величину долга и условие отсутствия игр Понци

Условие (8.8) является потоковым ограничением и оказывается недостаточным для полного описания динамического конкурентного равновесия по двум причинам. Во-первых, как мы уже подробно обсудили в параграфе 6.5 в главе 6, это потоковое ограничение оказывается недостаточным для надлежащего описания бюджетного ограничения на поведение домохозяйства. Для того чтобы трансформировать условие (8.8) в надлежащее бюджетное ограничение на бесконечном горизонте планирования, мы можем наложить ограничение на минимальный запас финансовых активов домохозяйства вида $a(t) \geq 0$ при всех t, однако такое ограничение будет слишком сильным (см. упражнение 8.30). Если мы не сможем гарантировать наличие надлежащего бюджетного ограничения на поведение домохозяйства, решение задачи максимизации полезности потребителя ведет к бессмысленным результатам. В частности, как показано в упражнении 8.2, на любом решении задачи максимизации (8.3) при ограничении (8.8) без дополнительных ограничений запас финансовых активов $a(t)$ становится неограниченно отрицательным во все моменты времени t, то есть финансовая позиция репрезентативного домохозяйства будет сколь угодно большой отрицательной величиной. Тогда из условия равновесия (8.9) следует, что количество капитала $k(t) = a(t)$ также становится сколь угодно большой отрицательной величиной, что противоречит условию допустимости, требующему, чтобы количество капитала $k(t)$ было неотрицательным числом. Из этих рассуждений, очевидно, следует, что условие (8.8) не достаточно для описания всего множества ограничений на поведение домохозяйства.

Во-вторых, как мы уже отметили в главе 5, необходимо гарантировать то, чтобы общепринятая в динамических макроэкономических моделях общего равновесия формулировка модели в терминах последовательной торговли соответствовала подходящему равновесию Эрроу—Дебре (где, напомним, все сделки заключаются в начальный момент времени). Для этого необходимо, чтобы бюджетные ограничения домохозяйств совпадали в формулировке с последовательной торговлей и в формулировке Эрроу—Дебре. Например, если мы наложим ограничение $a(t) \geq 0$ при всех t, мы сможем найти хорошо определенное решение задачи максимизации полезности домохозяйством, однако мы нарушим эквивалентность между формулировкой с последовательной торговлей в динамической макроэкономической модели и соответствующим равновесием Эрроу—Дебре (см. упражнение 8.30).

Существует два возможных выхода из вышеописанной ситуации. Первый, который оказывается более гибким и при этом более строгим теоретически, состоит в предположении о недопустимости игр Понци. Второй связан с предположением о естественном ограничении на максимальный размер долга (как в примере 6.5). Так как второй способ довольно часто используется в литературе, мы начнем с короткого обсуждения естественного ограничения на максимальный размер долга и, в частности, остановимся на ситуациях, в которых он может быть использован и в которых он перестает быть полезным инструментом.

Напомним, что естественное ограничение на максимальный размер долга состоит в том, что величина $a(t)$ никогда не может достигать такого отрицательного значения, что домохозяйство не сможет погасить свой долг, даже если будет выбирать нулевое значение потребления на бесконечном горизонте планирования. Используя условие (8.8) и предполагая, что потребление домохозяйства тождественно равно нулю начиная с момента времени t, получаем следующий вид естественного ограничения на максимальный размер долга:

$$a(t) \geq -\int_t^{\infty} w(s)\exp\left(-\int_t^s (r(z)-n)dz\right)ds. \tag{8.11}$$

Уравнение (8.11) является прямым аналогом естественного ограничения на максимальный размер долга в дискретном времени (6.44) в главе 6. В частности, его правая часть является чистой приведенной стоимостью трудового дохода домохозяйства, взятой с отрицательным знаком. Читатель сможет вывести это уравнение при решении упражнения 8.3. Любая траектория потребления и запаса финансовых активов домохозяйства, не удовлетворяющая условию (8.11), не является допустимой (в случае, если мы не допускаем возможность банкротства). Поэтому задача репрезентативного домохозяйства может быть представлена как максимизация целевой функции (8.3) при ограничениях (8.8) и (8.11). На самом деле вместо ограничения (8.11) мы можем использовать его предельную версию:

$$\lim_{t\to\infty} a(t) \geq \hat{a} \equiv -\lim_{t\to\infty}\left[\int_t^{\infty} w(s)\exp\left(-\int_t^s (r(z)-n)dz\right)ds\right]. \tag{8.12}$$

Это следует из того, что если естественное ограничение на максимальный размер долга не выполняется в некоторый момент времени $t' < \infty$, то условие (8.12) также не будет выполняться (см. упражнение 8.4). Следовательно, условие (8.12) не ограничивает общность постановки задачи.

Подход, связанный с естественным ограничением на максимальный размер долга, обладает двумя недостатками. Во-первых, он не показывает прямую связь между динамической макроэкономической задачей с последовательной торговлей и соответствующим ей равновесием Эрроу—Дебре. Во-вторых, он оказывается бесполезным при анализе экономики с устойчивым ростом (потому что в этом случае $\hat{a} = -\infty$, см. упражнение 8.8). Поэтому далее мы перейдем к условию отсутствия игр Понци, которое позволяет обойти эти два недостатка.

Вначале перепишем бюджетное ограничение домохозяйств в течение всей его жизни в следующем виде:

$$\int_0^T c(t)L(t)\exp\left(\int_t^T r(s)ds\right)dt + \mathcal{A}(T) =$$
$$= \int_0^T c(t)L(t)\exp\left(\int_t^T r(s)ds\right)dt + \mathcal{A}(0)\exp\left(\int_t^T r(s)ds\right)dt \quad (8.13)$$

для некоторого произвольного $T > 0$, где $\mathcal{A}(T)$ обозначает запас финансовых активов домохозяйства в момент времени T. Это условие говорит о том, что запас финансовых активов домохозяйства в момент времени T равен сумме всех доходов и запасу финансовых активов в начальный момент времени 0 за вычетом всех расходов домохозяйства, приведенной по стоимости к моменту времени T. Дифференцируя это выражение по T и разделив на $L(t)$, приходим к условию (8.8) (см. упражнение 8.5).

Далее представим, что условие (8.13) применяется к экономике с конечным горизонтом планирования, заканчивающимся в момент времени T. Тогда домохозяйства не могут обладать в этот момент отрицательным запасом финансовых активов, то есть условие (8.13) должно выполняться с ограничением $\mathcal{A}(T) \geq 0$. Однако анализ потокового бюджетного ограничения (8.8) легко показывает, что это ограничение не гарантирует выполнения неравенства $\mathcal{A}(T) \geq 0$. Поэтому на конечном горизонте планирования мы должны наложить дополнительное ограничение $\mathcal{A}(T) \geq 0$ в качестве *граничного условия*. На самом деле нетрудно убедиться, что именно ограничение $\mathcal{A}(T) \geq 0$ гарантирует то, что бюджетное ограничение домохозяйства в течение всей его жизни выполняется (как равенство). Поэтому это ограничение является подходящим для подтверждения эквивалентности последовательной торговли и формулировки Эрроу—Дебре.

На бесконечном горизонте планирования нам понадобится схожее ограничение. Подходящим ограничением в данном случае является условие отсутствия игр Понци. Оно имеет следующий вид:

$$\lim_{t\to\infty}\left[a(t)\exp\left(-\int_0^t (r(s)-n)ds\right)\right] \geq 0. \quad (8.14)$$

Это условие имеет вид неравенства, что позволяет гарантировать то, что богатство домохозяйства не стремится асимптотически к отрицательному значению. На интуитивном уровне без ограничения (8.14) бюджетное ограничение на поведение репрезентативного домохозяйства (а значит и всех домохозяйств в экономике) не имеет надлежащего вида, так как все домохозяйства будут неограниченно увеличивать потребление с помощью заимствований до такого уровня, что ограничение на допустимость траектории потребления будет нарушено. Очевидно, что такое распределение ресурсов не может быть равновесием. На конечном горизонте планирования такое поведение домохозяйств запрещается ограничением $\mathcal{A}(T) \geq 0$. На бесконечном горизонте планирования в роли этого ограничения выступает условие (8.14). Читатель может представить себе, что это ограничение возникает в результате взаимодействия репрезентативного домохозяйства и финансовых рынков. Финансовые рынки будут накладывать надлежащее бюджетное ограничение на поведение домохозяйств, так как в противном случае кредиторы будут терять свои средства.

На более фундаментальном уровне условие отсутствия игр Понци (8.14) как аналог граничного условия $\mathcal{A}(T) \geq 0$ на бесконечном горизонте планирования гарантирует эквивалентность между формулировкой задачи динамического конкурентного равновесия с последовательной торговлей и формулировкой Эрроу—Дебре. Чтобы убедиться в этом, умножим обе части равенства (8.13) на $\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)$. Тогда получаем следующее равенство:

$$\int_0^T c(t)L(t)\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) + \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\mathcal{A}(T) =$$
$$= \int_0^T w(t)L(t)\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) + \mathcal{A}(0).$$

Затем, разделив обе части на $L(0)$ и замечая, что $L(t)$ растет с темпом n, приходим к следующему неравенству:

$$\int_0^T c(t)\exp\left(-\int_0^t (r(s)-n)ds\right) + \exp\left(-\int_0^T (r(s)-n)ds\right)a(T) =$$
$$= \int_0^T w(t)\exp\left(-\int_0^t (r(s)-n)ds\right) + a(0).$$

Далее, переходя к пределу при $T \to \infty$ и используя условие отсутствия игр Понци, получаем следующее неравенство:

$$\int_0^\infty c(t)\exp\left(-\int_0^t (r(s)-n)ds\right)dt \leq a(0) + \int_0^\infty w(t)\exp\left(-\int_0^t (r(s)-n)ds\right)dt, \quad (8.15)$$

которое требует, чтобы приведенная стоимость расходов не превышала сумму начального запаса финансовых активов и приведенную стоимость трудового дохода. Это требование приводит к эквивалентности бюджетного ограничения домохозяйства в течение всей жизни (или единственного ограничения в момент времени $t = 0$) в формулировке Эрроу—Дебре и потоковыми бюджетными ограничениями, совмещенными с граничным условием в виде условия отсутствия игр Понци (8.14) в формулировке задачи с последовательной торговлей.

Термин «отсутствие игр Понци» для условия (8.14) восходит к схеме финансовых пирамид, иногда называемых играми Понци, в которых каждый индивид может непрерывно занимать средства на конкурентном финансовом рынке (а в более частых случаях у других неизвестных ему индивидов, которые также становятся частью финансовой пирамиды) и возвращать свои ранее накопленные долги за счет текущих займов. Следствием такой схемы будет то, что финансовая позиция индивида будет стремиться со временем к $-\infty$, нарушая тем самым условие допустимости на уровне всей экономики.

В завершении обсуждения вернемся ненадолго к задаче на конечном горизонте планирования. В этом случае финансовый рынок наложит на потребителя ограничение $\mathcal{A}(T) \geq 0$. Однако само домохозяйство никогда не выберет траекторию финансовых активов с $\mathcal{A}(T) > 0$ (вследствие локальной ненасыщенности предпочтений, определенной в параграфе 5.6), поэтому бюджетное ограничение может быть записано в более простом виде $\mathcal{A}(T) = 0$, что просто значит, что бюджетное ограничение домохозяйства выполняется как равенство. Аналогичным образом бюджетное ограничение домохозяйства в течение всей жизни выполняется как равенство и в экономике с бесконечным горизонтом планирования, и поэтому условие отсутствия игр Понци может быть записано в более сильной форме как

$$\lim_{t\to\infty}\left[a(t)\exp\left(-\int_0^t (r(s)-n)ds\right)\right]=0. \tag{8.16}$$

Далее мы сможем убедиться в том, что из максимизации полезности домохозяйством (а именно из условия трансверсальности) и условия (8.14) следует равенство (8.16).

8.2. Характеристика равновесия

8.2.1. Определение равновесия

Мы начнем с определения равновесия в описываемой динамической модели экономики. Мы приведем два определения равновесия, каждое из которых подчеркивает различные аспекты понятия равновесия. В дальнейшем изложении мы чаще всего будем пользоваться вторым определением, хотя первое является более полезным для концептуального описания понятия конкурентного равновесия.

Прежде чем перейти к формулировке определения, напомним, что мы описали структуру экономики через демографию, предпочтения и технологию. При заданном таким образом описании экономики мы можем спросить, как будет в ней проходить процесс распределения ресурсов. В качестве одного из возможных способов мы можем передать полномочия по распределению ресурсов некоторому органу, например общественному планировщику (или в менее благоприятной ситуации — диктатору). Задача оптимального роста, уже рассмотренная нами в предыдущих двух главах и более детально описанная в параграфе 8.3, описывает распределение ресурсов общественным планировщиком, желающим максимизировать полезность репрезентативного домохозяйства. С другой стороны, конкурентное равновесие рассматривает другой тип *институтов:* совершенная конкуренция на рынках товаров и факторов производства и частная собственность на капитал и труд. Домохозяйства, в свою очередь, делают выбор, рассматривая рыночные цены как заданные параметры. Первое определение описывает этот подход явным образом.

Определение 8.1. Конкурентное равновесие *в неоклассической модели экономического роста состоит из траекторий потребления, капитала, заработной платы и арендной стоимости капитала* $[C(t),\ K(t),\ w(t),\ R(t)]_{t=0}^{\infty}$, *таких, что репрезентативное домохозяйство максимизирует свою полезность при заданном начальном значении запаса финансовых активов (количестве капитала)* $K(0) > 0$, *рассматривая траектории цен факторов производства* $[w(t),\ R(t)]_{t=0}^{\infty}$ *как заданные параметры, а спрос и предложение на рынках факторов производства совпадают при ценах* $[w(t),\ R(t)]_{t=0}^{\infty}$.

В этом определении утверждается, что домохозяйства и фирмы рассматривают цены как заданные величины и то, что все рынки находятся в равновесии. Однако, несмотря на то что в определении 8.1 подчеркивается важный концептуальный аспект конкурентного равновесия, с математической точки зрения часто более удобно определить равновесие с помощью явных равновесных зависимостей между переменными. Это сделано в следующем определении, в котором мы введем уравнения, связывающие цены факторов производства $[w(t),\ R(t)]_{t=0}^{\infty}$. В дополнение к этому это определение описывает главные переменные в подушевых терминах, что упрощает дальнейшее описание равновесия.

Определение 8.2. *Конкурентное равновесие в неоклассической модели экономического роста состоит из траекторий потребления на душу населения, отношения капитала к труду, заработной платы и арендной стоимости капитала* $[c(t),\ k(t),\ w(t),\ R(t)]_{t=0}^{\infty}$, *таких, что цены факторов* *производства* $[w(t),\ R(t)]_{t=0}^{\infty}$ *заданы условиями* (8.5) *и* (8.6), *а репрезентативное домохозяйство максимизирует целевую функцию* (8.3) *при ограничениях* (8.8) *и* (8.14) *при начальном запасе капитала на душу населения (отношении капитала к труду)* $k(0) > 0$ *и заданных ценах факторов производства* $[w(t),\ R(t)]_{t=0}^{\infty}$ *(при этом доходность финансовых активов* $r(t)$ *определяется условием* (8.10)).

Так как это определение равновесия само опирается на понятие равновесного поведения фирм и домохозяйств, с теоретической точки зрения определение 8.1 может показаться более предпочтительным. Несмотря на это, определения, схожие с определением 8.2, более удобны в работе и более часто используются в литературе, так как в них явным образом специфицируются уравнения, описывающие равновесие, что облегчает характеристику распределения ресурсов, являющуюся решением соответствующей задачи максимизации при заданных ограничениях. В дальнейшем изложении материала мы последуем стандартному подходу, состоящему в использовании определения равновесия, схожего с определением 8.2, однако читатель должен понимать, что оно является следствием более общего определения 8.1 в предположении о выполнении некоторых равновесных условий.

В заключение отметим, что равновесие описывает динамические траектории реальных переменных модели и соответствующих цен. Несмотря на то что иногда мы будем акцентировать внимание на стационарное равновесие, понятие равновесия всегда связано с динамическими траекториями всех переменных модели.

8.2.2. Максимизация полезности домохозяйством

Начнем описание равновесия с задачи максимизации полезности репрезентативным домохозяйством. Из определения равновесия следует, что она состоит в максимизации целевой функции (8.3) при ограничениях (8.8) и (8.14). Эта задача является частным случаем задачи оптимального управления с дисконтированием на бесконечном горизонте планирования, рассмотренной в теореме 7.13 в предыдущей главе. Наша стратегия поиска решения будет состоять в применении теоремы 7.13 для поиска возможного решения, а затем в проверке того, что оно действительно является решением с помощью теоремы 7.14[2]. Сначала построим текущий гамильтониан вида

$$\hat{H}(t,\ a,\ c,\ \mu) = u(c(t)) + \mu(t)\big[(w(t) + (r(t) - n)a(t) - c(t)\big],$$

[2] Чтобы показать, что условия из теоремы 7.13 также являются необходимыми, можно использовать рассуждения, схожие с рассуждениями из параграфа 7.7 (см., например, упражнение 8.7). Несмотря на это, подход, связанный с использованием теоремы 7.13 для поиска возможного решения и последующей проверкой его оптимальности с помощью теоремы 7.14, является одновременно более прямым и более простым.

где запас финансовых активов a является переменной состояния, потребление c — переменной управления, а функция μ — сопряженной переменной. Эта задача во многом схожа с задачей оптимального роста, описанной в параграфе 7.7 в предыдущей главе, однако имеет два важных отличия: во-первых, доходность финансовых активов в ней изменяется во времени, во-вторых, граничное условие имеет вид условия отсутствия игр Понци (8.14), которое отличается от условия трансверсальности (7.7) (имеющее вид $\lim_{t\to\infty} k(t) \geq 0$).

Далее, применяя теорему 7.13, находим следующие условия, которым должно удовлетворять возможное внутреннее решение задач:

$$\hat{H}_c(t,\, a,\, c,\, \mu) = u'(c(t)) - \mu(t) = 0, \tag{8.17}$$

$$\hat{H}_a(t,\, a,\, c,\, \mu) = \mu(t)(r(t) - n) = -\dot{\mu}(t) + (\rho - n)\mu(t) \tag{8.18}$$

и закон изменения запаса финансовых активов (8.8). Условие трансверсальности (эквивалент условия (7.69) в предыдущей главе) имеет следующий вид:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-(\rho - n)t)\mu(t)a(t)\right] = 0. \tag{8.19}$$

Данное условие трансверсальности выписано в терминах приведенного значения сопряженной переменной, так как именно оно присутствует в остальных необходимых условиях оптимума.

Далее нетрудно убедиться, что условия (8.17), (8.18) и (8.19) действительно описывают решение задачи. Текущий гамильтониан $\hat{H}(t,\, a,\, c,\, \mu)$ является суммой вогнутой функции по потреблению c и линейной функции по $(a,\, c)$. Следовательно, он будет вогнутой функцией по $(a,\, c)$. Поэтому для того, чтобы применить теорему 7.14, необходимо лишь показать, что для любой допустимой пары функций $(a(t),\, c(t))$ выполняется неравенство $\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-(\rho - n)t)\mu(t)a(t)\right] \geq 0$. Подставляя значение $\mu(t)$ из равенства (8.24), убеждаемся в том, что это неравенство эквивалентно следующему:

$$\lim_{t\to\infty}\left[a(t)\exp\left(-\int_0^t (r(s) - n)ds\right)\right] \geq 0.$$

Но это неравенство совпадает с условием отсутствия игр Понци. Поэтому оно выполняется на всех допустимых парах функций $(a(t),\, c(t))$. Следовательно, из теоремы 7.14 следует, что любое решение системы (8.14)–(8.17) является решением задачи максимизации. Более того, в упражнении 8.11 показано, что это решение единственно.

Мы можем использовать эти условия для явного описания решения. Во-первых, преобразуем второе уравнение (8.18) следующим образом:

$$\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} = -(r(t) - \rho). \tag{8.20}$$

Равенство (8.20) говорит о том, что изменение сопряженной переменной зависит от того, насколько доходность финансовых активов отличается от нормы дисконтирования домохозяйства[3].

Далее, из первого необходимого условия (8.17) следует, что

$$u'(c(t)) = \mu(t). \tag{8.21}$$

Если условие (8.18) выполняется, то из непрерывной дифференцируемости функции u' следует, что функция $c(t)$ также будет дифференцируемой по t, и поэтому мы можем продифференцировать предыдущее выражение по времени и, разделив на $\mu(t)$, приходим к следующему равенству:

$$\frac{u''(c(t))c(t)}{u'(c(t))} \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}.$$

Подставляя это выражение в равенство (8.20), получаем следующее уравнение Эйлера для потребления в непрерывном времени:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\varepsilon_u(c(t))}(r(t) - \rho), \tag{8.22}$$

где

$$\varepsilon_u(c(t)) \equiv -\frac{u''(c(t))c(t)}{u'(c(t))} \tag{8.23}$$

является эластичностью предельной полезности $u'(c(t))$. Уравнение (8.22) тесно связано с уравнением Эйлера для потребления (6.39), полученного нами для задачи в дискретном времени, и с уравнением Эйлера для потребления в непрерывном времени с постоянной процентной ставкой из примера 7.1 в предыдущей главе. Также, как и в условии (6.39), в нем утверждается, что потребление растет во времени, если доходность финансовых активов превышает норму дисконтирования. Уравнение (8.22) также определяет скорость роста потребления как функцию от разности между доходностью финансовых активов и нормы дисконтирования. Эта скорость зависит от эластичности предельной полезности от потребления

[3] Из этого условия также следует, что сопряженная переменная является непрерывно дифференцируемой функцией, только когда процентная ставка $r(t)$ является непрерывной по времени функцией. В предположении о равновесии на рынках и о том, что траектория капитала $k(t)$ согласуется с оптимизационным поведением домохозяйств, $r(t)$ действительно будет непрерывной по времени функцией.

$\varepsilon_u(c(t))$. Интерпретация этой величины и уравнения (8.22) будет приведена далее.

Затем, интегрируя уравнение (8.20), получаем следующее равенство:

$$\mu(t) = \mu(0)\exp\left(-\int_0^t (r(s)-\rho)ds\right) = u'(c(0))\exp\left(-\int_0^t (r(s)-\rho)ds\right), \quad (8.24)$$

где первое равенство следует из общего вида решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (см. параграф B.4 в приложении B), а второе равенство получается из уравнения (8.17), вычисленного в точке $t = 0$. Подставляя равенство (8.24) в условие трансверсальности (8.19), получаем следующие равенства:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-(\rho-n)t)a(t)u'(c(0))\exp\left(-\int_0^t (r(s)-\rho)ds\right)\right] = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[a(t)\exp\left(-\int_0^t (r(s)-n)ds\right)\right] = 0. \quad (8.25)$$

Второе равенство получается из первого делением на $u'(c(t)) > 0$ и внесением множителя $\exp(-(\rho - n)t)$ под знак интеграла $\exp\left(-\int_0^t (r(s)-\rho)ds\right)$.

Прямым следствием условия (8.25) является то, что из максимизации полезности домохозяйством и условия трансверсальности (8.19) вытекает, что условие отсутствия игр Понци выполняется как строгое равенство (то есть выполняется условие (8.16)). Этот результат не удивителен: в нем утверждается то, что бюджетное ограничение домохозяйства в течение всей жизни выполняется как строгое равенство. В контексте равновесия Эрроу—Дебре это следует из предположения о локальной ненасыщенности — домохозяйство никогда не будет оставлять положительное количество неиспользованных активов. Из этих рассуждений также следует, что условие трансверсальности, из которого, в свою очередь, следует условие отсутствия игр Понци, которое в силу бюджетного ограничения домохозяйства в течение всей жизни выполняется как строгое равенство, также выполняется как строгое равенство. Таким образом, именно условие трансверсальности гарантирует то, что даже в очень отдаленном будущем домохозяйства используют для максимизации полезности все имеющиеся у них ресурсы, что является аналогией условия использования всех финансовых активов на момент окончания жизни для задачи на бесконечном горизонте планирования.

Предыдущие рассуждения также показывают тесную связь между условием трансверсальности (8.19) и сильным условием отсутствия игр

Понци (в виде равенства) (8.16). Однако важно отметить, что эти два условия не эквивалентны друг другу (несмотря на то что читатель может встретить такое утверждение в литературе и в учебниках): равенство (8.19) является необходимым условием оптимума, а равенство (8.16) представляет собой бюджетное ограничение домохозяйства в течение всей жизни, выполненное как равенство.

Так как $a(t) = k(t)$, условие трансверсальности для репрезентативного домохозяйства может быть выписано в следующем альтернативном виде:

$$\lim_{t\to\infty}\left[k(t)\exp\left(-\int_0^t (r(s)-n)ds\right)\right]=0. \tag{8.26}$$

В уравнении (8.26) утверждается, что условие трансверсальности требует, чтобы приведенная стоимость капитала в очень отдаленном будущем равнялась нулю. Такая версия условия трансверсальности, основанная на «рыночной стоимости», является более понятной интуитивно и часто более удобной в работе, чем уравнение (8.19). В частности, предположим, что процентная ставка сходится к некоторому значению r^*, то есть $r(t) \to r^*$ при $t \to \infty$. Тогда условие трансверсальности будет выполняться только если $r^* > n$ (в случае если количество капитала $k(t)$ не стремится к нулю). Этот вывод интуитивно очевиден: в случае когда выполняется неравенство $r^* < n$, домохозяйства будут иметь бесконечное богатство (это следует из условия (8.15)). Поэтому естественно ожидать, что в равновесии $r^* > n$. В следующей главе будет показано, что это условие тесно связано с понятием динамической эффективности, которое мы будем обсуждать в главе 9.

Как мы отметили выше, из теоремы 7.14 и предыдущих рассуждений следует, что пара функций $(\hat{a}(t), \hat{c}(t))$, удовлетворяющая условиям (8.22) и (8.25), является единственным решением задачи максимизации полезности домохозяйством. Следовательно, любая пара функции $(\hat{k}(t), \hat{c}(t))$, удовлетворяющая условиям (8.22) и (8.26), соответствует конкурентному равновесию экономики. Полное описание конкурентного равновесия задается парой функций $(\hat{k}(t), \hat{c}(t))$ *и траекториями цен, уравновешивающими* рынки факторов производства. Напомним, что равновесные цены факторов производства определяются равенствами (8.5) и (8.6). Из условия (8.10) тогда следует, что равновесная процентная ставка $r(t)$ определяется следующим равенством:

$$r(t) = f'(k(t)) - \delta. \tag{8.27}$$

Подставляя равенство (8.27) в задачу максимизации полезности домохозяйством, получаем следующий равновесный вид уравнения Эйлера для потребления (8.22):

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\varepsilon_u(c(t))}(f'(k(t)) - \delta - \rho). \tag{8.28}$$

После подстановки уравнения (8.28) в условие (8.26) условие трансверсальности принимает следующий вид:

$$\lim_{t\to\infty}\left[k(t)\exp\left(-\int_0^t (f'(k(s)) - \delta - n)ds\right)\right] = 0. \tag{8.29}$$

Условия (8.28) и (8.29) имеют в правой части единственную переменную — отношение капитала к труду — и полностью описывают равновесную динамику экономики. Более того, как мы скоро убедимся, эти условия равновесия совпадают с уравнением Эйлера и условием трансверсальности, описывающими оптимальную траекторию роста экономики (см. упражнение 8.11).

8.2.3. Динамика потребления

Вернемся к задаче описания траектории потребления репрезентативного домохозяйства. Во-первых, напомним, что уравнение Эйлера (8.22) связывает угол наклона траектории потребления репрезентативного домохозяйства с эластичностью его функции предельной полезности $\varepsilon_u(c(t))$. Заметим при этом, что параметр $\varepsilon_u(c(t))$ является не только эластичностью предельной полезности, но, что более важно для нас, он также является величиной, обратной к *межвременной эластичности замещения*, играющей ключевую роль во многих макроэкономических моделях. Межвременная эластичность замещения характеризует стимулы домохозяйства к замещению потребления (или труда или каких-либо еще величин, являющихся полезными) во времени. Эластичность предельной полезности потребления между моментами времени t и $s > t$ определяется следующим образом:

$$\sigma_u(t, s) = -\frac{d\log(c(s)/c(t))}{d\log(u'(c(s))/u'(c(t)))}.$$

Переходя к пределу при $s \downarrow t$, имеем следующее равенство:

$$\sigma_u(t, s) \to \sigma_u(t) = -\frac{u'(c(t))}{u''(c(t))c(t)} = \frac{1}{\varepsilon_u(c(t))}. \tag{8.30}$$

Этот результат не удивителен, так как именно степень вогнутости функции полезности $u(\cdot)$, или, что эквивалентно, эластичность предельной полезности, определяет желание потребителя совершать замещение потребление во времени.

Далее мы можем перейти к выводу некоторых дополнительных свойств динамики потребления домохозяйств. Заметим, что множитель $\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$ является дисконтирующим фактором, описывающим стоимость единицы дохода в момент времени t в единицах начального момента времени 0. В частном случае, когда $r(s) = r$, этот фактор становится равен $\exp(-rt)$. В более общем случае мы можем определить среднюю процентную ставку между моментами времени 0 и t следующим образом:

$$\bar{r}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t r(s)ds. \tag{8.31}$$

В этом случае дисконтирующий фактор между моментами времени 0 и t становится равен $\exp(-\bar{r}(t)t)$, а условие трансверсальности принимает следующий вид:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-(\bar{r}(t)-n)t)a(t)\right] = 0. \tag{8.32}$$

Теперь, интегрируя условие (8.22), получаем следующий вид функции потребления (см. параграф B.4 в приложении B):

$$c(t) = c(0)\exp\left(\int_0^t \frac{r(s)-\rho}{\varepsilon_u(c(s))}ds\right).$$

Следовательно, зная начальное значение потребления $c(0)$, мы можем описать всю траекторию потребления. В частном случае, когда эластичность предельной полезности $\varepsilon_u(c(s))$ постоянна (например $\varepsilon_u(c(s)) = \theta$, предыдущее уравнение принимает следующий простой вид:

$$c(t) = c(0)\exp\left(\left(\frac{\bar{r}(t)-\rho}{\theta}\right)t\right).$$

Бюджетное ограничение домохозяйства в течение всей жизни может быть записано как

$$\int_0^\infty c(t)\exp(-(\bar{r}(t)-n)t)dt = a(0) + \int_0^\infty w(t)\exp(-(\bar{r}(t)-n)t)dt.$$

Подставляя это бюджетное ограничение в выражение для функции потребления $c(t)$, получаем следующее значение потребления в начальный момент времени 0 для случая постоянной эластичности предельной полезности:

$$c(0)=\left[\int_0^{\infty}\left(\exp-\left(\frac{(1-\theta)\bar{r}(t)}{\theta}-\frac{\rho}{\theta}+n\right)t\right)dt\right]\times$$
$$\times\left[a(0)+\int_0^{\infty}w(t)\exp(-(\bar{r}(t)-n)t)dt\right]. \tag{8.33}$$

После того как начальное значение потребления становится известным, уравнение Эйлера (8.22) задает полную траекторию потребления, максимизирующего функцию полезности домохозяйства. Мы обсудим вопрос вычисления начального значения потребления более подробно в параграфе 8.5.

8.2.4. Задача с естественным ограничением на максимальный размер долга

Вернемся к альтернативному подходу, состоящему в использовании естественного ограничения на максимальный размер долга вместо условия отсутствия игр Понци. В принципе, значение переменной $\hat{a}$ в условии (8.12) может быть равно минус бесконечности. Однако из рассуждений упражнения 8.2 следует, что при таком значении $\hat{a}$ будет нарушаться условие допустимости, состоящее в том, что количество капитала $k(t)$ должно быть неотрицательным. Поэтому в равновесии должно выполняться неравенство $\hat{a}>-\infty$. Далее мы убедимся в том, что цены факторов производства удовлетворяют неравенствам $\lim_{t\to\infty} r(t)>n$ и $\lim_{t\to\infty} w(t)=w\geq 0$, и этого достаточно для выполнения неравенства $\hat{a}>-\infty$ (см. упраженение 8.9). При $\hat{a}>-\infty$ задача максимизации целевой функции (8.3) при ограничениях (8.8) и (8.11) также удовлетворяет условиям теорем 7.13 и 7.14. Следовательно, альтернативный подход к моделированию задачи максимизации домохозяйством целевой функции (8.3) при ограничениях (8.8) и (8.11) ведет к такому же решению, что и при использовании условия отсутствия игр Понци (см. упражнение 8.10). Затем можно убедиться, что в равновесии выполняются неравенства $\lim_{t\to\infty} r(t)>n$ и $\lim_{t\to\infty} w(t)=w\geq 0$, поэтому $\hat{a}>-\infty$, и такой подход действительно является обоснованным. Однако, как показано в упражнении 8.8, такой подход не работает при устойчивом росте экономики, как в моделях в параграфе 8.7.

8.3. Оптимальная траектория роста

Прежде чем продолжить анализ конкурентного равновесия, вернемся к задаче оптимального роста. Заметим, что так как мы предположили, что экономика допускает наличие нормативного репрезентативного домохозяйства, задача оптимального роста сводится к поиску траекторий отношения капитала к труду и потребления, на которых функция полезности репрезентативного домохозяйства достигает максимума. Эта задача имеет следующий вид:

$$\max_{[k(t),c(t)]_{t=0}^{\infty}} \int_0^{\infty} \exp(-(\rho-n)t)u(c(t))dt$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t)$$

и $k(t) > 0$[4]. Как мы уже отметили в главе 5, из версий первой и второй теорем благосостояния для экономики с континуумом товаров следует, что решение этой задачи совпадает с решением задачи равновесного роста из предыдущего параграфа. Однако в данном случае у нас нет необходимости обращаться к этим теоремам, так как поиск решения задачи оптимального роста и демонстрация его эквивалентности решению задачи равновесного роста оказывается достаточно простой задачей.

Еще раз введем текущий гамильтониан, который в данном случае имеет следующий вид:

$$\hat{H}(k, c, \mu) = u(c(t)) + \mu(t)[f(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t)],$$

где количество капитала k является переменной состояния, потребление c — переменной управления, а μ — текущей сопряженной переменной (мы опустили временной аргумент t, так как задача является стационарной). Из рассуждений, аналогичных рассуждениям из параграфа 7.7 предыдущей главы, следует, что для анализа задачи и описания ее единственной оптимальной траектории мы можем использовать теоремы 7.13 и 7.14. Следовательно, необходимые и достаточные условия оптимума имеют следующий вид:

$$\hat{H}_c(k, c, \mu) = 0 = u'(c(t)) - \mu(t), \tag{8.34}$$

$$\hat{H}_k(k, c, \mu) = -\dot{\mu}(t) + (\rho-n)\mu(t) = \mu(t)(f'(k(t)) - \delta - n),$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-(\rho-n)t)\mu(t)k(t)\right] = 0.$$

[4] В задаче на бесконечном горизонте планирования с династической функцией полезности, которую мы обсуждали в главе 5, в такой спецификации задачи предполагается, что общественный планировщик, будучи текущим династическим органом, принимающим решения, присваивает различным поколениям одинаковые веса. Легко увидеть, что существуют оптимальные по Парето распределения ресурсов с неравным распределением потребления между различными поколениями, однако они являются менее естественными и менее интересными в контексте экономики, допускающей наличие нормативного репрезентативного домохозяйства.

Делая те же самые шаги, что и ранее, мы можем объединить первые два условия оптимума (8.34) и получить уравнение (8.28) для динамики потребления репрезентативного домохозяйства. Далее, еще раз интегрируя второе условие первого порядка, получаем следующее равенство:

$$\mu(t) = \mu(0)\exp\left(\int_0^t (f'(k(s)) - \delta - \rho)ds\right).$$

Объединяя это уравнение с первым условием оптимума (8.34) в начальный момент времени $t = 0$, получаем, что $\mu(0) = u'(c(0)) > 0$. Подставляя это выражение в условие трансверсальности (третье условие (8.34)), упрощая и сокращая на $\mu(0) > 0$, получаем условие (8.29).

Из этих рассуждений следует, что конкурентное равновесие является оптимальным по Парето и что оптимальная траектория экономики может быть децентрализована как конкурентное равновесие. Этот результат сформулирован в следующем утверждении.

Утверждение 8.1. *Если в неоклассической модели экономического роста, описанной в параграфе* 8.1, *выполняются предположения* 1, 2, 3 *и* 4′, *то конкурентное равновесие в ней является оптимальным по Парето и совпадает с оптимальной траекторией роста, на которой функция полезности репрезентативного домохозяйства достигает максимума.*

8.4. Стационарное равновесие

Как и в главе 2, определим стационарное равновесие как равновесную траекторию, на которой отношение капитала к труду, потребление и выпуск на душу населения являются постоянными величинами. Характеристика стационарного равновесия (и, по свойству эквивалентности между двумя задачами, характеристика стационарного решения задачи оптимального роста) вытекает из анализа модели в предыдущем параграфе. Из стационарности следует, что потребление на душу населения не изменяется во времени, то есть

$$\dot{c}(t) = 0.$$

Тогда из условия (8.28) следует, что при любом виде функции полезности (в предположении о том, что $f(k^*) > 0$) капиталовооруженность экономики (отношение капитала к труду) удовлетворяет следующему условию:

$$f'(k^*) = \rho + \delta, \tag{8.35}$$

которое эквивалентно условию стационарного равновесия в модели оптимального роста в дискретном времени[5]. Уравнение (8.35) определяет отношение *капитала к труду в стационарном равновесии как функцию* только от производственной функции, нормы дисконтирования и нормы амортизации капитала. Стоит отметить, что равновесное условие (8.35) совпадает с модифицированным золотым правилом, а не с золотым правилом модели Солоу (см. упражнение 8.12). Из-за того, что потребитель предпочитает более раннее потребление более позднему, потребление в стационарном состоянии не достигает максимума на модифицированном золотом правиле. Такие предпочтения являются следствием дисконтирования будущего, которое означает, что задачей потребителя является не максимизация потребления в стационарном состоянии, а максимизация полезности в течение всей жизни, где более раннее потребление имеет больший вес в целевой функции домохозяйства.

Далее заметим, что из предположения 4′ и условия (8.35) следует, что процентная ставка в стационарном равновесии задается следующим равенством:

$$r^* = f'(k^*) - \delta > n \tag{8.36}$$

и поэтому удовлетворяет естественному условию $r^* > n$. Из того, что заработная плата в стационарном равновесии задается равенством $w^* = f(k^*) - k^* f'(k^*)$, напрямую следует, что богатство домохозяйства является конечной величиной в любой момент времени.

Зная значение капиталовооруженности экономики, нетрудно получить выражение для потребления в стационарном состоянии:

$$c^* = f(k^*) - (n + \delta)k^*, \tag{8.37}$$

которое схоже с выражением для потребления в базовой модели Солоу. Более того, из предположения 4′ следует, что равновесие с постоянным отношением капитала к труду, и поэтому с постоянным выпуском, гарантированно удовлетворяет условию трансверсальности. Поэтому из вышеприведенных рассуждений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 8.2. *Если в неоклассической модели экономического роста, описанной в параграфе* 8.1, *выполняются предположения* 1, 2, 3 *и* 4′, *то значение отношения капитала к труду в стационарном равновесии* k^* *определяется единственным образом условием* (8.35) *и не зависит от вида моментальной функции полезности. Значение потребления в стационарном равновесии* c^* *определяется условием* (8.37).

[5] Отметим, что существует еще одно, неинтересное с экономической точки зрения, стационарное равновесие с $k^* = 0$. Так же, как и в главе 2, мы будем игнорировать это равновесие в дальнейшем анализе. Более того, так же, как и в главе 2, экономика с начальным значением отношения капитала к труду $k(0) > 0$ всегда будет сходиться к стационарному равновесию с капиталовооруженностью k^*, заданной условием (8.35).

Так же как и в базовой модели Солоу, мы можем сделать несколько простых упражнений по сравнительной статике, описывающих, каким образом значения отношения капитала к труду и потребления изменяются при изменении параметров модели. Для этого параметризуем производственную функцию следующим образом:

$$f(k) = A\tilde{f}(k),$$

где $A > 0$, то есть A является множителем, определяющим производительность, его большее значение соответствует большей производительности факторов. Так как функция $f(k)$ удовлетворяет условиям регулярности, наложенным нами выше, функция $\tilde{f}(k)$ также будет им удовлетворять.

Утверждение 8.3. *Рассмотрим неоклассическую модель экономического роста, описанную в параграфе* 8.1*, в которой выполняются предположения* 1, 2, 3 *и* 4′*. Предположим, что производственная функция задана как* $f(k) = A\tilde{f}(k)$*. Обозначим значение отношения капитала к труду в стационарном равновесии как* $k^*(A, \rho, n, \delta)$*, а значение потребления в стационарном равновесии как* $c^*(A, \rho, n, \delta)$*, где определяющими их параметрами является набор* (A, ρ, n, δ)*. Тогда выполняются следующие неравенства:*

$$\frac{\partial k^*(A, \rho, n, \delta)}{\partial A} > 0, \quad \frac{\partial k^*(A, \rho, n, \delta)}{\partial \rho} < 0,$$

$$\frac{\partial k^*(A, \rho, n, \delta)}{\partial n} = 0 \text{ и } \frac{\partial k^*(A, \rho, n, \delta)}{\partial \delta} < 0,$$

$$\frac{\partial c^*(A, \rho, n, \delta)}{\partial A} > 0, \quad \frac{\partial c^*(A, \rho, n, \delta)}{\partial \rho} < 0,$$

$$\frac{\partial c^*(A, \rho, n, \delta)}{\partial n} < 0 \text{ и } \frac{\partial c^*(A, \rho, n, \delta)}{\partial \delta} < 0.$$

Доказательство. См. упражнение 8.17. ■

По сравнению с базовой моделью Солоу, в данной модели появляется новый результат о сравнительной статике при изменении нормы дисконтирования ρ. В частности, в неоклассической модели скорость накопления капитала определяется нормой дисконтирования, а не нормой сбережений. При этом существует тесная связь между нормой дисконтирования в неоклассической модели экономического роста и нормой сбережений в модели роста Солоу. На неформальном уровне более низкая норма дисконтирования означает большую терпеливость домохозяйств и, таким образом, ведет к большим сбережениям. В модели без технологического прогресса норма сбережений в стационарном равновесии задается следующим равенством:

$$s^* = \frac{(n+\delta)k^*}{f(k^*)}, \tag{8.38}$$

где константа k^* является отношением капитала к труду, заданным условием (8.35). Анализу зависимости между нормой дисконтирования, нормой сбережений и значению потребления в стационарном равновесии посвящено упражнение 8.19.

Еще один интересный результат состоит в том, что, в отличие от базовой модели Солоу, темп роста населения n не влияет на значение отношения капитала к труду в стационарном равновесии. В упражнении 8.16 показано, что этот результат зависит от того, каким образом в модели происходит межвременное дисконтирование. Еще один более общий важный результат состоит в том, что значения k^* и c^* не зависят от вида моментальной функции полезности $u(\cdot)$. Вид функции полезности определяет только переходную динамику экономики, но не влияет на ее стационарное состояние. Это следует из того, что стационарное равновесие определяется модифицированным золотым правилом. Стоит отметить, что этот результат перестает быть верным при наличии технологического прогресса и устойчивого роста экономики.

8.5. Переходная динамика и единственность равновесия

Напомним, что переходная динамика в базовой модели экономического роста Солоу задается единственными дифференциальным уравнением и начальным условием. Это не так в неоклассической модели экономического роста, в ней равновесие определяется двумя дифференциальными уравнениями, для удобства представленными ниже:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t) \tag{8.39}$$

и

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\varepsilon_u(c(t))}(f'(k(t)) - \delta - \rho). \tag{8.40}$$

Более того, у нас есть начальное условие $k(0) > 0$ и граничное условие на бесконечности, имеющее следующий вид:

$$\lim_{t\to\infty}\left[k(t)\exp\left(-\int_0^t (f'(k(s)) - \delta - n)ds\right)\right] = 0. \tag{8.41}$$

Как мы уже отметили в контексте теории инвестиций в предыдущей главе (см. параграф 7.8), такая комбинация граничных условий, состоящая из начального условия и условия трансверсальности, довольно часто встречается в экономических задачах, описывающих динамику переменных состояния и управления. Подходящей концепцией устойчивости в данном случае является концепция седловой устойчивости, описанная в теоремах 7.18 и 7.19 (вместо теорем 2.4 и 2.5 об устойчивости). В частности, потребление (или, что эквивалентно, сопряженная переменная μ) является переменной управления, и его начальное значение (или начальное значение сопряженной переменной $\mu(0)$) может быть любым. Его значение определяется таким образом, чтобы граничное условие трансверсальности выполнялось на бесконечности. Так как $c(0)$ и $\mu(0)$ могут принимать любые значения, нам и в этой модели необходимо существование одномерного многообразия (кривой), сходящегося к стационарному состоянию. Как и в теории инвестиций, в случае когда существует несколько траекторий, сходящихся к стационарному состоянию, равновесие в модели не будет единственным (будет существовать несколько значений $c(0)$, удовлетворяющих всем условиям равновесия).

К счастью, экономические причины гарантируют седловую устойчивость и существование единственного конкурентного равновесия. В частности в неоклассической модели экономического роста существует единственное равновесие, описываемое одномерным многообразием (кривой) в пространстве в $k - c$: седловой траекторией, сходящейся к стационарному состоянию. Эта седловая траектория показана на рис. 8.1. Вертикальная линия является множеством точек, на которых выполняется условие $\dot{c} = 0$. График уравнения $\dot{c} = 0$ является вертикальной прямой, так как из уравнения Эйлера (8.40) следует, что потребление может быть постоянным только при единственном значении капитала k^*, заданным уравнением (8.35). Выпуклая кривая с ветвями, направленными вниз, является графиком уравнения $\dot{k} = 0$ из условия (8.39). Точка пересечения этих двух кривых определяет стационарное равновесие модели (k^*, c^*). Вид графика уравнения $\dot{k} = 0$ можно понять, проведя аналогию с рис. 2.6 из главы 2. Напомним, что значение потребления на душу населения в стационарном равновесии достигает максимума при отношении капитала к труду, k_{gold}, задаваемым золотым правилом (см. упражнение 8.12). После того как мы установили вид графиков $\dot{c} = 0$ и $\dot{k} = 0$, для описания динамики экономики необходимо выяснить направления движения капитала и потребления, определяемые дифференциальными уравнениями (8.39) и (8.40), вне этих кривых. После этого существование единственной седловой траектории, сходящейся к стационарному равновесию, становится очевидным. Из этого наблюдения следует, что для любого положительного начального значения отношения капитала к труду $k(0) > 0$ существует

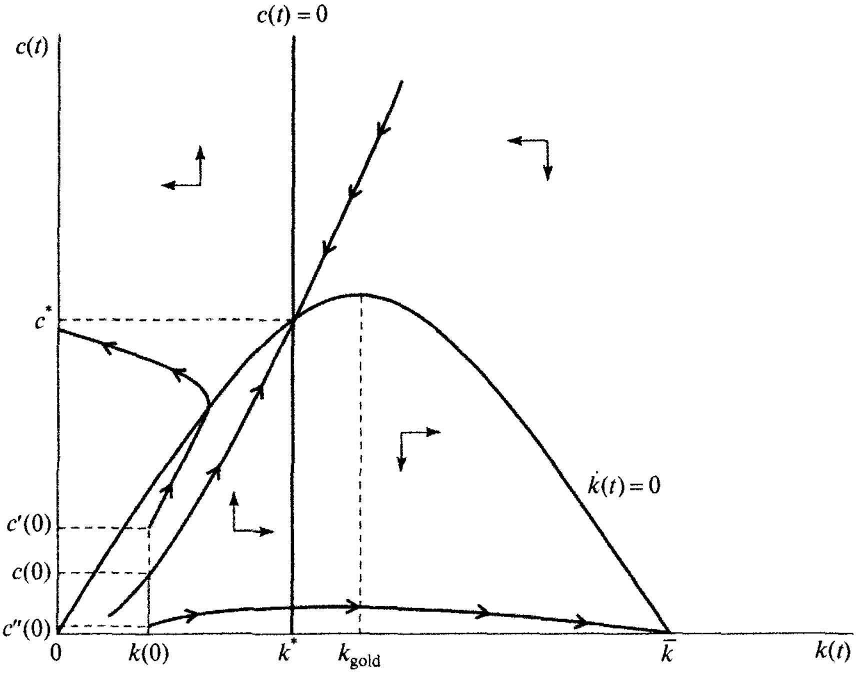


Рис. 8.1. Переходная динамика в базовой неоклассической модели экономического роста

единственное начальное значение потребления $c(0)$, находящееся на седловой траектории. Если репрезентативное домохозяйство в начальный момент времени $t = 0$ выберет потребление $c(0)$ и затем будет следовать траектории потребления, определяемой уравнением Эйлера (8.40), то потребление на душу населения и отношение капитала к труду сойдутся на бесконечности к стационарному состоянию (k^*, c^*).

Является ли траектория с начальным значением $(k(0), c(0))$ и сходящаяся к стационарному состоянию (k^*, c^*) единственным равновесием? Ответ на этот вопрос положительный, и мы можем предложить два способа, позволяющих убедиться в этом. Первый состоит в использовании уже доказанной нами (напрямую в параграфе 8.3 или по второй теореме экономики благосостояния [теорема 5.7]) эквивалентности между конкурентными равновесиями и распределениями ресурсов, оптимальными по Парето. Пользуясь этой эквивалентностью, мы можем применить достаточные условия оптимума (теорему 7.14) для задачи оптимального роста и заключить, что траектория с начальным значением $(k(0), c(0))$ и сходящаяся к стационарному состоянию (k^*, c^*), удовлетворяющая условиям (8.39), (8.40) и (8.41), является единственным решением задачи оптимального роста. Следовательно, она является единственным конкурентным равновесием в неоклассической модели экономического роста. Из этих рассуждений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 8.4. *Если в неоклассической модели экономического роста выполняются предположения* 1, 2, 3 *и* 4′, *то при любом положительном начальном значении отношения капитала к труду* $k(0) > 0$ *в ней существует единственная равновесная траектория, монотонно сходящаяся к единственному стационарному состоянию* (k^*, c^*), *где значение* k^* *задается условием* (8.35). *Более того, если* $k(0) < k^*$, *то* $k(t) \uparrow k^*$ *и* $c(t) \uparrow c^*$, *в то время как если* $k(0) > k^*$, *то* $k(t) \downarrow k^*$ *и* $c(t) \downarrow c^*$. *Эта равновесная траектория совпадает с единственным решением задачи оптимального роста.*

Вторая стратегия доказательства единственности траектории конкурентного равновесия, которая более часто встречается в литературе, состоит в доказательстве того, что ни одна другая траектория, кроме седловой траектории на рис. 8.1, не может быть равновесной. Как мы уже показали, задача максимизации полезности репрезентативным домохозяйством имеет единственное решение при заданных траекториях процентной ставки и заработной платы $[r(t), w(t)]_{t=0}^{\infty}$ (см. упражнение 8.11). Если цены факторов производства заданы условиями (8.5), (8.6) и (8.10), то единственное решение этой задачи имеет начальное значение потребления, равное $c(0)$ и в точности определяет траекторию отношения капитала к труду, соответствующую этим ценам. Для того чтобы убедиться в единственности этого равновесия, вернемся к рис. 8.1. Из него нетрудно увидеть, что все траектории, отличающиеся от седловой траектории (с начальным значением, отличающимся от $(k(0), c(0))$) расходятся и в некоторый момент времени достигают нулевого значения потребления или нулевого значения капитала. Если начальное значение потребления меньше, чем его значение на седловой траектории (например, равно $c''(0)$), то потребление достигнет нулевого значения за конечное время, и поэтому экономика будет непрерывно накапливать капитал, пока он не достигнет максимального значения $\bar{k} > k_{\text{gold}}$ (которое достигается при нулевом значении потребления). Нетрудно убедиться, что $f'(\bar{k}) < \delta + n$ (см. упражнение 8.13). Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty}\left[k(t)\exp\left(-\int_0^t (f'(k(s)) - \delta - n)ds\right)\right] =$$

$$= \bar{k}\lim_{t\to\infty}\left[\exp\left(-\int_0^t (f'(\bar{k}) - \delta - n)ds\right)\right] > 0,$$

а это противоречит условию трансверсальности (8.29) или (8.41). Так как в данном случае можно показать, что условие трансверсальности является не только достаточным, но и необходимым условием оптимума (используя теорему 7.13, см. упражнение 8.7), и траектории с начальным значением потребления, меньшим, чем на седловой траектории, не могут быть равновесными. Далее предположим, что начальное значение потребления превышает его значение на седловой траектории и равно, например, $c'(0)$. В этом случае количество капитала достигнет нуля за конечное время, в то время как потребление домохозяйства, определяемое уравнением (8.40), будет оставаться положительным (см. упражнение 8.13)[6]. Однако такое поведение домохозяйства противоречит требованию допустимости траектории, и поэтому значение потребления в начальный момент времени, превышающее его значение на седловой траектории, также не может быть равновесием (и решением задачи оптимального роста). Таким образом, эти рассуждения также приводят к выводу о том, что переходная динамика в неоклассической модели экономического роста описывается начальным значением потребления на седловой траектории $c(0)$ и монотонным движением капитала и потребления (k, c) вдоль этой траектории по направлению к стационарной точке (k^*, c^*) (см. теорему А.23 из приложения А).

В дополнение ко второму способу мы можем провести анализ локальной седловой устойчивости решения. Для этого нам необходимо линеаризовать дифференциальные уравнения (8.39) и (8.40) вокруг стационарной точки. Применяя формулу Тейлора до первого члена, получаем следующий вид линеаризованной системы:

$$\dot{k} \simeq \text{constant} + (f'(k^*) - n - \delta)(k - k^*) - c$$

и

$$\dot{c} \simeq \text{constant} + \frac{c^* f''(k^*)}{\varepsilon_u(c^*)}(k - k^*),$$

где для упрощения мы опустили временной индекс и используем символ примерного равенства $\simeq$ вместо членов ряда Тейлора более высоких порядков. Из условия (8.35) следует, что $f'(k^*) - \delta = \rho$, и поэтому собственные значения этой системы двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений ξ являются корнями следующей квадратичной формы:

$$\det\begin{pmatrix} \rho - n - \xi & -1 \\ \dfrac{c^* f''(k^*)}{\varepsilon_u(c^*)} & 0 - \xi \end{pmatrix} = 0.$$

[6] Здесь необходимо принять во внимание те же технические проблемы, которые мы отметили в контексте q-теории инвестиций в параграфе 7.8: когда значение капитала k достигает нуля, необходимые условия оптимума не могут быть использованы. Однако в упражнении 8.14 доказывается, что скачок потребления к нулю никогда не может быть оптимальным поведением репрезентативного домохозяйства, поэтому траектория, на которой количество капитала достигает нуля $k = 0$ за конечное время, действительно может быть отвергнута.

Нетрудно убедиться, что из уравнения $c^*f''(k^*)/\varepsilon_u(c^*) < 0$ следует, что она имеет два вещественных корня, один из которых больше нуля, а другой — меньше нуля. Поэтому существует одномерное многообразие (кривая) — седловая траектория, сходящаяся к стационарной точке системы (см. упражнение 8.15). Следовательно (и это неудивительно), локальный анализ приводит нас к тому же выводу, что и глобальный анализ седловой устойчивости решения. Однако локальный анализ показывает лишь локальную седловую устойчивость в окрестности стационарной точки, в то время как глобальный анализ позволяет сделать вывод о глобальной седловой устойчивости и о единственности конкурентного равновесия в неоклассической модели экономического роста.

8.6. Неоклассическая модель экономического роста в дискретном времени

Далее мы коротко остановимся на неоклассической модели экономического роста в дискретном времени и продемонстрируем ее тесную связь с моделью в непрерывном времени. Более подробно мы опишем ее в главе 17, где мы явным образом введем в экономику неопределенность.

Далее предположим, что рост населения отсутствует, то есть переменная $c(t)$ описывает потребление на душу населения, и то, что репрезентативное домохозяйство неэластично поставляет на рынок труда одну единицу трудовых ресурсов. Как и ранее, обозначим норму дисконтирования константой $\beta \in (0, 1)$. Тогда репрезентативное домохозяйство максимизирует следующую целевую функцию:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t))$$

при следующем бюджетном ограничении:

$$a(t+1) = (1 + r(t))a(t) + w(t) - c(t),$$

где переменная $a(t)$ обозначает запас финансовых активов домохозяйства на начало периода t, $w(t)$ — равновесное значение заработной платы, которая также является суммарным трудовым доходом домохозяйства, поставляющего на рынок труда одну единицу трудовых ресурсов, а $r(t)$ — доходность финансовых активов между периодами $t - 1$ и t. Так же как и в модели в непрерывном времени, такое потоковое бюджетное ограничение должно быть дополнено условием отсутствия игр Понци. Используя рассуждения, аналогичные тем, которые мы сделали при выводе условия (8.14) в параграфе 8.1, приходим к следующему виду этого условия:

$$\lim_{t\to\infty}\left[a(t)\prod_{s=1}^{t-1}\frac{1}{1+r(s)}\right]\geq 0. \tag{8.42}$$

Из этого условия следует неотрицательность асимптотической приведенной стоимости долга репрезентативного домохозяйства на бесконечности (см. упражнение 8.25). Более того, из рассуждений, аналогичных сделанным в параграфе 8.1, следует, что условие (8.42) в точности является необходимым условием, гарантирующим эквивалентность между формулировкой модели с последовательной торговлей и равновесием Эрроу—Дебре.

Далее, из условия трансверсальности для репрезентативного домохозяйства следует, что приведенная стоимость запаса финансовых активов $a(t)$ не может стремиться на бесконечности к положительному числу, поэтому в равновесии выполняется более сильное условие отсутствия игр Понци в следующем виде:

$$\lim_{t\to\infty}\left[a(t)\prod_{s=1}^{t-1}\frac{1}{1+r(s)}\right]=0. \tag{8.43}$$

Производственная структура экономики совпадает со структурой экономики в модели с непрерывным временем. В частности, арендная стоимость капитала $R(t)$ и заработная плата $w(t)$ задаются условиями (8.5) и (8.6) соответственно. Более того, при заданной норме амортизации δ доходность финансовых активов $r(t)$ снова задается условием (8.27). Прямое применение результатов из главы 6 позволяет сделать вывод о том, что репрезентативное домохозяйство будет выбирать набор потребления, удовлетворяющий уравнению Эйлера в следующем виде:

$$u'(c(t)) = \beta(1 + r(t + 1))u'(c(t + 1)). \tag{8.44}$$

Напомним читателю, что из анализа задачи оптимального роста в дискретном времени в параграфе 6.8 следует, что уравнение (8.44) совпадает с уравнением Эйлера для задачи оптимального роста (6.45) (так как из условия (8.27) следует, что $r(t) = f'(k(t) - \delta))$. Для доказательства эквивалентности между конкурентным равновесием и решением задачи оптимального роста нам лишь осталось показать, что из условия отсутствия игр Понци (8.43) следует условие трансверсальности для задачи оптимального роста (6.51), и наоборот. Чтобы убедиться в этом, перепишем равенство (6.51) в следующем виде:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\beta^t(f'(k(t))+(1-\delta))u'(c(t))k(t)\right]=0.$$

После рекурсивных подстановок уравнения (8.44) для периодов t, $t-1$ и так далее с использованием уравнения (8.27) это равенство становится эквивалентно следующим:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\beta^{t-1}u'(c(t-1))k(t)\right]=0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[\beta^{t-2}\frac{1}{1+r(t-1)}u'(c(t-2))k(t)\right]=0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[\beta^{t-3}\frac{1}{(1+r(t-1))(1+r(t-2)}u'(c(t-3))k(t)\right]=0,$$

$$\vdots$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[k(t)\prod_{s=0}^{t-1}\frac{1}{1+r(s)}\right]=0,$$

где в последнем равенстве мы сократили множитель $u'(c(0))$, который по предположению является строго положительной величиной. Так как в рыночном равновесии выполняется равенство $a(t) = k(t)$, это условие эквивалентно условию (8.43), что доказывает утверждение о том, что рыночное равновесие и решение задачи оптимального роста совпадают. Этот результат неудивителен, так как неоклассическая модель экономического роста удовлетворяет всем условиям первой и второй теорем благосостояния (теоремы 5.6 и 5.7). Несмотря на это, явный вывод этого утверждения, предоставленный здесь, демонстрирует, как выглядит эта эквивалентность двух задач в контексте одной из основных моделей теории экономического роста и макроэкономики.

Из эквивалентности конкурентного равновесия и решения задачи оптимального роста следует, что динамика равновесного распределения ресурсов может быть описана с помощью утверждения 6.3 из параграфа 6.8. В частности, из этого утверждения следует, что начиная с любого положительного запаса капитала $k(0) > 0$, траектория конкурентного равновесия неоклассической модели экономического роста монотонно сходится к единственному стационарному распределению ресурсов. Таким образом, этот результат демонстрирует сходство между общими свойствами моделей в дискретном и непрерывном времени.

8.7. Технологический прогресс и каноническая неоклассическая модель

Как и в базовой модели Солоу, устойчивый экономический рост в неоклассической модели экономического роста невозможен без экзогенного технологического прогресса. Поэтому версия неоклассической модели, включающая в себя технологический прогресс, является более интересной. Мы представим ее в этом параграфе. Производственная функция в данном случае принимает следующий вид:

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)), \tag{8.45}$$

где

$$A(t) = \exp(gt)A(0).$$

Заметим, что мы предполагаем, что технологический прогресс в производственной функции (8.45) является трудоинтенсивным (нейтральным по Харроду). *Мы делаем такое предположение*, опираясь на теорему 2.6 из главы 2, в которой утверждается, что сбалансированный рост экономики возможен только если технологический прогресс является трудоинтенсивным начиная с некоторого момента времени T. Как и в главе 2, мы упростим анализ предположением о том, что технологический прогресс является трудоинтенсивным в течение всего времени существования экономики.

Будем продолжать предполагать, что предположения 1, 2 и 3 о производственной структуре экономики и виде функции полезности выполняются. Ниже мы усилим предположение 4′ для того, чтобы дисконтированная полезность домохозяйства оставалась конечной величиной даже в случае устойчивого роста экономики.

Предположение о постоянной отдаче от масштаба, как и ранее, позволяет нам перейти к нормализованным переменным. Определим следующие переменные:

$$\hat{y}(t) \equiv \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} = F\left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}, 1\right) \equiv f(k(t)),$$

где переменная

$$k(t) \equiv \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \tag{8.46}$$

является эффективным отношением капитала к труду, учитывающим в знаменателе трудоинтенсивный технологический прогресс. Определение (8.46) естественным образом схоже с определением эффективного отношения капитала к труду в базовой модели Солоу.

Чтобы гарантировать наличие в модели траектории сбалансированного роста, нам необходимо в дополнение к предположениям о технологии ввести предположения о виде функции полезности. Как и в базовой модели Солоу, определим траекторию сбалансированного роста как траекторию развития экономики, согласующуюся с фактами Калдора о постоянном темпе роста выпуска, постоянном отношении капитала к выпуску постоянной доле дохода капитала в национальном доходе. Из этих требований следует, что на траектории сбалансированного роста арендная стоимость капитала $R(t)$ должна быть постоянной величиной, откуда по условию (8.10) следует, что доходность финансовых активов $r(t)$ также должна быть постоянной. Мы будем называть равновесную траекторию, удовлетворяющую этим требованиям, траекторией сбалансированного роста (ТСР). Нетрудно убедиться, что из условий сбалансированного роста следует, что темпы роста потребления и выпуска на ТСР должны совпадать. Из уравнения Эйлера темп роста потребления задается следующим равенством:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\varepsilon_u(c(t))}(r(t) - \rho).$$

Если $r(t) \to r^*$, то условие $\dot{c}(t)/c(t) \to g_c$ выполняется только в том случае, когда $\varepsilon_u(c(t)) \to \varepsilon_u$, то есть когда эластичность предельной полезности от потребления является асимптотически постоянной величиной. Так как этот результат является важным, мы сформулируем его как отдельное утверждение.

Утверждение 8.5. *Для наличия в неоклассической модели экономического роста траектории сбалансированного роста необходимо, чтобы технологический прогресс был асимптотически исключительно трудоинтенсивным, а эластичность межвременного замещения потребления* $\varepsilon_u(c(t))$ *сходилась к постоянной величине* ε_u.

В следующем примере мы введем семейство функций полезности, имеющих постоянную межвременную эластичность замещения потребления. Эти же функции являются функциями с постоянным коэффициентном относительного неприятия риска. В этом примере показано, что предпочтения, описываемые функциями полезности с постоянной эластичностью замещения потребления, совпадают в этой экономике с предпочтениями Гормана, и поэтому предположение о том, что $\varepsilon_u(c(t)) \to \varepsilon_u$ не является более ограничивающим, чем предположение о том, что экономика допускает существование нормативного (в сильной форме) домохозяйства (см. главу 5).

Пример 8.1. Функция полезности вида CRRA. Напомним, что коэффициент относительного неприятия риска Эрроу—Пратта для дважды дифференцируемой функции полезности задается следующей формулой:

$$\mathcal{R} = -\frac{u''(c)c}{u'(c)}.$$

Функция полезности с постоянным коэффициентом относительного неприятия риска (вида CRRA) удовлетворяет требованию, чтобы коэффициент $\mathcal{R}$ был постоянной величиной. Полагая его константе, например $\theta > 0$, и интегрируя обе части определения коэффициента $\mathcal{R}$, получаем следующее семейство функций полезности вида CRRA:

$$u(c)=\begin{cases}\dfrac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} & \text{если } \theta\neq 1 \text{ и если } \theta\geq 0,\\ \log c & \text{если } \theta=1,\end{cases}$$

где коэффициент относительного неприятия риска задается параметром θ (см. строгий вывод в упражнении B.9 в приложении B). Мы обратили отдельное внимание на случай $\theta = 1$ в формуле выше, так как при $\theta = 1$ выражение $(c^{1-\theta} - 1)/(1 - \theta)$ становится неопределенным. Однако нетрудно убедиться, что функция $(c^{1-\theta} - 1)/(1 - \theta)$ сходится к функции $\log c$ при $\theta \to 1$ справа.

Для сепарабельной по времени функции полезности величина, обратная межвременной эластичности замещения потребления (определенная в равенстве (8.30)), совпадает с коэффициентом относительного неприятия риска. Следовательно, семейство функций полезности вида CRRA также является семейством функций полезности с постоянной межвременной эластичностью замещения потребления (см. упражнение 5.2).

Чтобы связать предпочтения, описываемые этим семейством функций полезности, с предпочтениями Гормана, которые мы ввели в главе 5, рассмотрим немного измененную задачу, в которой предпочтения индивида определены на множестве наборов потребления N различных товаров $\{c_1, \ldots, c_N\}$, *а функция полезности имеет следующий вид:*

$$u(c_1,\ \ldots,\ c_N)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j^{1-\theta}-1}{1-\theta} & \text{если } \theta\neq 1 \text{ и если } \theta\geq 0,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\log c_j & \text{если } \theta=1.\end{cases}\tag{8.47}$$

Предположим, что индивид наблюдает вектор цен $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_N)$ и обладает доходом y. Таким образом, его бюджетное ограничение имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{N}p_jc_j\leq y.\tag{8.48}$$

Максимизация функции (8.47) при условии (8.48) приводит к следующему виду косвенной функции полезности:

$$v(p,\ y)=\frac{y^{1-\theta}}{(1-\theta)\left[\sum_{j=1}^{N}p_j^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right]^{-\frac{1}{\theta}}}$$

(см. упражнение 5.6). Хотя такая косвенная функция полезности не удовлетворяет условию на предпочтения Гормана из теоремы 5.2, ее монотонное преобразование будет ему удовлетворять (для этого надо возвести функцию $v(p, y)$ в степень $1/(1 - \theta)$). Поэтому предпочтения, описываемые функцией полезности вида CRRA, находятся внутри класса предпочтений Гормана и поэтому если все домохозяйства в экономике имеют функцию полезности вида CRRA, то мы можем агрегировать их предпочтения и рассматривать экономику, как будто она населена единственным репрезентативным домохозяйством.

Далее рассмотрим динамическую модель подобных предпочтений (заданных на бесконечном горизонте планирования):

$$u(c(0),\, c(1),\, \ldots) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \dfrac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} & \text{если } \theta \neq 1 \text{ и если } \theta \geq 0, \\ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c(t) & \text{если } \theta = 1, \end{cases}$$

Важным свойством этих предпочтений в теории экономического роста является не постоянство коэффициента относительного неприятия риска, а постоянство межвременной эластичности замещения потребления (так как в большинстве моделей теории экономического роста отсутствует неопределенность). Межвременная эластичность замещения потребления описывает, насколько индивид готов замещать потребление между различными периодами времени, и поэтому определяет его потребительское поведение и сбережения. В свете этого наблюдения правильнее было бы называть предпочтения вида CRRA предпочтениями с постоянной межвременной эластичностью замещения потребления. Несмотря на это, мы последуем стандартной практике, принятой в литературе, и будем использовать термин «предпочтения вида CRRA».

Наконец отметим, что более широкое семейство предпочтений, лежащих внутри класса предпочтений Гормана, может быть описано следующим видом функций полезности:

$$u(c(0),\, c(1),\, \ldots) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\beta^t \left[(c(t) - \gamma(t))^{1-\theta} - 1 \right]}{1-\theta} \quad \text{или}$$

$$u(c(0),\, c(1),\, \ldots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c(t) - \gamma(t)).$$

Такие предпочтения также будут допускать наличие в экономике траектории сбалансированного роста при выполнении условия $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \bar{\gamma} < \infty$. Подробному обсуждению таких предпочтений посвящено упражнение 8.31. ■

Принимая во внимание ограничение на то, что экономика допускает наличие траектории сбалансированного роста, только если предпочтения домохозяйств могут быть описаны функцией полезности с постоянной межвременной эластичностью замещения потребления, начнем анализ с моментальной функции полезности вида CRRA:

$$u(c(t)) = \begin{cases} \dfrac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} & \text{если } \theta \neq 1 \text{ и если } \theta \geq 0, \\ \log c(t) & \text{если } \theta = 1, \end{cases}$$

где межвременная эластичность замещения потребления ε_u задается константой θ. Если $\theta = 0$, функция полезности становится линейной, при $\theta = 1$ она принимает вид логарифмической функции. В пределе при $\theta \to \infty$ коэффициент неприятия риска стремится к бесконечности и домохозяйства бесконечно сильно стремятся предотвратить замещение потребления во времени.

Более строго, рассмотрим экономику, допускающую наличие нормативного репрезентативного домохозяйства с предпочтениями, описываемыми функцией полезности вида CRRA:

$$\int_0^\infty \exp(-(\rho - n)t)\frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}dt, \tag{8.49}$$

где потребление на душу населения $c(t)$ определено как $C(t)/L(t)$. Будем называть эту модель с трудоинтенсивным технологическим прогрессом и функцией полезности домохозяйств вида CRRA *канонической моделью*, так как именно такая модель используется почти во всех приложениях неоклассической модели экономического роста. В этой модели задача репрезентативного домохозяйства состоит в максимизации целевой функции (8.49) при ограничениях (8.8) и (8.14). Еще раз используя необходимые условия оптимума из теоремы 7.13, получаем следующий вид уравнения Эйлера для потребления репрезентативного домохозяйства:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}(r(t) - \rho). \tag{8.50}$$

Опишем стационарное равновесие в данной модели с технологическим прогрессом. Так как при наличии технологического прогресса происходит рост дохода на душу населения во времени, потребление на душу населения также растет. По аналогии с переменной $k(t)$ введем переменную $\tilde{c}(t)$ следующим образом:

$$\tilde{c}(t) \equiv \frac{C(t)}{A(t)L(t)} \equiv \frac{c(t)}{A(t)}.$$

Такое нормализованное значение потребления остается постоянным на ТСР. Из уравнения Эйлера следует, что его темп роста задается следующим равенством:

$$\frac{d\tilde{c}(t)/dt}{\tilde{c}(t)} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - g = \frac{1}{\theta}(r(t) - \rho - \theta g).$$

Более того, динамика накопления капитала задается следующим уравнением:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \tilde{c}(t) - (n+g+\delta)k(t), \tag{8.51}$$

где, напомним, как и в равенстве (8.46) $k(t) \equiv \dfrac{K(t)}{A(t)L(t)}$.

Условие трансверсальности, в свою очередь, принимает следующий вид:

$$\lim_{t\to\infty}\left[k(t)\exp\left(-\int_0^t [f'(k(s)) - g - \delta - n]ds\right)\right] = 0. \tag{8.52}$$

В дополнение равновесная процентная ставка $r(t)$ продолжает задаваться условием (8.27). Более того, из того, что функция $\tilde{c}(t)$ остается постоянной в стационарном состоянии (на траектории сбалансированного роста) следует, что $r(t) = \rho + \theta g$, откуда, в свою очередь, вытекает следующее равенство:

$$f'(k^*) = \rho + \delta + \theta g. \tag{8.53}$$

Это уравнение единственным образом определяет значение отношения эффективного капитала к труду в стационарном равновесии. Тогда значение нормализованного потребления в стационарном равновесии задается следующим равенством:

$$\tilde{c}^*(t) = f(k^*) - (n+g+\delta)k^*, \tag{8.54}$$

при этом потребление на душу населения растет с темпом g.

Единственное усложнение модели в данном случае состоит в том, что условие трансверсальности становится более жестким. В частности, подставляя уравнение (8.53) в предел (8.52), нетрудно заметить, что условие трансверсальности требует выполнения следующего равенства:

$$\lim_{t\to\infty}\left[k(t)\exp\left(-\int_0^t [\rho - (1-\theta)g - n]ds\right)\right] = 0,$$

которое возможно только если интеграл под экспонентой стремится к минус бесконечности, то есть если $\rho - (1-\theta)g - n > 0$. Поэтому, чтобы гарантировать существование хорошо определенных решения задачи максимизации полезности потребителем и конкурентного равновесия, нам необходимо изменить предположение 4′ следующим образом:

Предположение 4. О дисконтировании при наличии технологического прогресса. *Предположим, что выполняется неравенство* $\rho - (1-\theta)g - n > 0$.

Это предположение является более сильным, чем предположение 4′ при $\theta < 1$. Процентная ставка в стационарном равновесии в такой экономике определяется равенством $r^* = \rho + \theta g$, а темп роста выпуска равен $g + n$. Следовательно, таким же образом, как из предположения 4′ следует, что $r^* > n$, из предположения 4 следует, что $r^* > g + n$. Предположение 4 является необходимым условием выполнения условия трансверсальности и конечности полезности домохозяйства в течение всей жизни в ряде различных задач. Использование этого предположения для того, чтобы гарантировать выполнение условия трансверсальности, может показаться странным, так как (необходимое) условие трансверсальности должно выполняться на оптимальной траектории без необходимости накладывать дополнительные ограничения. Однако основная цель использования предположения 4 не в том, чтобы гарантировать выполнение условия трансверсальности, а в том, чтобы гарантировать то, что полезность домохозяйства не достигает бесконечности (что снова сделает задачу экономически несодержательной и приведет к нарушению предположения о локальной ненасыщенности предпочтений из главы 5). Связь между предположением 4 и конечностью полезности репрезентативного домохозяйства показана в упражнении 8.20. Напомним, что в случае достижения полезностью домохозяйства бесконечного значения условие трансверсальности перестает иметь смысл. На самом деле если это предположение не выполняется, то условие трансверсальности также не будет выполняться. В последующем изложении мы убедимся в том, что проверка выполнения условия трансверсальности оказывается эквивалентной (но при этом более простой) проверке того, что полезность домохозяйства принимает конечное значение.

На данном этапе мы можем применить рассуждения, аналогичные сделанным нами в параграфе 8.20, и показать, что из выполнения предположения 4 следует, что достаточные условия оптимума из теоремы 7.14 также будут выполняться. Поэтому решение задачи максимизации полезности домохозяйством, полученное выше, действительно является глобальным максимумом (см. упражнение 8.21). Следовательно, следующее утверждение является непосредственным обобщением утверждения 8.2.

Утверждение 8.6. *Рассмотрим неоклассическую модель экономического роста с трудоинтенсивным технологическим прогрессом, протекающим с темпом роста g и предпочтениями, заданными уравнением* (8.49). *Допустим, что предположения* 1, 2, 3 *и* 4 *выполняются. Тогда в модели существует единственная ТСР, на которой отношение эффективного капитала к труду k^* задается равенством* (8.53), *а выпуск на душу населения и потребление на душу населения растут с темпом g.*

В этой модели отношение капитала к труду в стационарном равновесии (на ТСР) уже не будет независимым от вида моментальной функции полезности репрезентативного домохозяйства, так как в данном случае отношение эффективного капитала к труду k^*, задаваемое уравнением (8.53), зависит от эластичности функции предельной полезности (или от величины, обратной к межвременной эластичности замещения потребления) θ. Это является следствием того, что в модели с технологическим прогрессом выпуск на душу населения, а следовательно и потребление на душу населения, растут во времени. Так как профиль потребления домохозяйства имеет положительный наклон, его склонность к замещению потребления сегодня потреблением завтра определяет размер сбережений и, соответственно, равновесное значение отношения эффективного капитала к труду.

Возможно, одно из самых важных следствий из утверждения 8.6 состоит в том, что несмотря на то, что значение отношения эффективного капитала к труду в стационарном равновесии k^* определяется в модели эндогенно, темп роста экономики в стационарном равновесии остается экзогенным и равен темпу роста трудоинтенсивного технологического прогресса g. Следовательно, в неоклассической модели экономического роста, так же как и в модели роста Солоу, внутри модели определяется отношение капитала к труду, но не темп роста экономики. Преимущество неоклассической модели экономического роста в том, что в ней равновесные значения отношения капитала к труду и нормализованных выпуска и потребления определяются предпочтениями потребителей, а не экзогенно заданной постоянной нормой сбережений. Эта модель также позволяет нам сравнить конкурентное равновесие и оптимальную траекторию роста (и в данном случае заключить, что конкурентное равновесие является оптимальным по Парето распределением ресурсов и что любое оптимальное по Парето распределение ресурсов может быть децентрализовано как конкурентное равновесие). Однако вопрос определения темпа роста экономики все еще остается вне нашего анализа.

Рассуждения, схожие со сделанными при доказательстве утверждения 8.6, приводят к следующему обобщению утверждения 8.4.

Утверждение 8.7. *Рассмотрим неоклассическую модель экономического роста с трудоинтенсивным технологическим прогрессом, протекающим с темпом роста g и предпочтениями, заданными уравнением* (8.49). *Тогда в модели существует единственная равновесная траектория, на которой* $(k(t), \tilde{c}(t))$ *монотонно сходится к единственному стационарному состоянию* $(k^*, \tilde{c}^*)$, *где значение k^* задается уравнением* (8.53), *а значение $\tilde{c}^*$ задается уравнением* (8.54)

Доказательство. См. упражнение 8.22. ■

В качестве полезного приложения коротко рассмотрим пример с производственной технологией Кобба—Дугласа.

Пример 8.2. Рассмотрим модель с функцией полезности вида CRRA и трудоинтенсивным технологическим прогрессом, протекающим с темпом роста g. Опуская для упрощения временные индексы, предположим, что производственная функция имеет вид $F(K, AL) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$ и поэтому

$$f(k) = k^{\alpha}.$$

Тогда процентная ставка задается уравнением $r = \alpha k^{\alpha-1} - \delta$. Уравнение Эйлера, записанное в единицах нормализованного потребления, в этом случае имеет следующий вид:

$$\frac{d\tilde{c}/dt}{\tilde{c}} = \frac{1}{\theta}(\alpha k^{\alpha-1} - \delta - \rho - n - \theta g),$$

а динамика накопления капитала задается уравнением:

$$\frac{\dot{k}}{k} = k^{\alpha-1} - \delta - g - n - \frac{\tilde{c}}{k}.$$

Определим переменные z и x следующим образом: $z \equiv \tilde{c}/k$, $x \equiv k^{\alpha-1}$. Тогда выполняется равенство $\dot{x}/x = (\alpha - 1)\dot{k}/k$. Следовательно, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\dot{x}}{x} = -(1-\alpha)(x - \delta - g - n - z), \qquad (8.55)$$

а также уравнение:

$$\frac{\dot{z}}{z} = \frac{d\tilde{c}/dt}{\tilde{c}} - \frac{\dot{k}}{k},$$

из которых вытекает следующее равенство:

$$\frac{\dot{z}}{z} = \frac{1}{\theta}(\alpha x - \delta - \rho - \theta g) - x + \delta + g + n + z = \frac{1}{\theta}((\alpha - \theta)x - (1-\theta)\delta + \theta n) - \frac{\rho}{\theta} + z. \quad (8.56)$$

Два обыкновенных дифференциальных уравнения (8.55) и (8.56) вместе с начальным условием $x(0)$ и условием трансверсальности полностью описывают динамику системы. В упражнении 8.24. читателю предлагается закончить анализ этого примера для его частного случая с $\theta = 1$ (логарифмические предпочтения). ■

8.8. Роль экономической политики

В модели, рассмотренной нами в параграфе 8.7, темп роста потребления на душу населения и выпуска на одного работника (на душу населения) определяется экзогенно и равен темпу роста трудоинтенсивного технологического прогресса. С другой стороны, уровень дохода определяется значениями межвременной эластичности замещения потребления $1/\theta$, нормой дисконтирования ρ, нормой амортизации капитала δ, темпом роста населения n и, естественным образом, видом производственной функции $f(\cdot)$.

Возвращаясь к непосредственным причинам межстрановых различий в уровне дохода на душу населения и в темпе экономического роста, неоклассическая модель роста дает нам возможность объяснять их в рамках различий в предпочтениях домохозяйств и технологических параметров экономик. Как мы уже отметили в главе 4, другой нашей задачей является поиск связей между этими непосредственными причинами и возможными фундаментальными факторами экономического роста. Например, мы можем представить различия в межвременной эластичности замещения потребления и в норме дисконтирования как возможные детерминанты экономического роста, связанные с культурными и географическими факторами. Однако объяснения межстрановых различий в темпе экономического роста, так же как и различий в темпе экономического роста в разные периоды времени, основанные на изменениях в предпочтениях потребителей, вряд ли являются удовлетворительными. Более предпочтительный подход состоит в поиске зависимости между стимулами к накоплению физического капитала (а позднее и к накоплению человеческого капитала и технологическим инновациям) и институциональным устройством экономики, чему посвящена часть VIII этой книги. На данном этапе полезно остановиться на особенно простой модели, в которой институциональные различия могут влиять на инвестиционные решения фирм. Для этого сделаем несложное расширение модели, изложенной выше, и введем в нее линейную налоговую политику государства. Предположим, что очищенный от амортизации чистый доход от владения капиталом облагается налогом по ставке τ, а налоговые поступления распределяются равномерно между всеми домохозяйствами. В этом случае уравнение (8.51) продолжает описывать динамику накопления капитала в экономике, однако из-за налогообложения дохода капитала чистая доходность финансовых активов домохозяйств становится равной

$$r(t) = (1 - \tau)(f'(k(t)) - \delta).$$

Тогда из уравнения Эйлера (8.50) следует, что темп роста нормализованного потребления задается следующим уравнением:

$$\frac{d\tilde{c}(t)/dt}{\tilde{c}(t)} = \frac{1}{\theta}(r(t) - \rho - \theta g) = \frac{1}{\theta}((1-\tau)(f'(k(t)) - \delta) - \rho - \theta g).$$

Таким образом, из рассуждений, аналогичных сделанным выше, непосредственно следует, что отношение эффективного капитала к труду в стационарном равновесии задается следующим равенством:

$$f'(k^*) = \delta + \frac{\rho + \theta g}{1 - \tau}. \tag{8.57}$$

Уравнение (8.57) иллюстрирует влияние налогообложения на значения отношения эффективного капитала к труду и выпуска на душу населения в стационарном равновесии. Более высокая налоговая ставка τ увеличивает правую часть уравнения (8.57), и поэтому, в силу того что по предположению 1 функция $f'(\cdot)$ является убывающей, значение k^* уменьшается. Следовательно, более высокие налоги на доход от владения капиталом ведут к замедлению накопления капитала и снижению уровня дохода на душу населения. Таким образом, уравнение (8.57) демонстрирует один из каналов, через которые различия в экономической политике (то есть институциональные различия) могут влиять на экономическое развитие государства. Аналогичные результаты можно получить и в предположении о том, что налог начисляется не на доход от владения капиталом, а на инвестиции, осуществляемые фирмами (см. параграф 8.10).

8.9. Сравнительная динамика

Сравнительная динамика в неоклассической модели экономического роста немного отличается от сравнительной динамики в базовой модели роста Солоу. Напомним, что в сравнительной статике рассматриваются изменения стационарного равновесия экономики при изменениях в ее параметризации, а в сравнительной динамике мы изучаем изменения во всей равновесной траектории переменных при изменениях в экономической политике или параметрах модели. Так как наша задача — показать различия в этих упражнениях, ниже мы коротко остановимся на модели с налогообложением дохода от владения капиталом, изложенной в предыдущем параграфе, и рассмотрим воздействие на экономику изменений налоговой ставки τ. Предположим, что темп роста населения равен n, темп роста трудоинтенсивного технологического прогресса равен g, а доход от владения капиталом облагается налогом по ставке τ. Также предположим, что в начальный момент времени экономика находится в стационарном равновесии, описываемом парой $(k^*, \tilde{c}^*)$, и зададимся вопросом о том, как изменится равновесная траектория экономики в ответ на снижение ставки налога на доход от владения капиталом с τ до $\tau' < \tau$.

Из анализа, проведенного ранее, нам известно, что при новой налоговой ставке $\tau' > 0$ существует единственное стационарное равновесие, обладающее седловой устойчивостью. Обозначим это стационарное равновесие как $(k^{**}, \tilde{c}^{**})$. Следовательно, экономика обязательно будет сходиться к этому новому стационарному равновесию. Более того, из уравнения (8.57) следует, что если $\tau' < \tau$, то новое стационарное значение отношения эффективного капитала к труду k^{**} будет больше, чем k^*, то есть $k^{**} > k^*$ (в то время как темп роста экономики в стационарном равновесии останется неизменным). Сравнительная динамика экономики схематически изображена на рис. 8.2. На нем предполагается, что изменение налоговой ставки является неожиданным и происходит в некоторый момент времени T. В этот момент времени кривая, являющаяся графиком уравнения $(d\tilde{c}/dt)/\tilde{c}(t) = 0$, сдвигается вправо и динамика экономики, описываемая фазовой диаграммой, претерпевает изменения (на рисунке динамика экономики после снижения налоговой ставки показана стрелками). Нетрудно убедиться, что после снижения налоговой ставки исходное значение нормализованного потребления в стационарном равновесии $\tilde{c}^*$ оказывается выше седловой траектории новой динамической системы. Следовательно, потребление должно моментально снизиться и достичь новой седловой траектории для того, чтобы накопление капитала привело к достижению нового стационарного равновесия. Это падение потребления показано на рисунке дугой, описывающей его моментальный скачок непосредственно после снижения налоговой ставки. Вслед за первоначальным падением потребление начинает расти вдоль седловой траектории к новому, более высокому, уровню (нормализованного) потребления. Следовательно, снижение налоговой ставки ведет к временному снижению потребления и последующему его быстрому росту (вдоль седловой траектории). В новом стационарном равновесии уровень нормализованного потребления будет выше, так как пересечение

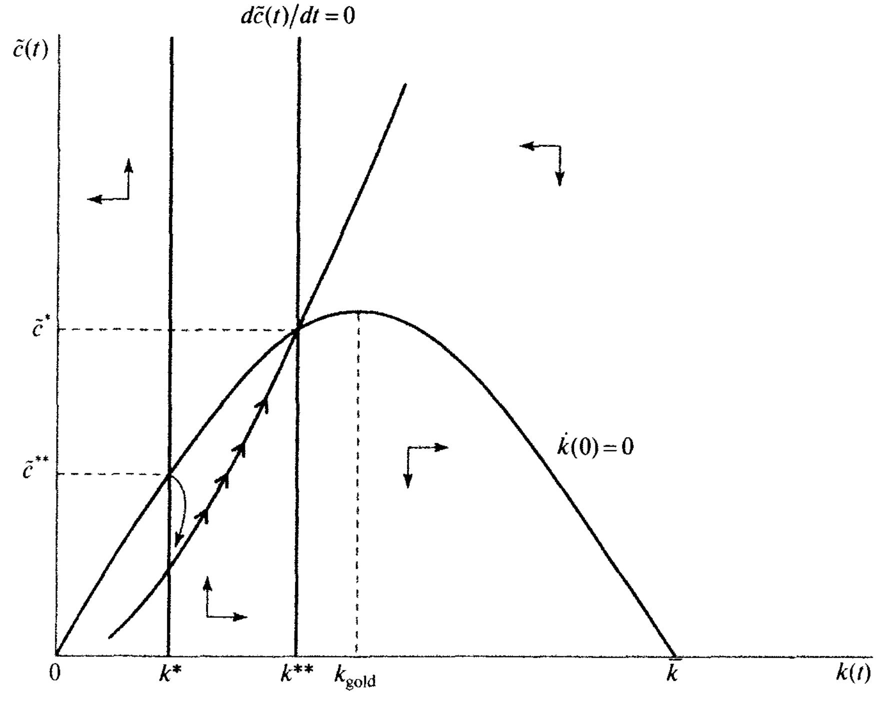


Рис. 8.2. Динамика капитала и потребления при снижении налоговой ставки с τ до $\tau' < \tau$

графика уравнения $(d\tilde{c}/dt)/\tilde{c}(t) = 0$ и выпуклой кривой с ветвями, направленными вниз, являющейся графиком уравнения $\dot{k}/k = 0$, гарантированно находится левее значения k_{gold}.

Сравнительная динамика экономики при изменении других ее параметров, например темпа роста трудоинтенсивного технологического прогресса g, темпа роста населения n, нормы дисконтирования ρ и других параметров функции полезности может быть проанализирована аналогичным образом. В упражнении 8.28 читателю предлагается проанализировать сравнительную динамику при изменении темпа роста трудоинтенсивного технологического прогресса g и при ожидаемом будущем изменении налоговой ставки τ.

8.10. Количественная оценка

Далее перейдем к изучению выводов из неоклассической модели экономического роста, говорящих о количественных размерах различий в уровне дохода на душу населения между странами, возникающими в результате различий в экономической политике. Рассмотрим мир, состоящий из J закрытых неоклассических экономик (принимая во внимание все предостережения о технологических, торговых и финансовых связях между странами, которые мы обсудили в главе 3, см. также главу 19). Предположим также, что экономика каждой страны j допускает существование нормативного репрезентативного домохозяйства и что потребители во всех странах обладают идентичными предпочтениями, описываемыми следующей функцией полезности:

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t)\frac{C_j(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt. \tag{8.58}$$

Допустим, что темп роста населения равен нулю и поэтому переменная $C_j(t)$ описывает как агрегированное потребление, так и потребление на душу населения. Уравнение (8.58) подразумевает, что домохозяйства, населяющие различные страны, имеют одну норму дисконтирования ρ (см. упражнение 8.32). Предположим, что все страны имеют доступ к единой производственной технологии, заданной функцией Кобба—Дугласа следующего вида:

$$Y_j(t) = K_j(t)^{\alpha}(AH_j(t))^{1-\alpha}, \tag{8.59}$$

где переменная H_j обозначает экзогенно заданное количество эффективного труда (человеческого капитала). Динамика накопления капитала задается следующим равенством:

$$\dot{K}_j(t) = I_j(t) - \delta K_j(t). \tag{8.60}$$

Единственное различие между странами состоит в бюджетных ограничениях домохозяйств, которые имеют следующий вид:

$$(1+\tau_j)I_j(t)+C_j(t)\le Y_j(t), \tag{8.61}$$

где константа τ_j обозначает постоянную ставку налога на инвестиции в стране j. Налоговая ставка может различаться между странами, например из-за различий в экономической политике или институциональном устройстве экономик. Заметим, однако, что мы не предлагаем объяснение причин, по которым некоторые страны будут облагать инвестиции более высоким налогом, чем другие. Мы вернемся к обсуждению этого вопроса в части VIII, здесь лишь отметим, что сумма $1+\tau_j$ может быть проинтерпретирована как цена инвестиционного товара в единицах потребительского товара в стране j: одна единица потребительского товара может быть преобразована в $1/(1+\tau_j)$ единиц инвестиционного товара.

Правая часть бюджетного ограничения (8.61) равна $Y_j(t)$, это неявно подразумевает, что налоговые поступления $\tau_j I_j(t)$ теряются, а не перераспределяются в экономике через репрезентативные домохозяйства. Это предположение не имеет значительных последствий для модели в силу того, что, как мы уже отметили в теореме 5.2, предпочтения вида CRRA, описываемые функцией полезности (8.58), обладают одним важным свойством, позволяющим агрегировать их по домохозяйствам, и поэтому распределение дохода между домохозяйствами не имеет значения для агрегированной динамики экономики.

Конкурентное равновесие в этом мире может быть описано как решение задачи максимизации целевых функций (8.58) при ограничениях (8.60) и (8.61). Применяя рассуждения, аналогичные сделанным ранее, приходим к тому, что уравнение Эйлера для потребления репрезентативного домохозяйства в стране j будет выглядеть так:

$$\frac{\dot C_j(t)}{C_j(t)}=\frac{1}{\theta}\left(\frac{\alpha}{1+\tau_j}\left(\frac{AH_j(t)}{K_j(t)}\right)^{1-\alpha}-\delta-\rho\right).$$

Рассмотрим стационарное равновесие. Из того, что A постоянно, следует, что в стационарном равновесии выполняются равенства $\dot C_j(t)/C_j(t)=0$ для всех j. Из них непосредственно вытекает следующее равенство:

$$K_j(t)=\left(\frac{\alpha}{(1+\tau_j)(\rho+\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}AH_j(t). \tag{8.62}$$

Отсюда видно, что страны с более высокими налогами на инвестиции будут иметь меньшее количество капитала в стационарном равновесии. Аналогичным образом они будут иметь меньше капитала на одного работника и меньшее отношение капитала к выпуску (из уравнения (8,59) нетрудно увидеть, что отношение капитала к выпуску задается равенством $K/Y = (K/AH)^{1-\alpha}$). Для нас важнее то, что эти страны также будут относительно бедными. Подставляя уравнение (8.62) в производственную функцию (8.59) и обозначая значение дохода в стационарном равновесии в стране с налоговой ставкой τ как $Y(\tau)$, мы можем сравнить две страны с различными налоговыми ставками (и одинаковым количеством человеческого капитала) и получить следующее выражение для отношения дохода в стационарном равновесии:

$$\frac{Y(\tau)}{Y(\tau')} = \left(\frac{1+\tau'}{1+\tau}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{8.63}$$

Таким образом, в этом уравнении формализуется интуитивное утверждение о том, что страны, в которых инвестиции облагаются более высоким прямым или косвенным налогом, будут более бедными. Интереснее то, что это уравнение может быть использовано для количественной оценки воздействия различий в налоговой политике на уровень дохода. Основное преимущество неоклассической модели экономического роста перед моделью Солоу в таких количественных оценках в том, что в ней степень воздействия различных искажений (в данном случае пропорционального налогообложения инвестиций) на уровень дохода и на накопление капитала определяется эндогенно. В модели экономического роста Солоу динамика экономики задается ее технологической структурой и нормой сбережений, поэтому для оценки влияния различий в экономической политике на межстрановые различия в уровне дохода нам было бы необходимо связать налоговые ставки и другие искажения со сбережениями домохозяйств. Эту связь можно восстановить с помощью эмпирической оценки зависимости между размером искажений и сбережениями, однако в общем случае эта задача может оказаться довольно сложной.

Насколько велико влияние налоговых искажений, представленное в уравнении (8.63)? Другими словами, способна ли неоклассическая модель экономического роста объяснить столь значительные межстрановые различия в уровне дохода? Из уравнения (8.63) следует, что ответ на этот вопрос зависит от размера различий в налоговой ставке τ и величины параметра α. Напомним, что эмпирически правдоподобное значение параметра α равно $^1/_3$, так как доля дохода капитала в национальном доходе равна одной трети, а в производственной технологии Кобба—Дугласа она совпадает с α. Поэтому мы можем получить оценку этого параметра из статистики национальных счетов. Как мы сможем оценить размер межстрановых различий в налоговой ставке τ? Очевидного ответа на этот вопрос не существует. Стандартный подход, наиболее часто используемый в литературе, заключается в том, что в неоклассической модели экономического роста для закрытой экономики с пропорциональным налогообложением инвестиций относительная цена инвестиционного товара в единицах потребительского товара составляет $1 + \tau$. Статистика из *Penn World tables* свидетельствует о значительных межстрановых различиях в относительных ценах. Например, в разных странах относительная цена инвестиционных товаров различается почти в восемь раз. Используя это наблюдение, предположим, что значения τ различаются в восемь раз. Объединяя это предположение с оценкой $\alpha = {}^1/_3$, из уравнения (8.63) получаем приблизительно троекратный разрыв в уровне дохода между двумя странами с таким различием в налоговой ставке:

$$\frac{Y(\tau)}{Y(\tau')} \approx 8^{1/2} \approx 3.$$

Следовательно, мы вряд ли сможем объяснить столь значительные межстрановые различия в уровне дохода, наблюдаемые на практике, различиями в отношении капитала к выпуску или отношении капитала к труду, возникающими в результате различий в налоговых ставках или схожих искажений, даже когда эти различия очень велики. Этот результат нам уже знаком и во многом повторяет обсуждение подхода Мэнкью—Ромера—Вейла из главы 3. В частности, напомним, что при обсуждении в главе 3 мы убедились, что межстрановые различия в уровне дохода на душу населения вряд ли могут быть объяснены лишь различиями в количестве капитала на одного работника. Для объяснения столь значительных различий в уровне дохода на душу населения между странами нам необходимы значительные межстрановые различия в производительности факторов производства, которые не присутствуют в этой модели. Следовательно, простейшая неоклассическая модель экономического роста не способна воспроизвести различия в отношении капитала к труду, достаточные для объяснения наблюдаемых межстрановых различий в уровне дохода на душу населения.

Несмотря на это, многие экономисты пытались (и до сих пор пытаются) использовать различные варианты неоклассической модели экономического роста в дальнейших исследованиях. Их мотивация очевидна. Например если вместо предположения $\alpha = {}^1/_3$ мы положим $\alpha = {}^2/_3$, то отношение доходов в двух странах с восьмикратной разницей налоговых ставок станет

$$\frac{Y(\tau)}{Y(\tau')} = 8^2 = 64.$$

Поэтому если бы изменения количества капитала или других факторов производства в ответ на искажения, связанные с экономической политикой, были более значительными, чем в неоклассической модели экономического роста с $\alpha = {}^1/_3$ (например, такими как в модели с $\alpha = {}^2/_3$), то предсказываемые моделью различия в уровне дохода между странами могли оказаться намного большими. Каким образом мы можем прийти к модели с $\alpha = {}^2/_3$? В такой модели в дополнение к физическому капиталу, доля дохода которого в национальном доходе составляет ${}^1/_3$, должен присутствовать еще один динамический фактор производства. Одним из таких подходящих факторов является человеческий капитал (см. главу 10). Однако из обсуждения в главе 3 следует, что межстрановые различия в количестве человеческого капитала оказываются недостаточны для объяснения большой доли различий в уровне дохода на душу населения между странами. Другой подход состоит в ведении в модель других типов капитала или, возможно, технологий, которые реагируют на искажения таким же образом, как и капитал. Несмотря на то, что такой подход логически возможен, систематический анализ подобных моделей требует введения эндогенного технологического прогресса, на котором мы подробно остановимся в следующей части книги.

8.11. Расширения модели

Неоклассическая модель экономического роста обладает многими расширениями, которые используются как в теории, так и в эмпирических исследованиях. Однако для краткости изложения мы не будем останавливаться на них. Вместо этого наиболее важные расширения представлены как упражнения к данной главе. В частности, в упражнении 8.33 в функцию полезности домохозяйства в качестве еще одного аргумента вводится свободное время, что приводит к появлению эндогенной функции предложения труда. Модель, рассмотренная в этом упражнении, является особенно важной, так как именно такая версия неоклассической модели экономического роста наиболее часто используется в кратко- и среднесрочном макроэкономическом анализе. В упражнении 8.33 также показано, что в этом случае для существования в модели траектории сбалансированного роста мы вынуждены накладывать дополнительные ограничения на вид моментальной функции полезности домохозяйств. Упражнение 8.34, в котором в модель вводятся государственные расходы и налоги, посвящено ее дальнейшему анализу. Упражнение 8.36 посвящено анализу неоклассической модели экономического роста для открытой экономики, имеющей доступ к мировому финансовому рынку и возможность привлекать займы и выдавать кредиты по экзогенно заданной мировой процентной ставке r^*. В упражнении 8.37 рассматривается неоклассическая модель экономического роста с издержками инсталляции капитала, рассмотренными нами в q-теории инвестиций. Наконец, упражнение 8.38 посвящено анализу многосекторной версии неоклассической модели экономического роста.

8.12. Основные выводы

В этой главе мы познакомились с одной из важнейших (если не с самой важной) моделей, используемых в макроэкономике: неоклассической моделью экономического роста. Напомним, что мы начали изучение моделей экономического роста в главе 2 с модели роста Солоу. Мы увидели, что несмотря на то, что эта модель позволяет сделать ряд важных выводов, она во многом рассматривает динамику экономического роста как черный ящик. Устойчивый экономический рост в модели Солоу возможен лишь при наличии технологического прогресса (в предположении об убывающей предельной производительности капитала), однако сам технологический прогресс моделью не описывается. Единственным фактором, способным объяснить межстрановые различия в уровне доходов в модели Солоу является норма сбережений, однако она является в ней экзогенной переменной. Основная задача этой главы состоит во вскрытии черного ящика сбережений и накопления капитала с помощью явного моделирования предпочтений домохозяйств. В этом случае мы можем связать норму сбережений с предпочтениями домохозяйств, технологической структурой экономики и ценами. Более того, как показано в упражнении 8.39, воздействие экономической политики на равновесную траекторию экономики в неоклассической модели экономического роста отличается от него в модели роста Солоу с экзогенно заданной нормой сбережений. Еще одно важное преимущество неоклассической модели экономического роста состоит в том, что явная спецификация предпочтений домохозяйств предоставляет возможность сравнения конкурентного равновесия и оптимальной траектории экономики.

Однако самый важный вклад неоклассической модели состоит в том, что она является основой для дальнейшего анализа накопления физического капитала, инвестиций в человеческий капитал и эндогенного технологического прогресса, чему посвящены следующие несколько глав книги (начиная с анализа человеческого капитала в главе 10). Поэтому эта глава является первым и, возможно, концептуально самым важным шагом на пути к систематическому анализу экономического роста. В ней представлен математический и концептуальный аппарат, необходимый для построения моделей накопления физического капитала, человеческого капитала и эндогенного технологического прогресса.

Позволяет ли неоклассическая модель экономического роста улучшить наше понимание межстрановых различий в уровне дохода и темпе роста экономики? Ответ на этот вопрос во многом отрицательный. Несмотря на то что эта модель является важным шагом на пути к изучению механики экономического роста, она, как и модель роста Солоу, опирается на непосредственные причины этих различий. Мы продолжаем объяснять их различиями в нормах сбережений, инвестиций и темпе роста технологической переменной, которые, возможно, определяются предпочтениями домохозяйств и технологической структурой экономики (например, темпом роста трудоинтенсивного технологического прогресса). Поэтому читателю необходимо понимать, что эта модель сама по себе не дает ответа на вопрос о фундаментальных причинах экономического роста. Однако она позволяет четко описать природу принятия экономических решений фирмами и домохозяйствами, что позволяет нам приблизиться к ответу на этот вопрос.

8.13. Литература

Неоклассическая модель экономического роста впервые была описана в классической работе Франка Рамсея [Ramsey 1928]. Поэтому ее часто называют моделью Рамсея. Модель Рамсея была во многом схожа с неоклассической моделью экономического роста, однако в ней в задаче потребителя отсутствовало дисконтирование. Другая ранняя модель оптимального роста была разработана Джоном фон Нейманом [von Neumann 1945]. Она описывает предельную динамику экономики в линейной модели. Современная версия неоклассической модели экономического роста наиболее близка к моделям в работах [Cass 1965] и [Koopmans 1965].

Неоклассическая модель экономического роста является частью всех учебников по макроэкономике и теории экономического роста. Базовый анализ неоклассической модели экономического роста в дискретном времени представлен в учебнике [Ljungqvist, Sargent 2005, chapter 14]. Подробный анализ модели в непрерывном времени читатель может найти в учебниках: [Barro, Sala-i-Martin 2004, chapter 2; Romer 2006, chapter 2; Ромер 2015, гл. 2]. Версия неоклассической модели экономического роста в непрерывном времени также представлена в учебнике [Blanchard, Fischer 1989, chapter 2; Бланшар, Фишер 2014, гл. 2]. Во всех этих книгах задача максимизации полезности домохозяйством решается с помощью необходимых условий оптимума, следующих из принципа максимума, включая условие трансверсальности в сильной форме. Стандартный подход в них состоит в игнорировании условия отсутствия игр Понци вначале, а затем в демонстрации того, что траектории, на которых оно нарушается, не могут быть конкурентным равновесием. Как мы уже показали в предыдущей главе, при описании решения задачи максимизации полезности потребителем необходимо учитывать некоторые детали. Во-первых, принцип максимума не может быть использован при игнорировании условия отсутствия игр Понци, так как в этом случае потребление домохозяйств может оказаться неограниченным. Во-вторых, даже если мы не будем обращать на это внимания, принцип максимума предоставляет лишь необходимые условия внутреннего оптимума, а для доказательства единственности конкурентного равновесия (или оптимального распределения ресурсов) нам необходимо отвергнуть траектории, которые не являются везде внутренними. Поэтому в этой главе мы, вместо использования необходимых условий, с помощью теоремы 7.13 строим возможное решение задачи, а затем убеждаемся в том, что оно удовлетворяет достаточным условиям оптимума из теоремы 7.14. Такой подход является одновременно более простым и более строгим, чем стандартный подход. Мы также предоставили набросок доказательства (основанного на базовых принципах) того, что не внутренние траектории не могут быть конкурентным равновесием, не использующего принцип максимума.

Количественную оценку влияния различий в экономической политике читатель может найти в работе [Chari, Kehoe, McGrattan 1997]. Ее авторы следуют работе [Jones 1995], в которой в качестве меры различий в ставках налога и других искажениях используются различия в ценах инвестиционных товаров (по отношению к ценам потребительских товаров) из *Penn World tables*. Однако такая интерпретация имеет проблемы. В частности, при международной торговле между странами эти различия могут отражать другие технологические факторы или различия в относительном количестве факторов производства в разных странах (см. главу 19, а также [Acemoglu, Ventura 2002], [Hsieh, Klenow 2002]. Схожие количественные упражнения, основанные на расширенной версии неоклассической модели экономического роста, представлены в работе [Parente, Prescott 1994] (где «набор технологий», которые доступны лидерам и внедрение которых сопряжено с издержками, интерпретируется как еще один инвестиционный товар). Другие авторы для увеличения эластичности выпуска (то есть для увеличения параметра α в параграфе 8.10) по искажениям используют другие динамические факторы производства.

Рикардианская эквивалентность, изложенная в упражнении 8.35, впервые была описана в работе [Barro 1974]. Мы подробно обсудим ее в главе 9. Предпочтения домохозяйств, рассмотренные в упражнении 8.31, называют предпочтениями Стоуна—Гири. Они изложены в работах: [Geary 1950] и [Stone 1954]. Такие предпочтения являются частным случаем предпочтений Гормана, которые используются в теоремах 5.2 и 5.3.

8.14. Упражнения

8.1. Рассмотрите задачу оптимального выбора потребления домохозяйством, состоящим из $L(t)$ (континуума) членов при $L(0) = 1$, на бесконечном горизонте планирования. Предположите, что в момент времени t общий объем потребления домохозяйства составляет $C(t)$. Домохозяйство обладает утилитарными предпочтениями, описываемыми моментальной функцией полезности $u(t)$, и дисконтирует будущее по норме дисконтирования $\rho > 0$.

(a) Покажите, что задача домохозяйства может быть поставлена следующим образом:

$$\max \int_0^{\infty} \exp(-\rho t) \left[\int_0^{L(t)} u(c_i(t))di \right] dt$$

при ограничении

$$\int_0^{L(t)} c_i(t)di \leq C(t)$$

и при следующем бюджетном ограничении:

$$\dot{A}(t) = r(t)A(t) + W(t) - C(t),$$

где индекс i обозначает одного из членов домохозяйства, $A(t)$ — общее количество финансовых активов домохозяйства, $r(t)$ — доходность финансовых активов, $W(t)$ — суммарный трудовой доход всех членов домохозяйства.

(b) Покажите, что если моментальная функция полезности $u(\cdot)$является строго вогнутой, то эта задача эквивалентна следующей:

$$\max \int_0^{\infty} \exp(-(\rho - n)t) u(c(t)) dt$$

при ограничении

$$\dot{a}(t) = (r(t) - n)a(t) + w(t) - c(t),$$

где $w(t) \equiv W(t)/L(t)$ и $a(t) \equiv A(t)/L(t)$. Предложите интуитивное объяснение трансформированной задачи.

8.2. Рассмотрите задачу максимизации целевой функции (8.3) при ограничении (8.8) в отсутствие каких-либо других ограничений.

(a) Покажите, что для любой возможной траектории потребления $[c(t)]_{t=0}^{\infty}$ существует другая траектория потребления $[c'(t)]_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющая потоковому бюджетному ограничению (8.8), на которой в любой момент времени t выполняется неравенство $c'(t) > c(t)$, а целевая функция достигает большего значения.

(b) Используя рассуждения из части (a), покажите, что при оптимальном поведении домохозяйства его финансовая позиция $a(t)$ станет неограниченно отрицательной в любой момент времени t. [Подсказка: в этой задаче существуют траектории потребления и финансовых активов, на которой целевая функция достигает максимального значения. Поэтому вам необходимо показать, что при неограниченном убывании финансовой позиции $a(t)$ в любой момент времени t значение целевой функции стремится к ее максимальному значению (которое может, но не должно, быть равным $+\infty$.]

(c) Объясните, почему такое распределение ресурсов не будет удовлетворять требованию допустимости.

8.3. Рассмотрите закон изменения запаса финансовых активов домохозяйства, заданный уравнением (8.17). Используя это уравнение, покажите, что если финансовая позиция домохозяйства $\mathcal{A}(t)$ в момент времени t равна нулю и начиная с этого момента времени домохозяйство выбирает нулевое значение потребления, то асимптотически она приближается к следующему значению:

$$\bar{W}(t) \equiv \int_t^{\infty} w(s)L(s)\exp\left(-\int_t^s r(z)dz\right)ds.$$

Объясните, почему естественное ограничение на максимальный размер долга требует, чтобы выполнялось неравенство $\mathcal{A}(t) \geq -\bar{W}(t)$. Используйте определение $\mathcal{A}(t)$ и тот факт, что размер домохозяйства $L(t)$ растет с темпом n для вывода условия (8.11). Покажите связь этого естественного ограничения на максимальный размер долга с его аналогом для дискретного времени (6.44) из главы 6.

8.4. Покажите, что из ослабленного естественного ограничения на максимальный размер долга (8.12) следует, что оригинальное ограничение (8.11) выполняется во все моменты времени t.

8.5. Выведите уравнение (8.8) из равенства (8.13).

8.6. Выведите уравнение (8.16) из неравенства (8.14) и условия (8.19). [Подсказка: используйте условие (8.18) для подстановки $\mu(t)$ в условие (8.19).]

8.7. Покажите, что теорема 7.3 может быть применена для решения задачи максимизации полезности домохозяйством из параграфа 8.2.2. В частности, используя рассуждения из параграфа 7.7, покажите, что если $c(t) \in [\varepsilon, +\infty)$ и $r(t) > n$ при всех t, то выполняется предположение 7.1. Затем покажите, что ограничение на значение потребления $c(t) \in [\varepsilon, +\infty$ не влияет на утверждение о том, что $r(t) > n$ при всех t в любом конкурентном равновесии.

8.8. **(a)** Покажите, что из естественного ограничения на максимальный размер долга (8.12) при $\hat{a} > -\infty$ следует условие отсутствия игр Понци (8.14), но из условия (8.14) не следует ограничение (8.12) при $\hat{a} > -\infty$. [Подсказка: рассмотрите экономику, в которой $w(t) = \exp(gt)w(0)$ и $r(t) = r$ для всех t.]

(b) Покажите, что в неоклассической модели экономического роста с трудоинтенсивным технологическим прогрессом, описанной в параграфе 8.7, невозможно применение теорем 7.13 и 7.14 с помощью естественного ограничения на максимальный размер долга.

8.9. Покажите, что неравенства $\lim_{t\to\infty} r(t) > n$ и $\lim_{t\to\infty} w(t) = w \geq 0$ являются достаточными условиями для выполнения неравенства $\hat{a} > -\infty$ в естественном ограничении на максимальный размер долга (8.12).

8.10. **(a)** Покажите, что использование естественного ограничения на максимальный размер долга при $\hat{a} > -\infty$ приводит к такому же поведению домохозяйств, как и при использовании условия отсутствия игр Понци. [Подсказка: рассмотрите задачу максимизации целевой функции *(8.3) при ограничениях (8.8) и (8.11)* при $\hat{a} > -\infty$ и покажите, что эта задача удовлетворяет условиям теорем 7.13 и 7.14. Затем выведите необходимые условия оптимума и сравните их с условиями из параграфа 8.2.]

(b) Покажите, что в конкурентном равновесии выполняется неравенство $\hat{a} > -\infty$.

8.11. Используя рассуждения, схожие с доказательством теоремы Мангасаряна о достаточных условиях оптимума (теорема 7.5), покажите, что из того, что гамильтониан задачи домохозяйства в неоклассической модели экономического роста $H(t, a, c, \mu)$ является вогнутой функцией по аргументам (a, c) и строго вогнутой функцией *по c, следует, что траектория потребления и запаса финансовых* активов, заданная условиями (8.17)–(8.19), является единственным решением задачи максимизации полезности домохозяйством.

8.12. Покажите, что на рис. 8.1, описывающем динамику базовой неоклассической модели экономического роста, график уравнения $\dot{c} = 0$ пересекается с графиком уравнения $\dot{k} = 0$ в точке, лежащей слева от значения k_{gold}. Используя этот анализ, объясните, почему значение отношения капитала к труду k^* в стационарном равновесии, заданное модифицированным золотым правилом (8.35), отличается от значения k_{gold}.

8.13. **(a)** В анализе переходной динамики неоклассической модели покажите, что если начальное значение потребления $c(0)$ находится над седловой траекторией, то количество капитала достигнет нуля за конечный промежуток времени. Объясните, почему это будет противоречить требованию допустимости решения. [Подсказка: проанализируйте необходимые условия оптимума при $c = 0$ более подробно.]

(b) Покажите, что если начальное значение потребления $c(0)$ находится под седловой траекторией, то отношение капитала к труду сходится к значению $\bar{k}$ при $t \to \infty$, такому, что $f'(\bar{k}) < \delta + n$. [Подсказка: используйте то свойство, что $\bar{k} > k_{\text{gold}}$ и что $f'(k_{\text{gold}}) = \delta + n$.]

8.14. Рассмотрите на рис. 8.1 возможную равновесную траекторию, на которой количество капитала (отношение капитала к труду $k(t)$) достигает нуля в некоторый конечный момент времени $T < \infty$.

(a) Покажите, что на такой возможной равновесной траектории $c(t) = 0$ для всех $t \geq T$ и $r(t) \to \infty$ при $t \to T$.

(b) Покажите, что такая возможная траектория не может быть конкурентным равновесием, рассмотрев следующее отклонение в поведении домохозяйства: снижение потребления на небольшую величину $\Delta > 0$ в момент времени $t' < T$ и размещение сбережений в финансовые активы до момента времени T. [Подсказка: потери полезности примерно равны $\exp(-(\rho - n)t')u'(c(t'))\Delta < \infty$, в то время как домохозяйство сможет увеличить свое потребление в момент времени T на $\exp\left(\int_{t'}^{T} r(t)dt\right)$, что позволит увеличить полезность примерно на

$$\exp\left(-(\rho-n)T+\int_{t'}^{T} r(t)dt\right)u'(0)\Delta, \text{ где } u'(0) > u'(c(t'))$$

$$\text{и } \exp\left(-(\rho-n)T+\int_{t'}^{T} r(t)dt\right)u'(0) > \exp(-(\rho-n)t')$$

при t' достаточно близком к T (это следует из того, что $\lim_{t \to T} r(t) = \infty$.]

8.15. Рассмотрите базовую неоклассическую модель экономического роста без технологического прогресса.

(a) Покажите, что в окрестности стационарного равновесия k^* закон изменения отношения капитала к труду $k(t) \equiv K(t)/L(t)$ может быть приближен следующим образом:

$$k(t) \simeq k^* + \eta_1 \exp(\xi_1 t) + \eta_2 \exp(\xi_2 t),$$

где константы ξ_1 и ξ_2 являются собственными значениями соответствующей линеаризованной системы.

(b) Найдите эти собственные значения и покажите, что одно из них, например ξ_2, положительно.

(c) На основании вашего ответа в части (b) найдите значение η_2.

(d) Предложите способ определить значение η_1. [Подсказка: для ответа на этот вопрос предположите, что уравнение из части (а) выполняется точно.]

(e) Какие факторы определяют скорость приближения отношения капитала к труду $k(t)$ к своему стационарному значению k^*?

8.16. Рассмотрите вариант неоклассической модели экономического роста (с постоянным темпом роста населения n), в котором предпочтения домохозяйств заданы следующей целевой функцией:

$$\max \int_0^\infty \exp(-\rho t) u(c(t)) dt,$$

а население растет с темпом n. Как выглядит конкурентное равновесие в такой модификации модели? Каким образом должно быть изменено условие трансверсальности? Как выглядит соотношение между темпом роста населения n и значением отношения капитала к труду в стационарном равновесии k^*?

8.17 Докажите утверждение 8.3.

8.18. Объясните, почему значение отношения капитала к труду в стационарном равновесии k^* не зависит от вида моментальной функции полезности в модели без технологического прогресса, но зависит от значения межвременной эластичности замещения потребления в модели с технологическим прогрессом.

8.19. **(a)** Покажите, что норма сбережений в стационарном равновесии s^*, определенная в равенстве (8.38), убывает по норме дисконтирования ρ, то есть меньшее значение нормы дисконтирования ведет к большему количеству сбережений в стационарном равновесии.

(b) Покажите, что, в отличие от модели Солоу, норма сбережений s^* никогда не может быть столь велика, что значение потребления на душу населения в стационарном равновесии может быть увеличено снижением нормы сбережений (или увеличением константы ρ).

8.20. Рассмотрите ТСР в неоклассической модели экономического роста с технологическим прогрессом, рассмотренной в параграфе 8.7 (где темп роста потребления равен g). Покажите, что полезность домохозяйства на ней конечна, если и только если выполняется предположение 4.

8.21. Рассмотрите неоклассическую модель экономического роста с технологическим прогрессом, рассмотренную в параграфе 8.7. Покажите, что если предположение 4 выполняется, то задача потребителя максимизации целевой функции (8.49) при ограничениях (8.8) и (8.14) удовлетворяет условиям теоремы 7.14. Что произойдет, если предположение 4 не выполняется?

8.22 Докажите, что, как говорится в утверждении 8.7, в неоклассической модели экономического роста с трудоинтенсивным технологическим прогрессом и стандартными предположениями при заданном начальном значении $k(0) > 0$ существует единственная траектория конкурентного равновесия, на которой нормализованное потребление и отношение капитала к труду монотонно сходятся к ТСР.

8.23 Рассмотрите неоклассическую экономику с репрезентативным домохозяйством, чьи предпочтения в момент времени $t = 0$ заданы следующей целевой функцией:

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t)\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt.$$

Предположите, что рост населения отсутствует и что предложение труда абсолютно неэластично. Также предположите, что агрегированная производственная функция имеет вид $Y(t) = F(A(t)K(t), L(t))$, где функция F удовлетворяет стандартным предположениям (о постоянной отдаче от масштаба, дифференцируемости и условиям Инада).

(a) Выведите условия конкурентного равновесия в такой экономике.

(b) Предположите, что $A(t) = A(0)$ для всех t и опишите стационарное равновесие. Объясните, почему значение отношения капитала к труду в стационарном равновесии не зависит от θ.

(c) Далее предположите, что $A(t) = \exp(gt)A(0)$ и покажите, что ТСР (с постоянной долей дохода капитала в национальном доходе и постоянными и равными темпами роста выпуска, капитала и потребления) в такой экономике существует, только если функция F является функцией Кобба—Дугласа, то есть $Y(t) = (A(t)K(t))^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$.

(d) Опишите ТСР в случае производственной функции Кобба—Дугласа. Найдите значение общего темпа роста выпуска, капитала и потребления.

8.24 Найдите в явном виде решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений для переходной динамики модели, представленной в примере 8.2, для случая логарифмических предпочтений.

8.25. Выведите неравенство (8.42) из $T-1$-периодного бюджетного ограничения домохозяйства. В частности, запишите это бюджетное ограничение в следующем виде:

$$\sum_{t=0}^{T-1}\left(\prod_{s=0}^{t-1}\frac{1}{1+r(s)}\right)c(t)+\left(\prod_{s=0}^{t-1}\frac{1}{1+r(s)}\right)a(T)\leq\sum_{t=0}^{T-1}\left(\prod_{s=0}^{t-1}\frac{1}{1+r(s)}\right)w(t)+a(0).$$

Объясните это бюджетное ограничение. Переходя к пределу при $T\to\infty$, покажите, что бюджетное ограничение домохозяйства в течение всей жизни на бесконечном горизонте планирования следует из него, только если выполняется неравенство (8.42).

8.26. Рассмотрите неоклассическую модель экономического роста в дискретном времени. Предположите, что экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства с логарифмическими предпочтениями ($\theta = 1$ в терминах равенства (8.49)), а производственная функция является функцией Кобба—Дугласа. Также предположите полную амортизацию капитала, то есть что $\delta = 1$. Опишите стационарное равновесие в модели и выведите в явном виде разностное уравнение, описывающее динамику капитала вне стационарного равновесия.

8.27. В неоклассической модели экономического роста из упражнения 8.26 предположите наличие трудоинтенсивного технологического прогресса, проходящего с темпом роста g:

$$A(t+1) = (1+g)A(t).$$

Для простоты предположите, что рост населения отсутствует.

(a) Докажите, что существование траектории сбалансированного роста возможно лишь в случае, когда предпочтения имеют вид CRRA:

$$u(c(0),\,c(1),\,\ldots)\equiv\begin{cases}\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta} & \text{если } \theta\neq 1 \text{ и } \theta\geq 0,\\ \displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\log c(t) & \text{если } \theta = 1,\end{cases}$$

(b) В предположении о том, что предпочтения заданы как в части (a), докажите существование единственного стационарного равновесия, в котором отношение эффективного капитала к труду остается постоянным.

8.28. (a) Проанализируйте сравнительную динамику в базовой неоклассической модели экономического роста после неожиданного увеличения темпа роста трудоинтенсивного технологического прогресса с g до $g' > g$. Как изменится потребление: вырастет или упадет?

(b) Проанализируйте сравнительную динамику экономики после объявления в момент времени T о том, что в некоторый момент времени $T' > T$ в будущем налоговая ставка будет снижена с τ до $\tau' < \tau$. Как изменится потребление в момент времени T: вырастет или упадет?

8.29 Рассмотрите базовую неоклассическую модель экономического роста с трудоинтенсивным технологическим прогрессом и CRRA предпочтениями вида (8.49). Объясните, почему условие трансверсальности выполняется всегда при $\theta > 1$.

8.30. Рассмотрите базовую неоклассическую модель экономического роста с CRRA предпочтениями, но разнородными потребителями, обладающими различным начальным запасом финансовых активов (для простоты вы можете предположить, что технологический прогресс отсутствует). В частности, предположите, что существует множество домохозяйств $\mathcal{H}$ и каждое домохозяйство $h \in \mathcal{H}$ обладает начальным запасом финансовых активов $a_h(0)$. Других различий между домохозяйствами нет.

(a) Опишите конкурентное равновесие в этой экономике и покажите, что динамика подушевых переменных в ней совпадает с динамикой переменных в экономике, населенной репрезентативными домохозяйствами с начальным запасом финансовых активов, равным $a(0) = |\mathcal{H}|^{-1} \int_{\mathcal{H}} a_h(0)dh$, где константа $|\mathcal{H}|$ является мерой множества (количеством) домохозяйств в этой экономике. Проинтерпретируйте этот результат и свяжите его с теоремой 5.2.

(b) Покажите, что если вместо естественного ограничения на максимальный размер долга или условия отсутствия игр Понци вы наложите ограничение $a_h(t) \geq 0$ для всех $h \in \mathcal{H}$ во все моменты времени t, то экономика может прийти к другому конкурентному равновесию. В свете этого результата проанализируйте, является ли (и если да, то в каком случае) использование ограничения на запрет заимствований вместо условия отсутствия игр Понци подходящей стратегией.

8.31. Рассмотрите вариант неоклассической модели экономического роста с так называемыми предпочтениями Стоуна — Гири, заданными следующей целевой функцией репрезентативного домохозяйства:

$$\int_0^{\infty} \exp(-\rho t)\frac{(c(t)-\gamma)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt,$$

где $\gamma > 0$. Предположите, что рост населения отсутствует, а производственная функция имеет вид $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$ и удовлетворяет стандартным условиям, а $A(t) = \exp(gt)A(0)$.

(a) Приведите интуитивную интерпретацию такой функции полезности.

(b) Определите конкурентное равновесие в этой экономике.

(c) Опишите конкурентное равновесие в этой экономике. Существует ли в ней ТСР с положительным темпом роста потребления на ней? Почему да или почему нет?

(d) Выведите ограничения на параметры модели, при которых выполняется стандартное условие трансверсальности.

(e) Опишите переходную динамику в этой экономике.

(f) Покажите, что если предпочтения в этой экономике заданы целевой функцией потребителя следующего вида:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [(c(t)-\gamma(t))^{1-\theta}-1]/(1-\theta)$$

и $\lim_{t\to\infty}\gamma(t) = \bar{\gamma} < \infty$, то в такой экономике существует стационарное равновесие и ТСР совпадает с ТСР в экономике, описанной в частях (a)–(e) этого упражнения.

8.32. Рассмотрите мир, состоящий из набора закрытых неоклассических экономик. Предположите, что каждая страна j имеет доступ к одной и той же неоклассической производственной технологии и допускает существование репрезентативного домохозяйства с предпочтениями, заданными целевой функцией $(1-\theta)^{-1}\int_0^{\infty}\exp(-\rho_j t)(c_j^{1-\theta}(t)-1)dt$.

Опишите размер межстрановых различий в уровне дохода на душу населения в такой мировой экономике. Каково будет влияние на доход на душу населения 10-процентных различий в норме дисконтирования (например, разницы норм дисконтирования 0,02 и 0,022)? [Подсказка: используйте предположение о том, что доля дохода капитала в национальном доходе равна $^1/_3$.]

8.33. Рассмотрите неоклассическую модель экономического роста с трудоинтенсивным технологическим прогрессом. В частности, нормализуйте население экономики единицей и предположите, что функция полезности всех домохозяйств имеет вид: $\int_0^{\infty}\exp(-\rho t)u(c(t),\ 1-l(t))dt$, где функция $l(t) \in (0, 1)$ является предложением труда домохозяйством. В симметричном равновесии занятость $L(t)$ совпадает с предложением труда $l(t)$. Предположите, что производственная функция имеет вид $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$ и удовлетворяет стандартным условиям, а $A(t) = \exp(gt)A(0)$.

(a) Определите конкурентное равновесие в этой экономике.

(b) Постройте текущий гамильтониан, который максимизирует каждое домохозяйство при заданных значениях заработной платы и процентной ставки и выведите необходимые и достаточные условия оптимального выбора потребления и решения о занятости.

(c) Постройте текущий гамильтониан для задачи общественного планировщика, максимизирующего функцию полезности репрезентативного домохозяйства и выведите необходимые и достаточные условия решения этой задачи.

(d) Покажите, что при совершенной конкуренции на рынках товаров и факторов производства эти две задачи эквивалентны.

(e) Покажите, что для существования ТСР в этой экономике необходимо, чтобы функция полезности репрезентативного домохозяйства имела следующий вид:

$$u(c(t), 1-l(t)) = \begin{cases} \dfrac{Ac(t)^{1-\theta}}{1-\theta} h(1-l(t)) & \text{если } \theta \neq 1 \text{ и } \theta \geq 0, \\ A\log c(t) + Bh(1-l(t)) & \text{если } \theta = 1, \end{cases}$$

при некоторой функции $h(\cdot)$, такой, что $h'(\cdot) > 0$. [Подсказка: для простоты вы можете предположить, что межвременная эластичность замещения потребления $\varepsilon_u \equiv -u_{cc}/u_c$ является функцией лишь от потребления c.] Приведите интуитивное объяснение такого выбора функциональной формы функции полезности в терминах эффекта дохода и эффекта замещения.

8.34. Рассмотрите стандартную неоклассическую модель экономического роста с репрезентативным домохозяйством, обладающим предпочтениями следующего вида:

$$\int_0^{\infty} \exp(-\rho t)\left(\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + G(t)\right)dt,$$

где $G(t)$ является общественным благом, предоставляемым за счет государственных расходов. Предположите, что производственная функция имеет вид $Y(t) = F(K(t), L(t))$ и удовлетворяет всем стандартным предположениям, а бюджетное ограничение домохозяйства выглядит как $C(t) + I(t) \leq Y(t)$, где переменная $I(t)$ обозначает частные инвестиции.

Предположите, что общественное благо $G(t)$ финансируется за счет налога на инвестиции частного сектора. В этом случае динамика накопления капитала имеет следующий вид:

$$\dot{K}(t) = (1 - \tau(t)I(t)) - \delta K(t),$$

а доля $\tau(t)$ частных инвестиций используется для финансирования общественного блага, то есть $G(t) = \tau(t)I(t)$. Предположите, что динамика налоговой ставки $[\tau(t)]_{t=0}^{\infty}$ задана экзогенно.

(a) Определите конкурентное равновесие в этой экономике.

(b) Сформулируйте задачу максимизации полезности потребителем и опишите равновесную динамику потребления и инвестиций.

(c) Предположите, что $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \tau$ и опишите стационарное равновесие в такой экономике.

(d) При каком значении налоговой ставки τ полезность репрезентативного домохозяйства достигает максимума в стационарном равновесии? Будет ли начальное значение функции полезности в случае, когда экономика не находится в стационарном равновесии, достигать максимума при этой же налоговой ставке? Почему да или почему нет?

8.35. Рассмотрите неоклассическую модель экономического роста с государственным сектором, финансирующим расходы в размере $G > 0$. Предположите, что государственные расходы не входят в функцию полезности потребителя и финансируются с помощью паушального налога (то есть каждое домохозяйство в момент времени t облагается некоторым налогом $\mathcal{T}(t)$ независимо от его дохода и финансовой позиции) и заимствований, то есть потоковое бюджетное ограничение государственного сектора имеет следующий вид:

$$\dot{b}(t) = r(t)b(t) + g - \mathcal{T}(t),$$

где переменная $b(t)$ обозначает размер государственного долга. Тогда условие отсутствия игр Понци для государственного сектора имеет вид:

$$\lim_{t\to\infty}\left[b(t)\exp\left(-\int_0^t (r(s) - n)ds\right)\right] = 0.$$

Докажите следующее утверждение о *рикардианской эквивалентности*: значения отношения капитала к труду и потребления в конкурентном равновесии будут совпадать при любой траектории паушальных налогов $[\mathcal{T}(t)]_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющей бюджетному ограничению государственного сектора (и условию отсутствия игр Понци).

8.36. Рассмотрите базовую неоклассическую модель экономического роста без роста населения и технологического прогресса с предпочтениями домохозяйств, заданными стандартной функцией полезности вида CRRA (8.49). Однако предположите, что репрезентативное домохозяйство имеет возможность привлекать заимствования и размещать финансовые активы по экзогенно заданной мировой процентной ставке r^*. Опишите стационарное равновесие и переходную динамику в этой экономике. Покажите, что если начальное значение капитала в экономике меньше, чем его значение в стационарном равновесии, то экономика моментально переходит к нему с помощью заимствований на мировом финансовом рынке. Каким образом экономика будет погашать свой долг?

8.37. Рассмотрите следующую модификацию неоклассической модели экономического роста (без технологического прогресса). Введите в экономику издержки приспособления инвестиций, как в теории инвестиций, рассмотренной в параграфе 7.8. Опишите стационарное равновесие и переходную динамику в такой экономике. Чем выводы из этой модели отличаются от выводов из базовой модели экономического роста?

***8.38.** Рассмотрите вариант неоклассической модели экономического роста для экономики, допускающей существование репрезентативного домохозяйства с предпочтениями, заданными функцией полезности (8.49). Предположите, что рост населения и технологический прогресс отсутствуют. Основное отличие данной модели состоит в том, что в ней присутствуют несколько различных типов капитала. В частности предположите, что производственная функция в экономике имеет следующий вид:

$$Y(t) = F(K_1(t), \ldots, K_M(t), L(t)),$$

где переменная K_m обозначает m-й тип капитала, а переменная L — труд. Функция F является однородной функцией первой степени по всем переменным. Накопление капитала в каждом секторе описывается стандартным уравнением вида:

$$\dot{K}_m(t) = I_m(t) - \delta_m K_m(t),$$

для $m = 1, \ldots, M$. Ресурсное ограничение в экономике в момент времени t имеет следующий вид:

$$C(t) + \sum_{m=1}^{M} I_m(t) \leq Y(t).$$

(a) Выпишите бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства в этой экономике. Покажите, что это можно сделать двумя возможными эквивалентными способами. Первый состоит в рассмотрении M различных финансовых активов, второй — в рассмотрении одного финансового актива, который является требованием на весь капитал в экономике.

(b) Определите конкурентное равновесие и стационарное равновесие на ТСР.

(c) Опишите решение задачи максимизации прибыли фирмами в каждом секторе и задачу динамической максимизации полезности домохозяйством и охарактеризуйте ТСР в этой экономике.

(d) Выпишите задачу оптимального роста в виде многомерного текущего гамильтониана и покажите, что задача оптимального роста совпадает с задачей поиска конкурентного равновесия. Проинтерпретируйте этот результат.

(e) Определите и обсудите подходящую концепцию седловой устойчивости для переходной динамики в модели. Покажите, что конкурентное равновесие всегда будет обладать седловой устойчивостью и равновесная динамика модели может быть сведена к динамике односекторной неоклассической модели экономического роста.

(f) Как выглядит переходная динамика в случае, когда инвестиции в каждом секторе являются необратимыми (то есть $I_m(t) \geq 0$ для всех t и для всех $m = 1, ..., M$)?

8.39. Сравните воздействие на экономику налогообложения дохода от владения капиталом по ставке τ в модели роста Солоу и неоклассической модели экономического роста. Покажите, что налогообложение дохода от капитала не имеет воздействия в первой модели, но ведет к сокращению отношения эффективного капитала к труду во второй. Объясните причины такого различия.

Глава 9
Экономический рост в модели перекрывающихся поколений

Основная особенность неоклассической модели экономического роста, представленной в предыдущей главе, заключается в том, что экономика в ней допускает существование (нормативного) репрезентативного домохозяйства. Эта модель предоставляет нам простой подход к анализу динамики накопления капитала. Более того, в ней применимы первая и вторая теоремы экономики благосостояния, что позволяет нам сделать вывод об эквивалентности конкурентного равновесия и решения задачи оптимального роста. Однако во многих случаях предположение о наличии репрезентативного домохозяйства становится неподходящим. Одна из важных причин, по которой нам может понадобиться отклониться от этого предположения, в том, что нам необходимы модели, в которых со временем возникают (или рождаются) новые домохозяйства. Появление новых домохозяйств в экономике не только является реалистической особенностью модели, но и приводит к целому ряду новых экономических взаимодействий. В частности, решения, принятые уже живущими поколениями, влияют на цены, которые наблюдают новые поколения. Такие экономические взаимодействия не имеют аналога в неоклассической модели экономического роста. Они наиболее четко показаны в *моделях перекрывающихся поколений* (*ПП*), впервые предложенных и исследованных в работах Пола Самуэльсона и позднее Питера Даймонда.

У этих моделей можно выделить ряд преимуществ. Во-первых, они описывают возможные экономические взаимодействия между различными поколениями. Во-вторых, они предоставляют легко поддающуюся анализу альтернативу модели с репрезентативными агентами, имеющими бесконечный горизонт планирования. В-третьих, некоторые из основных выводов из этих моделей отличаются от выводов из неоклассической модели экономического роста. В-четвертых, динамика накопления капитала и инвестиций в некоторых частных случаях этих моделей во многом схожа с их динамикой в базовой модели роста Солоу, а не в неоклассической модели роста. Наконец, из них следует ряд выводов о роли национального долга и системы социального обеспечения в экономике.

Мы начнем с иллюстрации причин, по которым первая теорема экономики благосостояния не может быть применена к модели ПП. Затем мы представим основную модель ПП и ряд следующих из нее приложений. Наконец, мы остановимся на модели ПП в непрерывном времени. Эта модель, впервые предложенная Менахемом Яари и Оливье Бланшаром, которую также называют моделью *вечной молодости*, является аналитически несложной альтернативой базовой модели ПП. Она также часто используется в анализе инвестиций в человеческий капитал, чему посвящена следующая глава.

9.1. Проблемы, связанные с бесконечностью

В этом параграфе мы, следуя Карлу Шеллу, с помощью модели общего равновесия в абстрактной экономике покажем, почему первая теорема экономики благосостояния не применима в анализе моделей ПП. Эта модель отчасти является интересной, потому что она тесно связана с основной моделью ПП Самуэльсона и Даймонда, которая будет представлена в следующем параграфе.

Рассмотрим следующую статическую экономику с бесконечным счетным множеством домохозяйств, проиндексированных натуральными числами $i \in \mathbb{N}$ и бесконечным счетным множеством товаров, проиндексированных натуральными числами $j \in \mathbb{N}$. Предположим совершенную конкуренцию на всех рынках (или мы можем предположить, что количество домохозяйств каждого типа равно достаточно большому числу M). Предпочтения домохозяйства i заданы следующей функцией полезности:

$$u_i = c_i^i + c_{i+1}^i,$$

где константа c_j^i обозначает потребление товара j домохозяйством i. Из такого вида предпочтений следует, что домохозяйство i получает полезность лишь от потребления товара с индексом, совпадающим с индексом домохозяйства и от потребления товара со следующим индексом (например, домохозяйство с индексом 3 получает полезность только от потребления товаров с индексами 3 и 4).

Распределение запасов в экономике описано следующим вектором ω: каждое домохозяйство обладает единицей товара с индексом, совпадающим с индексом этого домохозяйства. В качестве единицы измерения цен выберем первый товар, таким образом, мы имеем $p_0 = 1$. Определим конкурентное равновесие стандартным образом (см., например, определение 5.1. из главы 5). Следующее утверждение описывает конкурентное равновесие в этой экономике (для доказательства единственности равновесия см. упражнение 9.1).

Утверждение 9.1. *В экономике, описанной выше, вектор цен* $\bar{\mathbf{p}}$, *такой, что* $\bar{p}_j = 1$ *для всех* $j \in \mathbb{N}$ *является ценовым вектором конкурентного равновесия. В конкурентном равновесии, которое мы будем обозначать* $\bar{\mathbf{x}}$, *отсутствует торговля.*

Доказательство. Доход каждого домохозяйства при векторе цен $\bar{\mathbf{p}}$ равен 1. Следовательно, бюджетное ограничение домохозяйства i имеет следующий вид:

$$c_i^i + c_{i+1}^i \leq 1.$$

В этом случае потребление собственного запаса является оптимумом для каждого домохозяйства. Отсюда следует, что вектор цен $\bar{\mathbf{p}}$ и начальное распределение ресурсов $\bar{\mathbf{x}}$ действительно является конкурентным равновесием. ■

Однако конкурентное равновесие, представленное в утверждении 9.1, не является оптимальным по Парето. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим другое распределение ресурсов $\tilde{\mathbf{x}}_{i'}$ для $i' \in \mathbb{N}$. В этом распределении каждое домохозяйство с индексом $i < i'$ потребляет единицу товара $j = i$. Домохозяйство с индексом i' потребляет единицу товара $j = i'$ и единицу товара $j = i' + 1$. Наконец, каждое домохозяйство с индексом $i > i'$ потребляет единицу товара $j = i + 1$. Другими словами, домохозяйство с индексом i' потребляет свой собственный запас и запас домохозяйства со следующим индексом, а все домохозяйства с индексом $i > i'$ потребляют запас следующего за ними домохозяйства (в то время как набор потребления домохозяйств с индексом $i < i'$ остается таким же, как в распределении $\bar{\mathbf{x}}$). В этом распределении полезность всех домохозяйств с индексом $i \neq i'$ совпадает с их полезностью в конкурентном равновесии $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}})$, а полезность домохозяйства с индексом i' строго превышает ее. Из этих рассуждений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 9.2. *В экономике, описанной выше, конкурентное равновесие* $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}})$ *не является оптимальным по Парето.*

На самом деле несложно построить другое распределение ресурсов, в котором полезность более чем одного агента будет превышать их полезность в конкурентном распределении ресурсов $\bar{\mathbf{x}}$ (см. упражнение 9.1). Почему же мы не можем применить первую теорему экономики благосостояния к описанной экономике? Напомним, что первая версия этой теоремы (теорема 5.5) формулируется для экономики с конечным числом домохозяйств, в то время как в данной экономике мы имеем бесконечное число домохозяйств и товаров. Расширенная версия первой теоремы экономики благосостояния (теорема 5.6) покрывает этот случай, но только в предположении о том, что $\sum_{i \in \mathcal{H}} \sum_{j=0}^{\infty} p_j^* \omega_j^i < \infty$, где константа ω_j^i обозначает запас товара j у домохозяйства i, а константа p_j^* — цену этого товара в рассматриваемом конкурентном равновесии. Нетрудно убедиться, что это предположение не выполняется в экономике, описанной выше, так как для всех $j \in \mathbb{N}$ $\sum_{i \in \mathcal{H}} \omega_j^i = 1$, а в описанном конкурентном равновесии $p_j^* = 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\sum_{i \in \mathcal{H}} \sum_{j=0}^{\infty} p_j^* \omega_j^i = \infty$. Как было показано в главе 5, если стоимость всех запасов в экономике при равновесных ценах равна бесконечности, то в ней может существовать допустимое распределение ресурсов, доминирующее по Парето конкурентное равновесие. Описанная выше экономика является простым примером такой ситуации.

Если бы провал первой теоремы экономики благосостояния был специфическим свойством данной абстрактной (и довольно искусственной) экономики, то это не представляло бы для нас большого интереса. Однако, как мы покажем в следующем параграфе, эта абстрактная экономика обладает множеством важных особенностей экономики основной модели ПП, и мы увидим в параграфе 9.4, что субоптимальность конкурентного равновесия в этой экономике тесно связана с возможной неэффективностью в модели ПП.

Несмотря на то что теорема 5.6 не применима к анализу этой экономики, распределение ресурсов, оптимальное по Парето, может быть децентрализовано. В следующем утверждении показано, как описанное выше распределение ресурсов $\tilde{\mathbf{x}}_{i'}$ может быть децентрализовано как конкурентное равновесие.

Утверждение 9.3. *В экономике, описанной выше, существует перераспределение $\boldsymbol{\omega}_{i'}$ вектора запасов $\boldsymbol{\omega}$ и связанное с ним конкурентное равновесие $(\bar{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{x}}_{i'})$, являющееся оптимальным по Парето, такое, что распределение ресурсов $\tilde{\mathbf{x}}_{i'}$ совпадает с описанным выше, а $\bar{p}_j = 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Рассмотрим следующее перераспределение вектора запасов $\boldsymbol{\omega}$. Запас домохозяйства с индексом $i > i'$ передадим домохозяйству с индексом $i - 1$. Таким образом, при новом векторе запасов домохозяйства с индексом $i < i'$ обладают единицей товара с индексом $j = i$, домохозяйство с индексом i' обладает единицей товара с индексом i' и единицей товара с индексом $i' + 1$, а все домохозяйства с индексом $i > i'$ обладают единицей товара с индексом $i + 1$. Бюджетное ограничение домохозяйства с индексом i' при векторе цен $\bar{\mathbf{p}}$ имеет следующий вид:

$$c_{i'}^{i'} + c_{i'+1}^{i'} \leq 2,$$

и поэтому максимум полезности домохозяйства будет достигаться на наборе потребления $c_{i'}^{i'} = c_{i'+1}^{i'} = 1$. Бюджетные ограничения всех остальных домохозяйств имеют вид:

$$c_i^i + c_{i+1}^i \leq 1,$$

и поэтому допустимым и оптимальным выбором потребления для всех домохозяйств с индексом $i < i'$ будет единица товара i, а допустимым и оптимальным выбором потребления для всех домохозяйств с индексом $i > i'$ будет единица товара $i + 1$. Поэтому распределение ресурсов $\tilde{x}_{i'}$ является конкурентным равновесием при векторе запасов $\omega_{i'}$. ■

9.2. Базовая модель перекрывающихся поколений

В этом параграфе мы изложим двухпериодную модель ПП.

9.2.1. Демографическая структура, предпочтения и технология

Время в модели дискретно и агенты имеют бесконечный горизонт планирования. Каждый агент живет в течение двух периодов. Например, все индивиды, рожденные в периоде t, живут в периодах t и $t + 1$. Далее предположим, что предпочтения агентов, рожденных в периоде t, заданы следующей сепарабельной функцией полезности в общем виде:

$$U(c_1(t), c_2(t + 1)) = u(c_1(t)) + \beta u(c_2(t + 1)), \qquad (9.1)$$

где функция $u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям предположения 3 (из главы 8), переменная $c_1(t)$ обозначает потребления индивида, рожденного в периоде t, в молодости (в периоде t), а переменная $c_2(t + 1)$ — потребление этого же индивида в старости (в периоде $t + 1$), а константа $\beta \in (0, 1)$ является нормой дисконтирования. У нас нет необходимости различать индивидов, рожденных в один и тот же период времени, поэтому мы не будем этого делать для упрощения обозначений.

Предположим совершенную конкуренцию на рынках факторов производства. Каждый индивид может работать только в первом периоде своей жизни, он неэластично поставляет на рынок труда единицу занятости и получает в периоде t равновесную реальную заработную плату $w(t)$. Предположим, что население экономики растет экспоненциально. В частности, размер поколения t (индивидов, рожденных в периоде t) равен:

$$L(t) = (1 + n)^t L(0). \qquad (9.2)$$

Производственная структура экономики совпадает со структурой предыдущей модели. В ней присутствует множество конкурирующих фирм, имеющих доступ к технологии, описываемой стандартной агрегированной производственной функцией с постоянной отдачей от масштаба и удовлетворяющей предположениям 1 и 2 (из главы 2):

$$Y(t) = F(K(t), K(t)),$$

где мы используем тот факт, что занятость в периоде t совпадает с размером поколения t $L(t)$. Чтобы упростить анализ, предположим, что $\delta = 1$, то есть капитал полностью выбывает из использования в течение одного периода (см. упражнение 9.4). Тогда, если еще раз определить $k \equiv K/L$, валовая доходность сбережений, которая равна арендной стоимости капитала, задается следующим равенством:

$$1 + r(t) = R(t) = f'(k(t)), \tag{9.3}$$

где функция $f(k) \equiv F(k, 1)$ — стандартная производственная функция на душу населения. Как обычно, заработная плата равна предельному продукту труда:

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)). \tag{9.4}$$

9.2.2. Решение задачи потребителя

Начнем с решения задачи потребительского выбора индивида. Сбережения индивида из поколения t, $s(t)$ определяются из решения следующей задачи максимизации:

$$\max_{c_1(t), c_2(t+1), s(t)} u(c_1(t)) + \beta u(c_2(t+1))$$

при ограничениях

$$c_1(t) + s(t) \leq w(t)$$

и

$$c_2(t+1) \leq R(t+1)s(t),$$

где мы предполагаем, что молодые индивиды предоставляют свои сбережения в аренду в качестве капитала фирмам, производящим конечные товары по окончании периода t и получают доход в периоде $t + 1$ (по окончании производства товаров)[1]. Валовая доходность их сбережений равна $R(t + 1) = 1 + r(t + 1)$. Второе бюджетное ограничение говорит о том, что индивиды тратят сбережения только на собственное потребление в старо-

[1] Здесь мы можем использовать несколько различных подходов, ведущих к одинаковым результатам. Например, мы можем предположить, что молодые люди хранят свои сбережения от периода t до начала периода $t + 1$ и в этот момент они арендуют их как капитал производителям конечных товаров. Мы также можем ввести в экономику множество конкурирующих фирм, трансформирующих сбережения в виде товаров периода t в товары периода $t + 1$ В этом случае молодые люди использовали бы эти фирмы для переноса ресурсов из периода t в период $t + 1$.

сти (то есть альтруистические мотивы и наследство отсутствуют в модели). У нас нет необходимости вводить ограничение $s(t) \geq 0$, так как при отрицательных сбережениях не будет выполняться бюджетное ограничение для второго периода (так как $c_2(t+1) \geq 0$).

Так как функция полезности $u(\cdot)$ является строго возрастающей (предположение 3), оба бюджетных ограничения будут выполняться как равенства. Следовательно, условие первого порядка для максимума функции полезности может быть записано в привычном виде уравнения Эйлера для потребления (см. главу 6, например уравнение (6.45)):

$$u'(c_1(t)) = \beta R(t+1)u'(c_2(t+1)). \tag{9.5}$$

Более того, так как задача каждого индивида является строго вогнутой, уравнение Эйлера является достаточным условием оптимального выбора потребления при заданной траектории рыночных цен. Объединяя это уравнение с бюджетным ограничением, получаем следующую неявную функцию для сбережений на душу населения поколения t:

$$s(t) = s(w(t), R(t+1)), \tag{9.6}$$

где функция s: $\mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ является строго возрастающей по первому аргументу и может быть как возрастающей, так и убывающей по второму аргументу (см. упражнение 9.5). Общие сбережения в экономике составляют

$$S(t) = s(t)L(t),$$

где $L(t)$ обозначает размер поколения t, которое получает доход от сбережений в периоде $t+1$. Из того, что капитал полностью выбывает после использования и что все сбережения инвестируются в единственный производственный актив в экономике — капитал, следует, что закон изменения количества капитала в экономике имеет следующий вид:

$$K(t+1) = L(t)s(w(t), R(\mathrm{t}+1)). \tag{9.7}$$

9.2.3. Равновесие

Конкурентное равновесие в экономике ПП может быть определено следующим образом.

Определение 9.1. Конкурентное равновесие *представляет собой набор последовательностей количества капитала, потребления домохозяйств и цен факторов производства* $\{K(t), c_1(t), c_2(t), R(t), w(t)\}_{t=0}^{\infty}$, *такой, что последовательности цен факторов производства* $\{R(t), w(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *задаются равенствами* (9.3) *и* (9.4), *последовательности потребления домохозяйств задаются равенствами* (9.5) *и* (9.6), *а динамика совокупного капитала* $\{K(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *в экономике задается равенством* (9.7).

Определим стационарное равновесие стандартным способом как равновесие, в котором отношение капитала к труду $k \equiv K/L$ остается постоянным.

Чтобы описать равновесие, разделим равенство (9.7) на предложение труда в периоде $t+1$ $L(t+1) = (1+n)L(t)$ и получим следующее уравнение для отношения капитала к труду:

$$k(t+1) = \frac{s(w(t),\ R(t+1))}{1+n}.$$

Далее, подставляя $R(t+1)$ и $w(t)$ из условий (9.3) и (9.4), приходим к фундаментальному уравнению, определяющему динамику модели ПП:

$$k(t+1) = \frac{s(f(k(t)) - k(t)f'(k(t)), f'(k(t+1)))}{1+n}. \tag{9.8}$$

Тогда стационарное равновесие в модели является решением уравнения $k(t+1) = k(t) = k^*$, то есть уравнения:

$$k^* = \frac{s(f(k^*) - k^* f'(k^*), f'(k^*))}{1+n}. \tag{9.9}$$

Так как функция сбережений $s(\cdot, \cdot)$ может выглядеть по-разному, динамика разностного уравнения (9.8) может оказаться довольно сложной и оно может обладать несколькими стационарными точками. На рис. 9.1 показаны некоторые из возможных соотношений между отношением

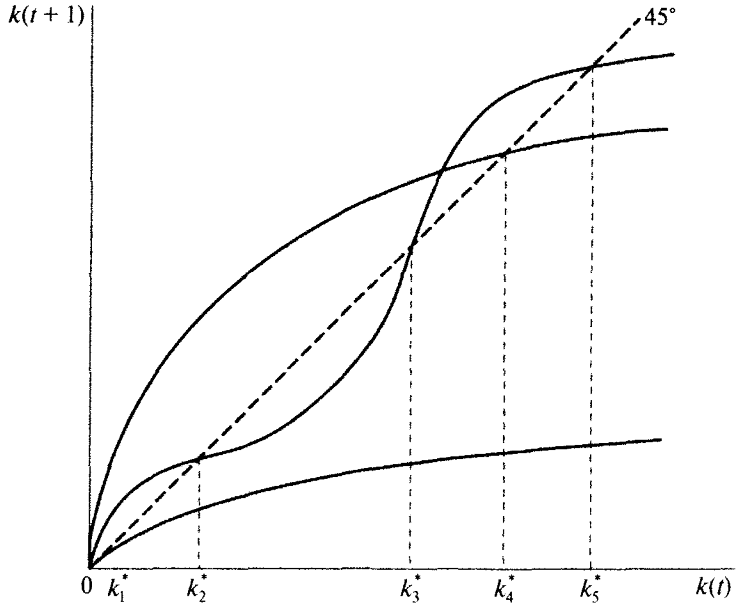


Рис. 9.1. Различные типы стационарных равновесий в базовой модели перекрывающихся поколений

капитала к труду в текущем и будущем периодах, которые согласуются с уравнением (9.8). Из рисунка нетрудно увидеть, что модель может иметь единственное стационарное равновесие с положительным значением отношения капитала к труду, несколько таких равновесий или только стационарное равновесие с нулевым значением отношения капитала к труду. Другими словами, модель не позволяет сделать экономически осмысленные выводы без дополнительных ограничений на вид функции полезности потребителей и производственной функции.

9.2.4. Ограничения на вид функции полезности и производственной функции

В этом подпараграфе мы опишем стационарное равновесие и переходную динамику в модели ПП при дополнительных ограничениях на вид функции полезности потребителей и производственной функции. В частности, предположим, что функция полезности принадлежит к знакомому нам классу CRRA функций вида:

$$U(c_1(t),\ c_2(t+1)) = \frac{c_1(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta\frac{c_2(t+1)^{1-\theta}-1}{1-\theta}, \tag{9.10}$$

где $\theta > 0$ и $\beta \in (0, 1)$. Далее предположим, что производственная технология описывается функцией Кобба—Дугласа, то есть

$$f(k) = k^{\alpha}.$$

Предположение о том, что функция полезности принадлежит к классу CRRA, упрощает условие первого порядка для задачи оптимизации потребителя, и оно принимает следующий вид:

$$\frac{c_2(t+1)}{c_1(t)} = (\beta R(t+1))^{1/\theta}.$$

Еще раз напомним, что это равенство является уравнением Эйлера для потребления в дискретном времени из главы 6 для функции полезности вида CRRA. Это уравнение Эйлера можно переписать через функцию сбережений следующим образом:

$$s(t)^{-\theta}\beta R(t+1)^{1-\theta} = (w(t) - s(t))^{-\theta}, \tag{9.11}$$

откуда получаем следующее уравнение для нормы сбережений:

$$s(t) = \frac{w(t)}{\psi(t+1)},$$

где

$$\psi(t+1) \equiv [1 + \beta^{-1/\theta}R(t+1)^{-(1-\theta)/\theta}] > 1, \tag{9.12}$$

это гарантирует то, что сбережения не превышают дохода. Влияние изменений цен факторов производства на сбережения описывается следующими частными производными:

$$s_w(t) \equiv \frac{\partial s(t)}{\partial w(t)} = \frac{1}{\psi(t+1)} \in (0,1)$$

и

$$s_R(t) \equiv \frac{\partial s(t)}{\partial R(t+1)} = \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)(\beta R(t+1))^{-1/\theta} \frac{s(t)}{\psi(t+1)}.$$

Из неравенства $\psi(t+1) > 1$ также следует, что $0 < s_w(t) < 1$. Более того, в этом случае если $\theta > 1$, то $s_R(t) < 0$, если $\theta < 1$, то $s_R(t) > 0$ и если $\theta = 1$, то $s_R(t) = 0$. Такая зависимость между доходностью сбережений и их количеством является следствием влияния эффектов дохода и замещения, действующих разнонаправленно. Например, если $\theta > 1$, то действие эффекта дохода преобладает над действием эффекта замещения, и даже несмотря на то, что доходность сбережений R возрастает (и поэтому потребление в молодости становится более дорогим по сравнению с потреблением в старости), индивиды будут увеличивать потребление в обоих периодах своей жизни и поэтому их сбережения будут сокращаться. С другой стороны, если $\theta < 1$, то эффект замещения доминирует над эффектом дохода, индивиды сокращают потребление в молодости и их сбережения увеличиваются. Случай $\theta = 1$ (логарифмические предпочтения) особенно важен и часто используется в приложениях. Частный случай модели с логарифмической функцией полезности и производственной функцией Кобба—Дугласа особенно полезен и наиболее часто используется, что позволяет назвать его *канонической моделью экономики перекрывающихся поколений*. Его анализу посвящен следующий параграф этой главы.

В текущем более общем контексте из уравнения (9.8) следует, что

$$k(t+1) = \frac{s(t)}{(1+n)} = \frac{w(t)}{\psi(t+1)(1+n)}. \tag{9.13}$$

Подставляя значение $\psi(t+1)$ и $w(t)$, приходим к следующему уравнению для динамики отношения капитала к труду:

$$k(t+1) = \frac{f(k(t)) - k(t)f'(k(t))}{(1+n)\left[1+\beta^{-1/\theta} f'(k(t+1))^{-(1-\theta)/\theta}\right]}. \tag{9.14}$$

Тогда стационарное равновесие можно найти как решение следующего неявного уравнения:

$$k^* = \frac{f(k^*) - k^* f'(k^*)}{(1+n)\left[1+\beta^{-1/\theta} f'(k^*)^{-(1-\theta)/\theta}\right]}.$$

Далее, используя то, что производственная функция имеет вид функции Кобба—Дугласа, мы можем преобразовать это уравнение следующим образом:

$$(1+n)[1+\beta^{-1/\theta}(\alpha(k^*)^{\alpha-1})^{-1(1-\theta)/\theta}]=(1-\alpha)(k^*)^{\alpha-1}. \tag{9.15}$$

Для упрощения записи введем обозначение $R^* \equiv \alpha(k^*)^{\alpha-1}$ для предельного продукта капитала в стационарном равновесии. Тогда мы можем переписать уравнение (9.15) в следующем виде:

$$(1+n)[1+\beta^{-1/\theta}(R^*)^{-(1-\theta)/\theta}]=(1-\alpha)R^*/\alpha. \tag{9.16}$$

Значение предельного продукта капитала в стационарном равновесии R^*, а следовательно, и значение отношения капитала к труду в стационарном равновесии k^* может быть найдено из уравнения (9.16), которое всегда имеет единственное решение. Далее исследуем устойчивость этого стационарного равновесия. Подстановка производственной функции Кобба—Дугласа в уравнение (9.14) приводит к следующему разностному уравнению для отношения капитала к труду:

$$k(t+1)=\frac{(1-\alpha)k(t)^{\alpha}}{(1+n)\left[1+\beta^{-1/\theta}(\alpha k(t+1)^{\alpha-1})^{-(1-\theta)/\theta}\right]}. \tag{9.17}$$

Доказательство следующего утверждения основывается на анализе уравнения (9.17)[2].

Утверждение 9.4. *В модели перекрывающихся поколений с домохозяйствами, живущими в течение двух периодов, производственной технологией, описываемой функцией Кобба—Дугласа, и предпочтениями, описываемыми функцией полезности вида CRRA, существует единственное стационарное равновесие, отношение капитала к труду в котором задается уравнением* (9.15). *Это стационарное равновесие является глобально устойчивым при любом начальном значении* $k(0)>0$ *для любого* $\theta>0$.

Доказательство. См. упражнение 9.6. ■

Как показано на рис. 9.2, в этом частном (с «хорошей» динамикой) случае модели равновесная динамика во многом схожа с динамикой в базовой модели роста Солоу. Из рисунка нетрудно увидеть, что сходимость к единственному стационарному значению отношения капитала к труду k^* является монотонной. В частности, при начальном значении отношения капитала к труду $k(0)<k^*$ экономика ПП будет непрерывно накапливать капитал и сходиться к стационарному равновесию k^*. При начальном

[2] В этом утверждении и далее во всей главе мы будем игнорировать присутствие тривиального стационарного равновесия с нулевым количеством капитала $k^*=0$.

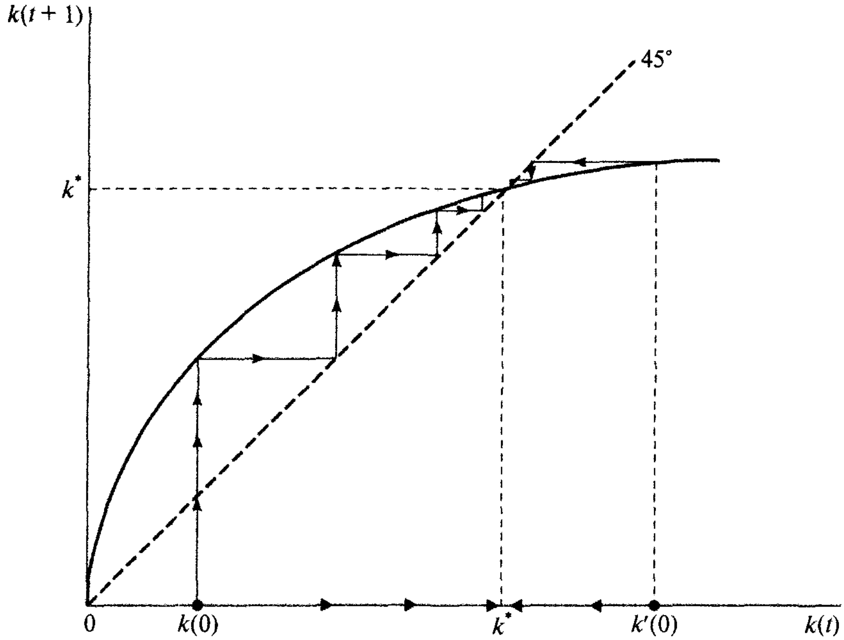


Рис. 9.2. Равновесная динамика в канонической модели перекрывающихся поколений

значении $k'(0) > k^*$ равновесная динамика будет происходить на фоне непрерывного снижения отношения капитала к труду и экономика в конце концов сойдется к стационарному равновесию k^*.

9.3. Каноническая модель перекрывающихся поколений

Необходимо отметить, что даже модель ПП с функцией полезности вида CRRA и производственной функцией Кобба—Дугласа обладает достаточно сложной динамикой. Поэтому во многих приложениях модели используется еще более простая функция полезности — логарифмическая функция (что означает, что $\theta = 1$ в терминах предпочтений вида CRRA в предыдущем параграфе). Основное полезное свойство логарифмических предпочтений заключается в том, что, как мы отметили выше, в этом случае эффект дохода и эффект замещения полностью компенсируют друг друга и изменения процентной ставки (а следовательно, и изменения отношения капитала к труду) не влияют на норму сбережений. Эта независимость нормы сбережений делает структуру конкурентного равновесия в канонической модели ПП по существу эквивалентной структуре равновесия в базовой модели экономического роста Солоу из главы 2.

Предположим, что функция полезности типичного индивида, рожденного в периоде t, имеет следующий вид:

$$U(c_1(t), c_2(t+1)) = \log c_1(t) + \beta \log c_2(t+1), \qquad (9.18)$$

где, как и ранее, $\beta \in (0, 1)$ (заметим, что случай $\beta \geq 1$ также возможен и его анализ не отличается от анализа случая $\beta \in (0, 1)$)). Продолжим предполагать, что агрегированная производственная функция имеет вид функции Кобба—Дугласа, то есть $f(k) = k^{\alpha}$. Тогда уравнение Эйлера для потребления становится еще более простым, чем ранее:

$$\frac{c_2(t+1)}{c_1(t)} = \beta R(t+1),$$

откуда следует, что сбережения домохозяйств удовлетворяют равенству:

$$s(t) = \frac{\beta}{1+\beta} w(t), \tag{9.19}$$

а это значит, что норма сбережений является постоянной величиной и сбережения составляют долю $\beta/(1 + \beta)$ от трудового дохода индивида. Постоянство нормы сбережений делает динамику модели очень похожей на динамику базовой модели роста Солоу из главы 2.

Объединяя уравнение (9.19) с законом изменения капитала (9.8), получаем следующее равенство:

$$k(t+1) = \frac{s(t)}{(1+n)} = \frac{\beta w(t)}{(1+\beta)(1+n)} = \frac{\beta(1-\alpha)k(t)^{\alpha}}{(1+\beta)(1+n)},$$

где во втором равенстве используется уравнение (9.19), а в последнем равенстве используется тот факт, что при совершенной конкуренции на рынках факторов производства заработная плата задается равенством $w(t) = (1 - \alpha)k(t)^{\alpha}$.

Нетрудно убедиться, что в модели существует единственное стационарное равновесие с отношением капитала к труду в нем, равным

$$k^* = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{9.20}$$

Более того, при любом начальном значении отношения капитала к труду $k(0) > 0$ равновесная динамика модели совпадает с динамикой базовой модели экономического роста Солоу и отношение капитала к труду монотонно сходится к своему стационарному равновесию k^*. Это свойство проиллюстрировано на рис. 9.2 и сформулировано в следующем утверждении.

Утверждение 9.5. *В канонической модели ПП с логарифмическими предпочтениями и производственной функцией Кобба—Дугласа существует единственное стационарное равновесие с отношением капитала* *к труду, задаваемым уравнением* (9.20). *При любом начальном значении отношения капитала к труду* $k(0) \in (0, k^*)$ $k(t) \uparrow k^*$ *на равновесной траектории, а при любом начальном значении* $k(0) > k^*$ $k(t) \downarrow k^*$ *на равновесной траектории.*

Эта каноническая модель ПП может быть легко расширена включением в нее технологического прогресса. Такому расширению модели посвящено упражнение 9.7. В упражнении 9.8 читатель сможет проанализировать аналогичную экономику с производственной функцией, не являющейся функцией Кобба—Дугласа.

9.4. Избыточное накопление капитала и оптимальность равновесия совершенной конкуренции в модели перекрывающихся поколений

Вернемся к общей постановке задачи и сравним конкурентное равновесие в экономике ПП с выбором общественного планировщика, желающего максимизировать взвешенное среднее значений функции полезности всех поколений агентов. В частности, предположим, что общественный планировщик максимизирует следующую целевую функцию:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \xi_t U_t(c_1(t),\ c_2(t+1)),$$

где, напомним, функция U_t задана равенством (9.1), константа ξ_t является весом, который общественный планировщик присваивает поколению t (в предположении, что $\sum_{t=0}^{\infty} \xi_t < \infty$ и целевая функция не расходится к бесконечности). После подстановки в нее уравнения (9.1) задача общественного планировщика принимает следующий вид:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \xi_t (u(c_1(t)) + \beta u(c_2(t+1)))$$

при ресурсном ограничении вида

$$F(K(t),\ L(t)) = K(t+1) + L(t)c_1(t) + L(t-1)c_2(t).$$

Разделив его на $L(t)$ и используя равенство (9.2), приходим к ресурсному ограничению на душу населения в следующем виде:

$$f(k(t)) = (1+n)k(t+1) + c_1(t) + \frac{c_2(t)}{1+n}.$$

Тогда решение задачи оптимизации общественного планировщика удовлетворяет следующему условию первого порядка:

$$u'(c_1(t)) = \beta f'(k(t+1))u'(c_2(t+1)).$$

Из того, что $R(t+1) = f'(k(t+1))$ следует, что это уравнение совпадает с уравнением (9.5). Этот результат неудивителен: общественный планировщик будет распределять потребление заданного индивида точно таким же образом, как и он сам, то есть в модели нет «провалов рынка» в распределении потребления индивида между периодами при заданных ценах факторов производства.

Однако распределение общественным планировщиком ресурсов между различными поколениями отличается от распределения в конкурентном равновесии в силу того, что общественный планировщик присваивает различным поколениям различные веса. Однако для нас более интересным вопросом, чем сравнение конкурентного равновесия с решением задачи общественного планировщика при заданном наборе весов, будет вопрос о том, является ли конкурентное равновесие оптимальным по Парето. Параллель между моделью ПП и моделью экономики, рассмотренной в параграфе 9.1, позволяет предположить, что это может быть не так.

Действительно, в общем случае конкурентное равновесие в модели ПП не будет оптимальным по Парето. Предположим, что значение отношения капитала к труду в стационарном равновесии k^*, заданное уравнением (9.9), больше, чем отношение капитала к труду, соответствующее золотому правилу k_{gold}. Вспомним из главы 2, что значение потребления в стационарном равновесии достигает максимума при отношении капитала к труду равному k_{gold}. В отличие от неоклассической модели экономического роста из предыдущей главы, в модели ПП нет никаких естественных причин, приводящих к тому, что равновесное (или стационарное) значение отношения капитала к труду окажется меньше, чем значение, соответствующее золотому правилу k_{gold}. При этом если $k^* > k_{\text{gold}}$, то снижение сбережений может позволить увеличить потребление всех поколений агентов в экономике. В частности, в стационарном равновесии в модели ПП имеем следующее равенство:

$$f(k^*) - (1+n)k^* = c_1^* + (1+n)^{-1}c_2^* \equiv c^*,$$

где в первом равенстве используется тождество системы национальных счетов, а во втором равенстве c^* определяется как общее значение потребления в стационарном равновесии. Следовательно,

$$\frac{\partial c^*}{\partial k^*} = f'(k^*) - (1+n),$$

а значение отношения капитала к труду, соответствующее золотому правилу, определено уравнением:

$$f'(k_{\text{gold}}) = 1 + n.$$

Тогда если $k^* > k_{\text{gold}}$, то $\partial c^*/\partial k^* < 0$ и снижение сбережений позволяет увеличить общее потребление для каждого индивида. В таком случае экономику называют *динамически неэффективной* — она накапливает слишком много капитала. Динамическую неэффективность можно описать еще одним способом с помощью неравенства:

$$r^* < n,$$

то есть в динамически неэффективной экономике чистая процентная ставка $r^* = R^* - 1$ меньше, чем темп роста населения n. Напомним, что в модели Рамсея на бесконечном горизонте планирования из условия трансверсальности (которое вытекает из необходимых условий оптимума задачи домохозяйства) следует неравенство $r^* > g + n$. Поэтому в модели Рамсея экономика никогда не может быть динамически неэффективной. Здесь динамическая неэффективность появляется ввиду особого вида разнородности домохозяйств, присутствующего в модели ПП, который ведет к невыполнению условия трансверсальности.

Предположим, что в периоде T экономика модели ПП находится в стационарном равновесии, в котором $k^* > k_{\text{gold}}$. Рассмотрим некоторую вариацию, в которой количество капитала в следующем периоде снижается на малую величину. В частности, изменим отношение капитала к труду в следующем периоде на $-\Delta k$, где $\Delta k \in (0, k_{\text{gold}} - k^*)$ и начиная с этого периода будем удерживать количество капитала на уровне $k^* - \Delta k$ (что, очевидно, допустимо). Тогда изменение потребления составит следующую величину:

$$\Delta c(t) = (1 + n)\Delta k > 0$$

и

$$\Delta c(t) = -(f'(k^* - \Delta k) - (1 + n))\Delta k \text{ для всех } t > T.$$

Первое равенство отображает прямой прирост потребления, вызванный снижением сбережений. В дополнение, из того, что $k^* > k_{\text{gold}}$ следует, что $f'(k^* - \Delta k) - (1 + n) < 0$ при достаточно малых Δk. Поэтому для всех $t > T$ выполняется неравенство $\Delta c(t) > 0$, о чем и говорит второе равенство. Увеличение потребления для всех поколений может быть разделено поровну между двумя периодами жизни каждого индивида, что гарантированно приведет к увеличению полезности всех поколений. Очевидно, что такая вариация ведет к улучшению по Парето, в котором полезность всех поколений возрастает. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Утверждение 9.6. *Конкурентное равновесие в базовой модели ПП в общем случае не является оптимальными по Парето. Более точно, если* $r^* < n$, *то экономика оказывается динамически неэффективной. В этом случае снижение количества капитала с уровня конкурентного стационарного равновесия позволяет увеличить потребление всех поколений домохозяйств.*

Как нетрудно заметить из рассуждений выше, неоптимальность конкурентного равновесия по Парето тесно связана с *динамической неэффективностью экономики*. Динамическая неэффективность экономики, при которой процентная ставка оказывается меньше, чем темп роста населения, не является лишь теоретической возможностью. В упражнении 9.9 показано, что динамическая неэффективность может возникнуть при достаточно разумных предположениях о структуре экономик (хотя это не означает, что вопрос динамической неэффективности особенно важен в контексте долгосрочного экономического роста или межстрановых различий в уровне дохода).

В чем причина возможной динамической неэффективности экономики в модели ПП? Этот вопрос более труден, чем может показаться. Действительно, в рассматриваемой экономике мы имеем совершенную конкуренцию на всех рынках и в ней отсутствуют экстерналии. Другими словами, в модели нет стандартных источников «провалов рынка». Некоторое время назад экономисты предполагали, что причина возможной неэффективности экономики состоит в «неполноте рынков», возникающей из-за того, что индивиды из поколения, рожденного в периоде t, не имеют возможности заключать прямые сделки с индивидами из поколения, рожденного в периоде $t + s$ при $s \geq 2$. В случае когда рынки неполны, мы не можем гарантировать оптимальность по Парето конкурентного равновесия, что может объяснить возможную неэффективность конкурентного равновесия в модели ПП. В частности при неполных рынках *монетарная экстерналия*, которая описывает воздействие экономических решений других индивидов на полезность потребителя через их влияние на относительные цены, может влиять на благосостояние индивидов первого порядка малости и стать причиной возможной неоптимальности по Парето. Однако эти рассуждения не верны. Чтобы проще увидеть ошибку в них, вернемся к модели, описанной в параграфе 9.1. В ней возникает неэффективность экономики, схожая с динамической неэффективностью в модели ПП. При этом в такой экономике все индивиды имеют возможность торговать всеми товарами.

Несмотря на то что эти рассуждения являются неверными, они правильно подчеркивают важность монетарной экстерналии. Индивиды, рожденные в периоде t, знают заработные платы, которые определяются решениями о сбережениях индивидов, рожденных в периоде $t - 1$.

Аналогичным образом, индивид, рожденный в периоде $t-1$, знает доходность своих сбережений, которая определяется решениями о сбережениях других индивидов, рожденных в периоде $t-1$. Следовательно, решения о сбережениях каждого поколения потребителей создают монетарную экстерналию, воздействующую в следующем периоде как на работников, так и на владельцев капитала. Эта монетарная экстерналия связана с источником возможной динамической неэффективности в модели ПП, однако она возникает не из-за неполноты рынков. Монетарная экстерналия присутствует всегда, однако в конкурентном равновесии ее размер обычно имеет второй порядок малости и поэтому она не оказывает воздействия на уровень благосостояния индивидов. В некотором смысле тот факт, что наличие монетарной экстерналии не приводит к неоптимальности по Парето распределения ресурсов в конкурентном равновесии, можно рассматривать как суть первой теоремы экономики благосостояния (теорем 5.5 и 5.6). Однако модель из параграфа 9.1, как и модель ПП, не удовлетворяют условиям первой теоремы экономики благосостояния. Этот вопрос подробно обсуждается в упражнении 9.11, в котором показано, что если экономика является динамически неэффективной, то условие $\sum_{h\in\mathcal{H}}\sum_{j=0}^{\infty}p_j^*\omega_j^h<\infty$ из теоремы 5.6 не выполняется, и вместе с тем оно выполняется в случае $r^*>n$. С интуитивной точки зрения монетарная экстерналия может не исчезать в случае, когда в экономику входит бесконечный поток новых агентов. На этих агентов воздействует монетарная экстерналия, созданная предыдущими поколениями и в этом случае существует возможность изменить решения о сбережениях и траектории потребления таким образом, чтобы использовать эффект монетарной экстерналии (примерно таким же образом, как мы изменили траектории потребления в экономике из параграфа 9.1 для того, чтобы построить улучшение по Парето конкурентного равновесия в ней).

Дополнительная интуиция к динамической неэффективности, которая пригодится нам в параграфе 9.5, состоит в следующем. Динамическая неэффективность возникает в результате избыточного накопления капитала, которое, в свою очередь, является следствием того, что живущие в текущем периоде молодые люди вынуждены делать сбережения на второй период жизни. Однако чем больше они сберегают, тем ниже будет доходность их сбережений, что может стимулировать их еще больше увеличивать свои сбережения. Еще раз заметим, что эффект воздействия сбережений нынешнего поколения на доходность капитала в будущем составляет монетарную экстерналию. Если бы первая теорема экономики благосостояния была применима, то эта монетарная экстерналия не приводила бы к неоптимальному по Парето распределению ресурсов. Однако мы не всегда можем применить эту теорему, если в экономике имеется бесконечное количество товаров и бесконечное количество домохозяйств. Из этой интуиции также следует, что если бы в экономике нашлись альтернативные возможности предоставления потребления индивидам в старости, то проблема избыточного накопления капитала могла бы быть решена, или по крайней мере смягчена. Мы остановимся на этом вопросе в следующем параграфе.

9.5. Роль пенсионной системы в накоплении капитала

В этом параграфе мы коротко обсудим, каким образом в экономику может быть введена пенсионная система как способ решения проблемы избыточного накопления капитала в модели ПП. Мы начнем с полностью накопительной системы, в которой молодые люди совершают взносы в систему пенсионного обеспечения и эти же взносы вместе с доходом выплачиваются им в старости. Другой альтернативой является распределительная система пенсионного обеспечения, в которой взносы молодых индивидов используются для финансирования пенсий пожилых индивидов в том же периоде времени. Мы убедимся в том, что как часто предполагается, распределительная пенсионная система ведет к снижению сбережений. Однако если экономика является динамически неэффективной, такое снижение сбережений может привести к улучшению по Парето распределения ресурсов в конкурентном равновесии.

9.5.1. Полностью накопительная пенсионная система

При полностью накопительной пенсионной системе в период времени t государство получает взнос $d(t)$ с каждого молодого индивида. Например, это может быть обязательный вклад в систему пенсионного обеспечения. Эти взносы инвестируются в единственный производственный актив в экономике — капитал, и работники в старости получают доход, равный $R(t+1)d(t)$. Поэтому задача максимизации индивида при полностью накопительной системе принимает следующий вид:

$$\max_{c_1(t), c_2(t+1), s(t)} u(c_1(t)) + \beta u(c_2(t+1))$$

при ограничениях

$$c_1(t) + s(t) + d(t) \leq w(t)$$

и

$$c_2(t+1) \leq R(t+1)(s(t) + d(t))$$

и при заданном государством выборе пенсионных взносов $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Заметим, что общий объем инвестиций в накопление капитала составляет $s(t) + d(t) = (1+n)k(t+1)$.

Вследствие того что в старости домохозяйства получают пенсионные накопления, мы не можем гарантировать, что они будут делать положительные сбережения в первом периоде жизни, то есть что $s(t) > 0$. Поэтому мы можем провести анализ модели при двух альтернативных предположениях: с ограничением $s(t) \geq 0$ и без него.

Нетрудно увидеть, что если выбор сбережений домохозяйством не ограничен, то при любой допустимой последовательности пенсионных взносов $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$ решением задачи максимизации будет конкурентное равновесие экономики без пенсионной системы. Если при заданной последовательности $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$ оптимальная последовательность сбережений $\{s(t)\}_{t=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $s(t) > 0$ при всех t, то конкурентное равновесие экономики без пенсионной системы также будет решением задачи максимизации индивида при ограничении $s(t) \geq 0$.

Утверждение 9.7. *Рассмотрим полностью накопительную пенсионную систему в описанной выше экономике в модели ПП, в которой государство взимает отчисления $d(t)$ с каждого молодого индивида, рожденного в периоде t.*

1. *Предположим, что $s(t) \geq 0$ при всех t. Если при заданной допустимой последовательности пенсионных взносов $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$ оптимальный выбор сбережений домохозяйств, на котором функция полезности достигает максимума, удовлетворяет условию $s(t) > 0$ при всех t, то множество конкурентных равновесий в экономике без пенсионной системы совпадает с множеством конкурентных равновесий в экономике с пенсионной системой.*
2. *В модели без ограничения $s(t) \geq 0$ множество конкурентных равновесий в экономике без пенсионной системы совпадает с множеством конкурентных равновесий в экономике с пенсионной системой при любой заданной допустимой последовательности пенсионных взносов $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$.*

Доказательство. См. упражнение 9.13. ■

За этим результатом стоит простая интуиция: пенсионные отчисления в размере $d(t)$, которые взимает государство, полностью компенсируются снижением сбережений в случае, когда агенты накапливают достаточное количество сбережений (и всегда — если в модели отсутствует ограничение, требующее, чтобы сбережения составляли неотрицательную величину). В упражнении 9.14 показано, что даже при ограничении $s(t) \geq 0$ наличие полностью накопительной пенсионной системы не может привести к улучшению по Парето.

9.5.2. Распределительная пенсионная система

Ситуация изменяется при распределительной пенсионной системе. В данном случае государство взимает пенсионные отчисления в размере $d(t)$ с молодых индивидов, рожденных в периоде t, и распределяет их между пожилыми индивидами, рожденными в периоде $t-1$, как трансферт в размере $b(t) = (1 + n)d(t)$ на душу населения (это следует из того факта, что в результате роста населения количество молодых людей превышает количество пожилых). Следовательно, задача максимизации полезности индивидом принимает следующий вид:

$$\max_{c_1(t),c_2(t+1),s(t)} u(c_1(t)) + \beta u(c_2(t+1))$$

при ограничениях

$$c_1(t) + s(t) + d(t) \leq w(t)$$

и

$$c_2(t+1) \leq R(t+1)s(t) + (1+n)d(t+1)$$

и при заданном государством выборе пенсионных взносов $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$.

В этой экономике доходность пенсионных накоплений становится равной n, а не $r(t+1) = R(t+1) - 1$, *так как такая пенсионная система* является чистым перераспределением доходов. Только частные сбережения $s(t)$, а не $s(t) + d(t)$, как в полностью накопительной системе, направляются в инвестиции в накопление капитала. Это наблюдение является основой утверждения о том, что распределительная пенсионная система дестимулирует сбережения. Следовательно, при распределительной пенсионной системе замедляется процесс накопления капитала. Снижение количества капитала в экономике может оказывать негативное влияние на темп экономического роста и благосостояние агентов. Действительно, эмпирические наблюдения из глав 1–4 свидетельствуют о том, что во многих государствах темп накопления капитала является не оптимально низким. С другой стороны, в данной модели, если экономика является динамически неэффективной (и в ней происходит избыточное накопление капитала), снижение совокупных сбережений и темпа накопления капитала может привести к улучшению по Парето.

Более точно, предположим, что индивиды, рожденные в периоде t, могут выбирать размер взноса в распределительную пенсионную систему (то есть $d(t)$ является переменной выбора). Все их взносы распределяются как потребление между пожилыми индивидами, рожденными в периоде $t-1$, а они сами в старости получают доход в размере $1 + n$ долларов с каждого доллара инвестиций в пенсионные накопления. В этом случае, если $r(t+1) < n$, инвестиции в физический капитал будут равны нулю. Поэтому при наличии распределительной пенсионной системы процентная ставка будет расти до тех пор, пока экономика не выйдет из состояния динамической неэффективности.

Утверждение 9.8. *Рассмотрим экономику модели ПП, описанную выше, и предположим, что децентрализованное конкурентное равновесие является динамически неэффективным. Тогда существует допустимая последовательность взносов в распределительную пенсионную систему* $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$, *при которой начиная с любого периода t конкурентное равновесие будет доминировать по Парето над конкурентным равновесием в экономике без пенсионной системы.*

Доказательство. См. упражнение 9.16. ■

Распределительная пенсионная система позволяет замедлить избыточное накопление капитала и улучшить по Парето распределение ресурсов в экономике. Нетрудно заметить очевидное сходство между тем, как наличие распределительной пенсионной системы позволяет улучшить по Парето конкурентное равновесие в модели ПП, и тем, как оптимальное по Парето распределение ресурсов было децентрализовано в модели из параграфа 9.1. В сущности, распределительная пенсионная система переносит ресурсы от будущих поколений к пожилым людям в начальный период времени, и при надлежащем ее устройстве такой перенос ресурсов не снижает полезности представителей будущих поколений. Еще раз подчеркнем, что этот результат опирается на наличие в экономике динамической неэффективности. Если она оптимальна по Парето, то любой перенос ресурсов (и поэтому любая распределительная пенсионная система) будут вести к снижению благосостояния некоторых поколений. Читатель имеет возможность доказать это утверждение при выполнении упражнения 9.17.

Необходимо отметить еще один интересный аспект распределительной пенсионной системы. При таком устройстве пенсионной системы государство в сущности организовывает финансовую пирамиду типа игры Понци. Каждое поколение инвестирует средства в размере d в молодости и получает от молодых агентов доход в размере $(1 + n)d$ в старости. Такая схема зачастую является финансовой пирамидой. В предыдущей главе такие схемы были запрещены, поэтому возникает вопрос о том, почему они допустимы (и даже желанны) в этой модели. Ответ на этот вопрос связан с тем, что в неоклассической модели экономического роста экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства, чьи решения о максимизации полезности гарантируют то, что экономика никогда не находится в области динамической неэффективности. В частности, условие трансверсальности или, что эквивалентно, условие конечности значения целевой функции репрезентативного домохозяйства, позволяет отвергнуть равновесия, в которых $r^* < n$ (см. условие (8.36)). Это неверно для экономики в модели ПП, и распределительная пенсионная система является одним из способов введения в экономику с динамической неэффективностью финансовой пирамиды, ведущей к улучшению по Парето. Заметим, что это не единственная возможная схема. Если $r^* < n$, то в экономике возможно присутствие целого ряда «пузырей», которые могут играть ту же роль, что и распределительная пенсионная система. Мы будем говорить, что в экономике существует *пузырь*, если стоимость некоторого финансового актива превышает его фундаментальную цену. Пузырь в цене некоторого финансового актива может играть ту же роль, что и распределительная пенсионная система, потому что он также создает возможность межвременного переноса ресурсов. Максимальная возможная доходность любого пузыря составляет n и равна доходности пенсионных взносов в распределительной пенсионной системе. Если экономика динамически неэффективна и $r^* < n$, то пузырь является лучшим способом межвременного переноса ресурсов, чем инвестиции в физический капитал. Простым примером пузыря, который может играть эту роль, являются бумажные деньги, которые не обладают внутренней стоимостью. Однако все агенты в экономике могут ожидать, что они будут дорожать со временем, то есть покупательная способность бумажных денег будет возрастать в некоторое число раз ($< 1 + n$) в каждом периоде. В этом случае распределение ограниченного количества бумажных денег среди представителей некоторого поколения будет играть такую же роль, что и введение распределительной пенсионной системы. Однако эту же роль могут играть и другие финансовые активы, генерирующие схожие пузыри. Еще одно интересное наблюдение заключается в том, что если экономика в модели ПП имеет семейную структуру, при которой будущие поколения связаны с текущим поколением принадлежностью к одной семье или династии, то трансферты внутри семьи (например, вследствие существования некоторых социальных норм и повторяющихся игр со стратегиями наказания, см. приложение С) могут играть аналогичную роль. В этом случае мы будем наблюдать трансферты внутри семьи, которые могут улучшить по Парето распределение ресурсов в экономике, и такие трансферты будут присутствовать в равновесии даже когда между членами семьи отсутствуют альтруистические мотивы.

9.6. Модель перекрывающихся поколений с неполным альтруизмом

В параграфе 5.3 мы показали, что наличие альтруизма внутри семьи (например, родителей по отношению к своим наследникам) может привести к структуре предпочтений, аналогичной структуре предпочтений репрезентативного домохозяйства в неоклассической модели экономического роста. С другой стороны, в этой главе мы пока игнорировали альтруистические мотивы и остановились на анализе влияния конечности жизни индивидов и экономических последствий появления в экономике новых агентов. Как мы коротко отметили в параграфе 5.3, явная структура альтруизма внутри семьи определяет, является ли предположение о существовании репрезентативного домохозяйства хорошей аппроксимацией предпочтений агентов в экономике. В частности, одной из возможных эмпирически релевантных форм альтруизма является ситуация, когда родители заботятся о некоторых элементах вектора потребления своих наследников, а не об их суммарной полезности. Такой тип предпочтений часто называют неполным альтруизмом в отличие от полного или чистого альтруизма, описанного в параграфе 5.3. Во многих моделях экономического роста важную роль из-за своей математической простоты играет частный случай неполного альтруизма, который часто называют предпочтениями теплого света. «Предпочтения теплого света» предполагают, что родитель получает полезность (теплый свет) от своего наследства, а не от полезности или потребления своих наследников. Такие предпочтения являются еще одной удобной альтернативой неоклассической модели экономического роста и модели ПП. Она в чем-то параллельна канонической модели ПП, так как равновесная динамика в ней также схожа с динамикой модели роста Солоу. Учитывая важность такого класса предпочтений во многих прикладных моделях экономического роста, мы далее коротко остановимся на их анализе. Мы будем использовать их в следующей главе и в главе 21.

Предположим, что производственная структура экономики задана неоклассической производственной функцией, удовлетворяющей предположениям 1 и 2 из главы 2. Запишем ее в подушевых терминах как $f(k)$.

Экономика населена континуумом индивидов, расположенных на множестве меры 1. Каждый индивид живет в течение двух периодов, в детстве и в зрелом возрасте. Во втором периоде у каждого индивида рождается наследник, он работает и затем его жизнь подходит к концу. Для простоты предположим, что потребление в детстве равно нулю (или то, что оно является частью потребления родителей). Количество домохозяйств в экономике неизменно, и поэтому население равняется 1 в любом периоде времени. Каждый индивид в зрелом возрасте неэластично поставляет на рынок труда единицу занятости.

Предположим, что предпочтения индивида (i, t), достигшего зрелости в периоде, t заданы следующей функцией полезности:

$$\log(c_i(t)) + \beta\log(b_i(t)), \tag{9.21}$$

где функция $c_i(t)$ обозначает потребление индивида, а функция $b_i(t)$ — размер наследства, которое он оставляет своему ребенку. Предположение о логарифмической функции полезности сделано для упрощения анализа (см. упражнение 9.20). Наследник начинает следующий период, владея наследством, которое он сдает в аренду фирмам в качестве капитала, поставляет занятость на рынок труда, обзаводится собственным наследником и принимает решения о потреблении и размере наследства. Мы продолжим предполагать, что капитал полностью выбывает после одного периода использования.

Из такой постановки задачи следует, что задача максимизации типичного индивида может быть записана в следующем виде:

$$\max_{c_i(t),b_i(t)} \log(c_i(t)) + \beta \log(b_i(t)) \tag{9.22}$$

при ограничении

$$c_i(t) + b_i(t) \leq y_i(t) \equiv w(t) + R(t)b_i(t-1), \tag{9.23}$$

где переменная $y_i(t)$ обозначает совокупный доход индивида, равновесная заработная плата задана равенством

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)), \tag{9.24}$$

равновесная арендная стоимость капитала — равенством

$$R(t) = f'(k(t)), \tag{9.25}$$

а наследство, полученное индивидом от своего родителя, составляет $b_i(t-1)$.

Суммарное отношение капитала к труду в периоде $t+1$ получается агрегированием наследства всех взрослых индивидов в периоде t:

$$k(t+1) = \int_0^1 b_i(t)di. \tag{9.26}$$

В этом равенстве используется тот факт, что множество работников имеет меру 1 и поэтому отношение капитала к труду равняется общему количеству капитала в экономике.

Понятие равновесия в этой экономике является немного более сложным, чем в предыдущих моделях, так как нам необходимо следить за потреблением и размером наследства каждого индивида. Обозначим распределение потребления и наследства среди домохозяйств в периоде t как $[c_i(t)]_{i\in[0,1]}$ и $[b_i(t)]_{i\in[0,1]}$ соответственно и предположим, что в начальном периоде времени распределение богатства (наследства) в экономике задано как $[b_i(0)]_{i\in[0,1]}$ и удовлетворяет условию $\int_0^1 b_i(0)di > 0$.

Определение 9.2. Конкурентным равновесием *в модели ПП с «предпочтениями теплого света» выступает последовательность потребления и размеров наследства для каждого индивида:*

$$\left\{[c_i(t)]_{i\in[0,1]},[b_i(t)]_{i\in[0,1]}\right\}_{t=0}^{\infty},$$

которая является решением задачи (9.22) *при ограничении* (9.23), *последовательность отношений капитала к труду* $\{k(t)\}_{t=0}^{\infty}$, *заданная равенством* (9.26) *при некотором начальном распределении наследства* $[b_i(0)]_{i\in[0,1]}$ *и ценах факторов производства* $\{w(t),\ R(t)\}_{t=0}^{\infty}$, *удовлетворяющих условиям* (9.24) *и* (9.25).

Предположение о логарифмических предпочтениях позволяет без труда получить решение задачи (9.22) при ограничении (9.23) в следующем виде:

$$b_i(t)=\frac{\beta}{1+\beta}y_i(t)=\frac{\beta}{1+\beta}[w(t)+R(t)b_i(t-1)] \qquad (9.27)$$

для всех i и для всех t. Из этого вытекает, что размер наследства индивида следует нетривиальной динамике. Так как величина $b_i(t)$ определяет запас финансовых активов индивида i из поколения t, мы можем интерпретировать ее как его богатство. Следовательно, в такой модели распределение богатства в экономике развивается во времени эндогенным образом. Его динамика зависит от значений цен факторов производства. Для того чтобы найти цены факторов производства, воспользуемся уравнением (9.26), агрегируем наследство домохозяйств и получим значение отношения капитала к труду. Интегрируя уравнение (9.27) по всем индивидам, получаем равенство:

$$k(t+1)=\int_0^1 b_i(t)di=\frac{\beta}{1+\beta}\int_0^1\left[w(t)+R(t)b_i(t-1)\right]di=\frac{\beta}{1+\beta}f(k(t)). \qquad (9.28)$$

Последнее равенство следует из того, что $\int_0^1 b_i(t-1)di=k(t)$ и из того, что по теореме Эйлера (теорема 2.1) $w(t)+R(t)k(t)=f(k(t))$.

Таким образом, агрегированная равновесная динамика в экономике оказывается довольно простой и во многом схожей с равновесной динамикой в базовой модели экономического роста Солоу. Более того, необходимо отметить, что агрегированная равновесная динамика не зависит от вида распределения наследства и доходов между домохозяйствами (в главе 21 мы убедимся в том, что это свойство не выполняется, если в экономике присутствуют другие несовершенства).

Разрешая уравнение (9.28), находим следующее условие на отношение капитала к труду в стационарном равновесии:

$$k^* = \frac{\beta}{1+\beta} f(k^*), \tag{9.29}$$

которое имеет единственное строго положительное решение (из предположений 1 и 2). Более того, равновесная динамика также показана на рис. 9.2, где отношение капитала к труду монотонно сходится к единственному стационарному равновесию.

Мы можем полностью описать равновесие, наблюдая за динамикой наследства. На переходной траектории эта динамика может выглядеть по-разному. Однако мы можем описать предельное распределение уровня богатства и размера наследства. В частности, заметим, что при $k(t) \to k^*$ окончательная динамика размера наследства задается ценами факторов производства в стационарном равновесии. Обозначим их как $w^* = f(k^*) - k^* f'(k^*)$ и $R^* = f'(k^*)$. Тогда после того, как экономика достигнет стационарного равновесия, динамика размера наследства задается следующим уравнением:

$$b_i(t) = \frac{\beta}{1+\beta}[w^* + R^* b_i(t-1)],$$

где $R^* < (1 + \beta)/\beta$ и начиная с любого значения $b_i(t)$ размер наследства сходится к единственному стационарному значению наследства (богатства), заданному следующим равенством:

$$b^* = \frac{\beta w^*}{1+\beta(1-R^*)}. \tag{9.30}$$

Более того, нетрудно убедиться, что в стационарном равновесии выполняется неравенство $R^* < (1 + \beta)/\beta$. Это следует из того, что в стационарном равновесии

$$R^* = f'(k^*) < \frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{1+\beta}{\beta},$$

где строгое неравенство следует из вогнутости функции $f(\cdot)$, а в последнем равенстве используется определение отношения капитала к труду в стационарном равновесии из условия (9.29). Результаты этого анализа резюмируются в следующем утверждении.

Утверждение 9.9. *Рассмотрим модель ПП с «предпочтениями теплого света», описанными выше. В такой модели существует единственное конкурентное равновесие. В этом равновесии агрегированное отношение капитала к труду задано равенством* (9.28) *и монотонно сходится к своему значению в стационарном равновесии* k^*, *заданному равенством* (9.29). *Распределение наследства и богатства в экономике сходится к равномерному распределению, в котором каждый индивид имеет размер наследства (богатства), равный* b^*, *заданный равенством* (9.30), *а цены факторов производства заданы равенствами* $w^* = f(k^*) = k^*f'(k^*)$ *и* $R^* = f'(k^*)$.

9.7. Модель перекрывающихся поколений и вечной молодости

Основная особенность базовой модели ПП состоит в том, что индивиды живут конечную жизнь и в точности знают момент ее окончания. Альтернативным способом моделирования конечной жизни является модель пуассоновского процесса смерти или *модель вечной молодости,* которую мы ввели в параграфе 5.3 в главе 5. Мы начнем с построения модели в дискретном времени. Напомним, что в этой модели каждый индивид живет потенциально бесконечную жизнь, но в каждом периоде времени с вероятностью $\nu \in (0, 1)$ реализуется случайное событие, приводящее к окончанию его жизни (и эти события независимы по времени и между индивидами). Тогда из равенства (5.12) следует, что ожидаемая полезность индивида с чистой нормой дисконтирования β задается следующим выражением:

$$\sum_{t=0}^{\infty}(\beta(1-\nu))^t u(c(t)),$$

где функция $u(\cdot)$ является стандартной моментальной функцией полезности и удовлетворяет предположению 3 с дополнительным нормирующим условием $u(0) = 0$. Из того, что события наступления смерти индивида независимы между периодами и имеют равные вероятности, следует, что ожидаемая продолжительность жизни индивида в этой модели может быть рассчитана следующим образом:

$$\text{ожидаемая продолжительность жизни} = \\ = \nu + 2(1-\nu)\nu + 3(1-\nu)^2\nu + \ldots = \frac{1}{\nu} < \infty. \tag{9.31}$$

Это выражение следует из того, что продолжительность жизни индивида равна 1 с вероятностью ν, равна 2 с вероятностью $(1 - \nu)\nu$, и так далее. Эта модель называется моделью вечной молодости, потому что несмотря на то, что ожидаемая продолжительность жизни каждого индивида является конечной величиной, распределение продолжительности оставшейся жизни одинаково для всех индивидов, доживших до определенного периода времени и не зависит от их возраста. Поэтому индивиды, дожившие до этого момента времени, «вечно молоды»: их возраст не влияет на их будущую жизнь и не имеет предсказательной силы в прогнозе того, как долго они будут жить.

Потоковое бюджетное ограничение индивида i имеет следующий вид:

$$a_i(t+1) = (1 + r(t))a_i(t) - c_i(t) + w(t) + z_i(t), \tag{9.32}$$

схожий с видом стандартного бюджетного ограничения, например ограничения (6.54) из главы 6. Напомним, что валовая доходность сбережений в периоде t составляет $1 + r(t)$. Единственное отличие от стандартного бюджетного ограничения состоит в присутствии слагаемого $z_i(t)$, которое отражает трансферты, получаемые индивидом. Причина, по которой мы ввели эти трансферты, заключается в следующем: из-за того, что момент смерти индивида является случайной величиной, в экономике возможно незапланированное наследство. В частности индивиды обычно заканчивают жизнь с положительным запасом финансовых активов. Если такое событие происходит, то один из возможных вариантов дальнейшего развития событий такой, что государство присваивает незапланированное наследство себе и затем распределяет его в равных долях между всеми домохозяйствами в экономике. В этом случае переменная $z_i(t)$ представляет собой трансферт домохозяйству i. Однако такой способ моделирования требует, чтобы мы наложили ограничение вида $a_i(t) \geq 0$ для того, чтобы предотвратить накопление долга к моменту окончания жизни.

Альтернативный подход, который позволяет избежать необходимости накладывать дополнительные ограничения и является более простым, был предложен Менахемом Яари и Оливье Бланшаром. Он основан на введении в экономику страхования жизни или рынка аннуитетов, на котором конкурирующие между собой страховые фирмы осуществляют выплаты (которые являются функциями от величины финансовых активов) индивиду в обмен на получение требования на активы индивида после его смерти. В этом случае слагаемое $z_i(t)$ является таким аннуитетным платежом. В частности, представим себе следующий тип страхового контракта: страховая фирма обязуется в каждый период времени производить выплаты индивиду в размере $z(a(t))$ (величина выплаты является функцией от финансовой позиции индивида) в течение всей его жизни[3].

[3] Читатель может заметить, что такой контракт является противоположным стандартному контракту страхования жизни, в котором индивид осуществляет выплаты страховой фирме в течение жизни, а его семья получает компенсацию после смерти индивида. Однако такой тип контракта невозможен в этой модели, так как индивиды в ней не имеют наследников или не проявляют альтруизма по отношению к ним.

В момент смерти индивида все его финансовые активы переходят в собственность страховой фирмы. То, что размер выплаты индивиду $z(a(t))$ является функцией от запаса его финансовых активов, а не от его возраста, является следствием предположения о вечной молодости: условное математическое ожидание продолжительности оставшейся жизни не зависит от момента рождения индивида (на самом деле оно не зависит ни от одного параметра модели, кроме вероятности смерти v). Ожидаемая прибыль типичной страховой фирмы, заключающей контракт с индивидом, имеющим запас финансовых активов $a(t)$ в периоде времени t, составляет следующую величину:

$$\pi(a, t) = -(1 - v)z(a) + va.$$

В предположении о свободном входе на рынок ожидаемая прибыль страховой компании должна равняться нулю (в терминах чистой приведенной стоимости), и поэтому из условия $\pi(a, t) = 0$ для всех t и a мы имеем:

$$z(a(t)) = \frac{v}{1-v} a(t). \tag{9.33}$$

Следующим важным элементом модели является ее демографическая структура. Так как в каждом периоде времени возможна смерть каждого индивида, это естественным образом ведет к сокращению населения в экономике. Однако мы предположим, что в каждом периоде в экономике рождаются новые агенты. Но в отличие от базовой неоклассической модели экономического роста мы будем предполагать, что они не являются членами уже существующих династий, а формируют новые домохозяйства. Допустим, что если население экономики в периоде t составляет $L(t)$, то в нее вступает $nL(t)$ новых домохозяйств. Следовательно, динамика населения задается следующим уравнением:

$$L(t + 1) = (1 + n - v)L(t) \tag{9.34}$$

с начальным условием $L(0) = 1$ и в предположении $n > v$, так что темп роста населения положителен. В этом параграфе мы будем игнорировать технологический прогресс.

Предположения о вечной молодости индивидов и об экспоненциальном росте населения приводят к простой демографической структуре экономики. В частности, нетрудно убедиться, что в любом периоде времени t среди населения экономики будет $n(1 + n - v)^{t-1}$ индивидов в возрасте 1 год, $n(1 + n - v)^{t-1}(1 - v)$ индивидов в возрасте 2 года, $n(1 + n - v)^{t-3}(1 - v)^2$ индивидов в возрасте 3 года и так далее (см. упражнение 9.23).

Производственная структура экономики стандартна и описывается агрегированной производственной функцией $F(K(\mathrm{t}), L(t))$, удовлетворяющей предположениям 1 и 2. Предположим, что норма амортизации капитала равна δ. Также предположим совершенную конкуренцию на рынках факторов производства. Тогда цены факторов производства задаются стандартными условиями: арендная стоимость капитала определяется равенством $R(t) = f'(k(t))$, а заработная плата — равенством $w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t))$. В этом случае чистая доходность сбережений составляет $r(t) = f'(k(t)) - \delta$.

Описание распределения ресурсов в экономике схоже с описанием в неоклассической модели экономического роста и включает в себя траектории количества капитала, заработной платы и арендной стоимости капитала $\{K(t),\ w(t),\ R(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Однако в данном случае для полного описания экономики недостаточно будет охарактеризовать лишь траекторию агрегированного потребления, так как уровень потребления не будет одинаков для всех индивидов. Наоборот, индивиды, рожденные в разные периоды времени, будут иметь различные запасы финансовых активов и различные уровни потребления. Обозначим потребление в периоде t индивида, рожденного в периоде $\tau \leq t$, как $c(t \mid \tau)$. Тогда распределение ресурсов включает в себя весь набор $\{c(t \mid \tau)\}_{t=0,\tau\leq t}^{\infty}$. Используя это обозначение и страховые контракты, введенные в равенстве (9.33), мы приходим к следующему виду потокового бюджетного ограничения индивида, рожденного в периоде τ:

$$a(t+1 \mid \tau) = \left(1 + r(t) + \frac{\nu}{1-\nu}\right) a(t \mid \tau) - c(t \mid \tau) + w(t). \tag{9.35}$$

Конкурентное равновесие, как и ранее, определено стандартным образом.

Определение 9.3. Конкурентное равновесие *состоит из траекторий количества капитала, заработной платы и арендной стоимости капитала* $\{K(t),\ w(t),\ R(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *и траекторий потребления каждого поколения* $\{c(t \mid \tau)\}_{t=0,\tau\leq t}^{\infty}$, *таких, что функция полезности каждого индивида достигает максимума при заданных ценах факторов производства, а траектории цен факторов производства* $\{w(t),\ R(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *таковы, что при заданных траекториях количества капитала и труда* $\{K(t),\ L(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *все рынки находятся в равновесии.*

В дополнение к условиям, определяющим цены факторов производства, ключевым уравнением в модели является уравнение Эйлера для потребления в периоде t для домохозяйства, рожденного в периоде τ. Учитывая то, что валовая доходность сбережений составляет $1 + r(t) + \nu/(1 - \nu)$, а эффективная норма дисконтирования индивида равна $\beta(1-\nu)$, приходим к следующему виду уравнения Эйлера:

$$u'(c(t\mid\tau)) = [\beta(1+r(t+1))(1-\nu)+\nu]u'(c(t+1\mid\tau)). \qquad (9.36)$$

Уравнение (9.36) схоже со стандартным уравнением Эйлера, например уравнением (6.45) из главы 6. Оно отличается от уравнения (6.45) только тем, что описывает потребление индивида, рожденного в периоде τ и содержит константу ν (вероятность смерти, которую наблюдает каждый индивид). Однако отметим, что в случае, когда оба параметра r и ν малы, выполняется следующее примерное равенство:

$$(1+r)(1-\nu)+\nu \approx 1+r,$$

и параметр ν уходит из уравнения. На самом деле, он присутствует в уравнении только из-за предположения о дискретной структуре времени в модели. В следующем параграфе мы рассмотрим вариант модели вечной молодости в непрерывном времени, где предыдущее примерное равенство становится точным. Более того, в модели в непрерывном времени мы сможем найти явный вид решения для динамики совокупного потребления и количества капитала в экономике. Таким образом, модель вечной молодости является примером модели, для которой использование методов анализа в непрерывном времени оказывается более подходящим, чем проведение анализа в дискретном времени (в то время как базовая модель ПП формулируется в дискретном времени).

9.8. Модель перекрывающихся поколений в непрерывном времени

9.8.1. Демографическая структура, технологии и предпочтения

Рассмотрим вариант модели вечной молодости в непрерывном времени. Предположим, что процесс наступления смерти каждого индивида является пуассоновским процессом с параметром $\nu \in (0,\infty)$. Также предположим, что индивиды наделены логарифмической функцией полезности с чистой нормой дисконтирования $\rho > 0$. Тогда, как показано в упражнении 5.17, задача максимизации полезности индивидом i описывается следующей целевой функцией:

$$\int_0^\infty \exp(-(\rho+\nu)t)\log c_i(t)dt. \qquad (9.37)$$

Демографическая структура модели схожа со структурой модели вечной молодости в дискретном времени из предыдущего параграфа. В частности, ожидаемая продолжительность оставшейся жизни индивида не зависит от момента его рождения и равна $1/\nu < \infty$. Это значение является как ожидаемой продолжительностью жизни в момент рождения, так и ожидаемой продолжительностью оставшейся жизни индивида, дожившего до определенного момента времени. Обозначим население экономики в момент времени t как $L(t)$. Тогда из того, что смерть является пуассоновским процессом, следует, что в момент времени t умирает $\nu L(t)$ индивидов. Как и ранее, будем предполагать, что новые домохозяйства рождаются в соответствии с экспоненциальным законом с темпом $n > \nu$, и поэтому агрегированная динамика населения описывается следующим законом:

$$\dot{L}(t) = (n - \nu)L(t). \tag{9.38}$$

Мы будем предполагать, что $n - \nu < \rho$. Мера множества (количество) индивидов из когорты $\tau < t$, доживших до момента времени t, равна:

$$L(t \mid \tau) = n\exp(-\nu(t - \rho) + (n - \nu)\tau). \tag{9.39}$$

В этом уравнении, и далее во всем этом параграфе, мы будем предполагать, что в начальный момент времени 0 население экономики составляет $L(0) = 1$ рожденных в этот момент индивидов (выводу уравнения (9.39) посвящено упражнение 9.25).

Как и в предыдущем параграфе, нам достаточно описать потребительское поведение и бюджетные ограничения каждой когорты индивидов. В частности потоковое бюджетное ограничение индивида из когорты τ в момент времени t имеет следующий вид:

$$\dot{a}(t \mid \tau) = r(t)a(t \mid \tau) - c(t \mid \tau) + w(t) + z(a(t \mid \tau) \mid t, \tau),$$

где, как и ранее, функция $z(a(t \mid \tau) \mid t, \tau)$ является трансфертом или аннуитетным платежом в момент времени t индивиду, рожденному в момент времени τ и обладающему запасом финансовых активов $a(t \mid \tau)$. Мы последуем за М. Яари и О. Бланшаром и предположим, что в экономике присутствует полный рынок аннуитетов со свободным входом. Моментальная прибыль страховой компании, предоставляющей такие аннуитеты в момент времени t индивиду, обладающему запасом финансовых активов $a(t \mid \tau)$ и рожденному в момент времени τ, равна:

$$\pi(a(t \mid \tau) \mid t, \tau) = \nu a(t \mid \tau) - z(a(t \mid \tau) \mid t, \tau).$$

Это равенство вытекает из того, что смерть индивида и передача его активов страховой компании следует пуассоновскому процессу с параметром ν. Тогда из условия нулевой прибыли для страховой компании получаем, что

$$z(a(t \mid \tau) \mid t, \tau) = \nu a(t \mid \tau).$$

Подставляя это равенство в потоковое бюджетное ограничение выше, получаем более удобное выражение:

$$\dot{a}(t \mid \tau) = (r(t) + \nu)a(t \mid \tau) - c(t \mid \tau) + w(t). \tag{9.40}$$

Предположим, что производственная структура экономики задана подушевой агрегированной производственной функцией $f(k)$, удовлетворяющей предположениям 1 и 2, где переменная k обозначает отношение капитала к труду. Будем полагать, что норма амортизации капитала равна δ. Тогда цены факторов производства определяются следующими стандартными условиями:

$$R(t) = f'(k(t)) \text{ и } w(\mathrm{t}) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)), \tag{9.41}$$

а процентная ставка равна $r(t) = R(t) - \delta$. Динамика отношения капитала к труду описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - (n - \nu + \delta)k(t) - c(t), \tag{9.42}$$

где совокупное потребление на душу населения $c(t)$ определено как

$$c(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} c(t \mid \tau)L(t \mid \tau)d\tau}{\int_{-\infty}^{t} L(t \mid \tau)d\tau} = \frac{\int_{-\infty}^{t} c(t \mid \tau)L(t \mid \tau)d\tau}{L(t)},$$

где функция $L(t \mid \tau)$ обозначает меру множества когорты индивидов, рожденных в момент времени τ, в момент времени t, а нижний предел интеграла равен минус бесконечности, что позволяет учесть все когорты индивидов, даже те, которые вошли в экономику в очень далеком прошлом.

9.8.2. Равновесие

Как и ранее, конкурентное равновесие в модели определяется стандартным образом.

Определение 9.4. Конкурентное равновесие *в модели вечной молодости в непрерывном времени состоит из траекторий количества капитала, заработной платы и арендной стоимости капитала* $[K(t),\ w(t),\ R(t)]_{t=0}^{\infty}$ *и траекторий потребления для каждого поколения* $[c(t \mid \tau)]_{t=0,\tau\le t}^{\infty}$, *таких, что целевая функция* (9.37) *каждого индивида достигает максимума при ограничении* (9.40), *траектории цен факторов производства* $[w(t),\ R(t)]_{t=0}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям* (9.41), *а динамика отношения капитала к труду задается уравнением* (9.42).

Начнем анализ с решения задачи максимизации полезности домохозяйством. Максимизация целевой функции (9.37) при ограничении (9.40) приводит к стандартному уравнению Эйлера в следующем виде:

$$\frac{\dot{c}(t \mid \tau)}{c(t \mid \tau)} = r(t) - \rho, \tag{9.43}$$

где $\dot{c}(t \mid \tau) = \partial c(t \mid \tau)/\partial t$. Заметим, что в отличие от варианта модели в дискретном времени вероятность (значение параметра пуассоновского процесса) смерти ν не входит в уравнение (9.43), так как она в точности сокращается (доходность активов равна $r(t) + \nu$, а эффективная норма дисконтирования равна $\rho + \nu$, и поэтому их разность равна $r(t) - \rho$.

Условие трансверсальности для индивида, принадлежащего к когорте τ, принимает следующий вид:

$$\lim_{t\to\infty} \exp(-(\bar{r}(t, \tau) + \nu))a(t \mid \nu) = 0, \tag{9.44}$$

где переменная

$$\bar{r}(t, \tau) \equiv \frac{1}{t - \tau} \int_{\tau}^{t} r(s)ds$$

является средней процентной ставкой между моментами времени τ и t, как и в равенстве (8.31) из главы 8, и, таким образом, условие трансверсальности (9.44) аналогично условию (8.32). Условие трансверсальности (9.44) требует, чтобы дисконтированная к текущему моменту времени чистая приведенная стоимость запаса финансовых активов индивида, рожденного в момент времени τ, в очень отдаленном будущем равнялась нулю.

Объединяя уравнение (9.43) с условиями (9.40) и (9.44), получаем следующий вид «функции» потребления индивида, принадлежащего к когорте τ:

$$c(t \mid \tau) = (\rho + \nu)\left[a(t \mid \tau) + \omega(t)\right]. \tag{9.45}$$

Такая линейная форма функции потребления является одним из особенно привлекательных свойств логарифмических предпочтений. Выражение в квадратных скобках описывает общее богатство индивида, состоящее из его финансовых активов и человеческого богатства $\omega(t)$, равного приведенной стоимости его трудового дохода в течение всей жизни, дисконтированной к моменту времени t:

$$\omega(t) = \int_{t}^{\infty} \exp(-(\bar{r}(s,\ t) + \nu))w(s)ds.$$

Чистая приведенная стоимость трудового дохода индивида не зависит от момента его рождения τ, так как будущая заработная плата одинакова для всех агентов. Дополнительное дисконтирование с нормой ν является следствием того, что индивиды умирают со скоростью r и поэтому теряют свой будущий заработок с этой же скоростью.

Из уравнения (9.45) следует, что каждый индивид потребляет фиксированную долю своего богатства, равную $\rho + \nu$. Интегрируя уравнение (9.45) по всем когортам и принимая во внимание то, что в момент времени t размер когорты индивидов, рожденных в момент времени τ, равен $\exp(-\nu(t - \tau) + (n - \nu)\tau)$, получаем следующее выражение для среднего значения потребления на душу населения:

$$c(t) = (\rho + \nu)[a(t) + \omega(t)], \tag{9.46}$$

где переменная $a(t)$ обозначает средний запас финансовых активов на душу населения. Из того, что капитал является единственным производственным активом в экономике, следует равенство $a(t) = k(t)$. Наконец, дифференцируя уравнение (9.46) по времени, мы приходим к следующему уравнению:

$$\dot{c}(t) = (\rho + \nu)\left[\dot{a}(t) + \dot{\omega}(t)\right]. \tag{9.47}$$

Динамика запаса активов на душу населения подчиняется следующему закону:

$$\dot{a}(t) = (r(t) - (n - \nu))a(t) + w(t) - c(t).$$

За этим дифференциальным уравнением стоит простая интуиция. Источниками увеличения совокупного богатства в экономике $a(t)L(t)$ является доход от капитала по ставке $r(t)$ и совокупная заработная плата $w(t)L(t)$. Часть его расходуется на совокупное потребление в размере $c(t)L(t)$. Наконец, население растет с темпом $n - \nu$, что ведет к замедлению прироста благосостояния на душу населения. С другой стороны, размер человеческого благосостояния на душу населения удовлетворяет равенству:

$$(r(t) + \nu)\omega(t) = \dot{\omega}(t) + w(t).$$

Интуиция к этому уравнению следует из уравнения ГЯБ, которое мы ввели в главе 7. Мы можем рассматривать переменную $\omega(t)$ как требование на весь будущий трудовой доход типичного индивида. Требуемая инвестором доходность, которая учитывает возможную потерю дохода из-за смерти, равна $r(t) + \nu$. Выплаты по такому активу состоят из прироста его стоимости $\dot{\omega}(t)$ и дивиденда в размере заработной платы $w(t)$. Подставляя значения $\dot{a}(t)$ и $\dot{\omega}(t)$ из этих двух уравнений в уравнение (9.47), получаем следующий вид функции потребления:

$$\begin{aligned}\dot{c}(t) &= (\rho + \nu)[(r(t) - (n - \nu))a(t) + w(t) - c(t) + (r(t) + \nu)\omega(t) - w(t)] = \\ &= (\rho + \nu)[(r(t) + \nu)(a(t) + \omega(t)) - na(t) - c(t)] = \\ &= (\rho + \nu)\left[\frac{r(t) + \nu}{\rho + \nu}c(t) - na(t) - c(t)\right] = (r(t) - \rho)c(t) - (\rho + \nu)na(t),\end{aligned}$$

где третье равенство следует из уравнения (9.46). Разделив обе части этого равенства на $c(t)$, используя равенство $a(t) = k(t)$ и делая подстановку $r(t) = f'(k(t)) - \delta$, мы приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = f'(k(t)) - \delta - \rho - (\rho + \nu)n\frac{k(t)}{c(t)}. \tag{9.48}$$

Уравнение (9.48) во многом повторяет стандартное уравнение Эйлера (для логарифмических предпочтений), но включает последнее слагаемое. Это слагаемое отражает тот факт, что рождение в каждый момент времени новых индивидов, имеющих меньший уровень благосостояния по сравнению со средним его уровнем в экономике, снижает темп роста потребления. Снижение темпа роста потребления обусловлено тем, что низкий уровень благосостояния новых индивидов ведет к их низкому потреблению. Это интуитивно объясняет зависимость последнего слагаемого от темпа появления в экономике новых индивидов n и от отношения среднего запаса финансовых активов к потреблению k/c.

Равновесная динамика экономики полностью описывается двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями (9.42) и (9.48), начальным запасом капитала $k(0) > 0$ и условием трансверсальности на средний запас финансовых активов, а значит и на отношение капитала к труду $k(t)$ (9.44). В стационарном равновесии темпы роста отношения капитала к труду и среднего значения потребления равны нулю, $\dot{k}(t)/k(t) = 0$ и $\dot{c}(t)/c(t) = 0$. Таким образом, оно задается двумя следующими уравнениями:

$$\frac{c^*}{k^*} = \frac{(\rho + \nu)n}{f'(k^*) - \delta - \rho} \tag{9.49}$$

и

$$\frac{f(k^*)}{k^*} - (n - \nu + \delta) - \frac{(\rho + \nu)n}{f'(k^*) - \delta - \rho} = 0. \tag{9.50}$$

Второе уравнение позволяет найти единственное положительное значение отношения капитала к труду в стационарном равновесии k^* (единственность следует из того, что функции $f(k^*)/k^*$ и $f'(k^*)$ являются убывающими). Значение среднего потребления на душу населения c^* определяется подстановкой k^* в первое уравнение. Нетрудно убедиться, что

$$f'(k^*) > \rho + \delta,$$

то есть отношение капитала к труду в стационарном равновесии оказывается меньше, чем в модифицированном золотом правиле, которое определяется условием $f'(k_{mgr}) = \rho + \delta$. Напомним, что оптимальное значение где в данном случае человеческое богатство индивида, рожденного в момент времени τ, в момент времени t $\omega(t)$ задается следующим равенством:

$$\omega(t\,|\,\tau) = \int_t^\infty \exp(-(\bar{r}(t, s) + \nu))\exp(-\zeta(s-t))w(s)ds, \tag{9.51}$$

где множитель $\exp(-\zeta(s-t))$ является корректирующим фактором, описывающим снижение эффективного предложения труда (см. упражнение 9.30). Повторяя для такого выражения для человеческого богатства те же выкладки, что и ранее, получаем следующее дифференциальное уравнение, описывающее динамику потребления:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = f'(k(t)) - \delta - \rho + \zeta - (\rho + \nu)(n + \zeta)\frac{k(t)}{c(t)}, \tag{9.52}$$

где динамика отношения капитала к труду продолжает определяться уравнением (9.42). Нетрудно убедиться, что при достаточно большом значении ζ значение отношения капитала к труду в стационарном состоянии может превышать его значение, соответствующее модифицированному золотому правилу k_{mgr} и золотому правилу k_{gold} (см. упражнение 9.30). Из этих рассуждений следует, что избыточное накопление капитала может происходить при наличии структуры перекрывающихся поколений и значительных стимулов к сбережениям на будущее. Интересно отметить, что причиной избыточного накопления капитала является не конечность жизни индивидов сама по себе, а именно наличие структуры перекрывающихся поколений. В частности, в упражнении 9.32 показано, что избыточное накопление капитала невозможно, если $n = 0$, то есть конечность жизни индивидов не является достаточным условием возможности избыточного накопления капитала. С другой стороны, если $n > 0$, $\zeta > 0$ и $\nu = 0$, то возможно стационарное равновесие с $k^* > k_{\text{gold}}$, то есть избыточное накопление капитала возможно и в модели ПП с бесконечно живущими агентами.

9.9. Основные выводы

В этой главе мы продолжили изучение механики накопления капитала в динамических моделях общего равновесия. Основное отличие моделей из этой главы от базовой неоклассической модели экономического роста состоит в отходе от предположения о существовании репрезентативного домохозяйства. Наиболее простой альтернативной моделью является модель ПП с индивидами, живущими два периода (без чистого альтруизма). В базовой модели ПП П. Самуэльсона и П. Даймонда каждый индивид живет в течение двух периодов, однако занят на рынке труда только в первом периоде своей жизни.

Мы также обсудили другие модели без репрезентативного домохозяйства, в частности модель ПП с неполным альтруизмом и модель вечной молодости. В модели ПП с неполным альтруизмом индивиды оставляют ресурсы своим наследникам, но они не заботятся явным образом об их полезности. Вместо этого они получают полезность от самого факта передачи некоторых элементов своего вектора потребления своим наследникам. В модели вечной молодости присутствует структура перекрывающихся поколений и ожидаемая продолжительность жизни индивида конечна, однако каждый индивид имеет бесконечный горизонт планирования, так как момент окончания его жизни является случайной величиной.

В таких моделях может не выполняться первая теорема экономики благосостояния. Вследствие этого мы не можем быть уверены в том, что конкурентное равновесие в них будет оптимальным по Парето. На самом деле подробное изучение базовой модели ПП было отчасти мотивировано возможностью неоптимального по Парето распределения ресурсов в конкурентном равновесии. Мы убедились, что конкурентное равновесие в таких моделях может оказаться динамически неэффективным с избыточным накоплением капитала в экономике — значение отношения капитала к труду может превышать уровень, соответствующий золотому правилу. Мы также увидели, что введение в экономику распределительной пенсионной системы может снизить совокупные сбережения и смягчить проблему избыточного накопления капитала. Важность распределительной пенсионной системы (или государственного долга) в модели ПП сделала эти модели основными моделями, применяющимися в анализе влияния на экономику государственных трансфертов и фискальной политики в целом.

Анализ модели вечной молодости, в частности модели вечной молодости М. Яари и О. Бланшара в непрерывном времени, позволил нам более подробно увидеть вклад динамики трудового дохода, конечной продолжительности жизни и появления новых индивидов в возможность избыточного накопления капитала. А именно мы убедились в том, что важную роль в утверждении об избыточном накоплении капитала играет снижающийся со временем трудовой доход индивидов (двухпериодная модель Самуэльсона—Даймонда является здесь крайним случаем, так как в ней доход индивидов во втором периоде жизни равен нулю). Однако наиболее важным выводом из этих моделей является утверждение, что основной причиной возможного избыточного накопления капитала является не конечность жизни индивидов сама по себе, а появление в экономике новых агентов.

Несмотря на то что проблема избыточного накопления капитала и динамической неэффективности экономики доминирует в исследовании моделей ПП в литературе, читателю не следует придавать слишком большое значение результату о возможной динамической неэффективности. Как мы увидели в главе 1, некоторые из основных вопросов теории экономического роста: почему многие страны обладают недостаточным запасом капитала на душу населения и почему процесс накопления капитала и экономический рост начались лишь 200 лет назад. Поэтому маловероятно, что возможность избыточного накопления капитала очень важна для подавляющего большинства стран в мировой экономике.

Другая причина, по которой модели, изученные в этой главе, оказываются полезными, заключается в том, что они значительно обогащают арсенал моделей, используемых для анализа динамики накопления капитала и механики экономического роста. Все три модели, которые мы рассмотрели: базовая модель ПП, модель ПП с неполным альтруизмом и модель вечной молодости, предоставляют полезные и технически несложные способы анализа экономического роста при различных обстоятельствах. Например, первые две модели приводят к динамике, схожей с динамикой в базовой модели роста Солоу, однако в них не делается предположение об экзогенно заданной постоянной норме сбережений. С другой стороны, в последней модели равновесная динамика схожа с динамикой в неоклассической модели экономического роста, при этом в ней присутствует структура перекрывающихся поколений и индивиды имеют конечную жизнь, что является важным предположением во многих задачах, например в задаче оптимальных инвестиций в человеческий капитал, которой посвящена следующая глава книги.

Таким образом, в этой главе мы познакомились с рядом новых методов и различных подходов к анализу накопления капитала, совокупных сбережений и экономического роста. Несмотря на то что эти подходы не дают новых ответов на вопросы о том, почему одни страны растут быстрее других и почему уровень дохода в одних странах намного превышает уровень дохода в других, они помогут нам в поиске ответов на эти вопросы в последующих главах.

9.10. Литература

Базовая модель ПП с агентами, живущими в течение двух периодов, разработана в работах [Samuelson 1958] и [Diamond 1965]. Схожая модель была опубликована на французском языке в работе Мауриса Аллариса. Прекрасное описание базовой модели ПП читатель может найти в учебнике [Blanchard, Fischer 1989, chapter 3; Бланшар, Фишер 2014, гл. 3]. В некоторых учебниках, например: [McCandless, Wallace 1991; Azariadis 1993; De La Croix, Michelle 2002] — эта модель используется в качестве основной макроэкономической модели. Анализ множественности стационарных равновесий в модели ПП представлен в работе [Galor, Ryder 1989], схожесть базовой модели роста Солоу и модели ПП обсуждается в работе [Galor 1996] (также см. упражнение 2.13 из главы 2).

Модель экономики из параграфа 9.1 восходит к работе [Shell 1971]. Анализу неоптимальности в модели ПП посвящено много работ. Пример из работы [Shell 1971], приведенный в параграфе 9.1, является наиболее простым и интуитивно понятным объяснением причин того, почему первая теорема экономики благосостояния не может применяться в таких моделях. Прозрачное обсуждение этого вопроса представлено в работе [Bewley 2007].

Вопрос динамической неэффективности в модели ПП обсуждается в работах: [Samuelson 1958; Diamond 1965]. Более полное обсуждение этого вопроса, не ограниченное лишь анализом стационарного равновесия, представлено в работе [Cass 1972] (в тексте мы упростили анализ возможности динамической неэффективности, ограничившись лишь исследованием стационарного равновесия в модели). Роль распределительной пенсионной системы в динамически неэффективной экономике обсуждается в работе [Samuelson 1975], в работе [Diamond 1965] проведен анализ роли государственного долга в том же контексте. В работе [Samuelson 1958] показано, что аналогичную роль в экономике могут играть бумажные деньги, дальнейший анализ такой модели представлен в работах: [Wallace 1980] и [Weil 1987]. К важным ранним работам о пузырях в модели ПП можно отнести работы [Blanchard 1979; Tirole, 1985; Gilles, LeRoy 1982]. В работе [Tirole 1982] показана важность существования в экономике бесконечного горизонта планирования в контексте возможности пузырей, в работе [Ventura 2002] исследуется связь между пузырями в финансовых активах и потоками капитала.

Модель ПП с неполным альтруизмом представлена в работе [Andreoni 1989]. Эта модель очень часто используется в литературе по экономическому росту и экономике развития, особенно для анализа равновесной динамики в моделях с несовершенствами на финансовом рынке. Среди хорошо известных примеров, которых мы коснемся в главе 21, необходимо выделить работы: [Banerjee, Newman 1991, 1993; Galor, Zeira 1993; Aghion, Bolton 1997; Pilketty 1997]. Нам незнакомы работы, в которых проводится анализ динамики неравенства в богатстве в модели экономики с совершенным рынком капитала, аналогичный анализу в параграфе 9.6, хотя такой анализ выглядит достаточно просто. Схожий анализ динамики неравенства в богатстве присутствует в модели в работе [Stiglitz 1969], однако в ней предполагается, что каждое домохозяйство имеет возможность инвестировать сбережения только в свою собственную технологию с убывающей предельной производительностью капитала (что является сильным стимулом, ведущим к выравниванию уровня доходов домохозяйств).

Модель вечной молодости в непрерывном времени представлена в работах: [Yaari 1965; Blanchard 1985]. Мы начали анализ с варианта модели в дискретном времени для того, чтобы упростить переход к модели в непрерывном времени. Изложение модели в непрерывном времени в тексте во многом следует работе [Blanchard 1985]. Важность вида траектории трудового дохода домохозяйства в динамике экономики обсуждается в работе [Blanchard 1985]. Обсуждение и подробный анализ важности появления на рынке новых домохозяйств приведены в работе [Weil 1989]. Модели ПП с конечной продолжительностью жизни агентов широко используются в анализе рикардианской эквивалентности, которую мы ввели в упражнении 8.35. Подробное обсуждение этого вопроса читатель сможет найти в работе [Blanchard 1985].

9.11. Упражнения

9.1. **(a)** Докажите, что распределение ресурсов, описанное в утверждении 9.1, является единственным конкурентным равновесием в экономике.

(b) Покажите, что в дополнение к распределению ресурсов $\tilde{\mathbf{x}}_{i'}$ для любых натуральных $i_1 \in \mathbb{N}$, $i_2 \in \mathbb{N}$ возможно построение распределения ресурсов $\tilde{\mathbf{x}}_{i_1 i_2}$, в котором полезность всех индивидов, имеющих индекс $i \in [i_1, i_2]$, увеличивается, а полезность всех остальных индивидов остается на том же уровне, что и в распределении ресурсов $\tilde{\mathbf{x}}$.

9.2. Покажите, что распределение $\tilde{\mathbf{x}}_{i'}$ из утверждения 9.3 может быть децентрализовано как конкурентное равновесие с вектором цен $\tilde{\mathbf{p}}$, таким, что $\tilde{p}_j = 1$ для всех $j \le i'$ и $\tilde{p}_j = \rho^{j-i'-1}$ для всех $j > i'$ при некотором $\rho \in (0, 1)$.

9.3. Рассмотрите следующий вариант модели экономики из параграфа 9.1. Функция полезности индивида с индексом $i = j$ имеет следующий вид:

$$u(c(j)) + \beta u(c(j+1)),$$

где дисконт $\beta \in (0, 1)$ и каждый индивид наделен запасом единицы товара с индексом, совпадающим с его собственным.

(a) Определите конкурентное равновесие в такой экономике.

(b) Опишите множество конкурентных равновесий в этой экономике.

(c) Опишите множество всех оптимальных по Парето распределений ресурсов в этой экономике.

(d) Могут ли все оптимальные по Парето распределения ресурсов в этой экономике быть децентрализованы как конкурентные равновесия без изменения запасов индивидов? Могут ли они быть децентрализованы с помощью изменения запасов индивидов?

9.4. Покажите, что динамика количества капитала в модели из параграфа 9.2 совпадает с динамикой, описанной в тексте, даже в случае, когда $\delta < 1$. [Подсказка: вам необходимо описать динамику неамортизированного капитала.]

9.5. В базовой модели ПП убедитесь в том, что функция сбережений $s(w, R)$, заданная равенством (9.6), является возрастающей по заработной плате w. Выведите условия на функцию полезности $u(\cdot)$, при выполнении которых она также является возрастающей по второму аргументу (валовой доходности R).

9.6. Докажите утверждение 9.4.

9.7. Рассмотрите каноническую модель ПП с логарифмическими предпочтениями, заданными следующей функцией полезности:

$$\log c_1(t) + \beta \log c_2(t+1)$$

для каждого индивида. Предположите, что население растет с темпом, равным n. Агенты обладают запасом единицы занятости, которую они неэластично поставляют на рынок труда в первом периоде своей жизни. Производственная функция имеет вид:

$$Y(t) = A(t)K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha},$$

где $A(t+1) = (1+g)A(t)$ при $g > 0$ и $A(0) > 0$.

(a) Определите конкурентное равновесие и стационарное равновесие в этой экономике.

(b) Опишите стационарное равновесие и покажите, что оно является глобально устойчивым.

(c) Как увеличение темпа роста технологического прогресса g изменяет равновесие в модели?

(d) Как увеличение дисконта β изменяет равновесие в модели? Приведите интуитивное объяснение ваших результатов.

9.8. Рассмотрите каноническую модель ПП с логарифмическими предпочтениями, описанными функцией полезности $\log c_1(t) + \beta \log c_2(t+1)$, и с неоклассической производственной функцией в общем виде $Y = F(K, L)$, удовлетворяющей предположениям 1 и 2 (см. главу 2). Покажите, что в такой модели возможна множественность стационарных равновесий.

9.9. Рассмотрите каноническую модель ПП с логарифмическими предпочтениями и производственной функцией Кобба—Дугласа (как в упражнении 9.8).

(a) Определите конкурентное равновесие в этой экономике.

(b) Опишите конкурентное равновесие и выведите в явном виде условия, при которых стационарное равновесие является динамически эффективным.

(c) Используйте эмпирически релевантную параметризацию модели и проанализируйте, может ли динамическая неэффективность возникнуть в «реальных» экономиках.

(d) Покажите, что если экономика является динамически неэффективной, то в ней возможно построить распределительную пенсионную систему, приводящую к улучшению по Парето по сравнению с распределением ресурсов в конкурентном равновесии.

9.10. Еще раз вернитесь к канонической модели ПП с логарифмическими предпочтениями и производственной функцией Кобба—Дугласа, однако предположите, что индивиды работают в обоих периодах своей жизни.

(a) Определите конкурентное равновесие и стационарное равновесие в этой экономике.

(b) Опишите стационарное равновесие и переходную динамику в этой экономике.

(c) Возможно ли в такой экономике избыточное накопление капитала?

9.11. В этом упражнении мы проведем параллель между неоптимальностью по Парето в модели ПП и невыполнением первой теоремы экономики благосостояния (теоремы 5.6) при бесконечном количестве домохозяйств.

(a) Покажите, что если экономика динамически неэффективна, то есть если $r^* < n$, то условие $\sum_{h\in\mathcal{H}}\sum_{j=0}^{\infty} p_j^* \omega_j^h < \infty$ из теоремы 5.6 не выполняется. [Подсказка: заметьте, что в этом случае запас домохозяйства состоит из трудовых ресурсов в различные периоды времени и их цена равна $w(t)/R(t)$, а значит $w^*/(1 + r^*)$ в стационарном равновесии. Затем заключите из этого наблюдения, что эквивалентом суммы $\sum_{h\in\mathcal{H}}\sum_{j=0}^{\infty} p_j^* \omega_j^h$ в стационарном равновесии в этой экономике является выражение $w^* \sum_{t=0}^{\infty}((1+n)/(1+r^*))^t$].

(b) Покажите, что если $r^* > n$, то условие $\sum_{h\in\mathcal{H}}\sum_{j=0}^{\infty} p_j^* \omega_j^h < \infty$ из теоремы 5.6 выполняется. Используя это условие, докажите, что в этом случае конкурентное равновесие в модели ПП является оптимальным по Парето.

***9.12.** Покажите, что теорема 5.6. не дает ответа на вопрос об оптимальности по Парето конкурентного равновесия в модели ПП при $r^* = n$. В частности покажите, что это равновесие будет оптимальным по Парето, если функции $u(\cdot)$и $f(\cdot)$ являются строго вогнутыми. Можете ли вы построить пример модели, в котором он не будет оптимальным по Парето?

9.13. Докажите утверждение 9.7.

9.14. Рассмотрите модель ПП с полностью накопительной пенсионной системой из параграфа 9.5. Покажите, что даже в предположении $s(t) \geq 0$ для всех t никакая полностью накопительная схема пенсионных отчислений не может приводить к улучшению по Парето распределения ресурсов в экономике.

9.15. Рассмотрите модель ПП с динамически неэффективным стационарным равновесием. Покажите, что государство может улучшить по Парето распределение ресурсов в экономике с помощью выпуска государственного долга. [Подсказка: предположите, что государство привлекает заимствования от молодых людей и распределяет эти средства между пожилыми. Оно погашает долг перед молодыми в следующем периоде (когда они становятся пожилыми), привлекая новые займы у молодых людей, родившихся в следующем периоде.] Сравните ваш результат с утверждением о рикардианской эквивалентности в упражнении 8.35 из главы 8.

9.16. Докажите утверждение 9.8.

9.17. Рассмотрите базовую модель ПП и предположите, что конкурентное равновесие в ней является динамически эффективным, то есть, что $r^* > n$. Покажите, что любая распределительная пенсионная система ведет к увеличению полезности поколения пожилых людей, живущих в периоде ее введения и снижению полезности некоторого будущего поколения индивидов.

9.18. Выведите равенство (9.31).

9.19. Рассмотрите модель ПП с «предпочтениями теплого света» из параграфа 9.6 и предположите, что функция полезности вместо вида (9.21) имеет вид $c(t)^{\eta}b(t)^{1-\eta}$, где $\eta \in (0, 1)$. Производственная структура экономики описана в параграфе 9.6. Опишите динамическое равновесие в этой экономике.

9.20. Рассмотрите модель ПП с «предпочтениями теплого света» из параграфа 9.6 и предположите, что функция полезности имеет вид $u_1(c_i(t)) + u_2(b_i(t))$, где функции u_1 и u_2 являются строго возрастающими и вогнутыми. Производственная структура экономики описана в тексте. Опишите динамическое равновесие в такой экономике. Выведите достаточные условия на вид функций u_1 и u_2 для того, чтобы (1) агрегированная динамика равновесия была глобально устойчива и (2) благосостояние всех индивидов асимптотически сходилось к одному уровню.

9.21. Опишите совокупную равновесную динамику и динамику распределения богатства в модели ПП с «предпочтениями теплого света» из параграфа 9.6 при подушевой производственной функции, имеющей вид функции Кобба—Дугласа $f(k) = Ak^{\alpha}$. Покажите, что если экономика не находится в стационарном равновесии, то неравенство в уровне богатства может увеличиваться в течение некоторых периодов времени. Объясните почему.

9.22. Покажите, что отношение капитала к труду в стационарном равновесии в модели ПП с неполным альтруизмом из параграфа 9.6 может привести к избыточному накоплению капитала, то есть в нем будет выполняться неравенство $k^* > k_{\text{gold}}$.

9.23. Покажите, что если в модели вечной молодости динамика населения задается уравнением (9.34), то в момент времени $t > 0$ мера множества индивидов в возрасте s равна $n(1 + n - \nu)^{t-s}(1 - \nu)^{s-1}$ для любого $s \in [1, 2, ..., t - 1]$.

***9.24.** Рассмотрите модель вечной молодости в дискретном времени из параграфа 9.7 и предположите логарифмические предпочтения индивидов. Опишите стационарное равновесие и равновесную динамику отношения капитала к труду.

9.25. Рассмотрите модель вечной молодости в непрерывном времени из параграфа 9.8.

(a) Покажите, что если в начальный момент времени $L(0) = 1$, то начальный размер когорты индивидов, рожденных в момент времени τ, равен $\exp((n - \nu)\tau)$.

(b) Покажите, что вероятность того, что индивид, рожденный в момент времени τ, доживет до момента времени $t \geq \tau$, равна $\exp(-\nu(t - \tau))$.

(c) Выведите равенство (9.39).

(d) Покажите, что равенство (9.39) не выполняется ни в один конечный момент времени, если в начальный момент времени $t = 0$ распределение возраста индивидов в экономике имеет произвольный общий вид.

9.26. Выведите равенство (9.45). [Подсказка: вначале проинтегрируйте бюджетное ограничение индивида (9.40), затем используйте условие трансверсальности (9.44) и условие (9.43).]

9.27. Обобщите анализ модели вечной молодости в непрерывном времени из параграфа 9.8 на модель экономики с трудоинтенсивным технологическим прогрессом, проходящим с темпом роста g. Докажите единственность и глобальную седловую устойчивость стационарного равновесия в этой модели. Какое воздействие на динамику равновесия оказывает увеличение темпа роста технологического прогресса g?

9.28. Линеаризуйте дифференциальные уравнения (9.42) и (9.48) вокруг стационарного состояния (k^*, c^*) и покажите, что линеаризованная система обладает одним отрицательным и одним положительным собственными значениями.

9.29. Как изменения параметров n и ν влияют на стационарное равновесие (k^*, c^*) в модели вечной молодости в непрерывном времени из параграфа 9.8?

9.30. **(a)** Выведите уравнения (9.51) и (9.52)

(b) Покажите, что при достаточно большом значении ζ значение отношения капитала к труду в стационарном равновесии k^* может превышать k_{gold}, то есть в экономике будет происходить избыточное накопление капитала. Приведите интуицию, стоящую за этим результатом.

9.31. Рассмотрите модель вечной молодости в непрерывном времени с постоянным потоком государственных расходов, равных G. Предположите, что государственные расходы не входят в функцию полезности потребителей и финансируются с помощью паушальных налогов, равных $\{\mathcal{T}(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Выведите бюджетное ограничение государственного сектора по аналогии с упражнением 8.35 из главы 8. Докажите, что, в отличие от вывода о рикардианской эквивалентности из упражнения 8.35, в данной модели вид последовательности налоговых платежей $\{\mathcal{T}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ оказывает воздействие на равновесные траектории отношения капитала к труду и потребления. Проинтерпретируйте ваши выводы и объясните различие между моделью ПП и неоклассической моделью экономического роста.

***9.32.** Рассмотрите модель вечной молодости в непрерывном времени с трудовым доходом, убывающим с темпом $\zeta > 0$. Покажите, что существует достаточно большое значение ζ, такое, что если $n > 0$ и $\nu = 0$, то $k^* > k_{\text{gold}}$.

9.33. Рассмотрите экономику, в которой агрегированная производственная функция имеет следующий вид:

$$Y(t) = AK(t)^{1-\alpha}L(t)^{\alpha}.$$

Предположите совершенную конкуренцию на всех рынках, а также что предложение труда нормализовано единицей, капитал полностью выбывает после использования, а государство облагает доход от владения капиталом пропорциональным налогом по ставке τ и использует налоговые поступления для финансирования государственного потребления. Рассмотрите две демографические структуры экономики:

1. Агенты имеют бесконечный горизонт планирования и максимизируют следующую целевую функцию:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c(t).$$

2. Агенты работают в первом периоде своей жизни и потребляют доход от владения капиталом во втором периоде (модель ПП). Предпочтения типичного представителя поколения t заданы следующей функцией полезности:

$$\log c1(t) + \beta \log c_2(t+1).$$

Опишите конкурентное равновесие в обеих моделях и покажите, что в первой экономике налогообложение дохода от владения капиталом ведет к снижению выпуска, а во второй — нет. Проинтерпретируйте этот результат. В свете этого вывода обсудите применимость этих моделей для объяснения межстрановых различий в уровне дохода на душу населения по причине различий в ставках налога на доход от владения капиталом.

Глава 10
Экономический рост и человеческий капитал

В этой главе мы остановимся на роли человеческого капитала в экономическом росте и межстрановых различиях в уровне дохода. Основная задача этой главы состоит в том, чтобы определить основные факторы, влияющие на инвестиции в человеческий капитал, и то, как они отражаются на экономическом росте и экономическом развитии. Под человеческим капиталом мы будем понимать набор навыков работников, которые, возможно, могут влиять на их производительность при выполнении всех или некоторых производственных действий. Этот термин был введен в теорию вследствие того, что накопление таких навыков работниками требует инвестиций. Теория человеческого капитала, которая была развита в основном в работах [Becker 1965] и [Mincer 1974], описывает роль человеческого капитала в производственной деятельности и стимулы к инвестициям в него, включая инвестиции, осуществляемые работником до выхода на рынок труда (образование) и инвестиции, осуществляемые на рабочем месте (тренинги и курсы повышения квалификации). Не будет преувеличением сказать, что эта теория является основой многих моделей экономики труда и играет настолько же важную роль в макроэкономике. Литература по образованию и другим видам инвестиций в человеческий капитал очень обширна, поэтому мы остановимся лишь на тех ее разделах, которые являются релевантными с точки зрения основных задач, поставленных в данной книге. В последующих главах мы также исследуем другие важные взаимосвязи между человеческим капиталом и экономическим ростом, в особенности те, которые описывают воздействие накопления человеческого капитала на технологический прогресс и на переход экономики на траекторию устойчивого роста.

10.1. Простая теорема об отделении

Мы начнем анализ с модели частного равновесия, в которой агенты принимают решение об образовании, и получим простой результат, который часто называют теоремой об отделении для инвестиций в человеческий капитал. Для простоты изложения рассмотрим модель в непрерывном времени.

Рассмотрим задачу индивида, принимающего решение об образовании и наблюдающего экзогенно заданные цены человеческого капитала. В дальнейшем изложении мы будем предполагать, что рынок капитала является совершенным рынком. В теореме об отделении утверждается, что на совершенном рынке капитала решения об образовании максимизируют чистую приведенную стоимость индивида и поэтому могут быть «отделены» от его потребительских решений (мы остановимся на инвестициях в человеческий капитал на несовершенном рынке капитала в главе 21). В частности, рассмотрим индивида, обладающего моментальной функцией полезности $u(c)$, которая удовлетворяет предположению 3 (из главы 8). Предположим, что индивид имеет горизонт планирования T (где возможно равенство $T = \infty$), его норма дисконтирования будущего равна $\rho > 0$ и что, как и в модели вечной молодости из предыдущей главы, он подвержен случайной смерти, являющейся пуассоновским процессом с параметром v. Тогда целевая функция индивида в начальный момент времени $t = 0$ имеет следующий вид:

$$\max \int_0^T \exp(-(\rho + v)t)u(c(t))dt. \tag{10.1}$$

Далее предположим, что в момент рождения индивид обладает некоторым запасом человеческого капитала $h(0) \geq 0$. Также предположим, что динамика его запаса человеческого капитала определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{h}(t) = G(t,\ h(t),\ s(t)), \tag{10.2}$$

где переменная $s(t) \in [0,\ 1]$ обозначает долю времени, которую индивид тратит на инвестиции в человеческий капитал (например, получает образование), а функция $G\colon \mathbb{R}_+^2 \times [0,\ 1] \to \mathbb{R}_+$ определяет зависимость прироста человеческого капитала от времени, имеющегося запаса человеческого капитала и решений об образовании. Более того, наложим дополнительное ограничение на решения об образовании следующего вида:

$$s(t) \in \mathcal{S}(t), \tag{10.3}$$

где множество $\mathcal{S}(t) \subset [0,\ 1]$. Это ограничение может отражать тот факт, что образование должно проходить на дневной форме обучения (то есть $s(t) \in \{0,\ 1\}$) или другие ограничения на образовательный процесс.

Будем предполагать, что индивид наблюдает экзогенно заданную траекторию заработной платы единицы человеческого капитала $[w(t)]_{t=0}^{T}$. Тогда его трудовой доход в момент времени t равен:

$$W(t) = w(t)[1 - s(t)][h(t) + \omega(t)],$$

где множитель $1 - s(t)$ описывает долю времени, которую он проводит на работе, а переменная $\omega(t)$ обозначает количество неквалифицированного труда (не требующего обладания человеческим капиталом), которое индивид может поставлять на рынок труда в момент времени t. Положим, что траектория количества неквалифицированного труда, который индивид может поставить на рынок труда $[\omega(t)]_{t=0}^{T}$, задана экзогенно. В такой постановке задачи предполагается, что единственное решение об использовании времени, которое принимает индивид, состоит в выборе между занятостью на рынке труда и образованием (то есть индивид не получает полезности от свободного времени).

Наконец, предположим, что индивид наблюдает постоянную (потоковую) доходность своих сбережений (которые, как и в предыдущей главе, возможно включают в себя аннуитетные платежи), равную r. Используя уравнение для трудового дохода, мы получаем следующий вид межвременного бюджетного ограничения индивида:

$$\int_0^T \exp(-rt)c(t)dt \le \int_0^T \exp(-rt)w(t)[1-s(t)][h(t)+\omega(t)]dt. \tag{10.4}$$

Теорема 10.1. Теорема об отделении. *Предположим, что моментальная функция полезности индивида $u(\cdot)$ является строго возрастающей. В этом случае набор функций $\left[\hat{c}(t),\ \hat{s}(t),\ \hat{h}(t)\right]_{t=0}^{T}$ является решением задачи максимизации целевой функции* (10.1) *при ограничениях* (10.2), (10.3) *и* (10.4) *тогда и только тогда, когда пара функций $\left[\hat{s}(t),\ \hat{h}(t)\right]_{t=0}^{T}$ является решением задачи максимизации целевой функции*

$$\int_0^T \exp(-rt)w(t)[1-s(t)][h(t)+\omega(t)]dt \tag{10.5}$$

при ограничениях (10.2) *и* (10.3), *а функция $[\hat{c}(t)]_{t=0}^{T}$ является решением задачи максимизации целевой функции* (10.1) *при ограничении* (10.4) *и заданных траекториях $\left[\hat{s}(t),\ \hat{h}(t)\right]_{t=0}^{T}$. Другими словами, решения о накоплении человеческого капитала и выборе предложения труда могут быть отделены от решений о выборе потребления.*

Доказательство. Для доказательства части теоремы «только тогда» предположим, что набор $\left[\hat{s}(t),\ \hat{h}(t)\right]_{t=0}^{T}$ не является решением задачи максимизации интеграла (10.5), однако при этом существует функция $[\hat{c}(t)]_{t=0}^{T}$, такая, что набор $\left[\hat{c}(t),\ \hat{s}(t),\ \hat{h}(t)\right]_{t=0}^{T}$ является решением исходной задачи максимизации (10.1). Обозначим значение интеграла (10.5) на $\left[\hat{s}(t),\ \hat{h}(t)\right]_{t=0}^{T}$ как $\hat{Y}$. Из того, что интеграл (10.5) не достигает максимума на $\left[\hat{s}(t),\ \hat{h}(t)\right]_{t=0}^{T}$ следует, что существует набор $\left[\tilde{s}(t),\ \tilde{h}(t)\right]_{t=0}^{T}$, на котором он достигает значения $\tilde{Y} > \hat{Y}$. Тогда в предположении о том, что набор $\left[\hat{c}(t),\ \hat{s}(t),\ \hat{h}(t)\right]_{t=0}^{T}$ является решением задачи (10.1) из бюджетного ограничения (10.4) следует, что

$$\int_0^T \exp(-rt)\hat{c}(t)dt \le \hat{Y}.$$

Зафиксируем вещественное $\varepsilon > 0$ и построим набор $\left[c(t),\ s(t),\ h(t)\right]_{t=0}^{T}$, такой, что $c(t) = \hat{c}(t) + \varepsilon$, $s(t) = \tilde{s}(t)$ и $h(t) = \tilde{h}(t)$ при всех t. Тогда выполняется следующее неравенство:

$$\int_0^T \exp(-rt)c(t)dt = \int_0^T \exp(-rt)\hat{c}(t)dt + \frac{1-\exp(-rT)}{r}\varepsilon \le \hat{Y} + \frac{1-\exp(-rT)}{r}\varepsilon.$$

Из того, что $\tilde{Y} > \hat{Y}$ следует, что при достаточно малом ε $\int_0^T \exp(-rt)c(t)dt \le \tilde{Y}$, и поэтому набор $\left[c(t),\ s(t),\ h(t)\right]_{t=0}^{T}$ является допустимым. Так как функция $u(\cdot)$ строго возрастающая, набор $\left[c(t),\ s(t),\ h(t)\right]_{t=0}^{T}$ будет строго предпочтителен набору $\left[\hat{c}(t),\ \hat{s}(t),\ \hat{h}(t)\right]_{t=0}^{T}$, что ведет к противоречию и, таким образом, завершает доказательство части «только тогда».

Доказательство части «тогда» аналогично. Предположим, что интеграл (10.5) достигает максимума на наборе $\left[\hat{s}(t),\ \hat{h}(t)\right]_{t=0}^{T}$. Обозначим его максимальное значение как $\hat{Y}$. Рассмотрим задачу максимизации интеграла (10.1) при ограничении $\int_0^T \exp(-rt)c(t)dt \le \hat{Y}$.

Обозначим ее решение как $\hat{c}(t)$. Тогда если траектория $\left[\tilde{c}'(t)\right]_{t=0}^{T}$ строго предпочитается траектории $\left[\hat{c}(t)\right]_{t=0}^{T}$, то $\int_0^T \exp(-rt)\tilde{c}'(t)dt > \hat{Y}$. Тогда набор $\left[\hat{c}(t),\ \hat{s}(t),\ \hat{h}(t)\right]_{t=0}^{T}$ должен быть решением исходной задачи, так как значение интеграла (10.5) на любом другом наборе $\left[s(t),\ h(t)\right]_{t=0}^{T}$ равно $Y \le \hat{Y}$, и тогда если траектория $\left[\tilde{c}'(t)\right]_{t=0}^{T}$ строго предпочитается траектории $\left[\hat{c}(t)\right]_{t=0}^{T}$, то $\int\limits_{0}^{T}\exp(-rt)c'(t)dt > \hat{Y} \geq Y$ для любого Y, соответствующего любому допустимому набору $\left[s(t),\ h(t)\right]_{t=0}^{T}$. ■

За этой теоремой стоит очень простая интуиция: при совершенном рынке капитала наилучшим решением о накоплении человеческого капитала является то, при котором бюджетное множество индивида достигает максимального размера. В упражнении 10.2 показано, что эта теорема не верна при наличии несовершенств на рынке капитала и то, что она не допускает обобщения на случай, когда свободное время является аргументом функции полезности индивида.

10.2. Инвестиции в образование и экономическая отдача от них

Вернемся к простейшей модели решений об уровне образования в частном равновесии, которая иллюстрирует основной выбор индивида при совершении инвестиций в человеческий капитал. Модель, представленная далее, является вариантом модели из важной работы [Mincer 1974]. Эта модель также позволяет простым образом связать теорию инвестиций в человеческий капитал с большим количеством эмпирической литературы об экономической отдаче от образования.

Для упрощения последующих вычислений положим, что $T = \infty$. Параметр пуассоновского процесса, определяющего смерть индивида ν, является положительным числом, поэтому средняя продолжительность его жизни конечна. Предположим, что ограничение (10.2) имеет такой вид, что индивид должен провести интервал времени длиной S при $s(t) = 1$, то есть обучаясь на дневном отделении, и при $s(t) = 0$ в последующее время. По окончании обучения индивид обладает запасом знаний в количестве

$$h(s) = \eta(s),$$

где $\eta(s)$ — непрерывная, возрастающая, дифференцируемая и вогнутая функция. При $t \in [S, \infty)$ динамика накопления человеческого капитала в это время (когда индивид занят полный день на работе) определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{h}(t) = g_h h(t), \tag{10.6}$$

при некотором вещественном $g_h \geq 0$. Предположим, что заработная плата растет экспоненциально, то есть

$$\dot{w}(t) = g_w w(t) \tag{10.7}$$

при начальном значении $w(0) > 0$. Предположим, что

$$g_w + g_h < r + v,$$

так что чистая приведенная стоимость индивида является конечной величиной. Тогда из теоремы 10.1 следует, что оптимальное решение об уровне образования должно быть решением следующей задачи максимизации:

$$\max_S \int_S^\infty \exp(-(r+v)t)w(t)h(t)dt. \tag{10.8}$$

Используя уравнения (10.6) и (10.7), приходим к следующей эквивалентной форме этой задачи максимизации:

$$\max_S \frac{\eta(S)w(0)\exp(-(r+v-g_w)S)}{r+v-g_h-g_w}. \tag{10.9}$$

Так как функция $\eta(S)$ вогнута, целевая функция (10.9) является строго вогнутой. Таким образом, единственное решение задачи максимизации описывается следующим условием первого порядка:

$$\frac{\eta'(S^*)}{\eta(S^*)} = r + v - g_w. \tag{10.10}$$

Из уравнения (10.10) следует, что увеличение процентной ставки r и значения параметра v (что соответствует более короткому горизонту планирования) ведет к снижению инвестиций в человеческий капитал, в то время как рост параметра g_w влечет увеличение стоимости человеческого капитала и, таким образом, стимулирует дальнейшие инвестиции в человеческий капитал.

Интегрируя обе части этого уравнения по S (или переходя к первообразным), получаем следующее равенство:

$$\log\eta(S^*) = \text{constant} + (r + v - g_w)S^*. \tag{10.11}$$

Далее. Заработная плата на рынке труда работника в возрасте $\tau \geq S^*$ в момент времени t определяется уравнением:

$$W(S^*, t) = \exp(g_w t)\exp(g_h(t - S^*))\eta(S^*).$$

Логарифмируя его обе части и используя уравнение (10.11), приходим к следующему уравнению:

$$\log W(S^*, t) = \text{constant} + (r + v - g_w)S^* + g_w t + g_h(t - S^*),$$

где разность $t - S^*$ представляет собой опыт работника (время, прошедшее после окончания обучения). При проведении сравнений между работниками в один момент времени временной тренд $g_w t$ становится частью константы и уравнение принимает вид канонического уравнения Минсера, в котором утверждается, что в кросс-секции работников логарифм заработной платы пропорционален количеству лет образования и опыту работы. Другими словами, мы получили следующее кросс-секционное уравнение:

$$\log W_j = \text{constant} + \gamma_S S_j + \gamma_e \text{experience}, \tag{10.12}$$

где индекс j соответствует индивиду j. Однако на данный момент в модели отсутствуют различия между агентами, которые могут привести к различиям в уровне образования между индивидами. Несмотря на это, уравнение (10.12) достаточно важно, так как оно является базовым уравнением во многих эмпирических моделях зависимости между заработными платами и уровнем образования, оценке которых посвящено большое количество работ по экономике труда.

Необходимо отметить экономическое содержание этого уравнения. Оно состоит в том, что функциональная форма уравнения Минсера для заработной платы не является простым совпадением, а несет в себе экономическое содержание: альтернативными издержками дополнительного года образования является упущенный трудовой доход. Поэтому выгода от образования должна покрывать эти издержки и, таким образом, вести к пропорциональному увеличению заработной платы в будущем. В частности, пропорциональное увеличение должно проходить с темпом $(r + \nu - g_w)$.

Как мы уже увидели в главе 3, в эмпирических работах, посвященных оцениванию уравнения (10.12), значение коэффициента отдачи от образования γ_S находится в интервале 0,06–0,10. Из уравнения (10.12) следует, что такая величина отдачи от образования не является необоснованной. Например, мы можем предположить, что процентная ставка r примерно равна 10% годовых, значение параметра ν равно 0,02 (что соответствует средней продолжительности жизни 50 лет), а значение параметра g_w, определяющего темп роста заработной платы при постоянном запасе человеческого капитала индивида, примерно равно 0,02. Тогда значение коэффициента γ_S из уравнения (10.12) становится равным 0,10, что согласуется с верхней границей оценок в эмпирической литературе.

10.3. Модель Бен-Пората

Базовая модель Бен-Пората является расширением модели из предыдущего параграфа. В ней индивид имеет возможность осуществлять инвестиции в человеческий капитал и принимать нетривиальные решения о предложении труда в течение всей своей жизни. В частности, для любого $t \geq 0$ положим, что $s(t) \in [0, 1]$. Модель Бен-Пората вместе с уравнением Минсера (10.12) (и моделью, из которой это уравнение следует, рассмотренной в предыдущем параграфе) являются основой значительной части современной экономики труда. В наших целях достаточно будет рассмотреть простую версию этой модели, в которой уравнение (10.2), описывающее процесс накопления человеческого капитала, имеет следующий вид:

$$\dot{h}(t) = \phi(s)h(t) - \delta_h h(t), \tag{10.13}$$

где параметр $\delta_h > 0$ описывает амортизацию человеческого капитала, которая может возникать, например, из-за того, что появление новых машин и технологий снижают значимость уже имеющегося у индивида запаса человеческого капитала. Предположим, что в начальный момент времени индивиды наделены запасом человеческого капитала $h(0) > 0$. Также предположим, что функция $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ является строго возрастающей, дважды дифференцируемой и строго вогнутой. Для упрощения дальнейших выкладок положим, что она удовлетворяет условиям Инада вида:

$$\lim_{x \to 0} \phi'(x) = \infty \text{ и } \lim_{x \to h(0)} \phi'(x) = 0.$$

Эти условия позволяют избежать необходимости налагать дополнительные ограничения для того, чтобы гарантировать, что $s(t) \in (0, 1)$ (см. упражнение 10.6).

Также предположим, что индивид не наделен запасом неквалифицированного труда, не требующего обладания человеческим капиталом, то есть $\omega(t) = 0$ при всех $t \geq 0$, $T = \infty$ и что смерть следует пуассоновскому процессу с параметром $v > 0$. Наконец, предположим, что заработная плата единицы человеческого капитала постоянна и равна w, а процентная ставка постоянна и равна r. Без ограничения общности мы можем нормализовать заработную плату единицей, то есть $w = 1$.

Еще раз используя теорему 10.1, получаем, что уровень инвестиций в человеческий капитал является решением следующей задачи максимизации:

$$\max \int_0^\infty \exp(-(r + v)t)(1 - s(t))h(t)dt$$

при ограничении (10.13).

Для решения задачи построим текущий гамильтониан, который в данном случае имеет следующий вид:

$$\mathcal{H}(h, s, \mu) = (1 - s(t))h(t) + \mu(t)(\phi(s(t)h(t)) - \delta_h h(t)),$$

где мы обозначили гамильтониан символом $\mathcal{H}$, чтобы избежать путаницы в обозначениях гамильтониана и человеческого капитала. Необходимые и достаточные условия оптимума выглядят следующим образом (см. упражнение 10.5):

$$\mathcal{H}_s(h, s, \mu) = -h(t) + \mu(t)h(t)\phi'(s(t)h(t)) = 0,$$

$$\mathcal{H}_h(h, s, \mu) = (1 - s(t)) + \mu(t)(s(t)\phi'(s(t)h(t)) - \delta_h) = \\ = (r + v)\mu(t) - \dot{\mu}(t) \qquad (10.14)$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \exp(-(r+v)t)\mu(t)h(t) = 0.$$

Чтобы найти оптимальную траекторию человеческого капитала, сделаем следующее преобразование переменных:

$$x(t) \equiv s(t)h(t).$$

Другими словами, вместо поиска решения в терминах переменных $s(t)$ (или $\mu(t)$) и $h(t)$ мы будем исследовать динамику оптимальных траекторий переменных $x(t)$ и $h(t)$. Тогда из первого из условий (10.14) следует равенство:

$$1 = \mu(t)\phi'(x(t)), \qquad (10.15)$$

а второе условие может быть преобразовано следующим образом:

$$\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} = r + v + \delta_h - s(t)\phi'(x(t)) - \frac{1 - s(t)}{\mu(t)}.$$

Подставляя $\mu(t)$ из уравнения (10.15) и упрощая, получаем:

$$\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} = r + v + \delta_h - \phi'(x(t)). \qquad (10.16)$$

Стационарное решение этой задачи оптимального управления описывается условиями $\dot{\mu}(t) = 0$ и $\dot{h}(t) = 0$, поэтому стационарное значение x^* определяется равенством:

$$x^* = \phi'^{-1}(r + v + \delta_h), \qquad (10.17)$$

где функция $\phi'^{-1}(\cdot)$ является функцией, обратной к функции $\phi'(\cdot)$ (которая существует и является строго убывающей в силу того, что функция $\phi(\cdot)$ строго вогнутая). Из уравнения (10.17) следует, что значение $x^* = s^*h^*$ увеличивается при снижении процентной ставки r, росте ожидаемой продолжительности жизни индивида $1/v$ и снижении нормы амортизации человеческого капитала δ_h.

Чтобы определить значения s^* и h^*, положим $\dot{h}(t) = 0$ в уравнении динамики накопления человеческого капитала (10.13). Из него следует, что

$$h^* = \frac{\phi(x^*)}{\delta_h} = \frac{\phi(\phi'^{-1}(r + v + \delta_h))}{\delta_h}. \qquad (10.18)$$

Из того, что функция $\phi'^{-1}(\cdot)$ является строго убывающей, а функция $\phi(\cdot)$ является строго возрастающей, следует, что стационарное значение запаса человеческого капитала в уравнении (10.18) является единственным и убывает по r, v и δ_h.

Однако для нас больший интерес, чем стационарное решение задачи оптимизации, представляет оптимальная траектория инвестиций в человеческий капитал. Дифференцируя уравнение (10.15) по времени, получаем следующее равенство:

$$\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} = \varepsilon_{\phi'(x)} \frac{\dot{x}(t)}{x(t)},$$

где эластичность функции $\phi'(x)$

$$\varepsilon_{\phi'(x)} = -\frac{x\phi''(x)}{\phi'(x)} > 0$$

является положительной величиной, так как функция $\phi'(x)$ является строго убывающей (и поэтому $\phi''(x) < 0$). Объединяя это уравнение с уравнением (10.16), получаем следующее равенство:

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{1}{\varepsilon_{\phi'(x)}}(r + v + \delta_h - \phi'(x(t))). \qquad (10.19)$$

На рис. 10.1 показаны графики уравнений (10.13) и (10.19) в пространстве $h - x$. Кривая, направленная вверх, соответствует графику уравнения $\dot{h}(t) = 0$, в то время как правая часть уравнения (10.19) может быть равна нулю только в точке x^*, поэтому графиком уравнения $\dot{x}(t) = 0$ на рисунке является горизонтальная линия. Стрелки на фазовой диаграмме показывают направления движения переменных. Из них нетрудно убедиться, что стационарное равновесие в модели (x^*, h^*) обладает свойством глобальной седловой устойчивости и седловая траектория совпадает с горизонтальной линией $x = x^*$, являющейся графиком уравнения $\dot{x}(t) = 0$. При любом начальном значении $h(0) \in (0, h^*)$ $s(0)$ моментально достигает значения, необходимого для выполнения равенства $s(0)h(0) = x^*$. В дальнейшем $h(t)$ возрастает, а $s(t)$ убывает так, что равенство $s(t)h(t) = x^*$ продолжает выполняться. Следовательно, траектория инвестиций в человеческий капитал в модели Бен-Пората выглядит таким образом, что индивид осуществляет значительные инвестиции в начале своей жизни и сокращает их по мере ее течения.

В упрощенной версии модели Бен-Пората это процесс происходит гладко. В исходной версии модели Бен-Пората, в которой индивиды имеют конечный горизонт планирования, а при накоплении человеческого капитала используются и другие факторы производства, неравенство

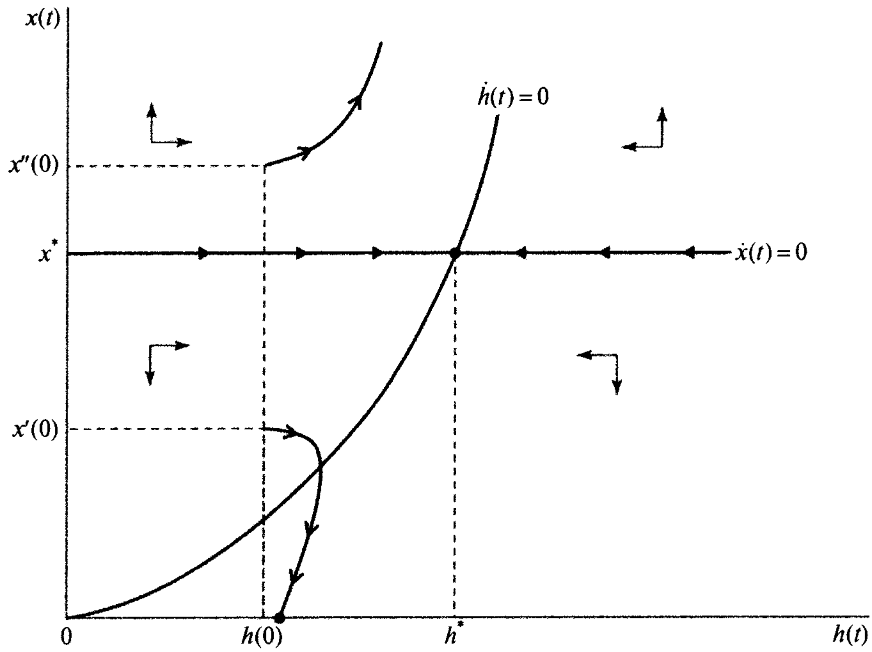


Рис. 10.1. Равновесная динамика в упрощенной модели Бен-Пората

$s(t) \leq 1$ зачастую выполняется как равенство в начальной стадии жизни индивида и мы можем интерпретировать интервал времени, на котором $s(t) = 1$ как период обучения на дневном отделении. По окончании обучения индивид выходит на работу ($s(t) < 1$). Однако даже будучи занятым, индивид продолжает накапливать человеческий капитал ($s(t) > 0$), что может быть проинтерпретировано как участие в программах повышения квалификации или использование части рабочего времени для обучения вместо производственной деятельности. Более того, на конечном горизонте планирования условия Инада не используются, поэтому индивид в некоторый момент жизни прекращает совершать инвестиции в человеческий капитал. В результате траектория запаса человеческого капитала индивида в стандартной модели Бен-Пората может иметь вид горба с возможно убывающей веткой в конце его жизни (см. упражнение 10.7). С другой стороны, как показано на рис. 10.2, в упрощенной модели траектория запаса человеческого капитала индивида (и его заработка) всегда возрастает.

Из модели Бен-Пората следуют два важных вывода. Во-первых, в ней утверждается, что образование не является единственным способом накопления человеческого капитала и существует непрерывная зависимость между образованием и другими способами инвестиций в человеческий капитал. Во-вторых, мы можем ожидать, что в обществах с высокими инвестициями в образование мы можем ожидать значительное количество

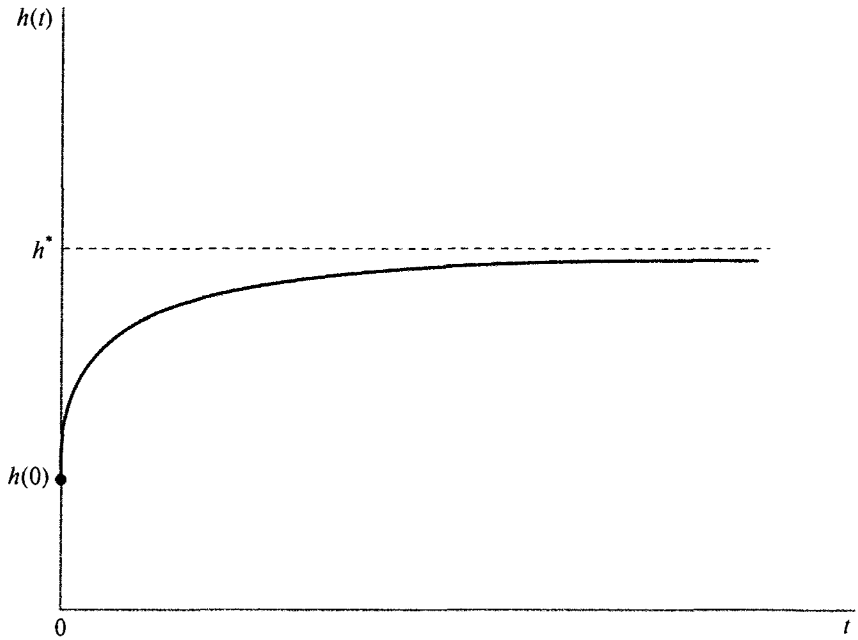


Рис. 10.2. Траектория инвестиций в человеческий капитал в упрощенной модели Бен-Пората

инвестиций в человеческий капитал на рабочем месте посредством различных курсов и тренингов. Поэтому в данных по запасу человеческого капитала в различных странах могут присутствовать систематические ошибки измерения.

10.4. Неоклассическая модель экономического роста с физическим и человеческим капиталом

Наша следующая задача состоит в том, чтобы включить инвестиции в человеческий капитал в базовую неоклассическую модель экономического роста. Это упражнение представляет интерес как с точки зрения исследования связи между физическим и человеческим капиталом, так и для лучшего понимания влияния различий в норме инвестиций в человеческий капитал на темп экономического роста. Связь между физическим и человеческим капиталом может иметь важную роль, так как ряд эмпирических наблюдений свидетельствует о том, что физический и человеческий капитал (капитал и навыки работников) являются дополняющими товарами, что означает, что увеличение запаса физического капитала ведет к росту производительности работников с большим запасом человеческого капитала в большей степени, чем работников с низким его запасом. Такая связь может иметь большое значение в процессе экономического роста, например через самоподдерживающийся круг инвестиций в физический и человеческий капитал. Мы подробно остановимся на такой динамике в главе 21. В данный момент нам важно увидеть, насколько такая дополняемость между физическим и человеческим капиталом присутствует в неоклассической модели экономического роста. Дополняемость между физическим и человеческим капиталом также может приводить к появлению дисбалансов в экономике. Если физический и человеческий капитал являются дополняющими товарами, то общество достигнет максимального уровня производительности при наличии баланса между двумя различными типами капитала. Однако будет ли такой баланс присутствовать в децентрализованном равновесии, является вопросом, ответ на который заранее неизвестен и требует дополнительного анализа.

Рассмотрим следующую модель экономики в непрерывном времени, допускающую существование репрезентативного домохозяйства с предпочтениями, описываемыми следующей целевой функцией:

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t)u(c(t))dt, \tag{10.20}$$

где моментальная функция полезности $u(\cdot)$ удовлетворяет предположению 3 (из главы 8) и норма дисконтирования $\rho > 0$. Для упрощения выкладок предположим, что технологический прогресс в экономике отсутствует и темп роста населения равен нулю. Также предположим, что предложение труда домохозяйствами абсолютно неэластично.

Будем следовать изложению в главе 3 и предположим, что совокупное множество производственных возможностей в экономике задается агрегированной производственной функцией следующего вида:

$$Y(t) = F(K(t), H(t), L(t)),$$

где переменная $K(t)$ обозначает запас физического капитала, переменная $L(t)$ — совокупную занятость в экономике, а переменная $H(t)$ — запас человеческого капитала. Из того, что население не растет и предложение труда неэластично, следует, что $L(t) = L$ в любой момент времени t. Предположим, что производственная функция удовлетворяет предположениям 1′ и 2′ из главы 3 (напомним, что они являются обобщением предположений 1 и 2 на случай производственной функции с тремя аргументами). Как мы уже отметили в главе 3, вид производственной функции, в котором неквалифицированный труд и человеческий капитал являются отдельными факторами производства, может быть менее естественным, чем вид, в котором запас человеческого капитала определяет количество эффективного запаса трудовых резервов работника (как мы предполагали в двух предыдущих главах). Несмотря на это, такой вид производственной функции позволяет упростить анализ неоклассической модели экономического роста с физическим и человеческим капиталом. Как и ранее, переходя для удобства к подушевым переменным, выпишем производственную функцию следующим образом:

$$y(t) \equiv \frac{Y(t)}{L} = f(k(t),\ h(t)),$$

где переменные

$$k(t) \equiv \frac{K(t)}{L} \quad \text{и} \quad h(t) \equiv \frac{H(t)}{L}$$

соответственно представляют собой запас физического и человеческого капитала на душу населения. Из предположений 1′ и 2′ следует, что функция $f(k(t), h(t))$ является строго возрастающей, дифференцируемой и строго вогнутой по обоим своим аргументам. Обозначим ее производные как f_k, f_h, f_{kh} и так далее. Далее везде будем предполагать, что физический и человеческий капитал являются дополняющими товарами, то есть $f_{kh}(k, h) > 0$ для всех $k > 0$ и $h > 0$.

Динамика физического и человеческого капитала описывается двумя следующими обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{k}(t) = i_k(t) - \delta_k k(t) \tag{10.21}$$

и

$$\dot{h}(t) = i_h(t) - \delta_h k(t), \tag{10.22}$$

где переменные $i_k(t)$ и $i_h(t)$ обозначают инвестиции в физический и человеческой капитал соответственно, а параметры δ_k и δ_h — норму амортизации двух видов капитала. Ресурсное ограничение в экономике, выраженное в единицах на душу населения, имеет следующий вид:

$$c(t) + i_k(t) + i_h(t) \leq f(k(t), h(t)) \text{ для всех } t. \tag{10.23}$$

Из того, что структура модели, описанная выше, во многом совпадает со структурой неоклассической модели экономического роста, следует, что конкурентное равновесие в экономике будет совпадать с ее оптимальной траекторией. Поэтому мы остановимся на решении задачи оптимального роста (конкурентное равновесие описано в упражнении 10.12). Задача оптимального роста включает в себя максимизацию целевой функции (10.20) при ограничениях (10.21), (10.22) и (10.23). Как и ранее, решение этой задачи максимизации может быть найдено с помощью построения текущего гамильтониана (с использованием теорем 7.13 и 7.14). Для упрощения анализа заметим, что из того, что функция $u(c)$ является строго возрастающей, следует, что неравенство (10.23) всегда будет выполняться как равенство. Тогда, подставляя значение потребления $c(t)$ из этого ограничения, получаем следующий вид текущего гамильтониана:

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}(k(t), h(t), i_k(t), i_h(t), \mu_k(t), \mu_h(t)) =\\&= u(f(k(t), h(t)) - i_h(t) - i_k(t)) + \mu_h(t) \times\\&\times (i_h(t) - \delta h_h(t)) + \mu_k(t)(i_k(t) - \delta k_k(t)),\end{aligned} \tag{10.24}$$

в котором присутствуют две переменные управления, $i_k(t)$ и $i_h(t)$ и две переменные состояния, $k(t)$ и $h(t)$, а также две сопряженные переменные, $\mu_k(t)$ и $\mu_h(t)$, соответствующие двум ограничениям (10.21) и (10.22). Из теоремы 7.13 следует, что возможное решение задачи максимизации удовлетворяет следующим условиям:

$$\mathcal{H}_{i_k}(k(t), h(t), i_k(t), i_h(t), \mu_k(t), \mu_h(t)) = -u'(c(t)) + \mu_k(t) = 0,$$

$$\mathcal{H}_{i_h}(k(t), h(t), i_k(t), i_h(t), \mu_k(t), \mu_h(t)) = -u(c(t)) + \mu_h(t) = 0,$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}_k(k(t), h(t), i_k(t), i_h(t), \mu_k(t), \mu_h(t)) =\\&= f_k(k(t), h(t))u'(c(t)) - \mu_k(t)\delta_k = \rho\mu_k(t) - \dot{\mu}_k(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}_h(k(t), h(t), i_k(t), i_h(t), \mu_k(t), \mu_h(t)) =\\&= f_h(k(t), h(t))u'(c(t)) - \mu_h(t)\delta_h = \rho\mu_h(t) - \dot{\mu}_h(t),\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty} \exp(-\rho t)\mu_k(t)k(t) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \exp(-\rho t)\mu_h(t)h(t) = 0.$$

Последние два условия представляют собой условия трансверсальности, соответствующие двум переменным состояния (и двум сопряженным переменным). Нетрудно убедиться, что при заданных значениях $\mu_k(t)$ и $\mu_h(t)$ гамильтониан $\mathcal{H}(k(t), h(t), i_k(t), i_h(t), \mu_k(t), \mu_h(t))$ является вогнутой функцией, поэтому мы можем применить теорему 7.14 и сделать вывод о том, что эти условия являются достаточными и, таким образом, описывают оптимальную траекторию экономики.

Из первых двух условий моментально следует, что

$$\mu_k(t) = \mu_h(t) = \mu(t).$$

Объединяя это уравнение с двумя следующими условиями, получаем равенство:

$$f_k(k(t), h(t)) - f_h(k(t), h(t)) = \delta_k - \delta_h, \tag{10.25}$$

из которого (вместе с условием $f_{kh} > 0$ следует существование взаимно-однозначного соответствия между запасом физического и человеческого капитала в следующем виде:

$$h = \xi(k),$$

где функция $\xi(\cdot)$ определена единственным образом и является строго возрастающей и дифференцируемой (будем обозначать ее производную как $\xi'(\cdot)$, см. упражнение 10.9).

Из этих рассуждений следует, что модель с человеческим капиталом может быть сведена к базовой неоклассической модели экономического роста и что динамика экономики в ней совпадает с динамикой в неоклассической модели экономического роста. Этот результат резюмируется в следующем утверждении.

Утверждение 10.1. *В неоклассической модели экономического роста с инвестициями в физический и человеческий капитал, описанной выше, оптимальные траектории физического капитала и потребления описываются так же, как и в односекторной неоклассической модели экономического роста и удовлетворяют следующим двум дифференциальным уравнениям:*

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\varepsilon_u(c(t))}\left[f_k(k(t),\ \xi(k(t))) - \delta_k - \rho\right]$$

и

$$\dot{k}(t) = \frac{1}{1+\xi'(k)}\left[f(k(t),\ \xi(k(t))) - \delta_h \xi(k(t)) - \delta_k k(t) - c(t)\right],$$

где

$$\varepsilon_u(c(t)) = -u''(c(t))c(t)/u'(c(t)),$$

вместе с условием трансверсальности

$$\lim_{t\to\infty}\left[k(t)\exp\left(-\int_0^t f_k(k(s),\ \xi(k(s)))ds\right)\right] = 0,$$

а запас человеческого капитала определяется равенством $h(t) = \xi(k(t))$.

Доказательство. См. упражнение 10.10. ■

На первый взгляд следствие из уравнения (10.25) о том, что запасы физического и человеческого капитала всегда находятся в балансе, может показаться удивительным. Читатель может предположить, что экономика, обладающая в начальный момент времени значительным запасом физического капитала по сравнению с запасом человеческого капитала, будет иметь высокое значение отношения физического капитала к человеческому в течение длительного периода времени. Однако из утверждения 10.1, и в частности из уравнения (10.25), следует, что это не так. Это вытекает из того, что в модели отсутствуют ограничения на неотрицательность значения инвестиций. Если в начальный момент времени экономика обладает значительным запасом физического капитала и малым запасом человеческого капитала, то в первый момент времени значение инвестиций в человеческий капитал $i_h(0)$ будет высокой положительной величиной, которая будет компенсирована высоким отрицательным значением инвестиций в физический капитал $i_k(0)$. Таким образом, в следующий момент времени значение отношения физического капитала к человеческому капиталу достигнет своего сбалансированного значения. После такой подстройки динамика экономики совпадает с динамикой неоклассической модели экономического роста. Этот результат является артефактом отсутствия в модели ограничения на неотрицательность значений инвестиций в физический и человеческий капитал. Ситуация в чем-то изменяется в случае, если мы наложим такие ограничения на неотрицательность или необратимость инвестиций, то есть предположим, что $i_k(t) \geq 0$ и $i_h(t) \geq 0$ при всех t. В этом случае первоначальный дисбаланс будет сохраняться в течение некоторого времени. В частности, нетрудно показать, что если начальное значение отношения физического капитала к человеческому капиталу $(k(0)/h(0))$ не удовлетворяет уравнению (10.25), то на оптимальной траектории до момента, пока баланс не будет восстановлен, будут осуществляться инвестиции только в один из двух типов капитала (см. упражнение 10.14). Следовательно, при необратимом характере инвестиций дисбаланс в запасе физического и человеческого капитала может присутствовать, однако экономика быстро приходит в состояние, где два типа капитала находятся в балансе.

Еще одним возможным приложением неоклассической модели экономического роста с физическим и человеческим капиталом является анализ влияния на экономику искажений, связанных с фискальной политикой властей. Вернемся к анализу из параграфа 8.10 из главы 8 и изменим ресурсное ограничение в модели следующим образом:

$$c(t) + (1 + \tau)(i_k(t) + i_h(t)) \leq f(k(t), h(t)),$$

где константа $\tau > 0$ представляет собой налоговую ставку на оба типа инвестиций. Мы можем вычислить отношение дохода на душу населения в двух странах с различной фискальной политикой (представленной двумя налоговыми ставками, τ и τ') с помощью анализа из параграфа 8.10. В частности, предположим, что агрегированная производственная функция является функцией Кобба—Дугласа следующего вида:

$$Y = F(K, H, L) = K^{\alpha} H^{\beta} L^{1-\alpha-\beta}.$$

В этом случае отношение доходов на душу населения в двух экономиках с налоговыми ставками (искажениями) τ и τ' задается следующим равенством (см. упражнение 10.11):

$$\frac{Y(\tau)}{Y(\tau')}=\left(\frac{1+\tau'}{1+\tau}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}. \tag{10.26}$$

Как и ранее, предположим, что значение параметра α примерно равно $^1/_3$. В данном случае способность такой измененной модели объяснить межстрановые различия в уровне дохода на душу населения на базе различий в налогообложении инвестиций увеличивается в результате изменений в динамике человеческого капитала в ответ на такие искажения в экономике. Например, если $\alpha = \beta = {}^1/_3$, а налоговые ставки различаются в 8 раз, то

$$\frac{Y(\tau)}{Y(\tau')}\approx 8^2 = 64,$$

что соответствует значительным различиям в экономическом развитии между странами.

Следовательно, включение человеческого капитала в неоклассическую модель экономического роста является одним из возможных способов получить большие межстрановые различия в уровне дохода на душу населения. Несмотря на это, необходимо интерпретировать этот результат с некоторой долей осторожности. Во-первых, значительное влияние налоговых ставок на уровень дохода в модели является следствием высокой эластичности инвестиций в человеческий капитал, однако у нас нет убедительных эмпирических свидетельств того, что такие инвестиции действительно сильно реагируют на изменения налоговых ставок. Например, если мы говорим об отличиях в ставке налога на прибыль корпораций или в уровне коррупции, то мы должны ожидать, что они будут влиять на решения об инвестициях в человеческий капитал со стороны корпораций, а не домохозяйств. Конечно, такие рассуждения не отменяют тот факт, что в государствах, где экономическая политика не стимулирует накопление капитала, также могут присутствовать препятствия обучению и другим видам инвестиций в человеческий капитал. Несмотря на это, воздействие на экономику препятствий инвестициям в физический или человеческий капитал может различаться. Во-вторых, что более важно, высокая эластичность выпуска по отношению к искажениям в налоговой политике в модели с эндогенным накоплением физического и человеческого капитала имеет очевидное сходство с подходом Мэнкью—Ромера—Вейла, которые объясняют межстрановые различия в доходах различиями в запасе физического и человеческого капитала. Как мы отметили в главе 3, несмотря на то что теоретически такая связь возможна, эмпирические свидетельства не поддерживают утверждения о том, что межстрановые различия в запасе человеческого капитала могут значительно влиять на различия в уровне доходов. Аналогичным образом этот вывод подвергает сомнению важность большого вклада различий в запасе человеческого капитала, обусловленных различиями в экономической политике, в этой модели. Несмотря на это, выводы из главы 3 не учитывают два момента, которые могут увеличить роль человеческого капитала: экстерналии от человеческого капитала и значительные межстрановые различия в качестве образования. Мы остановимся на этих вопросах в параграфах 10.6 и 10.7.

10.5. Дополняемость между капиталом и навыками в модели перекрывающихся поколений

Из анализа в предыдущем параграфе следует, что в неоклассической модели экономического роста с физическим и человеческим капиталом не возникает значительного дисбаланса между этими двумя типами капитала (если мы не накладываем условия на необратимость инвестиций, и в этом случае дисбаланс может присутствовать на переходной траектории экономики). Далее мы исследуем возможность появления дисбаланса между капиталом и навыками работников в простой модели ПП с неполным альтруизмом, схожей с моделью, представленной в параграфе 9.6 в предыдущей главе. Мы убедимся, что в этом классе моделей также не возникает значительного дисбаланса между капиталом и навыками работников. Несмотря на это, такие модели предоставляют простой аппарат для анализа несовершенств на рынке труда, а в этом случае дисбаланс между капиталом и навыками может намного сильнее влиять на развитие экономики. В модели в этом параграфе мы также будем использовать более естественный вид производственной функции, аргументами которой являются физический капитал и количество эффективного труда (где человеческий капитал определяет запас эффективного труда), а не общий вид производственной функции из предыдущего параграфа, где человеческий капитал является отдельным фактором производства.

Рассмотрим модель экономики, состоящей из континуума династий меры 1, в дискретном времени. Каждый индивид живет в течение двух периодов: детства и зрелого возраста. Индивид i, рожденный в периоде $t-1$, работает в зрелом возрасте в периоде t и получает трудовой доход в размере $w(t)h_i(t)$, где переменная $w(t)$ обозначает заработную плату единицы человеческого капитала, а переменная $h_i(t)$ — запас человеческого капитала индивида. Индивид также получает доход от владения капиталом, равный $R(t)b_i(t-1)$, где переменная $R(t)$ обозначает валовую доходность капитала, а переменная $b_i(t-1)$ — запас финансовых активов индивида, полученный им как наследство от своего родителя. Запас человеческого капитала определяется в начале второго периода жизни индивида его собственным решением о прилагаемых для его получения усилиях. Затем он выходит на рынок труда и принимает решение о предложении трудовых ресурсов. По окончании периода зрелости индивид получает свой трудовой доход и доход от владения капиталом и принимает решение об уровнях потребления и наследства, которое он оставляет своему ребенку.

Предпочтения индивида i, рожденного в периоде времени $t-1$, заданы следующей функцией полезности:

$$\eta^{-\eta}(1-\eta)^{-(1-\eta)}c_i(t)^{\eta}b_i(t)^{1-\eta} - \gamma(e_i(t)),$$

где константа $\eta \in (0, 1)$, переменная $c_i(t)$ обозначает его собственное потребление, переменная $b_i(t)$ — размер наследства, которое он оставляет своему ребенку, а переменная $e_i(t)$ — усилие, направленное на приобретение человеческого капитала. Предположим, что функция $\gamma(\cdot)$ является строго возрастающей, дифференцируемой и строго вогнутой функцией, описывающей издержки от усилия по приобретению человеческого капитала. Множитель $(1-\eta)^{-(1-\eta)}$ включен в функцию полезности для нормализации, которая упрощает последующие выкладки.

Запас человеческого капитала индивида задается следующим уравнением:

$$h_i(t) = ae_i(t), \tag{10.27}$$

где множитель a описывает умения индивида и увеличивает эффективность усилий индивида по приобретению человеческого капитала. Подставляя значение усилия $e_i(t)$ из уравнения (10.27) в функцию полезности индивида, получаем следующий вид его предпочтений:

$$\eta^{-\eta}(1-\eta)^{-(1-\eta)}c_i(t)^{\eta}b_i(t)^{1-\eta} - \gamma\left(\frac{h_i(t)}{a}\right). \tag{10.28}$$

Бюджетное ограничение индивида выглядит следующим образом:

$$c_i(t) + b_i(t) \le m_i(t) = w(t)h_i(t) + R(t)b_i(t-1), \tag{10.29}$$

где переменная $m_i(t)$ обозначает текущий доход индивида i в периоде времени t, состоящий из его трудового дохода $w(t)h_i(t)$ и дохода от владения капиталом $R(t)b_i(t-1)$ (мы используем символ m, а не y, так как символ y в дальнейшем будет иметь другое значение).

Производственная структура экономики описывается агрегированной производственной функцией вида:

$$Y(t) = F(K(t), H(t)),$$

удовлетворяющей предположениям 1 и 2 из главы 2, где переменная $H(t)$ обозначает запас единиц эффективного труда или, что эквивалентно, суммарный запас человеческого капитала в экономике:

$$H(t) = \int_0^1 h_i(t)di,$$

в то время как переменная $K(t)$ обозначает общий запас физического капитала и задается следующим образом:

$$K(t) = \int_0^1 b_i(t-1)di.$$

Заметим, что в такой постановке задачи капитал и навыки (K и H) действительно являются дополняющими товарами: из того, что производственная функция зависит от двух аргументов и обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, следует комплиментарность факторов производства (см. упражнение 10.15), то есть

$$\frac{\partial^2 F(K,H)}{\partial K \partial H} \geq 0. \tag{10.30}$$

Для упрощения дальнейшего анализа предположим, как и ранее, что капитал полностью выбывает после использования, то есть положим $\delta = 1$ (см. упражнение 10.16).

В силу того что запас человеческого капитала на одного работника является в этой модели эндогенной переменной, нам будет удобнее ввести нормализованную производственную функцию для выпуска на единицу человеческого капитала, а не использовать стандартную производственную функцию для выпуска на душу населения. В частности, мы определим отношение физического капитала к человеческому (или, что эквивалентно, отношение физического капитала к запасу эффективного труда) как $\kappa \equiv K/H$. Тогда нормализованная производственная функция принимает следующий вид:

$$y(t) \equiv \frac{Y(t)}{H(t)} = F\left(\frac{K(t)}{H(t)}, 1\right) = f(\kappa(t)),$$

где в первом равенстве используется однородность первой степени функции $F(\cdot,\cdot)$, а второе равенство следует из определения κ. Мы используем греческую букву κ вместо стандартного обозначения k для того, чтобы сохранить символ k за отношением капитала к труду, которое нам понадобится в следующем параграфе. Из определения к вытекает следующее равенство:

$$\kappa(t) \equiv \frac{K(t)}{H(t)} = \frac{\int_0^1 b_i(t-1)di}{\int_0^1 h_i(t)di}. \tag{10.31}$$

Цены факторов производства задаются стандартными условиями для рынков с совершенной конкуренцией:

$$R(t) = f'(\kappa(t)) \text{ и } w(t) = f(\kappa(t)) - \kappa(t)f'(\kappa(t)), \tag{10.32}$$

с единственным отличием в том, что в данном случае переменная $w(t)$ обозначает заработную плату единицы человеческого капитала.

Равновесие в данной экономике состоит из траекторий запаса человеческого капитала, потребления и размера наследства для каждого индивида $\left\{[h_i(t)]_{i\in[0,1]}, [c_i(t)]_{i\in[0,1]}, [b_i(t)]_{i\in[0,1]}\right\}_{t=0}^{\infty}$, которые являются решением задачи максимизации целевой функции (10.28) при ограничении (10.29), последовательности отношения капитала к эффективному труду $\{\kappa(t)\}_{t=0}^{\infty}$ при некотором начальном распределении наследства $[b_i(0)]_{i\in[0,1]}$ и последовательности цен факторов производства $\{w(t),\ R(t)\}_{t=0}^{\infty}$, которая удовлетворяет условиям (10.32).

Описание равновесия в модели упрощается тем, что решение задачи максимизации целевой функции (10.28) при ограничении (10.29) удовлетворяет следующим условиям:

$$c_i(t) = \eta m_i(t) \text{ и } b_i(t) = (1-\eta)m_i(t). \tag{10.33}$$

Подставляя эти равенства в функцию полезности индивида (10.28), получаем следующий вид косвенной функции полезности (см. упражнение 10.17):

$$m_i(t) - \gamma\left(\frac{h_i(t)}{a}\right), \tag{10.34}$$

которую индивид максимизирует, выбирая значение $h_i(t)$, принимая во внимание равенство $m_i(t) = w(t)h_i(t) + R(t)b_i(t-1)$. Из условия первого порядка для этой задачи максимизации находим, что значение инвестиций в человеческий капитал индивида i в периоде времени t определяется следующим равенством:

$$aw(t) = \gamma'\left(\frac{h_i(t)}{a}\right). \tag{10.35}$$

Используя условия (10.32), это же равенство можно выписать в терминах функции $\gamma'^{-1}(\cdot)$, обратной к функции $\gamma'(\cdot)$(которая является строго возрастающей) следующим образом:

$$h_i(t) = h(t) \equiv a\gamma'^{-1}[a(f(\kappa(t)) - \kappa(t)f'(\kappa(t)))]. \qquad (10.36)$$

Важным следствием из этого уравнения является то, что запас человеческого капитала одинаков для каждого индивида и зависит лишь от отношения капитала к эффективному труду в экономике. Этот результат является следствием специального вида функции полезности (10.28), для которого отсутствует эффект дохода в решении об инвестициях в человеческий капитал, и поэтому все агенты выбирают значение запаса человеческого капитала, которое максимизирует их доход (см. теорему 10.1).

Далее заметим, что, так как решения о размере наследства линейны (как показано в равенстве (10.33)), имеем следующее уравнение:

$$K(t+1) = \int_0^1 b_i(t)di = (1-\eta)\int_0^1 m_i(t)di = (1-\eta)f(\kappa(t))h(t),$$

где в последнем равенстве используется тот факт, что $H(t) = h(t)$, так как все индивиды выбирают одинаковый запас человеческого капитала, и поэтому $Y(t) = f(\kappa(t))h(t)$.

Далее, объединяя это уравнение с определением (10.31), приходим к следующему равенству:

$$\kappa(t+1) = \frac{(1-\eta)f(\kappa(t))h(t)}{h(t+1)}.$$

Используя уравнение (10.36), преобразуем его к следующему виду:

$$\begin{aligned}\kappa(t+1)\gamma'^{-1}[a(f(\kappa(t+1)) - \kappa(t+1)f'(\kappa(t+1)))] &= \\ = (1-\eta)f(\kappa(t))\gamma'^{-1}[a(f(\kappa(t)) - \kappa(t)f'(\kappa(t)))]. &\qquad (10.37)\end{aligned}$$

В стационарном равновесии, как обычно, отношение капитала к эффективному труду постоянно: $\kappa(t) = \kappa^*$ при всех t. Подставляя это равенство в уравнение (10.37), получаем уравнение:

$$\kappa^* = (1-\eta)f(\kappa^*), \qquad (10.38)$$

которое задает единственное положительное значение отношения капитала к эффективному труду в стационарном равновесии (так как функция $f(\cdot)$ является строго вогнутой).

Утверждение 10.2. *В модели ПП с физическим и человеческим капиталом, описанной выше, существует единственное стационарное равновесие с положительным выпуском, в котором значение отношения капитала к эффективному труду* κ^* *задается условием* (10.38).

В большинстве случаев стационарное равновесие является устойчивым, однако для этого необходимо наложить ряд дополнительных ограничений на вид функций $f(\cdot)$ и $\gamma(\cdot)$ (см. упражнение 10.18).

Один интересный вывод из этой модели состоит в том, что из дополняемости капитала и навыков в производственной функции $F(\cdot, \cdot)$ следует, что в стационарном равновесии должно быть достигнуто определенное целевое значение отношения физического капитала к человеческому капиталу κ^*. Другими словами, в равновесии в экономике не будет избытка физического капитала по отношению к человеческому капиталу, равно как в ней не будет слишком много человеческого капитала по отношению к физическому капиталу. Следовательно, модель ограничивает дисбаланс между физическим и человеческим капиталом в равновесии. Один из возможных и, пожалуй, привлекательных способов ввести такой дисбаланс состоит в отходе от предположения о совершенной конкуренции на рынке труда. Такие модели также позволяют пролить свет на то, как значительно изменяется роль человеческого капитала в экономике с несовершенным рынком труда.

10.6. Физический и человеческий капитал в случае несовершенного рынка труда

В этом параграфе мы представим модель с несовершенным рынком труда, в которой цены факторов производства задаются условиями, отличающимися от использованных нами ранее (в частности, цены отклоняются от своих значений на рынках с совершенной конкуренцией). Литература по несовершенствам на рынке труда довольно обширна, и ее полный обзор не входит в наши задачи. Поэтому мы остановимся на наиболее простой модели. В частности, представим себе экономику, идентичную описанной в предыдущем параграфе, но предположим, что в ней в любой момент существует континуум фирм, расположенных в множестве меры 1 и континуум индивидов, также расположенных в множестве меры 1, и каждая фирма может нанять только одного работника. Для упрощения мы будем опускать временной индекс во всех переменных. Тогда производственная функция каждой фирмы имеет следующий вид:

$$y_j = F(k_j, h_i),$$

где переменная y_j обозначает выпуск фирмы j, переменная k_j — запас капитала (или, что эквивалентно, запас капитала на одного работника, так как фирма нанимает только одного работника), а переменная h_i — запас человеческого капитала индивида i, нанятого фирмой. Как и ранее, предположим, что производственная функция удовлетворяет предположениям 1 и 2. Основное отличие этой модели от моделей, которые мы изучили ранее, заключается в устройстве рынка труда, которое описано далее.

1. Фирмы несут издержки при инсталляции капитала в размере Rk_j, где R — рыночная доходность капитала. Аналогичным образом, выбор запаса человеческого капитала индивидами является необратимым.
2. После того как работники заканчивают процесс накопления человеческого капитала, они случайным образом объединяются с фирмами. Случайность выбора фирмы означает, что вероятность выбора любой фирмы постоянна для всех работников, и, в частности, вероятность выбора фирмы с большим запасом физического капитала для работника с большим запасом человеческого капитала равна вероятности выбора этой фирмы работником с малым его запасом.
3. После объединения фирмы и работника они договариваются о разделе выпуска между собой. Предположим, что они делят выпуск в соответствии с заранее обговоренным правилом и работник получает доход в размере:

$$W_j(k_j, h_i) = \lambda F(k_j, h_i),$$

при некотором $\lambda \in (0, 1)$.

Несмотря на то что такая структура рынка труда очень проста и не является микрообоснованной, она будет достаточна для описания главных экономических выводов. Более подробная теоретико-игровая модель, приводящая к схожей структуре рынка труда, представлена в работе [Acemoglu 1996].

Чтобы ввести в модель разнородность в издержках приобретения человеческого капитала, изменим условие (10.27) следующим образом:

$$h_i = a_i e_i,$$

где значения множителя a_i различаются между династиями (индивидами). Его более высокое значение естественным образом соответствует индивидам, которые могут накапливать человеческий капитал более эффективно.

Равновесие в модели определяется таким же образом, как и в параграфе 10.5 с единственным отличием в том, что цены факторов производства больше не задаются условиями (10.32). Начнем с анализа выбора фирмами запаса физического капитала. В тот момент, когда фирма выбирает значение физического капитала, она не обладает полной информацией о запасе человеческого капитала работника, которого она наймет. Из предположения о случайной структуре объединения фирм и работников следует, что ожидаемый доход фирмы j определяется следующим выражением:

$$(1-\lambda)\int_0^1 F(k_j, h_i)di - Rk_j. \tag{10.39}$$

В этом выражении учитывается, что фирма получает долю выпуска, произведенного ею вместе с нанятым работником, равную $(1 - \lambda)$. Интегрирование производственной функции $F(k_j, h_i)$ по значениям человеческого капитала всех работников отражает тот факт, что фирма не имеет информации о том, с каким работником она будет объединена. Последнее слагаемое в разности (10.39) составляют издержки инсталляции физического капитала по рыночной цене R. Инвестиции в физический капитал осуществляются до того момента, когда фирма узнает работника, с которым она будет объединена. Из того, что функция $F(\cdot, \cdot)$ является строго вогнутой по k (по предположению 1), следует, что целевая функция в выражении (10.39) также является строго вогнутой по k_j. Следовательно, каждая фирма будет выбирать одинаковый запас физического капитала $\hat{k}$, который определяется следующим уравнением:

$$(1-\lambda)\int_0^1 \frac{\partial F(\hat{k}, h_i)}{\partial k} di = R.$$

Далее, используя это (ожидаемое) значение инвестиций фирмы в физический капитал и косвенную функцию полезности индивида (10.34) из предыдущего параграфа, мы можем записать целевую функцию каждого работника в следующем виде:

$$\lambda F(\hat{k}, h_i) + Rb_i - \gamma\left(\frac{h_i}{a_i}\right),$$

где мы заменили доход работника m_i суммой его заработной платы и дохода от владения капиталом и учли разнородность в выборе работниками запаса человеческого капитала. Из такого вида целевой функции работника следует, что оптимальный выбор запаса человеческого капитала работником i определяется следующим уравнением:

$$\lambda a_i \frac{\partial F(\hat{k}, h_i)}{\partial h_i(t)} = \gamma'\left(\frac{h_i}{a_i}\right).$$

Это уравнение имеет единственное решение для инвестиций в человеческий капитал $\hat{h}_i(\hat{k})$ для каждого индивида i. Таким образом, запас человеческого капитала явным образом зависит от выбора физического капитала $\hat{k}$ фирмами (так как этот выбор влияет на предельную производительность человеческого капитала), а также неявно зависит от значения a_i. Более того, из условия (10.30) и из того, что функция $\gamma(\cdot)$ является выпуклой, а функция $F(\cdot, \cdot)$ — вогнутой по k, следует, что функция $\hat{h}_i(\hat{k})$ является строго возрастающей по $\hat{k}$. Подставляя ее в условие первого порядка для фирмы, получаем следующее равенство:

$$(1-\lambda)\int_0^1 \frac{\partial F(\hat{k},\, \hat{h}_i(\hat{k}))}{\partial k} di = R.$$

Наконец равновесие на рынке капитала требует, чтобы спрос на капитал и предложение капитала совпадали при рыночной ставке доходности капитала в периоде t $R(t)$. Как и в модели из предыдущего параграфа, источником предложения капитала является наследство, полученное в предыдущем периоде, поэтому условие равновесия на рынке капитала имеет вид: $\hat{k}(t) = \int_0^1 b_i(t-1)di$. Из этого условия следует, что в версии этой модели для закрытой экономики значение запаса капитала в каждой фирме определяется решениями о наследстве, принятыми в предыдущем периоде. Однако основной экономический вывод, который мы хотим показать, наиболее просто увидеть в случае, когда значение капитала не является предопределенной величиной. Поэтому, предположим, что рассматриваемая экономика является малой открытой экономикой, то есть доходность капитала $R(t) = R^*$ задается доходностью на мировом финансовом рынке (анализ варианта модели для закрытой экономики приведен в упражнении 10.19).

В таком предположении равновесное значение запаса физического капитала в каждой фирме определяется следующим равенством:

$$(1-\lambda)\int_0^1 \frac{\partial F(\hat{k},\, \hat{h}_i(\hat{k}))}{\partial k} di = R^*. \tag{10.40}$$

Утверждение 10.3. *В версии модели малой открытой экономики, описанной выше, существует единственное положительное значение капитала на одного работника* $\hat{k}$, *заданное уравнением* (10.40), *такое, что в равновесии значение капитала на одного работника всегда равно* $\hat{k}$. *При заданном значении* $\hat{k}$ *инвестиции работника* i *в человеческий капитал единственным образом определяются функцией* $\hat{h}_i(\hat{k})$, *которая является решением уравнения:*

$$\lambda a_i \frac{\partial F(\hat{k},\, \hat{h}_i(\hat{k}))}{\partial h} = \gamma'\left(\frac{\hat{h}_i(\hat{k})}{a_i}\right). \tag{10.41}$$

Функция $\hat{h}_i(\hat{k})$ *является возрастающей по* $\hat{k}$, *а снижение мировой процентной ставки* R^* *ведет к росту* $\hat{k}$ *и* $\hat{h}_i$ *для всех* $i \in [0, 1]$.

Вместе с этим равновесием в модели существует равновесие с нулевым выпуском, в котором $\hat{k} = 0$ и $\hat{h}_i = 0$ для всех $i \in [0, 1]$.

Доказательство. Покажем, что из того, что функция $F(k, h)$ обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, а функция γ является строго вогнутой, следует, что $\partial\hat{h}_i(\hat{k})/\partial k < 1$ для любого i. Предположим, что $\partial\hat{h}_i(\hat{k})/\partial k = 1$ при некотором $\hat{k}'$. Тогда при увеличении значения $\hat{k}$, начиная с $\hat{k}'$, левая часть равенства (10.41) будет оставаться постоянной (потому что функция F является однородной первой степени). С другой стороны, так как функция $\hat{h}_i(\hat{k})$ является строго возрастающей, а функция γ строго вогнута, правая часть равенства (10.41) будет возрастать, что приводит к противоречию. Следовательно, интеграл $\int_0^1 (\partial F(\hat{k}, \hat{h}_i(\hat{k}))/\partial k)di$ будет строго убывать по $\hat{k}$ при заданном распределении $[a_i]_{i\in[0,1]}$. Поэтому равновесное значение $\hat{k}$ определено единственным образом. При этом значении $\hat{k}$ условие (10.41) позволяет найти единственное значение $\hat{h}_i(\hat{k})$ для любого i. Применяя теорему о неявной функции (теорема А.25 из приложения А) к уравнению (10.41), получаем, что функция $\hat{h}_i(\hat{k})$ возрастает по $\hat{k}$. Наконец из равенства (10.40) следует, что значение $\hat{k}$ возрастает при уменьшении мировой процентной ставки R^*, откуда из монотонности функции $h_i(\hat{k})$ следует, что значение $\hat{h}_i$ также возрастает для любого i.

Существование равновесия с нулевым выпуском следует из того, что если все фирмы выбирают нулевое значение капитала $\hat{k} = 0$, то выпуск равен нулю и наилучшей стратегией работников будет $\hat{h}_i = 0$. С другой стороны, если $\hat{h}_i = 0$ для всех i, то наилучшей стратегией фирм будет выбор $\hat{k} = 0$. ■

Заметим, что в равновесии производится недостаточно инвестиций как в физический, так и в человеческий капитал (в равновесии с положительным значением выпуска, в равновесии с нулевым выпуском, очевидно, также будет производиться неоптимальное количество инвестиций). Рассмотрим задачу общественного планировщика, желающего максимизировать выпуск в экономике. Предположим, что он также ограничен таким же случайным процессом объединения фирм и работников, то есть у него нет возможности распределять работников по фирмам по своему желанию. Тогда анализ, аналогичный проведенному выше, показывает, что общественный планировщик также предпочтет, чтобы все фирмы обладали одинаковым запасом физического капитала, равным, например $\bar{k}$. Однако это значение капитала на одну фирму будет отличаться от его значения в конкурентном равновесии, при этом планировщик будет пользоваться другим соответствием между инвестициями в человеческий капитал и инвестициями в физический капитал. В частности, при заданном значении $\bar{k}$, он будет выбирать значение инвестиций в человеческий капитал таким образом, что

$$a_i \frac{\partial F(\bar{k}, \bar{h}_i(\bar{k}))}{\partial h} = \gamma' \left(\frac{\bar{h}_i(\bar{k})}{a_i} \right).$$

Это условие схоже с условием (10.41), однако в левой его части отсутствует параметр λ. Это связано с тем, что работник, принимая решение об инвестициях в человеческий капитал, принимает во внимание только свою долю выпуска λ, в то время как общественный планировщик рассматривает весь выпуск. Следовательно, если $\lambda < 1$, то для всех $k > 0$ выполняется неравенство:

$$\bar{h}_i(k) > \hat{h}_i(k).$$

Аналогичным образом, общественный планировщик будет выбирать более высокое значение инвестиций в физический капитал для каждой фирмы. В частности его выбор является решением следующего уравнения:

$$\int_0^1 \frac{\partial F(\bar{k}, \bar{h}_i(\bar{k}))}{\partial k} di = R^*,$$

которое также отличается от уравнения (10.40) тем, что в нем в левой части отсутствует множитель $1 - \lambda$, так как общественный планировщик принимает во внимание различия в инвестициях работников в человеческий капитал, равных $\bar{h}_i(\bar{k})$. Из этих рассуждений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 10.4. *В равновесии, описанном в утверждении* 10.3, *производится недостаточное количество инвестиций как в физический, так и в человеческий капитал.*

Интересен тот факт, что недостаточное количество инвестиций является следствием дисбаланса между физическим и человеческим капиталом в экономике, чего мы не наблюдали в предыдущих двух рассмотренных моделях. Следующее утверждение резюмирует вывод о дисбалансе между двумя типами капитала.

Утверждение 10.5. *Рассмотрим равновесие с положительным значением выпуска, описанное в утверждении* 10.3. *Равновесный выпуск равен нулю, если $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$. Более того, существует значение $\lambda^* \in (0, 1)$, такое, что при нем выпуск достигает максимума.*

Доказательство. См. упражнение 10.20. ■

На интуитивном уровне, различные значения λ создают различные типы дисбаланса между физическим и человеческим капиталом. При высоком значении λ работники обладают значительной переговорной силой, что создает дополнительные стимулы для инвестиций в человеческий капитал. При этом симметричным образом это дестимулирует инвестиции фирм в физический капитал, так как фирма получает малую долю выпуска. Следовательно, при высоких значениях λ (до тех пор, пока $\lambda < 1$) в экономике создается дисбаланс в сторону избыточного количества человеческого капитала по отношению к физическому капиталу. По мере того как $\lambda \to 1$, этот дисбаланс увеличивается. В пределе при $\lambda = 1$ он достигает экстремума, когда решения работников об инвестициях в человеческий капитал совпадают с решением общественного планировщика (то есть $\hat{h}_i(k) \to \bar{h}_i(k)$ для всех $k > 0$). Однако в это же время инвестиции каждой фирмы в физический капитал $\hat{k}$ стремятся к нулю, $\hat{k} \to 0$, и производственная активность останавливается. Примерно то же самое происходит и при низких значениях λ. Однако в этом случае в экономике возникает избыток физического капитала по отношению к человеческому капиталу. Баланс достигается на некотором среднем значении λ^*, однако, как показано в утверждении 10.5, и при нем равновесие остается не оптимальным по Парето.

Дисбаланс между физическим и человеческим капиталом также может увеличить роль человеческого капитала при объяснении межстрановых различий в уровне дохода. В этой модели пропорциональный вклад изменений в запасе человеческого капитала в изменение выпуска (или производительности труда) превышает доход от человеческого капитала, так как последний определяется не его предельной производительностью, а параметром λ, описывающим переговорную силу работников. Поэтому отклонение цен факторов производства от их значений в равновесии с совершенной конкуренцией отделяет вклад человеческого капитала в производительность от его рыночной стоимости.

Основной причиной неоптимальности по Парето и дисбаланса в этой модели является *монетарная экстерналия*. Напомним, что монетарная экстерналия представляет собой внешний эффект, действующий в экономике через цены (а не через прямое влияние от внешнего эффекта технологий). Производя больше инвестиций, работники (а также фирмы) увеличивают отдачу от капитала (заработную плату в случае фирм), и недостаток инвестиций возникает в силу того, что они не учитывают этот внешний эффект при принятии решений об инвестициях. Как показано в предыдущей главе, монетарная экстерналия присутствует и на рынках с совершенной конкуренцией (например, потому что решения фирмы о предложении товара воздействуют на его цену), но обычно она имеет второй порядок малости, так как в этом случае цена товара равна как предельной полезности от нее для покупателя (предельной производительности фирмы на рынках факторов производства), так и предельным издержкам производителя. Однако при наличии несовершенств на рынке труда цены отклоняются от этих предельных значений, в этом случае размер монетарной экстерналии становится больше, чем второго порядка малости.

Наиболее интересным свойством этой модели является то, что монетарная экстерналия в ней становится *экстерналией от человеческого капитала*. Поэтому увеличение инвестиций в человеческий капитал группой работников приводит к росту заработной платы других работников. Заметим, что при совершенной конкуренции на всех рынках (в отсутствие экстерналий) увеличение инвестиций в человеческий капитал группой работников обычно приводит к сокращению отношения физического капитала к человеческому капиталу, поэтому заработная плата единицы человеческого капитала и доходы других работников снижаются[1]. Однако при наличии несовершенств на рынке труда эффект может быть противоположным. Для его иллюстрации предположим, что в экономике существуют два типа работников, доля работников, равная χ, обладает навыками a_1, а доля, равная $1-\chi$, обладает навыками $a_2 < a_1$. При такой структуре рынка труда условие первого порядка (10.40) принимает следующий вид:

$$(1-\lambda)\chi\left[\frac{\partial F(\hat{k},\ \hat{h}_1(\hat{k}))}{\partial k}+(1-\chi)\frac{\partial F(\hat{k},\ \hat{h}_2(\hat{k}))}{\partial k}\right]=R^*, \qquad (10.42)$$

в то время когда условие первого порядка для инвестиций работников двух типов в человеческий капитал имеет вид:

$$\lambda a_i\frac{\partial F(\hat{k},\ \hat{h}_i(\hat{k}))}{\partial h}=\gamma'\left(\frac{\hat{h}_i(\hat{k})}{a_i}\right) \text{ для } i=1,2. \qquad (10.43)$$

Из того, что $a_1 > a_2$, очевидным образом следует, что $\hat{h}_1(k) > \hat{h}_2(k)$. Представим себе, что в экономике происходит увеличение параметра χ, что означает рост доли работников, обладающих большим запасом навыков. Тогда из уравнения (10.42) следует, что при постоянном запасе человеческого капитала $\hat{h}_1(\hat{k})$ и $\hat{h}_2(\hat{k})$ количество физического капитала k должно возрасти, так как левая часть уравнения принимает большее значение (это следует из того, что $\hat{h}_1(\hat{k}) > \hat{h}_2(\hat{k})$ и $\partial^2 F(k,\ h)/\partial k\partial h > 0$). Следовательно,

[1] Например, в модели экономики, представленной в предыдущем параграфе, увеличение инвестиций в человеческий капитал группой работников приводит к снижению заработной платы других работников. С другой стороны, если бы предельный продукт капитала оставался постоянным, такое увеличение инвестиций не повлияло бы на заработную плату других работников.

из дополняемости между капиталом и навыками следует, что, при наличии монетарной экстерналии улучшение навыков в пуле работников ведет к росту инвестиций фирм в физический капитал.

Интуитивно, каждая фирма ожидает, что средний работник, с которым она будет объединена случайным образом, будет обладать большим запасом человеческого капитала и, так как физический и человеческий капитал являются дополняющими товарами, каждой фирме становится выгодно увеличивать инвестиции в физический капитал. В свою очередь, увеличение инвестиций фирмами ведет к росту выпуска $F(\hat{k}, h)$ при любом значении h и, в частности, при $\hat{h}_2(\hat{k})$. Так как доход работников второго типа равен $\lambda F(\hat{k}, \hat{h}_2(\hat{k}))$, их доходы также увеличиваются в результате реакции фирм на изменение в структуре рабочей силы. Такой эффект возникает из-за присутствия в экономике экстерналии от человеческого капитала, когда увеличение инвестиций в человеческий капитал одной группой работников приводит к росту доходов всех остальных работников. В действительности экстерналия от человеческого капитала в этой модели еще более значительна, так как рост запаса физического капитала $\hat{k}$ ведет к росту предельной производительности человеческого капитала $\partial F(\hat{k}, \hat{h}_2(\hat{k}))/\partial h$, что еще более стимулирует инвестиции в человеческий капитал второй группой работников. Эти рассуждения резюмируются в следующем утверждении.

Утверждение 10.6. *В равновесии с положительным значением выпуска, описанном в утверждении* 10.3, *присутствует экстерналия от человеческого капитала в том смысле, что увеличение инвестиций в человеческий капитал группой работников приводит к росту дохода всех остальных работников.*

10.7. Экстерналии от человеческого капитала

В предыдущем параграфе мы показали, как экстерналия от человеческого капитала может естественным образом возникнуть в модели с несовершенным рынком труда в присутствии дополняемости между физическим и человеческим капиталом. Однако это не единственный канал, через который может возникнуть эта экстерналия. Многие экономисты полагают, что запас человеческого капитала работников оказывает немонетарное (технологическое) внешнее воздействие на производительность друг друга. Например, в своей книге *The Economies of the Cities* (1970) Джеймс Джейкобс утверждает важность человеческого капитала и предполагает, что концентрация экономической активности в городах отчасти стала результатом влияния этой экстерналии, которая также является одним из источников экономического роста, так как она способствует обмену идеями между работниками и предпринимателями. В ряде очень известных работ по теории экономического роста, включая работы [Lucas 1988] и [Azariadis, Drazen 1990], утверждается, что такие технологические экстерналии очень важны и играют главнейшую роль в процессе экономического роста. Экстерналии от человеческого капитала представляют интерес не только сами по себе. Например, при наличии таких внешних эффектов цены конкурентного равновесия, скорее всего, не будут оптимальными. Экстерналии от человеческого капитала также важны для понимания источников межстрановых различий в уровне дохода на душу населения. Анализ вклада физического и человеческого капитала в межстрановые различия в уровне доходов, проведенный нами в главе 3, показал, что различия в запасе человеческого капитала сами по себе вряд ли являются достаточными для объяснения значительной доли межстрановых различий в уровне дохода на душу населения в отсутствие внешних эффектов от человеческого капитала.

Поэтому на данном этапе представляется полезным сделать краткий обзор эмпирических свидетельств о важности экстерналий от человеческого капитала. В ранних работах в этой области, в частности в работе [James Rauch 1993], автор пытался измерить размер экстерналии от человеческого капитала с помощью оценивания квазиуравнения Минсера для заработной платы. Единственное отличие от стандартного уравнения состояло том, что в левой его части присутствовала переменная, описывающая средний запас человеческого капитала на одного работника на локальном рынке труда. Более точно, Рауч оценивал модель в следующем виде:

$$\log W_{j,m} = \mathbf{X}_{j,m}^T\beta + \gamma_p S_{j,m} + \gamma_e S_m,$$

где вектор $\mathbf{X}_{j,m}^T$ состоит из контрольных переменных, переменная $S_{j,m}$ обозначает количество лет образования индивида j, занятого на рынке труда m, а переменная S_m — среднее количество лет образования работников на рынке труда m. Без последнего слагаемого уравнение было бы схоже со стандартным уравнением Минсера, которое мы обсуждали в параграфе 10.2, и мы бы ожидали получить оценку коэффициента γ_p, отражающего *частную отдачу* от образования, лежащую между 6% и 10%. Посредством включения среднего количества лет образования S_m автор пытается оценить коэффициентом γ_e *внешнюю отдачу* от образования в тех же единицах измерения. Например, если оценка коэффициента γ_e имеет тот же порядок, что и оценка коэффициента γ_p, то мы можем заключить, что внешняя отдача от образования настолько же важна, как и частная отдача (и это будет соответствовать очень большой величине экстерналии).

Оценки Рауча говорят о значительной внешней отдаче, зачастую в них размер внешней отдачи превышает размер частной отдачи. Такая величина внешней отдачи от образования значительно увеличивает роль различий в уровне человеческого капитала как непосредственных причин межстрановых различий в уровне дохода на душу населения по сравнению с вычислениями из главы 3. Однако в регрессиях Рауча используются различия в средней продолжительности образования между городами, что может отражать множество других факторов, которые могут напрямую влиять на размер заработной платы. Например, заработные платы в Нью-Йорке значительно превышают заработные платы в Амесе, штат Айова, однако это связано не только с более высоким уровнем образования жителей Нью-Йорка. Для получения более убедительных оценок внешней отдачи от образования исследователю нужно иметь набор данных с экзогенным различием в среднем уровне образования работников.

В работе [Acemoglu, Angrist 2000] изучаются различия в среднем уровне образования между штатами США, возникшие в результате изменений в законодательстве об обязательном образовании и детском труде. Эти изменения имели большое влияние на уровень образования, особенно на уровне старшей школы. Основываясь на изменениях среднего уровня образования на рынке труда штата, возникших в результате изменений законодательства, Д. Асемоглу и Дж. Ангрист получили статистически незначимые оценки для внешней отдачи от образования с точечным значением около 1–2% (по сравнению с частной отдачей на уровне 10%). Эти результаты подсказывают, что размер экстерналии от человеческого капитала на локальном рынке труда относительно не велик. Схожие результаты получены в работах: [Duflo 2004] для рынка труда в Индонезии и [Ciccone, Peri 2006] на данных по США[2]. Большинство работ содержит вывод, что величина экстерналии от человеческого капитала на локальных рынках труда не велика, и калибровочные упражнения, схожие с упражнением из главы 3, которые игнорируют роль экстерналий, вряд ли приводят к значительному смещению вниз оценки вклада человеческого капитала в межстрановые различия в уровне дохода на душу населения.

Здесь необходимо подробнее остановиться на значении термина «локальный» в предыдущем изложении. Оценки, показанные выше, говорят об экстерналиях на локальном рынке труда, как их определил Дж. Джейкобс. Однако если несколько очень талантливых ученых, инженеров и других хорошо квалифицированных работников создают идеи, которые

[2] Размер экстерналии от человеческого капитала также оценивается в работе [Moretti 2004]. Автор приходит к выводу о значительном внешнем эффекте. Это может быть связано с тем, что его анализ посвящен выпускникам колледжей, при этом причины различий, которые он исследует, — изменения в демографической структуре и наличие в штате колледжей, образованных в соответствии с законом Морилла, могут оказывать и прямое воздействие на средний доход работников.

затем используются в других регионах страны или даже мировой экономики, то в этом случае может существовать значительная глобальная экстерналия от человеческого капитала. При этом мы не можем оценить размер таких глобальных внешних эффектов с помощью имеющихся у нас эмпирических методов анализа. Важность глобальной экстерналии от человеческого капитала такого типа является интересной темой для будущих исследований.

10.8. Модель человеческого капитала Нельсона—Фелпса

Анализ, который мы провели в этой главе, посвящен роли человеческого капитала в увеличении производительности труда, описанной в важных работах Г. Бэккера и Дж. Минсера. Большинство экономистов склоняются к тому, что в этом состоит наиболее важная роль человеческого капитала. Другой подход к роли человеческого капитала разработан Ричардом Нельсоном и Эдмундом Фелпсом в их короткой, но очень важной работе [Nelson, Phelps 1966], а также в работах Теда Шульца: [Schultz 1964, 1975]. В соответствии с этими теориями основная роль человеческого капитала состоит не в увеличении производительности труда при выполнении уже известных производственных действий, а в улучшении умений работников реагировать на изменения в экономике, в особенности на появление новых технологий. Подход Нельсона—Фелпса к роли человеческого капитала играет важную роль в различных разделах экономики и отражен в ряде моделей экономического роста. Далее мы сделаем простое описание основных идей этого подхода в соответствии с оригинальной моделью Нельсона—Фелпса и обсудим, как такой взгляд на роль человеческого капитала может улучшить наше понимание его роли в процессе экономического роста и экономического развития. Эта модель также лежит в основе моделей внедрения технологий, которые мы рассмотрим в части VI книги.

Для иллюстрации основных идей рассмотрим следующую модель экономики в непрерывном времени. Предположим, что выпуск задан следующей производственной функцией вида:

$$Y(t) = A(t)L, \tag{10.44}$$

где константа L обозначает население, неэластично поставляющее занятость на рынок труда, а переменная $A(t)$ — технологический уровень развития экономики. В модели отсутствует капитал (и поэтому межвременные решения о накоплении капитала), а работники не принимают решения о предложении труда. Единственной переменной, изменяющейся во времени, является технология $A(t)$.

Предположим, что мировая технологическая граница задается переменной $A_F(t)$. Эта граница может соответствовать уровню развития технологий в некоторой другой стране или уже открытым технологиям, которые еще не применяются в производственной деятельности. Допустим, что она задана экзогенно и определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\dot{A}_F(t)}{A_F(t)} = g_F$$

с начальным условием $A_F(t) > 0$.

Запас человеческого капитала рабочей силы обозначим как h. Заметим, что человеческий капитал не входит в производственную функцию (10.44). Предположение о том, что человеческий капитал не улучшает производительность труда, выглядит экстремальным. Однако вместо этого в данной модели предполагается, что роль человеческого капитала состоит в улучшении возможности использования в производственном процессе технологий, находящихся на мировой технологической границе. В частности, динамика технологий, доступных в изучаемой стране, определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{A}(t) = gA(t) + \phi(h)A_F(t)$$

с начальным условием $A(0) \in (0, A_F(t))$. Предположим, что значение параметра g, определяющего рост технологий за счет обучения в процессе производства и других источников технологического прогресса, строго меньше, чем g_F. Однако первое слагаемое является лишь одним источником улучшения технологий. Другой источник определяется вторым слагаемым и может быть интерпретирован как улучшение технологий, вызванное использованием и внедрением технологий, находящихся на границе. Размер вклада этого источника определяется средним запасом человеческого капитала рабочей силы. Именно он описывает вышеупомянутую роль человеческого капитала в контексте использования и внедрения технологий. В частности предположим, что функция $\phi(\cdot)$ является неубывающей и удовлетворяет следующим условиям:

$$\phi(0) = 0 \text{ и } \phi(h) = g_F - g \text{ для всех } h \geq \bar{h},$$

где $\bar{h} > 0$. В этой спецификации предполагается, что человеческий капитал рабочей силы определяет возможности экономики подстраиваться под новые производственные возможности, доступные при использовании технологий, находящихся на границе. Если работники не обладают человеческим капиталом, то внедрения передовых технологий не происходит и переменная $A(t)$ растет с постоянным темпом g. С другой стороны, если $h \geq \bar{h}$, то в экономике идет быстрое внедрение передовых технологий.

Так как $A_F(t) = \exp(g_F t)AF(0)$, то дифференциальное уравнение для $A(t)$ может быть записано в следующем виде:

$$\dot{A}(t) = gA(t) + \phi(h)A_F(0)\exp(g_F t).$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет следующий вид (см. параграф В.4 в приложении В):

$$A(t) = \left[\left(A(0) - \frac{\phi(h)A_F(0)}{g_F - g}\right)\exp(gt) + \frac{\phi(h)A_F(0)}{g_F - g}\exp(g_F t)\right],$$

который говорит о том, что темп роста $A(t)$ увеличивается с ростом $\phi(h)$. Более того, нетрудно убедиться, что

$$A(t) \to \frac{\phi(h)}{g_F - g}A_F(t) \text{ при } t \to \infty,$$

то есть отношение запаса технологий в стране к технологической границе также определяется запасом человеческого капитала.

Роль человеческого капитала, о которой говорят Р. Нельсон и Э. Фелпс, без сомнения, очень важна в некоторых случаях. Например, ряд эмпирических свидетельств говорят о том, что фермеры, имеющие лучшее образование, с большей вероятностью будут применять новые технологии и использовать новые сорта сельскохозяйственных культур (см., например: [Foster, Rosenzweig 1995]). Подход Р. Нельсона и Э. Фелпса к человеческому капиталу также используется в литературе по экономическому росту в связи с эмпирическими свидетельствами, уже упомянутыми нами в главе 1, говорящими о том, что корреляция между темпом экономического роста и уровнем человеческого капитала значительно превышает его корреляцию с темпом изменения запаса человеческого капитала. Некоторые авторы, среди которых необходимо выделить работу [Benhabib, Spiegel 1994], предполагают, что это наблюдение может быть связано с тем, что наиболее важная роль человеческого капитала заключается не в улучшении производственных возможностей с применением уже имеющихся технологий, а в способствовании процессу внедрения новых технологий. Из этих рассуждений можно сделать вывод о том, что если роль человеческого капитала, о которой говорят Р. Нельсон и Э. Фелпс, важна на практике, то человеческий капитал может играть более важную роль в экономическом росте и экономическом развитии, чем роль, следующую из моделей, представленных в предыдущих главах. Хотя эта гипотеза и представляет интерес, она не выглядит полностью убедительной. Если вклад человеческого капитала во внедрение новых технологий проявляется внутри фирмы, то это должно отражаться на предельном продукте и заработной плате более квалифицированных работников. Работники, приносящие вклад в быстрое и более эффективное внедрение новых технологий, будут получать компенсацию в соответствии с ростом чистой приведенной стоимости фирмы. Тогда величина отдачи от образования и человеческого капитала, которую мы использовали в вычислениях в главе 3, уже будет учитывать вклад человеческого капитала в совокупный выпуск (и поэтому в темп роста экономики), связанный с внедрением технологий. Если, с другой стороны, человеческий капитал улучшает процесс внедрения новых технологий не на уровне фирмы, а на уровне всего рынка труда, то его вклад будет принимать вид локальной экстерналии от человеческого капитала и будет учтен в оценках внешнего локального эффекта от человеческого капитала. Поэтому если такой вклад человеческого капитала не является внешним эффектом, который действует на глобальном уровне, то оценка вклада человеческого капитала в межстрановые различия в уровне дохода на душу населения, которую мы получили в калибровочном упражнении из главы 3, где мы использовали данные по отдаче от человеческого капитала, полученные из сравнения заработной платы работников с различной квалификацией, не будет значительно заниженной.

10.9. Основные выводы

В этой главе мы рассмотрели несколько моделей инвестиций в человеческий капитал, в которых показано, как инвестиции в человеческий капитал (включая образование и повышение квалификации на рабочем месте) изменяются во времени и реагируют на изменения их будущей доходности.

Из этих моделей следуют четыре связанных между собой, но отличных друг от друга вывода о роли человеческого капитала в процессе экономического роста. Во-первых, если некоторая часть трудового дохода, который мы наблюдаем, является вознаграждением накопленного индивидом человеческого капитала, то влияние экономической политики (и, возможно, технологий) на уровень дохода на душу населения будет превышать имеющиеся у нас оценки из-за того, что она будет влиять не только на динамику физического капитала, но также и на накопление человеческого капитала. Количественная оценка этого влияния получена нами в модели неоклассической экономики с физическим и человеческим капиталом в параграфе 10.4. Эта модель также представляет удобный инструментарий для анализа инвестиций в физический и человеческий капитал. Несмотря на это, все влияние межстрановых различий в запасе человеческого капитала, возникающее из-за различий в налогообложении или другой политике, должно быть учтено в оценках из главы 3. Из этого наблюдения следует, что, хотя различия в запасе человеческого капитала являются важным фактором, они могут объяснить лишь малую долю межстрановых различий в уровне дохода на душу населения (если погрешность оценки влияния человеческого капитала на производительность труда не очень велика).

Второй важный результат о роли человеческого капитала связан с измерением вклада образования и навыков в производительность труда. Возможной причиной ошибок в измерении этого вклада является присутствие экстерналий от человеческого капитала. Можно привести множество убедительных причин, по которым в экономике будут присутствовать монетарные или технологические экстерналии от человеческого капитала. Например, в параграфе 10.6 показано, как могут возникать монетарные экстерналии при дополняемости между капиталом и навыками на несовершенном рынке труда. Несмотря на это, из имеющихся у нас эмпирических данных следует, что размер экстерналий от человеческого капитала не слишком высок, с единственным предостережением, что в экономике могут присутствовать не измеренные нами глобальные экстерналии от человеческого капитала. Каналы, через которые такие глобальные экстерналии могут действовать, включают в себя НИОКР и технологический прогресс, которым посвящена следующая часть книги. Другой причиной возможных ошибок в измерении вклада человеческого капитала являются различия в качестве человеческого капитала. Значительные различия в качестве школ и учителей существуют даже внутри очень малой географической области, поэтому мы можем ожидать намного бóльшие различия в качестве человеческого капитала между странами. В дополнение, в большинстве существующих эмпирических подходов к измерению межстрановых различий в запасе человеческого капитала используется длительность официального образования работников. Однако из модели Бен-Пората, представленной в параграфе 10.3, следует, что процесс накопления человеческого капитала продолжается и после окончания работником официального обучения. Если вознаграждение человеческого капитала высоко, то мы можем ожидать увеличения запаса человеческого капитала как посредством официального образования, так и посредством повышения квалификации на рабочем месте. Следовательно, из модели Бен-Пората следует, что мы можем ожидать больший запас человеческого капитала (или большее количество неизмеренного человеческого капитала) в экономиках с высоким уровнем официального образования. Если это так, то эмпирические оценки, представленные в главе 3, могут занижать вклад человеческого капитала в производительность труда. Изучение этого вопроса является важной частью будущих исследований в теории экономического роста.

Третий важный вывод из моделей инвестиций в человеческий капитал состоит в возможности существования в экономике дисбаланса между количеством физического и человеческого капитала. Из эмпирических наблюдений следует, что физический и человеческий капитал являются дополняющими товарами. Поэтому общая производительность факторов производства будет максимальна при достижении правильного баланса между физическим и человеческим капиталом. Может ли в конкурентном равновесии возникать дисбаланс, при котором запас накопленного физического капитала будет слишком велик или слишком мал по сравнению с запасом человеческого капитала? Мы убедились в том, что в моделях с совершенной конкуренцией на рынке труда такой дисбаланс маловероятен или непродолжителен по времени. Однако из анализа в параграфе 10.6 следует, что такой сценарий становится вполне вероятен в том случае, когда цены факторов производства отклоняются от их предельной производительности, например на несовершенном рынке труда. Наличие в экономике такого дисбаланса может увеличить вклад человеческого капитала в совокупную производительность.

Последний важный вывод связан с ролью человеческого капитала в технологическом прогрессе и процессе внедрения технологий. В параграфе 10.8 представлен подход к человеческому капиталу Нельсона—Фелпса, в котором утверждается, что основная роль навыков работников состоит в упрощении процесса внедрения и имплементации новых технологий. Несмотря на то что такой взгляд в ряде случаев, вероятно, является важным, в отсутствие значительных внешних эффектов именно эта роль человеческого капитала вряд ли может привести к значительным ошибкам в измерении вклада человеческого капитала в совокупную производительность труда, в особенности в оценках, полученных нами в калибровочном упражнении в главе 3.

Эта глава является значительным шагом на нашем пути поиска причин экономического роста и межстрановых различий в уровне дохода на душу населения. Она предоставляет полезный модельный аппарат для анализа решений индивидов и фирм об инвестициях в физический и человеческий капитал. Наш следующий шаг состоит в построении моделей еще одного главного непосредственного источника экономического роста — технологического прогресса.

10.10. Литература

Понятие человеческого капитала возникло в работах Гари Беккера [Becker 1965], Теда Шульца [Schultz 1965] и Джейкоба Минсера [Mincer 1974]. Стандартные модели человеческого капитала, широко используемые в экономике труда и других разделах экономической науки, были разработаны в трудах: [Becker 1965; Ben-Porath 1967; Mincer 1974]. Эти модели лежат в основе материала первых трех параграфов данной главы. Сравнительно недавно интерес макроэкономистов к модели Бен-Пората возобновился. Последние работы на эту тему: [Heckman, Lochner, Taber 1998; Guvenen, Kuruscu 2006; Manuelli, Seshadi 2006]. В этих работах на основе специфических параметрических предположений (о виде производственной функции Кобба—Дугласа) оцениваются количественные импликации модели Бен-Пората для межстрановых различий в уровне дохода на душу населения и динамики неравенства заработных плат. С другой стороны, в работе [Caselli 2005] автор делает вывод о том, что различия в качестве человеческого капитала вряд ли могут увеличить его вклад в совокупную производительность труда.

Значительное количество работ посвящено анализу экономической отдачи от образования. Как мы уже отметили в тексте этой главы и в главе 3, типичные оценки вклада образования в большинстве статей говорят о том, что дополнительный год образования увеличивает заработную плату работника на 6–10% (см., например, обзор в: [Card 1999]).

Значительное количество работ также посвящено анализу дополняемости между капиталом и навыками работников. Эта идея впервые была предложена и эмпирически проверена в работе [Griliches 1969]. Обзор современных эмпирических исследований о дополняемости между физическим и человеческим капиталом представлен в работе [Katz, Autor 2000].

Работы [Jacobs 1970; Lucas 1988; Azariadis, Drazen 1990] посвящены *анализу технологических экстерналий от человеческого капитала*, в то время как первый анализ монетарных экстерналий от человеческого капитала проведен в работе [Marshall 1890; Маршалл 1993]. В ней автор утверждает, что географическая концентрация специфических факторов производства улучшает соответствие между факторами производства и отраслями и тем самым способствует росту производительности. Модели монетарных экстерналий от человеческого капитала построены в работах: [Acemoglu 1996, 1997a]. Модель несовершенного рынка труда с дополняемостью между физическим и человеческим капиталом основана на работе [Acemoglu 1996]. В ней автор строит более подробную и микрообоснованную модель, приводящую к тем же результатам, что и модель из параграфа 10.6. В работе также выводятся результаты о монетарных экстерналиях от человеческого капитала, приведенные в этой главе.

Среди эмпирических работ на тему экстерналий от человеческого капитала необходимо выделить: [Rauch 1993; Acemoglu, Angrist 2000; Duflo 2004; Moretti 2004; Ciccone, Peri 2006].

Роль человеческого капитала в приспособлении к технологическим изменениям и внедрении новых технологий впервые была описана в работе [Shultz 1975] в контексте сельскохозяйственных технологий (автор выделяет роль способностей, а не человеческого капитала и подчеркивает важность «неравновесных» исходов). Аналогичная идея сформулирована в работе [Nelson, Phelps 1966]. Здесь же приводится простая модель, схожая с моделью из параграфа 10.8. Эмпирические свидетельства в пользу такого подхода к человеческому капиталу приведены в работе [Foster, Rosenzweig 1995]. Подробное обсуждение подхода Нельсона—Фелпса к человеческому капиталу также присутствует в работах: [Benhabib, Spiegel 1994; Aghion, Howitt 1998]. Среди современных работ, основанных на этой роли человеческого капитала, необходимо отметить: [Galor, Tsiddon 1997; Greenwood, Yorukoglu 1997; Caselli 1999; Galor, Moav 2000; Aghion, Howitt, Violante 2004].

10.11. Упражнения

10.1. Сформулируйте, запишите и докажите теорему об отделении (теорему 10.1) для модели экономики в дискретном времени.

10.2. (a) Рассмотрите модель из параграфа 10.1. Запишите потоковое бюджетное ограничение индивида в следующем виде:

$$\dot{a}(t) = ra(t) - c(t) + W(t),$$

и предположите, что рынок заимствований несовершенный, то есть $a(t) \geq 0$. Постройте пример, в котором утверждение теоремы 10.1. не выполняется. Сможете ли вы обобщить этот пример для случая, когда индивид может сберегать по процентной ставке r, а привлекать заимствования по процентной ставке $r' > r$?

(b) Измените модель из части (a) так, что моментальная функция полезности индивида имеет следующий вид:

$$u(c(t), 1 - l(t)),$$

где переменная $l(t)$ обозначает общее число часов занятости, а предложение труда на рынок составляет $l(t) - s(t)$, то есть перед индивидом стоит нетривиальная задача выбора между занятостью и досугом. Постройте пример, в котором утверждение теоремы 10.1 не выполняется.

10.3. Выведите уравнение (10.9) из уравнения (10.8).

10.4. Рассмотрите модель, описанную в параграфе 10.2, и предположите, что значения эффективной нормы дисконтирования r различны для разных индивидов (например, вследствие наличия несовершенств на финансовом рынке). Покажите, что индивид, наблюдающий более высокое значение r, будет выбирать меньший уровень образования. Что произойдет, если вы будете оценивать регрессию для заработных плат, схожую с регрессией 10.12, в мире, где источником различий в уровне образования между индивидами являются различия в норме дисконтирования?

10.5. Убедитесь в том, что теоремы 7.13 и 7.14 из главы 7 могут быть применены к модели Бен-Пората и что из них следует, что равенство (10.14) является необходимым и достаточным условием оптимума для траектории инвестиций в человеческий капитал. [Подсказка: используйте рассуждения, схожие со сделанными в параграфе 7.7 из главы 7.]

10.6. Рассмотрите вариант модели Бен-Пората, в котором процесс накопления человеческого капитала задается следующим уравнением:

$$\dot{h}(t) = s(t)\phi(h(t)) - \delta_h h(t),$$

где функция $\phi(\cdot)$ является строго возрастающей, дифференцируемой и строго вогнутой, а $s(t) \in [0, 1]$. Предположите, что продолжительность жизни индивида возможно бесконечна и наступление смерти следует пуассоновскому процессу с параметром $\gamma > 0$. Покажите, что на оптимальной траектории инвестиций в человеческий капитал на некотором отрезке времени $[0, T]$ выполняется равенство $s(t) = 1$, а для всех $t > T$ выполняется равенство $s(t) = s^*$.

10.7. Измените модель Бен-Пората, изложенную в параграфе 10.3 следующим образом. Предположите, что горизонт планирования индивидов конечен и что $\phi'(0) < \infty$. Также предположите, что

$$\phi'(h(0)) > \delta_h/(1 - \exp(-\delta_h T)),$$

где, напомним, константа δ_h является нормой амортизации человеческого капитала.

(a) Приведите необходимые условия оптимума для внутреннего решения задачи. Покажите, как эти необходимые условия могут быть изменены для углового решения, в котором функция $s(t)$ может принимать значения, равные 0 или 1.

(b) Покажите, что на оптимальной траектории запаса человеческого капитала индивида на некотором интервале $[0, t')$ обучение происходит в дневной форме, то есть $s(t) = 1$ для всех $t \in [0, t')$. Затем на некотором отрезке времени индивид накапливает человеческий капитал на рабочем месте при $s(t) \in (0, 1)$ и не производит инвестиций в человеческий капитал на заключительном этапе жизни, то есть $s(t) = 0$ при всех $t \in (t'', T]$, где $t'' < T$. [Подсказка: предположите, что первая часть этого утверждения не верна и покажите, что в этом случае необходимые условия оптимума должны выполняться как равенства. Объединяя два необходимых условия, выведите условие первого порядка в виде неавтономного дифференциального уравнения первого порядка для сопряженной переменной $\lambda(t)$ и решите это дифференциальное уравнение при граничном условии $\lambda(T) = 0$. Затем покажите, что при заданном этим решением значении $\lambda(0)$ и неравенстве $s(t) < 1$ необходимые условия не выполняются в начальный момент времени $t = 0$. Затем, используя предположение $\phi'(0) < \infty$ вместе с наблюдением о том, что сопряженная переменная $\lambda(t)$ является непрерывной функцией и удовлетворяет условию $\lambda(T) = 0$, докажите, что значение функции $s(t)$ должно равняться нулю на некотором интервале времени $[T - \xi, T]$. Наконец используйте эти промежуточные шаги и покажите, что функция $s(t)$ должна принимать значения в интервале $(0, 1)$ перед тем, как начнется этот заключительный отрезок времени.

(c) Опишите динамику заработной платы индивида в течение его жизни.

(d) Как бы вы подошли к эмпирическому тестированию выводов из этой модели?

10.8. Докажите, что текущий гамильтониан в выражении (10.24) является совместно вогнутой функцией по аргументам $(k(t), h(t), i_k(t), i_h(t))$.

10.9. Докажите, что из уравнения (10.25) следует существование зависимости между физическим и человеческим капиталом в виде

$h = \xi(k)$, где функция $\xi(\cdot)$ определена единственным образом и является строго возрастающей и дифференцируемой.

10.10. **(a)** Докажите утверждение 10.1.

(b) Покажите, что дифференциальное уравнение для темпа роста потребления может быть записано в следующем альтернативном виде:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\varepsilon_u(c(t))}[f_h(k(t), \xi(k(t)) - \delta_h - \rho.$$

10.11. Выведите уравнение (10.26).

10.12. Рассмотрите неоклассическую модель экономического роста, представленную в параграфе 10.4.

(a) Опишите задачу максимизации полезности потребителем в этой экономике.

(b) Определите конкурентное равновесие в этой экономике (сформулируйте задачу оптимизации для фирмы и условия равновесия на рынках).

(c) Опишите конкурентное равновесие в этой экономике и покажите, что оно совпадает с решением задачи оптимального роста.

10.13. Введите в неоклассическую модель экономического роста с физическим и человеческим капиталом, описанную в параграфе 10.4, трудоинтенсивный технологический прогресс, проходящий с темпом роста g.

(a) Определите конкурентное равновесие в этой экономике.

(b) Определите трансформированные переменные, которые остаются постоянными на траектории сбалансированного роста.

(c) Опишите траекторию сбалансированного роста и переходную динамику в этой экономике.

(d) Почему более высокий темп технологического прогресса приводит к более быстрому накоплению человеческого капитала?

***10.14.** Опишите траекторию оптимального роста экономики в модели из параграфа 10.4 при дополнительных ограничениях на невозвратность инвестиций $i_k(t) \geq 0$ и $i_h(t) \geq 0$.

10.15. Докажите, что если производственная функция $Y(t) = F(K(t), H(t))$ удовлетворяет предположениям 1 и 2, то выполняется неравенство (10.30).

10.16. Покажите, что равновесная динамика экономики в модели из параграфа 10.5 не претерпевает изменений в случае $\delta < 1$.

10.17. Выведите уравнения (10.33) и (10.34).

10.18. Приведите условия на функции $f(\cdot)$ и $\gamma(\cdot)$, необходимые для того, чтобы единственное стационарное равновесие в модели из параграфа 10.5 являлось локально устойчивым.

10.19. Рассмотрите версию модели из параграфа 10.6 для закрытой экономики. Покажите, что увеличение параметра a_1 для работников из группы 1 ведет к появлению в экономике динамической экстерналии в том смысле, что текущее значение выпуска возрастает и это приводит к увеличению инвестиций в физический и человеческий капитал в следующем периоде.

10.20. Докажите утверждение 10.5.

Глава 11
Модели эндогенного экономического роста первого поколения

Модели, описанные в первых десяти главах, посвящены анализу процесса накопления физического и человеческого капитала, в то время как экономический рост в них является следствием экзогенно заданного технологического прогресса. Несмотря на то что эти модели являются полезными при анализе источников различий в уровне дохода на душу населения между странами, имеющими общий (свободный) доступ к единой технологии, они не в состоянии объяснить устойчивый долгосрочный экономический рост (отдельной страны или мировой экономики) и вряд ли могут быть использованы для анализа межстрановых технологических различий. Для систематического анализа как межстрановых различий в уровне дохода на душу населения, так и процесса мирового экономического роста необходимы модели, в которых выбор технологии и технологический прогресс являются эндогенными переменными. Анализу таких моделей посвящена часть IV данной книги. Несмотря на то что модели, в которых динамика технологии является результатом оптимизационного выбора фирм и работников, являются наиболее привлекательными в этом контексте, долгосрочный экономический рост возможен также в неоклассической модели роста. Мы закончим эту часть книги анализом эндогенного экономического роста в неоклассической или квазинеоклассической модели роста.

С одной из таких моделей, моделью AK, мы уже познакомились в главе 2. В этой модели смягчается одно из главных предположений о виде агрегированной производственной функции (предположения 1 и 2 из главы 2) и не допускается убывающая отдача от капитала. В результате этого непрерывное накопление физического капитала может служить источником устойчивого экономического роста. Мы начнем эту главу с анализа неоклассической версии модели AK, которая является не только примером неоклассической модели эндогенного роста, но и простой моделью, используемой в приложениях в различных областях экономической науки. Однако она обладает рядом недостатков. Наиболее важным из них является то, что капитал является единственным (или по существу единственным) фактором производства и поэтому доля дохода от владения капиталом в национальном доходе асимптотически стремится к единице. Поэтому затем мы представим две различные двухсекторные модели эндогенного экономического роста, динамика экономики в которых во многом схожа с динамикой в базовой модели *AK*, однако они позволяют избавиться от такого противоречащего эмпирическим наблюдениям вывода. Первая из этих моделей опирается на накопление физического и человеческого капитала и поэтому является близким аналогом неоклассической модели экономического роста с физическим и человеческим капиталом из параграфа 10.4. Вторая модель, основанная на работе [Rebello 1991], является намного более богатой моделью и интересна еще и тем, что в ней интенсивность использования капитала в производстве потребительских и инвестиционных товаров может различаться.

Мы закончим эту главу анализом модели Пола Ромера из работы [Romer 1986a], которая была одной из первых работ по теории эндогенного экономического роста и возродила интерес экономистов к теории экономического роста. Несмотря на то что основная цель П. Ромера состояла в моделировании технологических изменений в экономике, он добился ее с помощью введения в модель перетоков технологий, схожих с теми, что мы наблюдали в главе 10. Следовательно, хотя конкурентное равновесие в модели Ромера не является оптимальным по Парето и источником экономического роста служит некоторая форма накопления знаний, эта модель во многих аспектах неоклассическая по своей природе. В частности, мы убедимся в том, что в своей сокращенной форме она во многом совпадает с базовой моделью *AK* (хотя и имеет другие последствия для благосостояния агентов).

11.1. Возвращение к модели *AK*

Мы начнем эту главу с анализа наиболее простой модели устойчивого экономического роста, с которой мы уже встретились в контексте модели экономического роста Солоу, в частности в утверждении 2.6 из главы 2. Это так называемая модель *AK*, в которой производственная функция является линейной по капиталу. Из анализа, приведенного ниже, нетрудно увидеть, что важной частью модели является не линейность производственной функции, а линейность технологии накопления капитала, однако для упрощения изложения мы начнем с наиболее простой версии модели *AK*.

11.1.1. Демографическая структура, предпочтения и технология

В этой главе и в части IV мы уделим основное внимание экономическому росту. На первом этапе мы остановимся на сбалансированном экономическом росте, то есть на траектории экономики, согласующейся с фактами Калдора (см. главу 2). Как показано в главе 8, сбалансированный рост возможен только в случае, когда функция полезности имеет CRRA-вид, как в канонической неоклассической модели экономического роста (что гарантирует постоянство межвременной эластичности замещения потребления).

Предположим, что экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства с бесконечным горизонтом планирования, а размер домохозяйства растет экспоненциально с темпом n. Предпочтения репрезентативного домохозяйства в момент времени $t = 0$ заданы следующей целевой функцией:

$$\int_0^\infty \exp(-(\rho - n)t)\frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}dt. \tag{11.1}$$

Предложение труда домохозяйствами абсолютно неэластично. Потоковое бюджетное ограничение домохозяйства имеет следующий вид:

$$\dot{a}(t) = (r(t) - n)a(t) + w(t) - c(t), \tag{11.2}$$

где переменная $a(t)$ обозначает запас финансовых активов на душу населения в момент времени t, переменная $w(t)$ — заработную плату одного работника, а константа n — темп роста населения. Как обычно, мы наложим условие отсутствия игр Понци в следующем виде:

$$\lim_{t\to\infty}\left[a(t)\exp\left(-\int_0^t (r(s) - n)ds\right)\right] \geq 0. \tag{11.3}$$

Уравнение Эйлера для репрезентативного домохозяйства имеет тот же вид, что и ранее, и из него следует, что темп роста потребления определяется следующим уравнением:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}(r(t) - \rho). \tag{11.4}$$

Тогда из условия трансверсальности для домохозяйства следует, что

$$\lim_{t\to\infty}\left[a(t)\exp\left(-\int_0^t (r(s) - n)ds\right)\right] = 0. \tag{11.5}$$

Как и ранее, задача максимизации является вогнутой и поэтому любое решение, удовлетворяющее этим условиям, в действительности является оптимальным планом для репрезентативного домохозяйства.

Производственная структура экономики схожа со структурой в неоклассической модели экономического роста, однако предположения 1 и 2 не выполняются. А именно предположим, что агрегированная производственная функция имеет следующий вид:

$$Y(t) = AK(t),$$

где $A > 0$. Заметим, что труд не является аргументом производственной функции, поэтому заработная плата $w(t)$ в ограничении (11.2) тождественно равна нулю. Это одно из непривлекательных свойств базовой модели AK, однако мы ослабим его далее (оно также ослаблено в упражнениях 11.3 и 11.4). Разделив обе части этого уравнения на $L(t)$ и используя стандартное определение $k(t) \equiv K(t)/L(t)$ для отношения капитала к труду, приходим к следующему виду производственной функции на душу населения:

$$y(t) \equiv \frac{Y(t)}{L(t)} = Ak(t). \tag{11.6}$$

Уравнение (11.6) обладает рядом важных отличий от производственной функции, удовлетворяющей предположениям 1 и 2. Во-первых, выпуск зависит только от капитала, и в производстве отсутствует убывающая отдача от капитала (то есть условие $f''(\cdot) < 0$ не выполняется). Это предположение сделано для упрощения модели, и введение убывающей отдачи от капитала не изменяет основных результатов этого параграфа (см. упражнение 11.4). Более важное предположение состоит в том, что условия Инада, включенные в предположение 2, также не выполняются. В частности,

$$\lim_{k \to \infty} f'(k) = A > 0.$$

Это свойство важно для существования траектории устойчивого роста.

Условие максимизации прибыли фирмой схоже с заданными ранее и заключается в том, что предельный продукт капитала равен арендной стоимости капитала $R(t) = r(t) + \delta$. Из того, что по условию (11.6) предельный продукт капитала является постоянной величиной, равной A, следует, что $R(t) = A$ и

$$r(t) = r = A - \delta. \tag{11.7}$$

Так как предельный продукт труда равен нулю, трудовой доход также равен нулю.

11.1.2. Равновесие

Конкурентное равновесие в этой модели состоит из траекторий потребления на душу населения, отношения капитала к труду, заработной платы и арендной стоимости капитала $[c(t),\ k(t),\ w(t),\ R(t)]_{t=0}^{\infty}$, таких, что репрезентативное домохозяйство максимизирует целевую функцию (11.1) при ограничениях (11.2) и (11.3) и начальном значении отношения капитала к труду $k(0)$ и траекторий цен факторов производства $[w(t),\ r(t)]_{t=0}^{\infty}$, таких, что заработная плата $w(t) = 0$ для всех t и процентная ставка $r(t)$ удовлетворяет условию (11.7).

Чтобы описать равновесие, заметим, как и ранее, что $a(t) = k(t)$. Используя равенства $r = A - \delta$ и $w = 0$, из условий (11.2), (11.4) и (11.5), получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{k}(t) = (A - \delta - n)k(t) - c(t), \tag{11.8}$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho) \tag{11.9}$$

и

$$\lim_{t\to\infty}\left[k(t)\exp(-(A - \delta - n)t)\right] = 0. \tag{11.10}$$

Из того, что правая часть уравнения (11.9) является постоянной величиной, следует, что потребление растет с постоянным темпом (положительным, если $A - \delta - n > 0$). Следовательно, темп роста потребления на душу населения не зависит от значения запаса капитала на душу населения $k(t)$. Из этого наблюдения о независимости следует, что в модели отсутствует переходная динамика. При любом начальном значении $k(0) > 0$ потребление на душу населения (и, как мы убедимся далее, отношение капитала к труду) моментально начинает расти с постоянным темпом. Чтобы доказать это утверждение более строго, проинтегрируем уравнение (11.9) при некотором начальном значении $c(0)$, которое, как обычно, будет найдено из межвременного бюджетного ограничения домохозяйства. Тогда имеем следующее равенство:

$$c(t) = c(0)\exp\left(\frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho)t\right). \tag{11.11}$$

Так как потребление домохозяйств растет во времени, нам необходимо убедиться в том, что целевая функция домохозяйства ограничена сверху конечным числом, что, как и ранее, эквивалентно требованию о выполнении условия трансверсальности. Нам также необходимо гарантировать положительный темп роста экономики. Поэтому предположим, что выполняются следующие неравенства:

$$A > \rho + \delta > (1 - \theta)(A - \delta) + \theta n + \delta. \tag{11.12}$$

Из первого неравенства следует, что темп роста выпуска и потребления является положительной величиной, а второе неравенство является аналогом неравенства $\rho + \theta g > g + n$ в неоклассической модели экономического роста с технологическим прогрессом.

11.1.3. Характеристика равновесия в модели

Вначале покажем, что в экономике отсутствует переходная динамика. А именно что не только темп роста потребления, но и темп роста отношения капитала к труду является в любой момент постоянной величиной времени и равен темпу роста потребления на душу населения, заданному уравнением (11.9). Подставляя значение потребления $c(t)$ из уравнения (11.11) в уравнении (11.8), имеем следующее неавтономное линейное дифференциальное уравнение первого порядка для отношения капитала к труду $k(t)$:

$$\dot{k}(t) = (A - \delta - n)k(t) - c(0)\exp\left(\frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho)t\right). \tag{11.13}$$

Его решение (см. параграф В.4) выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} k(t) = \kappa\exp((A - \delta - n)t) + \\ + [(A - \delta)(\theta - 1)\theta^{-1} + \rho\theta^{-1} - n]^{-1}[c(0)\exp(\theta^{-1}(A - \delta - \rho)t)], \end{gathered} \tag{11.14}$$

где значение константы κ будет определено далее. Из предположения (11.12) следует, что выполняется неравенство:

$$(A - \delta)(\theta - 1)\theta^{-1} + \rho\theta^{-1} - n > 0.$$

Анализ уравнения (11.14) может навести на мысль о том, что капитал (отношение капитала к труду) не растет с постоянным темпом, так как он равен сумме двух слагаемых, растущих с разной скоростью. Однако из условия трансверсальности следует, что это не так. Подставляя значение отношения капитала к труду из уравнения (11.14) в условие трансверсальности (11.10), имеем следующее равенство:

$$\begin{gathered} \lim_{t\to\infty}[\kappa + [(A - \delta)(\theta - 1)\theta^{-1} + \rho\theta^{-1} - n]^{-1} \times \\ \times c(0)\exp(-((A - \delta)(\theta - 1)\theta^{-1} + \rho\theta^{-1} - n)t)] = 0. \end{gathered}$$

Из того, что $(A - \delta)(\theta - 1)\theta^{-1} + \rho\theta^{-1} - n > 0$, следует, что второе слагаемое в пределе сходится к нулю при $t \to \infty$. Однако первое слагаемое является постоянной величиной. Поэтому условие трансверсальности будет выполняться только если $\kappa = 0$. Таким образом, уравнение (11.14) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} k(t) &= [(A - \delta)(\theta - 1)\theta^{-1} + \rho\theta^{-1} - n]^{-1}[c(0)\exp(\theta^{-1}(A - \delta - \rho)t)] = \\ &= k(0)\exp(\theta^{-1}(A - \delta - \rho)t), \end{aligned} \tag{11.15}$$

где второе равенство напрямую следует из наблюдения о том, что значение капитала в момент времени $t = 0$ равно $k(0)$. Следовательно, капитал и выпуск растут с тем же темпом, что и потребление.

Из уравнения (11.15) можно найти начальное значение потребления на душу населения:

$$c(0) = [(A - \delta)(\theta - 1)\theta^{-1} + \rho\theta^{-1} - n]k(0). \tag{11.16}$$

Заметим, что в этой простой модели AK рост экономики не только является устойчивым, но и эндогенным в том смысле, что значение темпа роста зависит от значений параметров модели. Например, рассмотрим увеличение нормы дисконтирования ρ. Напомним, что в модели Рамсея такое изменение на траектории сбалансированного роста влияет только на уровень дохода на душу населения, темп роста экономики остается неизменным и определяется экзогенно заданным темпом трудоинтенсивного технологического прогресса. Из данной модели нетрудно убедиться, что увеличение параметра ρ ведет к снижению темпа роста экономики. Домохозяйства становятся менее терпеливыми и скорость накопления капитала снижается. Так как накопление капитала является основным источником роста, равновесный темп роста экономики также снижается. Аналогичным образом изменение параметров A и θ влияет как на уровень, так и на темп роста потребления, капитала и выпуска.

Наконец, найдем равновесную норму сбережений. Определим ее как отношение общего количества инвестиций (которые равны сумме прироста капитала и инвестиций, покрывающих выбытие капитала) к выпуску. Тогда имеем следующие равенства:

$$s = \frac{\dot{K}(t) + \delta K(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{k}(t)/k(t) + n + \delta}{A} = \frac{A - \rho + \theta n + (\theta - 1)\delta}{\theta A}, \tag{11.17}$$

где в последнем равенстве используется тот факт, что $\dot{k}(t)/k(t) = (A - \delta - \rho)/\theta$. Из этого равенства следует, что норма сбережений, значение которой предполагалось постоянным и экзогенно заданным в базовой модели экономического роста Солоу, оказывается постоянной и в модели AK, однако сейчас ее величина определяется предпочтениями домохозяйств и технологиями.

Утверждение 11.1. *Рассмотрим экономику в модели AK с репрезентативным домохозяйством с предпочтениями, заданными целевой функцией* (11.1) *и агрегированной производственной функцией, заданной уравнением* (11.6). *Предположим, что условие* (11.12) *выполнено. Тогда в ней существует единственная равновесная траектория, на которой потребление, капитал и доход на душу населения растут с одинаковым* *постоянным темпом роста* $g^* \equiv (A - \delta - \rho)/\theta > 0$ *начиная с любого положительного значения капитала на душу населения* $k(0) > 0$, *а норма сбережений задается уравнением* (11.17).

Одно из важных следствий из модели AK состоит в том, что из совершенной конкуренции на всех рынках, существования репрезентативного домохозяйства и отсутствия экстерналий следует, что конкурентное равновесие является оптимальным по Парето. Это утверждение можно доказать с помощью первой теоремы экономики благосостояния (теоремы 5.6) или с помощью явного построения решения задачи оптимального роста.

Утверждение 11.2. *Рассмотрим экономику в модели AK с репрезентативным домохозяйством с предпочтениями, заданными целевой функцией* (11.1) *и агрегированной производственной функцией, заданной уравнением* (11.6). *Предположим, что условие* (11.12) *выполнено. Тогда единственное конкурентное равновесие является оптимальным по Парето.*

Доказательство. См. упражнение 11.2. ■

11.1.4. Роль экономической политики

В модель AK нетрудно ввести межстрановые различия в экономической политике и проанализировать их влияние на равновесный темп экономического роста. Предположим, как и в главе 8, что в экономике взимается налог на доход от владения капиталом по налоговой ставке τ. Тогда потоковое бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства принимает следующий вид:

$$\dot{a}(t) = ((1-\tau)r(t) - n)a(t) + w(t) - c(t). \tag{11.18}$$

С помощью рассуждений, аналогичных использованным в предыдущем подпараграфе, нетрудно убедиться, что налог на капитал влияет на равновесный темп роста экономики, который становится равным (см. упражнение 11.5)

$$g = \frac{(1-\tau)(A-\delta) - \rho}{\theta}. \tag{11.19}$$

Более того, норма сбережений в данном случае становится равной

$$s = \frac{(1-\tau)A - \rho + \theta n - (1-\tau-\theta)\delta}{\theta A}. \tag{11.20}$$

Нетрудно заметить, что если $A - \delta > 0$, то норма сбережений является убывающей функцией от налоговой ставки τ. Следовательно, в этой модели равновесная норма сбережений эндогенно реагирует на изменения в экономической политике. Более того, из того, что норма сбережений является постоянной величиной, следует, что различия в экономической политике ведут к перманентным различиям в темпе накопления капитала. Из этого наблюдения следует очень важный вывод. В то время как в базовой неоклассической модели экономического роста даже разумные значительные различия в налоговых ставках имели лишь ограниченный вклад в различия в уровне дохода на душу населения, в этой модели даже небольшие различия в ставке τ могут иметь значительное влияние на темп роста экономик и уровень дохода. В частности, рассмотрим две экономики с одинаковыми предпочтениями и производственной структурой, но с различными (постоянными) ставками налога на доход от владения капиталом, τ и $\tau' > \tau$. Тогда для любого $\tau' > \tau$ имеем:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y(\tau', t)}{Y(\tau, t)} = 0,$$

где переменная $Y(\tau, t)$ обозначает совокупный выпуск в экономике с налоговой ставкой τ в момент времени t. Поэтому даже небольшие различия в экономической политике в долгосрочной перспективе могут оказывать очень значительное воздействие на экономику. Почему тогда в литературе так много внимания уделяется вопросу о том, по какой причине стандартная неоклассическая модель экономического роста не способна объяснить значительные межстрановые различия, а не вопросу о том, что модель AK в состоянии сгенерировать любые сколь угодно большие различия? Существует два ответа на этот вопрос. Во-первых, как мы заметили выше, модель AK, в которой отсутствует убывающая отдача от капитала и доля дохода капитала в национальном доходе асимптотически стремится к единице, не рассматривается экономистами как хорошая аппроксимация реальной экономики. Во-вторых, в свете материала из главы 1, многие экономисты считают, что относительная устойчивость мирового распределения доходов в послевоенные годы делает модели, в которых мировое распределение доходов стабильно, более привлекательными по сравнению с моделями, в которых даже небольшие различия в экономической политике могут привести к перманентному расхождению темпов роста экономик. Оправданность такого мнения отчасти является вопросом эмпирических исследований.

11.2. Модель *AK* с физическим и человеческим капиталом

Как отмечено в предыдущем параграфе, основной недостаток базовой модели AK в том, что доля дохода капитала в национальном доходе равна единице (или стремится к единице в версии модели, рассмотренной в упражнениях 11.3 и 11.4). Одним из возможных способов обогатить модель AK и избежать подобной проблемы является включение в модель как физического, так и человеческого капитала. В этом параграфе мы коротко опишем такое расширение модели. Предположим, что экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства с предпочтениями, заданными целевой функцией (11.1). Производственная структура экономики схожа со структурой из параграфа 10.4, однако мы эмпирически правдоподобно предположим, что человеческий капитал увеличивает число эффективных единиц труда (а не является еще одним независимым фактором производства). В частности, агрегированная производственная функция имеет следующий вид:

$$Y(t) = F(K(t), H(t)), \tag{11.21}$$

где переменная $H(t)$ обозначает количество эффективного труда (человеческого капитала) в экономике, который накапливается таким же образом, как и физический капитал. Предположим, что производственная функция $F(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет предположениям 1 и 2. Для упрощения дальнейшего анализа также предположим, что рост населения в экономике отсутствует, то есть $n = 0$.

Потоковое бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства имеет следующий вид:

$$\dot{a}(t) = r(t)a(t) + w(t)h(t) - c(t) - i_h(t), \tag{11.22}$$

где переменная $h(t)$ обозначает запас эффективного труда (человеческого капитала) репрезентативного домохозяйства, переменная $w(t)$ — заработную плату единицы человеческого капитала, а переменная $i_h(t)$ — инвестиции репрезентативного домохозяйства в человеческий капитал. Как и в параграфе 10.4, предположим, что динамика накопления человеческого капитала задается следующим обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\dot{h}(t) = i_h(t) - \delta_h h(t), \tag{11.23}$$

где константа δ_h обозначает норму амортизации человеческого капитала. Динамика накопления физического капитала следует из тождества $a(t) = k(t)$, а норма амортизации физического капитала равна δ_k. Задача максимизации полезности репрезентативным домохозяйством состоит в оптимальном выборе траекторий потребления, инвестиций в человеческий капитал и финансовой позиции. Из совершенной конкуренции на рынках факторов производства вытекают следующие условия для их цен:

$$R(t) = f'(k(t)) \text{ и } w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)), \tag{11.24}$$

где отношение капитала к эффективному труду получается делением запаса физического капитала на запас человеческого капитала в экономике:

$$k(t) \equiv \frac{K(t)}{H(t)}.$$

Конкурентное равновесие в этой экономике состоит из траекторий потребления на душу населения, отношения капитала к эффективному труду, заработной платы и арендной стоимости капитала $[c(t),\ k(t),\ w(t),\ R(t)]_{t=0}^{\infty}$, таких, что целевая функция репрезентативного домохозяйства (11.1) достигает максимума при ограничениях (11.3), (11.22) и (11.23) при заданном начальном значении отношения капитала к эффективному труду $k(0)$ и ценах факторов производства $[w(t),\ R(t)]_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям (11.24).

Чтобы описать конкурентное равновесие, построим текущий гамильтониан с сопряженными переменными μ_a и μ_h в следующем виде:

$$\mathcal{H}(a,\ h,\ c,\ i_h,\ \mu_a,\ \mu_h) = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} +$$
$$+\ \mu_a[r(t)a(t)+w(t)h(t)-c(t)-i_h(t)] + \mu_h\left[i_h(t)-\delta_h h(t)\right].$$

Как и ранее, мы можем построить следующее возможное решение этой задачи максимизации с помощью теоремы 7.13 (см. упражнение 11.8):

$$\begin{aligned} &\mu_a(t) = \mu_h(t) = \mu(t) \text{ при всех } t,\\ &w(t) - \delta_h = r(t) \text{ при всех } t, \\ &\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}(r(t)-\rho) \text{ при всех } t. \end{aligned} \tag{11.25}$$

Интуитивным образом, первое из условий (11.25) говорит о том, что, так как в экономике отсутствуют ограничения на инвестиции в физический и человеческий капитал, теневые стоимости двух различных типов инвестиций должны совпадать в каждый момент времени. Из этого, в свою очередь, следует второе условие (11.25), в котором утверждается равенство доходностей физического и человеческого капитала. Третье условие представляет собой стандартное уравнение Эйлера для потребления. Следовательно, решение, удовлетворяющее условиям (11.25), обязательно будет решением задачи максимизации репрезентативного домохозяйства. Более того, используя те же рассуждения, что и в упражнении 8.11, нетрудно показать, что это решение единственно.

Объединяя условия (11.25) и (11.24), получаем следующее уравнение:

$$f'(k(t)) - \delta_k = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) - \delta_h \text{ при всех } t.$$

Из того, что левая часть этого уравнения является убывающей функцией от $k(t)$, а его правая часть является возрастающей функцией от $k(t)$, следует, что значение отношения капитала к эффективному труду удовлетворяет следующему равенству:

$$k(t) = k^* \text{ при всех } t.$$

Утверждение 11.3. *Рассмотрим модель AK с физическим и человеческим капиталом с предпочтениями, заданными целевой функцией* (11.1) *и производственной технологией, заданной уравнением* (11.21). *Положим* k^* *равным корню уравнения*

$$f'(k^*) - \delta_k = f(k^*) - k^* f'(k^*) - \delta_h. \qquad (11.26)$$

Предположим, что выполняются неравенства $f'(k^*) > \rho + \delta_k > (1-\theta)(f'(k^*) - \delta) + \delta_k$. *Тогда в этой экономике существует единственная равновесная траектория, на которой потребление, физический капитал, человеческий капитал и выпуск растут с постоянным темпом* $g^* \equiv (f'(k^*) - \delta_k - \rho)/\theta > 0$ *начиная с любого начального значения* $k(0)$, *где* k^* *задано уравнением* (11.26). *Доля дохода капитала в национальном доходе в равновесии является постоянной величиной, строго меньшей единицы.*

Преимущество модели, представленной в этом параграфе, перед базовой моделью *AK* состоит в том, что в ней имеется устойчивое распределение национального дохода и значительная доля национального дохода является доходом труда (в качестве вознаграждения человеческого капитала). Следовательно, эта модель уже не может быть подвергнута критике в связи с тем, что доля капитала в национальном доходе в ней несопоставимо высока по сравнению с данными. Используя рассуждения, схожие с рассуждениями из предыдущего параграфа, нетрудно убедиться, что в этой модели небольшие различия в экономической политике также ведут к перманентным долгосрочным различиям в темпах роста экономик. Следовательно, модель может быть использована для объяснения сколь угодно значительных межстрановых различий в уровне дохода на душу населения. Однако это достигается отчасти с помощью значительных межстрановых различий в запасе человеческого капитала. Поэтому эмпирический механизм, с помощью которого модель генерирует столь значительные межстрановые различия в уровне дохода на душу населения, снова может не соответствовать эмпирическим данным, описанным в главе 3. Более того, при столь значительных межстрановых различиях в экономической политике в послевоенные годы из этой модели, так же как и из базовой модели *AK*, следует, что мировое распределение доходов должно было претерпеть значительные изменения. Однако эмпирические свидетельства, представленные в главе 1, говорят об относительной стабильности мирового распределения доходов в послевоенные годы.

11.3. Двухсекторная модель *AK*

Модель, представленная в двух предыдущих параграфах, является привлекательной по множеству причин: в ней присутствует равновесная траектория устойчивого роста, значение темпа роста на ней зависит от структуры предпочтений домохозяйств, вида производственной технологии и экономической политики властей. Более того, она во многом схожа с неоклассической моделью экономического роста. На самом деле, как мы показали, равновесная траектория эндогенного роста в модели является оптимальной по Парето.

Одно из непривлекательных свойств базовой модели AK из параграфа 11.1 состоит в том, что весь национальный доход распределяется между владельцами капитала. По существу, модель AK — это односекторная модель с единственным фактором производства — капиталом. Это ограничение значительно затрудняет возможность применения модели для эмпирического анализа динамики реальных экономик. Использование модели из предыдущего параграфа позволяет избежать этой проблемы, однако в некотором смысле это достигается за счет создания еще одного фактора производства, процесс накопления которого является линейным, поэтому равновесная структура экономики оказывается эквивалентной структуре экономики в односекторной модели AK. Следовательно, на более глубоком уровне, обе эти модели являются односекторными моделями. В дополнение к односекторной структуре экономики еще одним важным недостатком модели является то, что основная причина устойчивого роста экономики показана в модели лишь неявно. Важнейшей причиной устойчивого роста экономики в модели является линейная структура *технологии накопления капитала*, а не производственная технология вида AK. В этом параграфе мы представим более общую двухсекторную модель неоклассического эндогенного роста, основанную на работе [Rebelo 1991]. В этой модели распределение национального дохода между факторами производства в фиксированных пропорциях достигается без введения человеческого капитала. В ней также хорошо проиллюстрирована роль различий в интенсивности использования капитала в производственных функциях для потребительских и инвестиционных товаров.

Предпочтения домохозяйств и демографическая структура экономики совпадают с предпочтениями и демографией в модели из параграфа 11.1. В частности, равенства (11.1)–(11.5) продолжают выполняться (с немного отличной, как показано далее, интерпретацией процентной ставки в уравнении (11.4)). Более того, для упрощения выкладок предположим, что рост населения в экономике отсутствует, то есть что $n = 0$ и что предложение труда в экономике абсолютно неэластично и равно L.

Основное отличие модели состоит в структуре производственной технологии. Вместо предположения о едином товаре, используемом как для потребления, так и для инвестиций, предположим, что в экономике существуют два сектора. В первом секторе производятся потребительские товары, и производственная функция имеет следующий вид:

$$C(t) = BK_C(t)^{\alpha} L_C(t)^{1-\alpha}, \tag{11.27}$$

где индекс «С» обозначает, что это количество капитала и труда используется в производстве потребительских товаров с производственной функцией типа Кобба—Дугласа. Необходимо отметить, что предположение о таком виде производственной функции достаточно важно для того, чтобы доли факторов производства в национальном доходе в равновесии были постоянны (см. упражнение 11.2). Динамика накопления капитала задается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t),$$

где переменная $I(t)$ обозначает инвестиции. Инвестиционные товары производятся во втором секторе экономики, и производственная функция в нем имеет следующий вид:

$$I(t) = AK_I(t). \tag{11.28}$$

Важная особенность производственной технологии в секторе инвестиционных товаров состоит в том, что она является линейной по капиталу и не включает в себя труд как фактор производства. Это предположение является экстремальной формой предположения о том, что в производстве инвестиционных товаров капитал используется более интенсивно, чем в производстве потребительских товаров, обычно используемом в двухсекторных моделях. Это предположение отчасти подтверждается экономическими данными, однако интенсивность использования капитала в различных секторах экономики изменяется во времени и, более того, структура потребительских и инвестиционных товаров также претерпевает изменения.

Из условий равновесия на рынках капитала и труда следует, что

$$K_I(t) + K_C(t) \leq K(t)$$

и, так как труд используется только в секторе потребительских товаров,

$$L_C(t) \leq L.$$

Равновесие в такой модели определяется аналогично равновесию в неоклассической модели роста, однако оно также описывает решения агентов о распределении капитала между потребительским и инвестиционными секторами экономики. Более того, в двух секторах производятся различные товары — потребительский товар и инвестиционный товар, поэтому в модели появляется еще одна эндогенная переменная — относительная цена этих двух товаров.

В силу того что условия равновесия на обоих рынках факторов производства выполняются как равенства (так как предельный продукт обоих факторов производства всегда является положительной величиной), мы можем упростить обозначение, введя дополнительную переменную $\kappa(t)$, которая обозначает долю капитала, используемую в производстве инвестиционных товаров. Тогда

$$K_C(t) = (1 - \kappa(t))K(t) \text{ и } K_I(t) = \kappa(t)K(t).$$

Из условия максимизации прибыли следует, что доходность капитала, если он используется в производстве обоих товаров, должна совпадать в обоих секторах. Обозначим цену инвестиционного товара как $p_I(t)$, а цену потребительского товара как $p_C(t)$. Тогда из производственных функций (11.27) и (11.28) вытекает следующее равенство:

$$p_I(t)A = p_C(t)\alpha B\left(\frac{L}{(1-\kappa(t))K(t)}\right)^{1-\alpha}. \tag{11.29}$$

Определим траекторию сбалансированного роста (ТСР) как траекторию, на которой переменная $\kappa(t)$ постоянна и равна некоторому вещественному $\kappa^* \in [0, 1]$. Более того, выберем потребительский товар в качестве единицы измерения и положим $p_C(t) = 1$ для всех t. Тогда, дифференцируя равенство (11.29) по времени, получаем, что на ТСР выполняется следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\dot{p}_I(t)}{p_I(t)} = -(1-\alpha)g_K, \tag{11.30}$$

где константа g_K обозначает темп роста капитала на ТСР.

Как мы отметили ранее, уравнение Эйлера для потребления (11.4) в этой модели продолжает выполняться, однако релевантной процентной ставкой в ней должна быть процентная ставка для *займов, номинированных в потребительских товарах*, которую мы обозначим как $r_C(t)$. Эта процентная ставка измеряет количество потребительских товаров, которое индивид получит завтра, если сегодня он предоставил взаймы единицу потребительского товара. Так как относительные цены потребительских и инвестиционных товаров изменяются во времени, для ее расчета необходимо применить следующие рассуждения. Предоставляя взаймы единицу потребительского товара в момент времени t, индивид сможет приобрести $1/p_I(t)$ единиц капитала. Этот капитал приносит моментальную доходность, равную $r_I(t)$. В дополнение к этому индивид получает доход от изменения цены инвестиционного товара в размере $\dot{p}_I(t)/p_I(t)$. Наконец, после получения дохода он приобретает потребительский товар, цена которого также изменилась на $\dot{p}_C(t)/p_C(t)$. Следовательно, общая формула для процентной ставки, деноминированной в потребительских товарах как функции процентной ставки, деноминированной в инвестиционных товарах, выглядит следующим образом:

$$r_C(t) = \frac{r_I(t)}{p_I(t)} + \frac{\dot{p}_I(t)}{p_I(t)} - \frac{\dot{p}_C(t)}{p_C(t)}. \tag{11.31}$$

Из выбора потребительского товара в качестве единицы измерения следует, что $\dot{p}_C(t)/p_C(t)=0$. Более того, значение $\dot{p}_I(t)/p_I(t)$ задано уравнением (11.30). Наконец, из линейности производственной функции (11.28) следует, что

$$\frac{r_I(t)}{p_I(t)}=A-\delta.$$

Таким образом, мы получаем следующее равенство для процентной ставки $r_C(t)$:

$$r_C(t)=A-\delta+\frac{\dot{p}_I(t)}{p_I(t)}.$$

Тогда из условия (11.30) следует, что процентная ставка r_C на ТСР равна:

$$r_C=A-\delta-(1-\alpha)g_K.$$

Из уравнения (11.4) темп роста потребления равен:

$$g_C=\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}=\frac{1}{\theta}(A-\delta-(1-\alpha)g_K-\rho). \tag{11.32}$$

Далее, дифференцируя производственную функцию (11.27) и учитывая, что занятость в экономике постоянна, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}=\alpha\frac{\dot{K}_C(t)}{K_C(t)}.$$

Так как доля $\kappa(t)$ постоянна на ТСР, из этого равенства следует, что на ТСР выполняется следующее тождество:

$$g_C=\alpha g_K.$$

Подставляя его в равенство (11.32), получаем значение темпов роста капитала потребления на ТСР:

$$g_K^*=\frac{A-\delta-\rho}{1-\alpha(1-\theta)} \tag{11.33}$$

и

$$g_C^*=\alpha\frac{A-\delta-\rho}{1-\alpha(1-\theta)}. \tag{11.34}$$

Что мы можем сказать о заработной плате на ТСР? Так как труд используется только в секторе производства потребительских товаров, заработная плата будет принимать положительное значение. Из совершенной конкуренции на рынке труда вытекает следующее условие:

$$w(t)=(1-\alpha)p_C(t)B\left(\frac{1-\kappa(t)K(t)}{L}\right)^{\alpha}.$$

Следовательно, на ТСР мы имеем следующее равенство:

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}=\frac{\dot{p}_C(t)}{p_C(t)}+\alpha\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}=\alpha g_K^*,$$

из которого следует, что заработная плата на ТСР растет с тем же темпом, что и потребление.

Более того, используя рассуждения, аналогичные рассуждениям из параграфа 11.2, нетрудно показать, что в этой модели отсутствует переходная динамика экономики. Вышеприведенный анализ резюмируется в следующем утверждении.

Утверждение 11.4. *В описанной выше двухсекторной неоклассической модели экономического роста существует единственная равновесная траектория, на которой при любом начальном значении капитала* $K(0) > 0$. *потребление и доход труда растут с постоянным темпом, заданным уравнением* (11.34), *а капитал растет с постоянным темпом, заданным уравнением* (11.33).

Анализ последствий изменений экономической политики в этой модели схож с аналогичным анализом в базовой модели *АК*: налог на инвестиционный доход и другие меры политики, которые дестимулируют инвестиции, ведут к снижению равновесного темпа роста экономики.

Важным свойством этой модели, которое отличает ее от неоклассической модели экономического роста, является то, что в экономике происходит непрерывный процесс *углубления капитала*. Темп роста капитала превышает темпы роста потребления и выпуска. Вопрос, насколько такой вывод соответствует эмпирическим данным, является предметом исследования. Факты Калдора, изложенные в главе 2, включают в себя утверждение о постоянном отношении количества капитала к выпуску как одно из требований сбалансированного роста экономики. «Сбалансированный рост» в этой модели не удовлетворяет таким требованиям. В течение почти всего XX века отношение капитала к выпуску оставалось стабильным, однако оно непрерывно росло в течение последних тридцати лет. Одной из причин такого роста является подстройка относительных цен товаров. Новый капитал обладает очень высоким качеством, и это свойство необходимо учитывать в расчете отношения капитала к выпуску. Такие вычисления были сделаны экономистами лишь недавно, и это может служить одним из объяснений стабильности отношения капитала к выпуску в раннем периоде XX в. и его росте в последние годы. Поэтому у нас нет убедительных эмпирических свидетельств, позволяющих определить, является ли предположение о постоянном отношении капитала к выпуску лучшей аппроксимацией реальности по сравнению с предположением о растущем отношении капитала к выпуску.

11.4. Экономический рост в модели с экстерналиями

Первая модель эндогенного экономического роста, которая возродила интерес экономистов к теории экономического роста, была представлена в работе Пола Ромера [Romer 1986a]. Основная задача, которую поставил П. Ромер, состояла в построении модели накопления знаний. Он понимал, что ее трудно решить в контексте конкурентной экономики. Первоначальное решение, предложенное П. Ромером (улучшенное в его последующих работах в 1990-е гг.), состояло в предположении о том, что накопление знаний является процессом, *сопутствующим* накоплению капитала. Другими словами, П. Ромер ввел в модель технологические переливы, схожие с экстерналиями от человеческого капитала, рассмотренные нами в главе 10. Хотя такой подход и является условным, он описывает важное свойство знаний, а именно то, что знания являются *неконкурентным* товаром — как только некоторая технология становится известной, множество фирм получает возможность пользоваться ею, и это не препятствует использованию этой технологии другими фирмами. Из неконкурентности знаний не следует их неисключаемость (в противном случае они стали бы общественным благом). Фирма, открывшая новую технологию, может использовать патентное законодательство или другие методы для того, чтобы предотвратить использование этой технологии другими фирмами. Эти вопросы будут обсуждаться в части IV данной книги. В данный момент нам достаточно лишь отметить, что некоторые важные характеристики знаний и их роли в производственном процессе могут быть описаны в виде сокращенной формы с помощью введения в модель технологических переливов. Далее мы остановимся на одном из вариантов модели из работы [Romer 1986a], в котором такие технологические переливы являются основным источником экономического роста. Несмотря на то что технологические переливы, используемые в модели, вряд ли могут быть источником устойчивого роста на практике, она является хорошей начальной точкой в нашем анализе эндогенного технологического прогресса, а ее схожесть с базовой моделью AK делает ее удобной и несложной моделью накопления знаний.

11.4.1. Предпочтения и технология

Рассмотрим экономику с постоянным населением (далее мы убедимся в том, почему предположение о нулевом росте населения является важным). По причине, которая станет понятна далее, вместо того чтобы рассматривать агрегированную производственную функцию, предположим, что в экономике присутствует континуум фирм, расположенных на отрезке $[0, 1]$. Производственная функция каждой из фирм $i \in [0, 1]$ имеет следующий вид:

$$Y_i(t) = F(K_i(t), AL_i(t)), \tag{11.35}$$

где переменные $K_i(t)$ и $L_i(t)$ обозначают капитал и труд, используемый фирмой i. Заметим, что трудоинтенсивная технологическая переменная A не имеет индекса i, так как она является общей для всех фирм. Предположим, что производственная функция F удовлетворяет предположениям 1 и 2. Нормализуем меру множества фирм, производящих конечный товар, единицей. Тогда имеем следующие равенства:

$$\int_0^1 K_i(t)di = K(t)$$

и

$$\int_0^1 L_i(t)di = L$$

для всех t, где константа L обозначает постоянный уровень абсолютно неэластичного предложения труда. Предположим, что фирмы конкурируют друг с другом на всех рынках. Отсюда следует, что отношение капитала к эффективному труду будет одинаковым на всех фирмах. Более того, стоимость факторов производства будет совпадать с их предельным продуктом, то есть

$$w(t) = \frac{\partial F(K(t),\ A(t)L)}{\partial L}$$

и

$$R(t) = \frac{\partial F(K(t),\ A(t)L)}{\partial K}.$$

Ключевым предположением работы [Romer 1986a] является гипотеза о том, что, несмотря на то что все фирмы рассматривают значение $A(t)$ как заданную, не зависящую от их действий величину, набор доступных технологий (знаний) во всей экономике изменяется эндогенно. В частности, П. Ромер предполагает, что это является результатом переливов между фирмами и связывает эти переливы с накоплением физического капитала. Роберт Лукас [Lucas 1988] строит похожую модель с идентичной структурой, в которой переливы действуют через накопление человеческого капитала (то есть в модели Ромера присутствуют экстерналии от физического капитала, а в модели Лукаса — от человеческого капитала).

Идея о существовании экстерналий в экономике рассматривалась экономистами и ранее, однако Р. Лукас и П. Ромер делают экстремальное предположение о мощности экстерналий, достаточной для того, чтобы технология $A(t)$ могла непрерывно расти на уровне всей экономики.

В частности, П. Ромер предполагает, что выполняется следующее равенство:

$$A(t) = BK(t), \tag{11.36}$$

то есть запас знаний в экономике пропорционален количеству капитала в ней. Это предположение можно обосновать в рамках подхода «обучение в процессе производства», в котором предполагается, что рост инвестиций в некотором секторе экономики приводит к росту опыта (фирм, работников и менеджеров), необходимого в процессе производства, что делает этот процесс более эффективным. Альтернативой предположению (11.36) является более подходящее в рамках подхода «обучение в процессе производства» предположение о том, что запас знаний в экономике в некоторый момент времени является функцией от общего выпуска, произведенного до этого момента. Заметим, что из уравнений (11.35) и (11.36) следует, что агрегированная производственная функция в экономике обладает свойством возрастающей отдачи от масштаба. Как будет подробно показано в части IV, это свойство является общим свойством большинства моделей эндогенного экономического роста. Из него также следует, что в этом классе моделей мы не имеем возможности использовать теорему о репрезентативной фирме (теорему 5.4). На более общем уровне теорема 5.4 применима только в моделях, в которых отсутствуют экстерналии и все фирмы рассматривают цены как заданные величины, в то время как почти во всех моделях эндогенного экономического роста, начиная с модели Ромера в этом параграфе, присутствуют технологические экстерналии или имеется рыночная структура монополистической конкуренции.

Подставляя уравнение (11.36) в производственную функцию (11.35), используя тот факт, что все фирмы оперируют на одном отношении капитала к эффективному труду и то, что функция F является однородной первой степени, запишем производственную функцию каждой фирмы в следующем виде:

$$Y(t) = F(K(t), BK(t)L).$$

Так как мера множества фирм равна единице, это уравнение также задает совокупный выпуск. Пользуясь тем, что функция $F(\cdot, \cdot)$ является однородной первой степени, сделаем следующее преобразование:

$$\frac{Y(t)}{K(t)} = F(1, BL) \equiv \tilde{f}(L).$$

Тогда для выпуска на душу населения получаем следующее равенство:

$$y(t) \equiv \frac{Y(t)}{L} = \frac{Y(t)}{K(t)} \frac{K(t)}{L} = k(t)\tilde{f}(L),$$

где, как и ранее, переменная $k(t) = K(t)/L$ обозначает отношение капитала к труду в экономике.

Тогда предельный продукт факторов производства и их цены могут быть выражены в терминах нормализованной производственной функции $\tilde{f}(L)$ следующим образом:

$$w(t) = K(t)\tilde{f}'(L), \tag{11.37}$$

а арендная стоимость капитала является постоянной величиной, равной

$$R(t) = R = \tilde{f}(L) - Lf'(L). \tag{11.38}$$

11.4.2. Равновесие

Конкурентное равновесие в этой модели определяется схожим образом с определением равновесия в неоклассической модели экономического роста как траектории потребления и запаса капитала в экономике $[C(t),\ K(t)]_{t=0}^{\infty}$, на которых функция полезности репрезентативного домохозяйства достигает максимума, и траектории заработной платы и арендной стоимости капитала $[w(t),\ R(t)]_{t=0}^{\infty}$, при которых рынки факторов производства находятся в равновесии. Важное свойство модели состоит в том, что, так как переливы знаний, показанные в уравнении (11.36), являются внешними для каждой фирмы, равновесные цены факторов производства задаются условиями (11.37) и (11.38), другими словами, цены факторов производства не учитывают вклад капитала в увеличение будущей производительности.

Из того, что рыночная процентная ставка определяется равенством $r(t) = R(t) - \delta$, следует, что она также будет в равновесии постоянной величиной. Тогда из стандартного уравнения Эйлера для потребления (11.4) следует, что потребление должно расти с постоянным темпом, равным:

$$g_C^* = \frac{1}{\theta}\left(\tilde{f}(L) - L\tilde{f}'(L) - \delta - \rho\right). \tag{11.39}$$

Нетрудно убедиться, что капитал растет с тем же темпом, что и потребление, и поэтому темпы роста капитала, выпуска и потребления задаются уравнением (11.39) (см. упражнение 11.15).

Предположим, что выполняется следующие неравенство:

$$\tilde{f}(L) - L\tilde{f}'(L) - \delta - \rho > 0, \tag{11.40}$$

то есть экономика растет с положительным темпом роста, однако рост не является настолько быстрым, что нарушается условие трансверсальности (конечности полезности репрезентативного домохозяйства):

$$(1-\theta)(\tilde{f}(L) - L\tilde{f}'(L) - \delta) < \rho. \tag{11.41}$$

Утверждение 11.5. *Рассмотрим модель Ромера с экстерналиями от физического капитала. Предположим, что условия* (11.40) *и* (11.41) *выполнены. Тогда существует единственная равновесная траектория, на которой при любом начальном запасе капитала* $K(0) > 0$ *капитал, выпуск и потребление растут с постоянным темпом, заданным уравнением* (11.39).

Доказательство. Доказательство основной части утверждения следует из рассуждений, приведенных выше. Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в выполнении условия трансверсальности и отсутствии в экономике переходной динамики. ■

Таким образом, эта модель является первым примером модели с эндогенным технологическим прогрессом. Технологическая переменная $A(t)$ в модели, заданная уравнением (11.36), изменяется эндогенным образом в результате инвестиционных решений фирм. Следовательно, темп роста экономики определяется эндогенно, несмотря на то что ни одна фирма не совершает сознательных инвестиций в исследования или разработку новых технологий.

Устойчивый рост экономики с постоянным темпом возможен в модели только при постоянном населении в силу *эффекта масштаба*. Из того что функция $\tilde{f}(L) - L\tilde{f}'(L)$ является строго возрастающей по L (по предположению 1), следует, что увеличение населения экономики (рабочей силы) L ведет к увеличению темпа роста выпуска. Эффект масштаба описывает связь между населением и равновесным темпом экономического роста. Если население в экономике растет, то она не допускает существования стационарного равновесия (ТСР), и темп роста экономики будет увеличиваться во времени (выпуск достигнет бесконечности за конечное время, что противоречит требованию о конечности целевой функции репрезентативного домохозяйства и условию трансверсальности). Более подробному изучению последствий предположения о положительном темпе роста населения посвящено упражнение 11.18. Мы проведем подробный анализ эффекта масштаба и способов избавиться от него в главе 13.

11.4.3. Оптимальное по Парето распределение ресурсов

Наличие экстерналий в экономике очевидным образом приводит к тому, что децентрализованное равновесие, описанное в утверждении 11.5, не является оптимальным по Парето. Чтобы описать распределение ресурсов, в котором функция полезности репрезентативного домохозяйства достигает максимума, еще раз построим текущий гамильтониан и найдем возможное решение задачи максимизации, которое удовлетворяет условиям теоремы 7.3 (см. упражнение 11.17). Динамика накопления капитала на душу населения задается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{k}(t) = \tilde{f}(L)k(t) - c(t) - \delta k(t).$$

Тогда текущий гамильтониан имеет следующий вид:

$$\hat{H}(k,\ c,\ \mu) = \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \mu(t)\left[\tilde{f}(L) - k(t) - c(t) - \delta k(t)\right],$$

и необходимые условия оптимума для возможного решения имеют следующий вид:

$$\hat{H}_c(k,\ c,\ \mu) = c(t)^{-\theta} - \mu(t) = 0,$$

$$\hat{H}_k(k,\ c,\ \mu) = \mu(t)\left[\tilde{f}(L) - \delta\right] = -\dot{\mu}(t) + \rho\mu(t),$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho t)\mu(t)k(t)\right] = 0.$$

Используя стандартные рассуждения (например, как в параграфе 7.7 в главе 7), нетрудно убедиться, что текущий гамильтониан удовлетворяет условиям теоремы 7.14 и поэтому эти условия являются достаточными условиями единственного оптимального по Парето распределения ресурсов в экономике (см. упражнение 11.17).

Объединяя эти уравнения, моментально приходим к тому, что общественный планировщик будет выбирать распределение ресурсов, в котором потребление (и выпуск) растут с постоянным темпом, заданным следующим уравнением:

$$g_C^S = \frac{1}{\theta}\left(\tilde{f}(L) - \delta - \rho\right).$$

Это значение всегда будет превышать темп роста в конкурентном равновесии g_C, так как $\tilde{f}(L) > \tilde{f}(L) - L\tilde{f}'(L)$. По существу, общественный планировщик принимает во внимание то, что, накапливая большее количество капитала, он увеличивает производительность в будущем. Так как этот эффект является внешним для фирм, эти технологические переливы не могут быть учтены в конкурентном равновесии. Этот результат резюмируется в следующем утверждении.

Утверждение 11.6. *В описанной выше модели Ромера с экстерналиями от физического капитала децентрализованное равновесие является неоптимальным по Парето и экономика растет с темпом, меньшим, чем в распределении ресурсов, в котором функция полезности репрезентативного домохозяйства достигает максимального значения.*

Упражнение 11.19 посвящено описанию различных типов экономической политики, которые могут быть использованы для сокращения разрыва между равновесным темпом роста экономики и темпом ее роста в оптимальном по Парето распределении ресурсов.

11.5. Основные выводы

В этой главе мы закончили анализ неоклассических моделей экономического роста (для закрытой экономики). Мы также вступили на путь изучения моделей эндогенного технологического прогресса, чему посвящена следующая часть книги. Модели, представленные в этой главе, по многим причинам являются более простыми и удобными в использовании, чем модели из предыдущих глав. Математическая простота моделей следует из их линейности (наиболее четко прослеживаемой в модели *AK*). Линейность приводит к отсутствию переходной динамики в модели и ее несложной математической структуре. Конечно, линейность модели также является необходимым условием существования траектории устойчивого роста. В предположении о строгой вогнутости (и особенно строгой вогнутости, согласующейся с условиями Инада, как в предположении 2) устойчивый эндогенный рост экономики невозможен. Следовательно, асимптотическая линейность является ключевым ингредиентом любой модели, ведущей к устойчивому эндогенному экономическому росту. В базовой модели *AK* и других моделях из этой главы эта линейность постулируется явным образом. Несмотря на то что линейность уже не так очевидна (и часто выводится, а не предполагается), она остается важным свойством моделей эндогенного технологического прогресса, которые будут представлены в следующей части книги. Однако мы также увидим, что линейность в моделях эндогенного технологического прогресса часто является следствием более интересных экономических взаимодействий, чем взаимодействий, описанных в этой главе.

Существует еще одна причина, по которой модели, представленные в этой главе, не являются подходящими моделями устойчивого эндогенного экономического роста. Как мы увидели в главе 3, современный экономический рост во многом является следствием технологического прогресса. Однако во всех моделях из этой главы, кроме модели Ромера из параграфа 11.4, технологический прогресс отсутствует. С одной стороны, из этого не следует, что эти модели не согласуются с данными. Как мы уже отметили в главе 3, среди экономистов нет согласия относительно того, является ли наблюдаемый рост общей производительности факторов производства отчасти следствием ошибок измерения. Если это так, то может оказаться, что большая часть того, что мы измеряем как технологический прогресс, на самом деле является углублением капитала, что является ключевой причиной экономического роста в модели AK и в ее вариантах. Следовательно, дискуссия об измерении совокупной факторной производительности имеет важные последствия для выбора типа моделей, которые мы должны использовать для изучения мирового экономического роста и межстрановых различий в уровне дохода на душу населения. Однако, с другой стороны, утверждение о том, что технологический прогресс не играл важной роли в процессе мирового экономического роста в последние двести лет, представляется маловероятным.

Материал, представленный в этой главе, указывает на еще одну важную проблему. В главах 3 и 8 мы убедились в том, что неоклассическая модель экономического роста (а также более простая модель экономического роста Солоу) не способны объяснить столь значительные межстрановые различия в уровне дохода на душу населения, которые мы наблюдаем в реальности. Даже в предположении о довольно значительных различиях в уровне фискальных искажений (например, о восьмикратной разнице значений эффективной налоговой ставки) различия в уровне дохода на душу населения в стационарном состоянии в модели оказываются относительно небольшими. Как мы отметили ранее, этот результат породил большое количество работ, направленных на поиск разумных расширений неоклассической модели экономического роста, способных сгенерировать более эластичную реакцию на изменения экономической политики и тем самым привести модель в лучшее соответствие с данными по межстрановым различиям в уровне дохода. С другой стороны, модели, представленные в этой главе, и модели, которые мы будем изучать в следующей части книги, обладают противоположным недостатком. Из них следует, что даже малые различия в экономической политике, технологических возможностях и других характеристиках экономики ведут к перманентным различиям в темпе экономического роста. Следовательно, эти модели в состоянии объяснить значительные различия в уровне жизни населения малыми политическими, институциональными или технологическими различиями. Однако такая способность является одновременно и благословением и проклятием модели. Вместе со способностью объяснить значительные межстрановые различия малыми политическими или технологическими различиями все эти модели предсказывают непрерывное увеличение межстранового уровня неравенства доходов — страны с различными технологическими и политическими параметрами должны перманентно расти с различными темпами. Тогда относительная устойчивость межстранового распределения дохода на душу населения в послевоенные годы, которую мы отметили в главе 1, является вызовом для базовой модели эндогенного экономического роста.

Несмотря на то что вопрос о том, являются ли модели эндогенного экономического роста, в которых каждая страна растет с возможно разным долгосрочным темпом, лучшей аппроксимацией послевоенных данных, чем модели, в которых мировое распределение дохода остается устойчивым, остается открытым, эта дискуссия не представляет большого интереса. Во-первых, процесс мирового экономического роста и технологического развития не ограничивается послевоенной историей. Как мы убедились в главе 1, расхождение доходов происходило не в последние семьдесят лет, а в течение всего XIX века. Следовательно, мы должны не ограничиваться лишь послевоенными данными, а сопоставлять модели эндогенного роста с историческими данными. Такая выборка является более богатой и предоставляет больше информации о периоде, когда начался процесс межстранового расхождения дохода. Во-вторых, как мы увидим в главах 18 и 19, большинство стран не производит технологических инноваций с помощью НИОКР, а импортирует и внедряет новые технологии из более развитых стран (или с мировой технологической границы). Они также значительно вовлечены в международную торговлю. Мы увидим, что после того, как технологические, финансовые и торговые связи будут включены в модель, коренное различие между моделями экзогенного и эндогенного экономического роста исчезает. Это наблюдение подчеркивает возможный недостаток подхода моделирования «каждой страны как острова», особенно если мы планируем использовать модель для объяснения реальных экономических данных. Несмотря на отмеченную важность межстрановых взаимосвязей, часть IV, вслед за большой частью литературы по теории экономического роста, посвящена анализу моделей эндогенного технологического прогресса без таких взаимосвязей. Мы вернемся к их обсуждению в главах 18 и 19.

11.6. Литература

Модель *AK*, описанная в параграфе 11.1, является частным случаем модели из работы [Rebelo 1991], которая описана более подробно в параграфе 11.3. Она также является частным случаем модели из работы [von Neumann 1945], которая стала очень важным вкладом в теорию экономического роста (работа 1945 г. является переводом на английский язык оригинальной работы 1937 г., написанной на немецком языке). Модель *AK* также описана в книге [Solow 1970] (естественно, с экзогенно заданной нормой сбережений), однако Солоу отвергает ее как неинтересную. Более подробное описание неоклассической модели с устойчивым экономическим ростом представлено в работе [Jones, Manuelli 1990]. В ней показано, что устойчивый долгосрочный экономический рост возможен даже в выпуклых моделях (с производственной функцией, удовлетворяющей предположению 1, но, конечно, не удовлетворяющей предположению 2). Один из вариантов выпуклой неоклассической модели эндогенного экономического роста Джонса и Мануэлли представлен в упражнении 11.4.

Работа [Romer 1986a] была одной из первых по эндогенному экономическому росту, и модель, основанная на работе П. Ромера, представлена в параграфе 11.4. Работа П. Ромера важна не только из-за модели как таковой, но и по двум другим причинам. Во-первых, она подчеркивает важность неконкурентной структуры экономики как источника долгосрочного экономического роста (в данном случае наличия технологических переливов). Во-вторых, в работе делается упор на то, что знания и идеи являются неконкурентным товаром. Мы остановимся на этих вопросах более подробно в части IV книги.

Другой работой, внесшей значительный вклад в литературу по эндогенному экономическому росту, является: [Lucas 1988], в которой описана модель эндогенного роста, схожая с моделью из работы [Romer 1986a], но с накоплением человеческого капитала и экстерналиями от человеческого капитала. Модель Лукаса основывается на важной работе [Uzawa 1964]. Работа Р. Лукаса сыграла две важные роли в исследованиях по экономическому росту. Во-первых, в ней утверждается эмпирическая важность устойчивого экономического роста и поэтому она стала причиной возникновения интереса экономистов к зарождающейся теории эндогенного экономического роста. Во-вторых, в ней подчеркивается важность человеческого капитала, и в особенности экстерналий от человеческого капитала. Так как при подробном анализе роли человеческого капитала в главе 10 мы увидели, что эмпирические свидетельства говорят об ограниченной роли экстерналий от человеческого капитала, в этой главе мы предпочли модель Ромера модели Лукаса. Более того, в модели Лукаса присутствует переходная динамика и описание ее оказывается несколько более сложным, чем анализ стандартной неоклассической модели. Вариант модели Лукаса представлен в упражнении 11.21.

11.7. Упражнения

11.1. Выведите уравнение (11.14).

11.2. Докажите утверждение 11.2.

11.3. Рассмотрите следующую неоклассическую модель экономического роста в непрерывном времени:

$$\int_0^\infty \exp(-(\rho - n)t)\frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}dt$$

с агрегированной производственной функцией:

$$Y(t) = AK(t) + BL(t),$$

где $A > 0$ и $B > 0$.

(a) Определите конкурентное равновесие в этой экономике.

(b) Постройте текущий гамильтониан для задачи репрезентативного домохозяйства. Опишите ее решение. Объедините это решение с условиями на равновесные цены факторов производства и найдите равновесную траекторию экономики. Покажите, что на равновесной траектории присутствует нетривиальная переходная динамика.

(c) Опишите динамику доли дохода труда в национальном доходе во времени.

(d) Проведите анализ воздействия неожиданного увеличения параметра B на равновесную траекторию экономики.

(e) Докажите, что конкурентное равновесие является оптимальным по Парето.

11.4. Рассмотрите следующую неоклассическую модель экономического роста в непрерывном времени:

$$\int_0^\infty \exp(-(\rho - n)t)\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt$$

с агрегированной производственной функцией

$$Y(t) = A\left[L(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + K(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}.$$

(a) Определите и опишите конкурентное равновесие в этой экономике.

(b) Докажите, что это равновесие является оптимальным по Парето.

(c) Покажите, что устойчивый рост экономики невозможен, если $\sigma \leq 1$.

(d) Покажите, что если значения параметров A и σ достаточно велики, то экономика асимптотически достигает траектории устойчивого роста в связи с накоплением капитала. Проинтерпретируйте этот результат.

(e) Опишите переходную динамику на равновесной траектории.

(f) Опишите динамику доли дохода капитала в национальном доходе во времени. Является ли такая динамика правдоподобной? Каким образом вы изменили бы модель для того, чтобы доля дохода капитала в национальном доходе оставалась постоянной величиной.

(g) Предположите, что доход от владения капиталом облагается налогом по налоговой ставке, равной τ. Найдите асимптотические темпы роста выпуска и потребления.

11.5. Выведите уравнения (11.19) и (11.20).

11.6. Рассмотрите неоклассическую модель экономического роста с производственной функцией Кобба—Дугласа вида $y(t) = Ak(t)^\alpha$ (в подушевом выражении) и логарифмической моментальной функцией полезности. Опишите равновесную траекторию в этой модели и покажите, что в пределе при $\alpha \to 1$ равновесная траектория модели сходится к равновесной траектории базовой модели AK. Проинтерпретируйте этот результат.

11.7. Рассмотрите базовую модель AK из параграфа 11.1 и предположите, что в двух во всем остальном идентичных экономиках существует налог на доход от капитала и налоговые ставки различны. Рассмотрите следующую параметризацию модели: $A = 0{,}15$; $\delta = 0{,}05$; $\rho = 0{,}02$ и $\theta = 3$. Предположите, что в первой стране налоговая ставка по налогу на доход от владения капиталом равна $\tau = 0{,}2$, в то время как во второй стране налоговая ставка равна $\tau' = 0{,}4$. Предположите, что в 1900 г. обе страны обладали равным уровнем дохода на душу населения и в течение последующих ста лет не происходило изменений в технологии и экономической политике. Найдите величину относительного разрыва в уровне дохода на душу населения в 2000 г. Обоснуйте ваш результат и объясните, почему вы находите или не находите его эмпирически правдоподобным.

11.8. **(a)** Убедитесь в том, что теоремы 7.13 и 7.14 из главы 7 могут быть применены в анализе двухсекторной модели из параграфа 11.2. [Подсказка: используйте рассуждения, схожие с рассуждениями из параграфа 7.7].

(b) Покажите, что решение задачи оптимизации потребителя в параграфе 11.2 ведет к условию (11.25).

11.9. Докажите утверждение 11.3.

11.10. Докажите, что конкурентное равновесие в экономике в модели из параграфа 11.2, описанное в утверждении 11.3, является оптимальным по Парето и совпадает с решением задачи оптимального роста.

11.11. Покажите, что изменение темпа роста населения не влияет на равновесный темп роста экономики в модели из параграфов 11.1 и 11.2. Объясните почему. Находите ли вы такой вывод правдоподобным?

11.12. Покажите, что в общем случае при снятии ограничения на вид производственной функции Кобба—Дугласа в модели из параграфа 11.3 не существует ТСР с постоянной долей дохода капитала в национальном доходе.

11.13. Опишите влияние увеличения параметра α на траекторию конкурентного равновесия в модели из параграфа 11.3. Почему оно ведет к увеличению темпа накопления капитала в экономике?

11.14. Рассмотрите вариант модели из параграфа 11.3, в котором производственная функция в секторе потребительских товаров продолжает быть заданной уравнением (11.27), а производственная функция в секторе инвестиционных товаров имеет следующий вид:

$$I(t) = A(K_I(t))^{\beta}(L_I(t))^{1-\beta},$$

где $\beta \in (\alpha, 1)$. Из условия равновесия на рынке труда следует неравенство $L_C(t) + L_I(t) \le L(t)$. Во всем остальном структура экономики не отличается от ее структуры в модели в параграфе 11.3.

(a) Опишите конкурентное равновесие в экономике.

(b) Опишите стационарное равновесие и покажите, что в нем отсутствует устойчивый рост экономики.

(c) Объясните, почему выводы о долгосрочном развитии экономики в этой модели отличаются от выводов в модели из параграфа 11.3.

(d) Проведите анализ разрыва в уровне дохода на душу населения в стационарном равновесии в двух экономиках с налогом на доход от владения капиталом с налоговыми ставками τ и τ'. Каков вклад параметров α и β в величину этого разрыва? Почему величина этого разрыва отличается от величины разрыва в односекторной неоклассической модели экономического роста?

11.15. Обозначьте темп роста потребления в модели Ромера, представленной в параграфе 11.4, как g_C^*, а темп роста совокупного выпуска как g^*. Покажите, что неравенство $g_C^* > g^*$ противоречит условию допустимости распределения ресурсов, а при выполнении неравенства $g_C^* < g^*$ нарушается условие трансверсальности.

11.16. Рассмотрите модель Ромера, представленную в параграфе 11.4. Докажите, что распределение ресурсов, описанное в утверждении 11.5, удовлетворяет условию трансверсальности. Докажите также, что в этом равновесии отсутствует переходная динамика.

11.17. Убедитесь в том, что теоремы 7.13 и 7.14 могут быть использованы в анализе модели Ромера, представленной в параграфе 11.4, как при решении задачи репрезентативного домохозяйства, так и при решении задачи общественного планировщика.

11.18. Рассмотрите модель Ромера, представленную в параграфе 11.4, и предположите, что население экономики растет с темпом $n > 0$. Опишите условие равновесия на рынке труда. Сформулируйте задачу динамической оптимизации для репрезентативного домохозяйства и покажите, что любое внутреннее решение этой задачи противоречит условию трансверсальности. Проинтерпретируйте ваш результат.

11.19. Рассмотрите модель Ромера, представленную в параграфе 11.4. Предложите два типа бюджетной политики (комбинация налогов и субсидий), при которых распределение ресурсов в конкурентном равновесии и оптимальное по Парето распределение ресурсов идентичны.

11.20. Рассмотрите следующую модель экономики с бесконечным горизонтом планирования в дискретном времени, допускающую существование репрезентативного домохозяйства с предпочтениями в момент времени $t = 0$, заданными целевой функцией вида:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta},$$

где переменная $C(t)$ обозначает потребление, а дисконт $\beta \in (0, 1)$. Население экономики постоянно и равно L, а предложение труда абсолютно неэластично. Производственная структура экономики состоит из континуума фирм, расположенных на множестве меры 1, каждая из которых имеет доступ к технологии, описываемой производственной функцией $Y_i(t) = F(K_i(t), A(t)L_i(t))$, где переменная $L_i(t)$ обозначает занятость на фирме i, переменная $K_i(t)$ — капитал, используемый фирмой i, переменная $A(t)$ — общий для всех фирм уровень технологий. Из условия равновесия на рынках факторов производства следуют равенства $\int_0^1 K_i(t)di = K(t)$ и $\int_0^1 L_i(t)di = L(t)$, где переменная $K(t)$ обозначает общий запас капитала в экономике. Предположите, что капитал полностью выбывает после использования. Другими словами, ресурсное ограничение в экономике имеет следующий вид:

$$K(t+1) = \int_0^1 Y_i(t)di - C(t).$$

Предположите, что трудоинтенсивный технологический прогресс $A(t)$ происходит по следующему закону:

$$A(t) = K(t).$$

(a) Определите конкурентное равновесие в модели (в предположении о том, что все агенты воспринимают цены как заданные величины).

(b) Покажите, что в модели существует единственное конкурентное равновесие на ТСР, в которой темп роста (или падения) экономики является постоянной величиной в каждом периоде времени. Найдите условия на производственную функцию F и параметры β и θ, при которых темп роста экономики является положительной величиной и при этом условие трансверсальности продолжает выполняться.

(c) Объясните, почему равновесная траектория в каждом периоде времени совпадает с ТСР, найденной вами в части (b).

***11.21.** Рассмотрите следующий вариант модели эндогенного экономического роста Узавы и Лукаса. Предположите, что экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства, предпочтения которого заданы следующей целевой функцией:

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t)\frac{C(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt,$$

где переменная $C(t)$ обозначает потребление конечного товара, производство которого описывается производственной функцией вида:

$$Y(t) = AK(t)^\alpha H_P(t)^{1-\alpha},$$

где переменная $K(t)$ обозначает физический капитал, переменная $H(t)$ — человеческий капитал, а переменная $H_P(t)$ — человеческий капитал, используемый в производстве конечного товара. Динамика накопления физического и человеческого капитала описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t)$$

и

$$\dot{H}(t) = BH_E(t) - \delta H(t),$$

где переменная $H_E(t)$ обозначает человеческий капитал, используемый в секторе образования (дальнейшего накопления человеческого капитала). Для простоты предположите, что норма амортизации человеческого капитала совпадает с нормой амортизации физического капитала δ. Ресурсные ограничения в экономике имеют вид $I(t) + C(t) \leq Y(t)$ и $H_P(t) + H_E(t) \leq H(t)$.

(a) Проинтерпретируйте второе ресурсное ограничение.

(b) Обозначьте долю человеческого капитала, используемую в производстве как $h(t)$ (то есть $h(t) \equiv H_P(t)/H(t)$) и найдите темп роста производства конечного продукта как функцию от $h(t)$ и темпов роста накапливаемых факторов производства.

(c) Предположите, что $h(t)$ является постоянной величиной и опишите в этом случае ТСР в экономике (с постоянной процентной ставкой и постоянными темпами роста капитала и выпуска). Покажите, что на этой ТСР выполняется равенство $r^* \equiv B - \delta$ и темпы роста потребления, физического капитала, человеческого капитала и выпуска совпадают и равны $g^* \equiv (B - \delta - \rho)/\theta$. Также покажите, что существует единственное значение отношения физического капитала к человеческому капиталу $k^* \equiv$ $\equiv K/H$, согласующееся с ТСР.

(d) Найдите ограничение на параметры экономики, достаточное для выполнения условия трансверсальности.

(e) Проведите анализ переходной динамики в экономике с начальным значением отношения физического капитала к человеческому капиталу, отличным от k^*. [Подсказка: опишите динамику следующих трех переменных: $k \equiv K/H$, $\chi \equiv C/K$ и h и отдельно рассмотрите два случая: $\alpha < \theta$ и $\alpha \geq \theta$.]

Часть IV

ЭНДОГЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС

Эта часть книги посвящена построению моделей эндогенного технологического прогресса. В главе 12 мы опишем основные подходы к моделированию технологического прогресса и приведем краткий обзор нескольких основных моделей, описанных в литературе по экономике отраслевых рынков. Главы 13 и 14 посвящены анализу основных моделей эндогенного технологического прогресса, предложенных П. Ромером, Дж. Гроссманом и Э. Хелпманом и Ф. Агийоном и П. Ховиттом. В главе 15 описан более широкий класс моделей, в которых направление технологического прогресса (то есть, например, интенсивность какого фактора производства будет изменять технологический прогресс по своему завершению) также является эндогенной характеристикой модели.

Модели, представленные в этой части книги, оказываются полезными по двум связанным между собой причинам. Во-первых, динамика технологического прогресса в них зависит от стимулов агентов, рыночной структуры экономики и экономической политики, что позволяет нам развить более удовлетворительный метод анализа межстрановых и межвременных различий в экономическом развитии. Во-вторых, эти модели предоставляют технически несложный аппарат для моделирования устойчивого экономического роста, в котором технологический прогресс является источником долгосрочного роста экономики.

Глава 12
Моделирование технологического прогресса

До сих пор мы исследовали модели экономического роста с экзогенным или эндогенным технологическим прогрессом. Однако устойчивый экономический рост в них не является следствием технологического прогресса. Он происходит экзогенно как результат линейной структуры динамики накопления капитала и как побочный продукт экстерналий и перелива знаний. Так как основная цель этой книги состоит в понимании процесса мирового экономического роста, модели, в которых экономический рост зависит от технологического прогресса и технологических изменений (происходящих вследствие сознательных инвестиций фирм и домохозяйств) самих по себе, представляют для нас намного больший интерес. В этих моделях не только технологический прогресс становится эндогенной переменной, процесс технологических изменений в экономике в них также связан с рыночной структурой экономики и экономической политикой, регулирующей антимонопольное законодательство, конкуренцию и право интеллектуальной собственности. Эти модели также позволяют нам вести анализ направления технологического прогресса. Эта глава посвящена краткому обзору различных концепций технологических изменений. В ней также будут описаны базовые подходы, на которых основаны модели, представленные в последующих главах.

12.1. Различные концептуальные определения понятия «технология»

12.1.1. Типы технологических изменений

В литературе по технологическому прогрессу часто выделяется несколько различных типов инноваций. Наиболее общее разделение состоит в выделении инноваций в процесс производства и инноваций в товары, где второй тип инноваций связан с появлением в экономике новых товаров (например, первого проигрывателя компакт-дисков). Первый тип инноваций связан с изменениями, приводящими к сокращению издержек производства уже существующих товаров (например, появление новых станков и оборудования для более эффективного производства существующих товаров). Несмотря на то что модели инноваций в процесс производства и инноваций в товары зачастую схожи между собой с математической точки зрения, это разделение на два типа остается полезным для эмпирической проверки этих моделей.

На практике инновации в процесс производства, приводящие к появлению уже существующих товаров лучшего качества или технологий, позволяющих производить уже существующие товары с меньшими издержками, являются более важными, чем инновации, позволяющие сократить издержки производства. Изобретение проигрывателя компакт-дисков лучшего качества или технологии, позволяющей производить уже имеющиеся модели проигрывателей компакт-дисков с меньшими издержками, являются примерами таких инноваций в процесс производства. Такие инновации обычно приводят к смене модельного ряда и появлению более качественных версий уже имеющихся в экономике товаров и оборудования, а также к возможной конкуренции между производителями старых моделей и фирмами-инноваторами.

В этом контексте мы можем разделить инновации, приводящие к появлению проигрывателей компакт-дисков лучшего качества, и инновации, приводящие к снижению стоимости проигрывателей компакт-дисков. Такое разделение связано с тем, что различные индивиды могут иметь различные предпочтения относительно выбора между качеством и количеством потребляемых ими товаров. Вопросы, связанные с различиями между потребителями в склонности платить за лучшее качество товаров, имеют большое значение в теории отраслевых рынков и в методологии построения ценовых индексов, в которых корректно учитываются различия в качестве товаров. Однако большинство моделей экономического роста являются моделями с репрезентативным потребителем, в которых неявно предполагается совершенное замещение между качеством и количеством товаров. В этом случае возникает тесная связь между инновациями в процесс производства, ведущими к улучшению качества уже существующих продуктов, и инновациями, ведущими к снижению издержек производства. В следующем примере показано, почему улучшение качества уже имеющихся товаров и снижение издержек производства по существу являются эквивалентными изменениями в контексте типичной модели экономического роста.

Пример 12.1. Рассмотрим экономику, допускающую существование репрезентативного домохозяйства с предпочтениями, заданными функцией полезности $U(qc(q), y \mid q)$, где переменная y обозначает потребление обобщенного товара (возможно агрегата, включающего в себя все остальные товары), а переменная c — потребление некоторого отдельного товара, доступного в различном качестве. Переменная $c(q)$ в функции полезности обозначает потребление этого товара качества q.

В такой спецификации зависимость функции полезности от произведения q и $c(q)$ обозначает, что качество и количество товара являются совершенными заменителями, то есть потребление товаров более высокого качества увеличивает количество эффективных единиц потребления. Это предположение является типичным в моделях экономического роста, хотя, очевидным образом, оно является ограничивающим предположением: потребление (использование) пяти компьютеров с тактовой частотой 1 гГц не позволит получить те же услуги, что и использование одного компьютера с тактовой частотой 5 гГц.

Представим бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства в следующем виде:

$$p(q)c(q) + y \leq m,$$

где переменная $p(q)$ обозначает цену товара качества q, цена обобщенного товара нормализована единицей, а переменная m обозначает количество ресурсов, доступных потребителю. Задача максимизации полезности потребителем может быть представлена в следующем эквивалентном виде:

$$\max_{x(q),y} U(x(q), y)$$

при ограничении

$$\frac{p(q)}{q} x(q) + y \leq m,$$

где переменная $x(q) \equiv qc(q)$ обозначает количество эффективных единиц потребления товара c. Нетрудно убедиться, что при такой постановке задачи пропорциональные увеличение качества товара q и снижение его цены $p(q)$ имеют одинаковый эффект на величину потребления в эффективных единицах и на благосостояние индивида. Это наблюдение позволяет нам объяснить утверждение о том, что во многих моделях экономического роста инновации в процесс производства, приводящие к снижению производственных издержек, и инновации, ведущие к улучшению качества товаров, воздействуют на экономику одинаково. ■

Еще одним важным различием, описанным в литературе по технологическому прогрессу, является различие между макро- и микроинновациями (см.: [Mokyr 1990; Мокир 2014]). Первый тип инноваций связан с радикальными инновациями, включающими в себя появление новых технологий широкого использования, таких как электричество или компьютеры, которые, возможно, приводят к изменениям в организации производства во многих секторах экономики. С другой стороны микроинновации связаны с более часто встречающимися инновациями, приводящими к появлению новых моделей уже существующих товаров, улучшению качества определенных товаров или просто к сокращению издержек производства определенного товара. Большинство инноваций, модели которых изложены далее, можно рассматривать как микроинновации, хотя в большинстве моделей эндогенного технологического прогресса не проводится четкое разделение между микро- и макроинновациями. Эмпирические свидетельства говорят о том, что рост общей производительности факторов производства чаще всего происходит в результате микроинноваций, хотя они, в свою очередь, зачастую являются следствием макроинноваций, таких как, например, переход к использованию электроэнергии или изобретение микрочипов (см., например, эмпирические свидетельства и их обсуждение в работах: [Abernathy 1978; Freeman 1982].

12.1.2. Производственная функция для технологий

Одним из возможно приводящих к замешательству вопросов теории технологического прогресса является вопрос описания доступных фирмам и потребителям производственных технологий. Так как наша задача состоит в построении моделей эндогенного технологического прогресса, фирмы и/или индивиды должны иметь выбор различных типов технологий и бóльшие усилия, затраты на исследования и инвестиции должны вести к появлению лучших технологий. Это условие предполагает существование некоторой *производственной метафункции* (производственной функции производственных функций), которая определяет процесс появления новых технологий как функции от затрат факторов производства. В дальнейшем изложении мы будем называть эту производственную метафункцию «границей инновационных возможностей» (или «производственной функцией в секторе НИОКР»).

Несмотря на то что идея существования производственной метафункции может показаться разумной, многие экономисты и специалисты в других общественных науках не находят этот подход убедительным. Их аргумент против существования производственной функции технологий состоит в том, что инновации по своей природе представляют собой открытия неизвестных ранее знаний. Вопрос, который они задают, звучит так: «Как мы можем моделировать неизвестные знания в рамках производственной функции, где взаимосвязь между факторами производства и выпуском является детерминистской?»

Несмотря на то что подобный вопрос имеет некоторое значение с описательной точки зрения (в том смысле, что описание процесса открытия новых технологий с помощью производственной функции скрывает ряд важных деталей инновационного процесса), эти опасения во многом не относятся к сути дела. У нас нет оснований предполагать, что производственная метафункция является детерминистской. Успешная реализация некоторого исследования, равно как и его качество, при условии успешной реализации могут быть случайными величинами, что согласуется с концепцией стохастической производственной метафункции. Поэтому подход к моделированию технологического прогресса с помощью производственной метафункции не является сильно ограничивающим в случае, когда мы допускаем наличие неопределенности относительно ее значения, и мы готовы предположить, что индивиды в состоянии произвести расчет влияния их действий на вероятность успеха исследования и его качество. Естественно, некоторые ученые утверждают, что такие расчеты невозможны. Однако без подобных вычислений мы бы не имели возможности моделировать процесс технологического прогресса (и процесс внедрения технологий). Так как нашей целью является построение моделей сознательных инноваций, предположение о том, что фирмы и индивиды в состоянии произвести такие вычисления, выглядит естественным, а это предположение эквивалентно предположению о существовании производственной метафункции технологий.

12.1.3. Неконкурентность знаний

Еще один важный аспект технологий рассматривается в работах Пола Ромера. Как мы уже описали в предыдущей главе, в первой модели эндогенного экономического роста из работы [Romer 1986a] присутствует возрастающая отдача от масштаба в процессе накопления физического капитала. Одним из обоснований этого предположения может быть предположение о том, что накопление знаний может происходить в результате экономической деятельности фирм. В более поздних работах П. Ромера, на которых мы остановимся в следующей главе, используется принципиально другой подход к моделированию процесса экономического роста, однако как его ранние, так и более поздние работы базируются на единой ключевой идее: знания являются неконкурентным товаром.

Под *неконкурентностью* знаний П. Ромер понимает то, что использование некоторой идеи для увеличения производительности одной фирмой не препятствует ее использованию другими фирмами. В то время как одна и та же единица труда или капитала не может использоваться несколькими производителями одновременно, одна и та же идея может одновременно быть использована многими фирмами, и это, возможно, приведет к увеличению производительности на всех этих фирмах. Рассмотрим производственную функцию вида $F(K, L, A)$, где переменная A обозначает запас имеющихся технологий. П. Ромер утверждает, что значительная часть этого запаса состоит из идей или алгоритмов производства новых товаров, способов улучшить их качество или снизить издержки производства. Экономисты в большинстве случаев согласны с тем, что предположение о том, что производственная функция $F(K, L, A)$ обладает свойством постоянной отдачи от масштаба по капиталу K и труду L, является реалистичным. В первых трех частях книги мы также использовали это предположение. Чтобы оправдать это предположение, можно использовать стандартный аргумент репликации (если только земля не является важным фактором производства): при удвоении количества капитала и труда общество всегда может создать копии имеющихся производств и при условии отсутствия экстерналий эти копии позволят удвоить (по меньшей мере) выпуск.

Ромер утверждает, что если технологическая переменная A является эндогенной, то агрегированная производственная функция обладает свойством возрастающей отдачи от масштаба по трем переменным K, L и A. Чтобы понять важность неконкурентности знаний, представим себе, что технологии являются стандартным фактором производства. Тогда для использования аргумента репликации нам потребуется создать копию имеющихся технологий для использования их на новых производствах. В этом случае производственная функция будет обладать свойством постоянной отдачи от масштаба по всем трем факторам производства K, L и A. С другой стороны, если знания являются неконкурентным товаром, у нас нет необходимости создавать копию A для использования на новых производствах, так как имеющиеся знания могут быть использованы всеми фирмами одновременно. Поэтому производственная функция $F(K, L, A)$ обладает свойством постоянной отдачи от масштаба по капиталу K и труду L и *возрастающей отдачи от масштаба* по K, L и A.

Следовательно, существует тесная связь между неконкурентностью знаний и возрастающей отдачей от масштаба. Именно эта связь легла в основу моделей эндогенного экономического роста с различными типами технологий, созданных П. Ромером и другими экономистами в 1980-х и 1990-х гг. Неконкурентность знаний и возникающая в результате возрастающая отдача от масштаба является ключевым элементом большинства этих моделей.

Другим важным следствием неконкурентности знаний является так называемый *эффект размера рынка*. Если новое знание, после того как оно было открыто, может использовать сколь угодно большое число фирм одновременно, то размер рынка будет основным фактором, определяющим прибыльность использования этого знания и, таким образом, стимулы фирм производить исследования. Эта мысль очень хорошо сформулирована в знаменитой цитате Метью Болтона, бизнес-партнера Джеймса Ватта, который писал в своем письме Дж. Ватту «Я не вижу для себя смысла производить Ваши двигатели всего лишь для трех стран, но я вижу очень большой смысл производить их для всего мира» [Schrer, 1984, p. 13].

Чтобы убедиться в том, что неконкурентность знаний связана с эффектом размера рынка, представим себе еще один конкурентный фактор производства, который также является необходимым фактором. Увеличение размера рынка не будет стимулировать фирмы к более интенсивному использованию этого фактора, так как при увеличении размера рынка и, следовательно, объема продаж вырастет и необходимое для производства количество фактора. Однако из неконкурентности знаний следует, что их можно использовать для производства сколь угодно большого количества товаров без дополнительных издержек. Именно это делает эффект размера рынка особенно важным в данном случае. В следующем параграфе мы обсудим ряд эмпирических свидетельств о важности эффекта размера рынка.

Необходимо отметить, что неконкурентность знаний не делает их *абсолютно общественным благом*. Напомним, что абсолютно общественное благо является одновременно неконкуретным и неисключаемым товаром. Несмотря на то что некоторые открытия могут быть неисключаемыми по своей природе (например, «открытие» того, что предоставление высшему менеджменту компании излишних стимулов в виде опционов на покупку акций может привести к их непродуктивной активности и мошенничеству), большинство открытий могут быть сделаны по крайней мере частично исключаемыми с помощью патентного законодательства. Защита интеллектуальной собственности фирмы от ее конкурентов является важным аспектом в процессе технологических изменений. Именно поэтому защита права интеллектуальной собственности и патентное законодательство часто играют важную роль в моделях технологического прогресса.

12.2. Наука и максимизация прибыли

Другим важным вопросом в экономическом анализе технологических изменений является вопрос о том, определяются ли инновации в основном научными ограничениями и, соответственно, стимулируются научными открытиями в определенных отраслях знаний или они, по крайней мере отчасти, движутся мотивом увеличения прибыли фирмы. Экономические историки и экономисты часто дают различные ответы на этот вопрос. Множество эмпирических свидетельств говорят о важности научного взгляда на инновации. Из них следует, что развитие науки и важные научные прорывы (возможно макроинновации, как мы их определили ранее) происходили по мере того, как ученые проводили исследования, базируясь на работах друг друга, без каких-либо стимулов получения прибыли. Например, в книге Черуцци *History of Modern Computing* автор подчеркивает важность ряда научных открытий и роли некоторых талантливых людей, а не мотива получения прибыли или возможного размера рынка компьютеров. Например, он показывает, каким образом происходил ряд важных инноваций, несмотря на то что многие известные в области компьютерных наук ученые, такие как Говард Айкен, сомневались в том, что спрос на персональные компьютеры в США превысит несколько десятков единиц [Ceruzzi 2003, p. 13]. Схожим образом многие экономические историки (см., например: [Rosenberg 1976] утверждают, что ключевым детерминантом инноваций в определенной области служит во многом экзогенный процесс накопления научных и инженерных знаний в этой области.

С другой стороны, большинство экономистов склонны считать, что мотив получения прибыли играет намного более важную роль и спрос на инновации является ключевым элементом в понимании процесса технологических изменений. Джон Стюарт Милль в своей книге *Принципы политической экономии* в следующей цитате приводит одно из первых четких формулировок этой мысли:

Работа Ватта по созданию парового двигателя, так же как и работа механиков, которые их собирали, и инженеров, которые создавали инструменты для сборки, являлась важной частью производственного процесса, и была, не в меньшей мере, чем работа механиков и инженеров, мотивирована будущим вознаграждением от фирм, которые будут использовать эти двигатели (цит. по: [Schmookler 1966, p. 210].

Действительно, как видно из предыдущей цитаты, прибыль была одним из основных стимулов Джеймса Ватта и его бизнес-партнера Мэтью Болтона. По этой причине Джеймс Ватт положительно относился к патентной системе, говоря, что «жизнь инженера не имеет смысла без существования патентов» (Mokyr 1990, p. 248; Мокир 2014). Мысль о том, что мотив получения прибыли является основным детерминантом инноваций и открытий, описана в работе [Grilliches, Schmookler 1963] и позднее в очень важной книге *Invention and Economic Growth* [Schmookler 1966]. В ней автор пишет, что «изобретения во многом являются экономической деятельностью, и как любая другая экономическая деятельность проводятся с целью получения дохода» (Schmookler 1966, p. 206).

Базируясь на своем анализе инноваций в нефтеперерабатывающей отрасли, производстве бумаги, строительстве железных дорог и сельском хозяйстве, Дж. Шмуклер делает вывод о том, что предыдущие научные открытия не являются основной причиной нынешних инноваций. Он утверждает: «В сотнях случаев причиной инноваций было осознание возможности снижения издержек производства или появление возможности получения значительной прибыли» [Schmookler 1966, p. 199].

Если стимул получения прибыли является основной причиной технологических изменений, то размер рынка, на котором данная технология или продукт будут использованы, становится ключевым фактором, определяющим динамику инноваций. Увеличение размера рынка ведет к росту прибыли и делает инновации и открытия более желанными. Дж. Шмуклер подчеркивает этот вывод и дает двум главам своей книги название «Количество открытий определяется размером рынка». Для наиболее прозрачной иллюстрации своих аргументов он приводит пример инноваций в производстве лошадиных подков. Он приводит эмпирические свидетельства того, что в течение XIX и начала XX столетий произошло большое количество инноваций в древнюю технологию производства подков и процесс улучшения технологии не затухал во времени. Наоборот, количество открытий и выдаваемых патентов возрастало, так как спрос на подковы был высок. Инновации закончились только тогда, когда «появление паровых двигателей и, позднее, двигателей внутреннего сгорания привело к тому, что лошади перестали интенсивно использоваться в хозяйстве» [Schmookler 1966, p. 93). Ц. Гриллихес в своей классической работе [Grilliches 1957] о распространении гибридных семян кукурузы в сельском хозяйстве США приводит свидетельства в пользу утверждения о том, что процесс технологических изменений и внедрения технологий тесно связан с прибыльностью и размером соответствующего рынка.

К аналогичному выводу приходят авторы ряда недавних статей. В работе [Newell, Jaffee, Stavins 1999] авторы показывают, что между 1960 и 1980 гг. типичный новый кондиционер воздуха, который продавался в магазине Sears, был значительно дешевле предыдущих моделей, но обладал таким же энергопотреблением. С другой стороны, между 1980 и 1990 гг. стоимость новых кондиционеров воздуха почти не изменялась, но они становились значительно более энергоэффективными. Авторы утверждают, что причиной такой динамики было увеличение цен на энергоресурсы. Этот пример хорошо иллюстрирует, каким образом темп и тип инноваций изменяются при изменении стимулов к получению прибыли. В схожей работе [Popp 2002] автор приводит свидетельства, согласующиеся с выводами [Newell, Jaffee, Stavins 1999] и находит значительную положительную корреляцию между количеством патентов на энергосберегающие технологии и ценами на энергоресурсы.

Эмпирические свидетельства из фармацевтической отрасли также показывают важность стимулов к получению прибыли и, в особенности, размера рынка в динамике инноваций. В работе [Finkelstein 2004] автор анализирует три типа изменений в экономической политике, влияющих на прибыльность изобретения вакцины от шести инфекционных заболеваний. Она находит, что увеличение прибыльности вакцины вследствие изменений политики ведет к значительному росту количества клинических испытаний новой вакцины от соответствующего заболевания. В работе [Acemoglu, Linn 2004] авторы анализируют экзогенные изменения размера рынка лекарственных препаратов, вызванные демографическими сдвигами, и находят значительную связь между темпом инноваций и такими изменениями размера рынка.

Таким образом, существующие эмпирические свидетельства говорят о том, что размер рынка является важным определяющим фактором стимулов к осуществлению инноваций, а также количества и типа технологических изменений. Эти свидетельства послужили причиной появления моделей, в которых технологические изменения являются видом экономической деятельности и ведутся с целью получения прибыли. Далее мы рассмотрим несколько таких моделей.

12.3. Стоимость инноваций в модели частного равновесия

Перейдем к анализу стоимости инновации и фирмы, работающей в сфере НИОКР. Равновесная стоимость инновации и разница между этой рыночной стоимостью и ее общественной стоимостью (определенной как ее стоимость для общественного планировщика, учитывающего существующие в экономике экстерналии) будет играть центральную роль в нашем анализе. Несмотря на это, полезным будет начать наш анализ стоимости инновации в рамках модели частного равновесия, как это принято в большинстве моделей теории отраслевых рынков.

В этом параграфе мы остановимся на анализе одной отрасли экономики. Предположим, что все фирмы в этой отрасли имеют доступ к существующей технологии и производят единицу товара с предельными издержками, равными $\psi > 0$ (в единицах некоторого товара, выступающего в роли единицы измерения). Спрос на товары данной отрасли задается следующей функцией спроса:

$$Q = D(p),$$

где переменная p обозначает цену товара, а переменная Q — спрос на товар, производимый отраслью. Далее предположим, что функция $D(p)$ является строго убывающей, дифференцируемой и удовлетворяет следующему условию:

$$D(\psi) > 0 \text{ и } \varepsilon_D(p) \equiv -\frac{pD'(p)}{D(p)} \in (1, \infty).$$

Из первого условия следует существование положительного спроса при цене, равной предельным издержкам производства товара, во втором условии утверждается, что эластичность спроса по цене превышает единицу, то есть всегда существует хорошо определенная цена, при которой прибыль монополиста достигает максимума. Более того, в нем утверждается, что эта эластичность является конечным числом и поэтому цена монополиста всегда превышает его предельные издержки.

В этой главе, как и везде в книге при анализе моделей с монополистической или олигополистической конкуренцией, мы рассматриваем равновесие как равновесие по Нэшу или, в случае динамической игры, равновесие по Нэшу, совершенное по подыграм. Краткий обзор этих понятий содержится в приложении С.

12.3.1. Отсутствие инноваций при совершенной конкуренции

Предположим, что в отрасли существует большое число фирм N, имеющих доступ к существующей производственной технологии. Далее предположим, что одна из этих фирм, например фирма 1, также имеет доступ к технологии производства исследования, приводящего к возможной инновации. В частности, для упрощения модели предположим, что в процессе исследований отсутствует неопределенность и что если фирма понесет издержки, равные $\mu > 0$, то она может произвести инновацию и снизить предельные издержки производства товара до ψ/λ, где $\lambda > 1$. Далее предположим, что эта инновация является неконкурентным товаром, а в силу того, что ее невозможно запатентовать или в силу того, что патентное право отсутствует в экономике, она также является неисключаемым товаром.

Начнем с анализа стимулов этой фирмы для осуществления такой инновации. Во-первых, нетрудно убедиться, что в равновесии без инноваций в экономике с большим количеством фирм N, имеющим доступ к единой производственной технологии, равновесная цена товара равна предельным издержкам его производства, $p^N = \psi$, где индекс N обозначает отсутствие инноваций. Общий спрос в этом случае равен $D(\psi) > 0$, и он может быть распределен между N фирмами любым образом. Так как цена равна предельным издержкам, прибыль фирмы 1 в равновесии определяется следующим равенством:

$$\pi_1^N = (p^N - \psi)q_1^N = 0,$$

где переменная q_1^N обозначает предложение товара фирмой 1.

Далее предположим, что фирма 1 осуществляет инновацию, но, так как она является неисключаемой, ее результатом пользуются все фирмы в отрасли. Из рассуждений, аналогичных приведенным выше, следует, что в этом случае равновесная цена товара составляет $p^I = \lambda^{-1}\psi$, а общее предложение всех фирм отрасли равно $D(\lambda^{-1}\psi) > D(\psi)$. Чистая прибыль фирмы 1 при осуществлении инновации определяется следующим равенством:

$$\pi_1^I = (p^I - \lambda^{-1}\psi)q_1^I - \mu = -\mu < 0.$$

Следовательно, фирма 1 будет терять деньги, если решит осуществить инновацию. Причина этого проста: при осуществлении инновации фирма несет издержки, равные μ, однако из-за того, что знания, полученные в результате этой инновации, являются неисключаемым товаром, она оказывается не в состоянии *присвоить* себе какой-либо доход от нее. Этот простой пример лежит в основе утверждения, восходящего к Й. Шумпетеру, о том, что при совершенной конкуренции на рынках инновации осуществляться не будут.

Очевидно, что такое равновесие может оказаться очень неэффективным. Чтобы продемонстрировать это, вычислим общественную стоимость инновации, которая равна прибавочному доходу, возникающему в результате этой инновации. Естественной мерой общественной стоимости может служить сумма излишков потребителя и производителя, возникающая в результате инновации. Предположим, что после осуществления инновации цена товара продолжает оставаться равной предельным издержкам. Тогда общественная стоимость инновации определяется следующим равенством:

$$S^I = \int_{\lambda^{-1}\psi}^{\psi} D(p)dp - \mu = \int_{\lambda^{-1}\psi}^{\psi} [D(p) - D(\psi)]dp + D(\psi)\lambda^{-1}(\lambda - 1)\psi - \mu. \quad (12.1)$$

Первое слагаемое во втором равенстве составляет увеличение излишка потребителя, возникающее в результате увеличения выпуска и снижения цены с ψ до $\lambda^{-1}\psi$ (напомним, что мы предполагаем, что цена равна предельным издержкам). Второе слагаемое в этой сумме составляет экономию издержек фирм при начальном уровне производства товаров, в частности она равна $\lambda^{-1}(\lambda - 1)\psi$ для каждого из $D(\psi)$ произведенных товаров. Наконец, последнее слагаемое составляют издержки осуществления инновации. Нетрудно убедиться, что несмотря на то, что в конкурентном равновесии инновации отсутствуют, общественная выгода от них S^I может принимать сколь угодно большое значение. Например, издержки осуществления инновации μ могут быть сколь угодно малы, оставаясь положительными, а размер выигрыша от инновации λ может быть сколь угодно большим.

12.3.2. Некоторые предостережения

Приведенный выше пример демонстрирует трудности осуществления инвестиций в экономике с совершенной конкуренцией. Основная проблема состоит в неспособности фирмы-инноватора ограничить использование инновации другими фирмами. Один из способов восстановить исключаемость инноваций состоит во введении в экономике законодательства, защищающего право интеллектуальной собственности или патентной системы, что ex post будет давать фирме-инноватору *монополистическую силу*. Законодательство по защите права интеллектуальной собственности существует во многих странах и является важной составной частью многих моделей, приведенных далее в этой главе.

Прежде чем перейти к анализу ex post монополистической силы фирмы-инноватора, необходимо сделать ряд предостережений. Во-первых, даже если в экономике отсутствует патентная система, торговая секретность может служить стимулом к осуществлению инноваций. Во-вторых, фирмы могут осуществлять инновации, которые подходят только им самим, что де-факто делает такие инновации исключаемым товаром. Например, представим себе, что фирма, понеся некоторые издержки, может разработать новую технологию, которая позволяет снизить предельные издержки лишь в $\lambda' < \lambda$ раз. Однако использование такой технологии требует навыков, имеющихся только у работников этой фирмы и, таким образом, она не может быть внедрена на других фирмах (что эквивалентно предположению о том, что пропорциональные издержки исключения использования этой инновации равны λ/λ'). Внедрение такой технологии может оказаться прибыльным для фирмы, так как специфичность инновации в данном случае играет такую же роль, как и патентная защита (см. упражнение 12.5). Следовательно, некоторые типы инноваций, в частности те, которые защищены торговой секретностью, могут быть осуществлены и при совершенной конкуренции на рынке.

Наконец, в ряде недавних статей авторы утверждают, что инновации возможны и на рынке с совершенной конкуренцией. Например, в одном из направлений литературы по этому вопросу утверждается, что рост конкурентной отрасли возможен потому, что фирмы-инноваторы могут воспроизводить новые технологии (например, копировать программное обеспечение или компакт-диски) и продавать их своим конкурентам в течение определенного интервала времени, пока другие фирмы не успеют сымитировать инновацию (см., например: [Boldrin and Levine, 2003]). Другое направление литературы основывается на убывающей предельной производительности на уровне фирмы, которая создает прибыль и возможные стимулы осуществления инноваций даже для фирм на рынке с совершенной конкуренцией (см., например [Helwig, Irmen 2001]). Эти работы по росту на рынке с совершенной конкуренцией создают многообещающее направление будущих исследований, однако в имеющихся на данный момент моделях инновации и устойчивый экономический рост возможны лишь при соблюдении некоторых специфических ограничений.

12.3.3. Инновации и ex post монополия

Вернемся к простой модели, изложенной выше, и предположим, что если фирма 1 осуществляет успешную инновацию, то она способна полностью запатентовать ее. Тогда фирма 1 будет обладать технологией, лучшей, чем доступная другим фирмам, что означает, что ex post она получает на рынке монополистическую силу. Эта монополистическая сила позволяет фирме получать прибыль от инновации, что, возможно, и является исходной причиной ее исследовательской активности. Эта мысль лежит в основе утверждений Й. Шумпетера, К. Эрроу, П. Ромера и других экономистов о существовании тесной связи между инновациями и ex post монопольной силой.

Обсудим эту ситуацию более подробно. На этом этапе представляется полезным разделить два случая.

1. *Радикальная инновация.* Радикальная инновация соответствует достаточно большому значению константы λ, что делает фирму 1 эффективным монополистом после осуществления инновации. Чтобы найти значение λ, приводящее к ситуации такого рода, вначале предположим, что фирма 1 действительно ведет себя как монополист. Тогда она выбирает цену, при которой ее прибыль

$$\pi_1^I = D(p)(p - \lambda^{-1}\psi) - \mu$$

достигает максимума. Очевидно, что решение такой задачи максимизации приводит к стандартной формуле цены монополиста (см. упражнение 12.1) в следующем виде:

$$p^M \equiv \frac{\lambda^{-1}\psi}{1 - \varepsilon_{D(p^M)}^{-1}}. \tag{12.2}$$

Мы будем называть инновацию радикальной, если выполняется неравенство $p^M \le \psi$. Нетрудно убедиться, что в этом случае должно выполняться следующее неравенство:

$$\lambda \ge \lambda^* \equiv \frac{1}{1 - \varepsilon_{D(p^M)}^{-1}}.$$

Если инновация является радикальной, фирма способна установить цену монополиста p^M и захватить весь рынок целиком.

2. *Предельное ценообразование.* В случае когда инновация не является радикальной, то есть $p^M > \psi$, или, эквивалентно $\lambda < \lambda^*$, единственное равновесие в отрасли описывается предельным ценообразованием, когда фирма 1 устанавливает цену

$$p_1 = \psi,$$

что гарантирует, что она и в этом случае захватывает весь рынок (если при этом она установит цену $p_1 = p^M$, то другие фирмы смогут вытеснить ее, снизив цену и получая прибыль). Такой тип предельного ценообразования возникает во многих ситуациях. В данном случае предельное ценообразование возникает в процессе инновационной деятельности некоторых фирм, получающих в результате доступ к технологии, лучшей, чем у фирм-конкурентов. Также оно может возникнуть, если *пул* потенциально новых фирм имеет возможность имитировать технологию фирмы-инноватора (неся при этом некоторые издержки или в предположении, что имитированная технология обладает меньшей эффективностью), и тогда фирма-инноватор вынуждена переходить к предельному ценообразованию для того, чтобы предотвратить выход на рынок новых фирм.

Утверждение 12.1. *Рассмотрим описанную выше отрасль экономики. Предположим, что фирма 1 осуществляет инновацию, что приводит к снижению предельных издержек производства товара с ψ до $\lambda^{-1}\psi$. Тогда если выполняется неравенство $p^M \le \psi$ (или неравенство $\lambda \ge \lambda^*$), то она устанавливает цену, максимизирующую прибыль монополиста $p_1 = p^M$ и получает прибыль, равную*

$$\hat{\pi}_1^I = D\left(p^M\right)\left(p^M - \lambda^{-1}\psi\right) - \mu. \qquad (12.3)$$

Если выполняется неравенство $p^M > \psi$ (или неравенство $\lambda < \lambda^*$), то фирма 1 устанавливает цену $p_1 = \psi$ и получает прибыль, равную

$$\pi_1^I = D(\psi)\lambda^{-1}(\lambda - 1)\psi - \mu < \hat{\pi}_1^I. \qquad (12.4)$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения включает в себя поиск равновесия в игре с конкуренцией по Бертрану с асимметричными издержками фирм. Хотя оно и является стандартным, его повторение представляется полезным упражнением, позволяющим подчеркнуть утверждение о том, что весь спрос на рынке должен быть удовлетворен фирмой, обладающей низкими издержками производства товара. Возможность воспроизвести доказательство этого утверждения по шагам предоставлена читателю в упражнении 12.2. ■

Утверждение о том, что $\pi_1^I < \hat{\pi}_1^I$, представляется очевидным с интуитивной точки зрения в силу того, что в первом случае значение параметра λ превышает λ^*, а во втором оно оказывается достаточно низким и фирма вынуждена устанавливать цену, меньшую, чем цена, при которой прибыль фирмы-монополиста достигает максимума. Заметим также, что, так как до осуществления инновации прибыль фирмы была равна нулю, значения $\hat{\pi}_1^I$ и π_1^I соответствуют стоимости инновации для фирмы 1. Оба эти значения могут быть строго положительными, и поэтому инновация становится прибыльной при ex post монополии. Такая ситуация соответствует случаю, когда первоначально в отрасли присутствует совершенная конкуренция, а затем одна из фирм осуществляет инновацию для того, чтобы избежать конкуренции, и получает ex post монопольную силу. Наблюдение о том, что существование ex post монопольной силы имеет большое влияние на стимулы к осуществлению инноваций, согласуется со взглядом Й. Шумпетера на роль монополии в динамике инноваций в экономике.

Сравним стоимость инновации для фирмы 1 в двух описанных выше случаях с общественной стоимостью инновации, которая задается уравнением (12.1). Более того, мы также можем сравнить общественную стоимость инновации в равновесии, в котором фирма 1 осуществляет инновацию (и устанавливает цену товара, при которой ее прибыль достигает максимума) с полной общественной стоимостью инновации в уравнении (12.1), что соответствует случаю, когда цена товара равна предельным издержкам производства. Значения равновесного общественного излишка в режимах с монопольным и предельным ценообразованием (что, как и ранее, соответствует случаям, когда значение параметра λ оказывается больше или меньше λ^*) задаются следующими равенствами:

$$\hat{S}_1^I = D\left(p^M\right)\left(p^M - \lambda^{-1}\psi\right) + \int_{p^M}^{\psi} D(p)dp - \mu$$

и (12.5)

$$S_1^I = D(\psi)\lambda^{-1}(\lambda - 1)\psi - \mu.$$

Утверждение 12.2. *В модели, описанной выше, выполняются следующие неравенства:*

$$\pi_1^I < \hat{\pi}_1^I < S^I$$

и

$$S_1^I < \hat{S}_1^I < S^I.$$

Доказательство. См. упражнение 12.3. ■

В этом утверждении говорится о том, что общественная стоимость инновации всегда превышает ее рыночную стоимость по двум причинам. В первом неравенстве утверждается, что общественный планировщик, стремящийся максимизировать излишки потребителя и производителя, всегда будет более заинтересован в осуществлении инновации из-за *эффекта возможности присвоения*, фирма, даже если она обладает ex post монопольной силой, сможет присвоить лишь часть увеличения излишка потребителя, созданного использованием лучшей технологии. В дополнение во втором неравенстве утверждается, что даже при условии осуществления инновации увеличение общественного излишка в равновесии с ex post монополией всегда меньше, чем увеличение общественного излишка, которого может достичь общественный планировщик (имеющий возможность устанавливать цену товара). Следовательно, несмотря на то что наличие ex post монопольной силы (например, при использовании патентного законодательства) стимулирует осуществление инноваций фирмами, эти стимулы к осуществлению инноваций и возникающее в результате равновесное распределение ресурсов остаются неэффективными. Заметим также, что значение $\hat{S}_1^I$ может оказаться отрицательным, что означает, что инновация, ведущая к потенциальному увеличению производительности, может снижать общественный излишек в связи с издержками ее осуществления μ. Эта ситуация соответствует случаю избыточных инноваций. Однако при этом нетрудно показать, что если $\hat{\pi}_1^I > 0$, то $\hat{S}_1^I > 0$, откуда следует, что избыточные инновации невозможны при совершенной конкуренции на рынке (см. упражнение 12.4). Этот результат отличается от результатов, которые мы получим в следующем подпараграфе.

12.3.4. Стоимость инновации для монополиста. Эффект замещения

Начнем анализ с модели экономики, описанной в подпараграфе 12.3.3, однако предположим, что фирма 1 изначально является неограниченным монополистом при использовании существующей технологии производства. Тогда при существующей технологии фирма устанавливает монопольную цену, равную

$$\hat{p}^M \equiv \frac{\psi}{1-\varepsilon_D(p^M)^{-1}},$$

и получает прибыль в размере

$$\hat{\pi}_1^N = D\left(\hat{p}^M\right)\left(\hat{p}^M - \psi\right). \tag{12.6}$$

Если фирма осуществляет инновацию, то ее предельные издержки снижаются до $\lambda^{-1}\psi$ и она продолжает оставаться неограниченным монополистом. Следовательно, ее прибыль составит $\hat{\pi}_1^I$ из уравнения (12.3), где цена монополиста p^M задается равенством (12.2). Тогда стоимость инновации для монополиста определяется следующим уравнением:

$$\Delta\hat{\pi}_1^I = \hat{\pi}_1^I - \hat{\pi}_1^N = D\left(p^M\right)\left(p^M - \lambda^{-1}\psi\right) - D\left(\hat{p}^M\right)\left(\hat{p}^M - \psi\right) - \mu,$$

где значение $\hat{\pi}_1^I$ задано уравнением (12.3), а значение $\hat{\pi}_1^N$ — уравнением (12.6).

Утверждение 12.3. *В модели экономики, описанной выше, выполняются неравенства $\Delta\hat{\pi}_1^I < \pi_1^I < \hat{\pi}_1^I$, то есть фирма-монополист обладает меньшими стимулами к осуществлению инвестиций, чем фирма, действующая на рынке с совершенной конкуренцией.*

Доказательство. См. упражнение 12.6. ■

Этот результат, впервые отмеченный в важной работе К. Эрроу [Arrow 1962], называют «эффектом замещения Эрроу». Такая терминология отражает интуицию: фирма-монополист обладает меньшими стимулами к осуществлению инноваций, чем фирма, действующая на рынке с совершенной конкуренцией, в силу того, что инновация будет замещать его уже существующую прибыль. С другой стороны, фирма, действующая на конкурентном рынке, получает нулевую прибыль и в этом случае замещения прибыли не происходит. Из этого утверждения вытекает следующее непосредственное следствие.

Следствие 12.1. *Фирма, планирующая возможный выход на рынок, обладает большими стимулами к осуществлению инноваций, чем присутствующая на рынке фирма-монополист.*

Фирма, планирующая вход на рынок, будет получать нулевую прибыль, не осуществив инновацию. Если она осуществляет инновацию, то она становится ex post монополистом и получает прибыль, равную π_1^I или $\hat{\pi}_1^I$ (в зависимости от того, будет ли она устанавливать цену монополиста). Оба этих значения превышают увеличение прибыли от инновации для фирмы-монополиста $\Delta\hat{\pi}_1^I$. Этот результат является прямым следствием эффекта замещения: в то время как фирма-монополист замещает свою собственную уже приносящую прибыль технологию, фирма, выходящая на рынок, вытесняет фирму-монополиста. Из эффекта замещения и следствия из него следует, что во многих моделях фирмы, выходящие на рынок, обладают бóльшими стимулами к осуществлению исследований, чем уже присутствующие на рынке фирмы.

Наблюдение о том, что фирмы, выходящие на рынок, часто являются главными двигателями инновационного процесса, приводит нас в сферу шумпетерианских моделей технологического развития. Йозеф Шумпетер описывал экономический рост как *созидательное разрушение,* подразумевая под этим то, что процесс, в котором экономический рост является следствием поиска монопольной прибыли, сопровождается разрушением существующих производственных единиц. В результате эффекта замещения именно фирмы, выходящие на рынок, а не уже присутствующие на нем фирмы, осуществляют большее количество исследований, ведущих к открытиям и осуществлению инноваций в процесс производства. Следовательно, инновации ведут к обнулению монопольной ренты присутствующих на рынке фирм и их уходу с рынка. По мнению Й. Шумпетера, этот процесс созидательного разрушения является существенной частью экономической системы капитализма. В главе 14 мы покажем, каким образом процесс созидательного разрушения также может стать двигателем экономического роста.

Концепция созидательного разрушения является важной не только потому, что она предоставляет интересное описание процесса экономического роста и освещает важность рыночной структуры отрасли, но и в силу того, что она привносит политико-экономические взаимодействия на передний план дискуссии о причинах экономического роста. Если экономический рост происходит в результате созидательного разрушения, то в его процессе всегда будут возникать стороны, теряющие от него, в частности фирмы, уже присутствующие на рынке и получающие монопольную прибыль и ренту. Так как эти фирмы могут обладать значительной политической силой, во многих экономических системах могут существовать мощные барьеры, тормозящие экономический рост. Задача политической экономии экономического роста отчасти состоит в понимании причин оппозиции технологическому прогрессу со стороны определенных фирм, индивидов и групп и определении, насколько такая оппозиция может быть успешной.

Существует еще одно, возможно более неожиданное, следствие из вышеприведенного анализа. Оно состоит в так называемом *эффекте кражи бизнеса*, который тесно связан с эффектом замещения. Фирма, выходящая на рынок и вытесняющая присутствующие на нем фирмы, также присваивает себе бизнес и прибыль этих фирм. Из рассуждений, приведенных выше, следует, что эффект кражи бизнеса помогает сократить разрыв между рыночной и общественной стоимостями инновации. Однако при этом также возможно, что эффект кражи бизнеса будет приводить к избыточным инновациям со стороны выходящих на рынок фирм. Чтобы убедиться в возможности возникновения избыточных инноваций, вначале оценим общий излишек от инновации в предположении о начальной монопольной структуре рынка. Для упрощения выкладок предположим, что инновация является радикальной, то есть если фирма, выходящая на рынок, осуществляет эту инновацию, то она устанавливает цену монополиста p^M из уравнения (12.2). Тогда общественная стоимость инновации равна значению $\hat{S}_1^I$, заданному уравнением (12.5).

Утверждение 12.4. *В модели, описанной выше, возможно выполнение неравенства $\hat{S}_1^I < \hat{\pi}_1^I$. В этом случае фирма, выходящая на рынок, обладает избыточными стимулами к осуществлению инноваций.*

Доказательство. См. упражнение 12.8. ■

С интуитивной точки зрения общественный планировщик принимает во внимание прибыль, получаемую фирмой-монополистом. С другой стороны, фирма, выходящая на рынок ценит лишь прибыль, которую она получит в результате осуществления инновации. В этом состоит сущность эффекта кражи бизнеса, которая приводит к возможности избыточных инноваций. Этот результат является важным, так как он показывает, что мы не в состоянии определить, будет ли в общем случае в равновесии осуществляться слишком мало или слишком много инноваций. Ответ на этот вопрос зависит от того, насколько велико влияние эффекта кражи бизнеса по сравнению с влиянием эффекта возможности присвоения, который описан в подпараграфе 12.3.3.

12.4. Модель Диксита—Стиглица и экстерналии совокупного спроса

Анализ, проведенный нами в параграфе 12.3, посвящен описанию равновесной и общественной стоимостей инновации в контексте модели частного равновесия. Однако теория экономического роста в основном оперирует моделями инноваций общего равновесия. Для построения таких моделей необходимо существование несложной конструкции, описывающей равновесие в отрасли, которая затем может быть включена в модель общего равновесия в экономике. Наиболее часто используемой экономистами моделью равновесия в отрасли является модель, разработанная в работах: [Dixit, Stiglitz 1977; Spence 1976], которая описывает множество из ключевых характеристик монополистической конкуренции, указанных в работе [Chamberlin 1933]. В этой работе автор утверждал, что хорошей аппроксимацией рыночной структуры во многих отраслях является предположение о том, что каждая фирма наблюдает убывающую кривую спроса на производимый ее товар (и поэтому в некоторой степени обладает монопольной силой), однако в отрасли возможен свободный выход на рынок новых фирм. Поэтому в равновесии каждая фирма (или по меньшей мере предельная фирма) получает нулевую прибыль.

Модель Диксита—Стиглица не только формализует наблюдения Э. Чамберлина, но и позволяет нам описать структуру предпочтений домохозяйств, приводящую к постоянной величине торговой наценки монополиста. Это свойство оказывается очень удобным во многих моделях экономического роста, однако из него также следует, что такие модели не являются подходящими для описания ситуаций, в которых рыночная структура экономики и степень конкуренции между фирмами оказывают влияние на размер наценки монополиста.

12.4.1. Модель Диксита—Стиглица с конечным числом товаров

Рассмотрим статическую экономику, допускающую существование репрезентативного домохозяйства с предпочтениями, описанными следующей функцией полезности:

$$U(c_1, ..., c_N, y) = u(C, y), \tag{12.7}$$

где переменная

$$C \equiv \left(\sum_{i=1}^{N} c_i^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \tag{12.8}$$

является индексом потребления N различных вариантов $c_1, \ldots, c_N$. определенного товара, а переменная y обозначает некоторый общий товар и описывает потребление всех остальных товаров. Предположим, что функция $u(\cdot, \cdot)$ является строго возрастающей и дифференцируемой по обоим аргументам и совместно строго вогнутой. Параметр ε в равенстве (12.8) обозначает эластичность замещения между различными видами товара, где мы предполагаем, что выполняется неравенство $\varepsilon > 1$. Основное свойство определения (12.8) состоит в том, что оно описывает *предпочтение к разнообразию*, что означает, что полезность индивида увеличивается с ростом количества видов товара, которые он потребляет. Агрегатор различных видов товара в равенстве (12.8) присутствует во многих различных моделях технологических изменений и экономического роста, которые будут представлены в следующих главах книги. Мы будем называть его агрегатором Диксита—Стиглица или агрегатором ПЭЗ (где аббревиатура ПЭЗ обозначает постоянную эластичность замещения).

Чтобы убедиться в наличии предпочтения к разнообразию, рассмотрим случай, когда

$$c_1 = \ldots = c_N = \frac{\bar{C}}{N},$$

то есть домохозяйство приобретает общее количество $\bar{C}$ единиц всех товаров и равномерно распределяет их потребление между всеми вариантами товара. Подставляя это выражение в уравнения (12.7) и (12.8), получаем следующее равенство:

$$U\left(\frac{\bar{C}}{N}, \ldots, \frac{\bar{C}}{N}, y \right) = u\left(N^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \bar{C}, y \right),$$

где правая часть этого равенства строго возрастает по N (так как $\varepsilon > 1$), откуда следует, что при заданном значении общего потребления различных вариантов товара $\bar{C}$ полезность возрастает с ростом количества видов товара, между которыми распределяется общее потребление. Это свойство является важнейшей характеристикой функции полезности с предпочтением к разнообразию. Еще одно свойство, которое делает эту функцию полезности удобной, состоит в том, что она приводит к функции спроса на товар с постоянной эластичностью по цене. Чтобы вывести функцию спроса на определенный вариант товара, нормализуем цену товара y единицей и обозначим цену варианта товара i как p_i, а общий доход домохозяйства (в единицах товара y) как m. Тогда бюджетное ограничение индивида имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i c_i + y \leq m. \tag{12.9}$$

Решение задачи максимизации функции полезности (12.7) при ограничении (12.9) описывается следующими условиями первого порядка:

$$\left(\frac{c_i}{c_{i'}}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{p_i}{p_{i'}} \text{ для всех } i, i'.$$

Далее обозначим *идеальный индекс цен*, то есть ценовой индекс, соответствующий индексу потребления C, как P. Определим его таким образом, что выполняется следующее условие первого порядка для индекса потребления:

$$\left(\frac{c_i}{C}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{p_i}{P} \text{ для всех } i = 1, ..., N \tag{12.10}$$

(см. упражнение 12.10). Тогда из уравнения (12.10) следует, что идеальный индекс цен задается следующим равенством:

$$P \equiv \left(\sum_{i=1}^{N} p_i^{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \tag{12.11}$$

Во многих случаях в качестве единицы измерения более удобным представляется выбор идеального индекса цен. Заметим, однако, что в данном случае мы не можем использовать выражение (12.11) в качестве единицы измерения, так как в бюджетном ограничении потребителя единицей измерения является товар y. Решение задачи выбора между потреблением товаров C и y очевидно и сводится к максимизации функции полезности $U(C, y)$ при бюджетном ограничении:

$$PC + y \leq m, \tag{12.12}$$

где бюджетное ограничение (12.12) в терминах товаров C и y получено с помощью объединения уравнений (12.10) и (12.11) с уравнением (12.9). Решением задачи максимизации является интуитивно понятное условие первого порядка в следующем виде:

$$\frac{\partial U(C, y)/\partial y}{\partial U(C, y)/\partial C} = \frac{1}{P},$$

где мы предполагаем, что решение задачи является внутренним. Для упрощения выкладок мы сохраним это предположение в течение всего параграфа. Из строгой вогнутости функции u и бюджетного ограничения домохозяйства следует, что это условие первого порядка допускает представление в следующей форме:

$$y = g(P, m) \text{ и } C = \frac{m - g(P, m)}{P} \tag{12.13}$$

при некоторой функции $g(\cdot, \cdot)$.

Далее перейдем к описанию производства различных вариантов товара C. Предположим, что каждый вариант товара производится лишь единственной фирмой, что делает ее эффективным монополистом на соответствующем рынке. Также предположим, что задача всех фирм-монополистов состоит в максимизации прибыли (и что все фирмы принадлежат репрезентативному домохозяйству).

Напомним, что предельные издержки производства каждого варианта товара являются постоянной величиной, равной ψ. Рассмотрим задачу максимизации прибыли одной из фирм-монополистов:

$$\max_{p_i \geq 0} \left(\left(\frac{p_i}{P} \right)^{-\varepsilon} C \right) (p_i - \psi), \tag{12.14}$$

где первый множитель в скобках равен спросу на товар c_i (см. уравнение (12.10)), а второй множитель составляет разность цены и предельных издержек. Трудности, возникающие при решении этой задачи максимизации, связаны с тем, что индекс цен P и потребление C являются функциями от цен p_i. Однако при достаточно большом значении N мы можем проигнорировать воздействие p_i на эти величины, и решение задачи оказывается очень простым (см. упражнение 12.11). Это упрощение позволяет нам вывести формулу для цены, при которой прибыль фирмы-монополиста достигает максимума, как фиксированной наценки над предельными издержками:

$$p_i = p = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \psi \text{ для всех } i = 1, \ldots, N. \tag{12.15}$$

Этот результат является следствием того, что если мы игнорируем воздействие цены фирмы i на значение величин P и C, то функция спроса (12.10), которую наблюдает фирма-монополист имеет постоянную эластичность по цене, равную $\varepsilon > 1$. Так как все фирмы устанавливают равные цены, идеальный индекс цен определяется следующим равенством:

$$P = N^{-\frac{1}{\varepsilon - 1}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \psi. \tag{12.16}$$

Тогда, используя равенство (12.16), получаем следующее выражение для прибыли фирмы-монополиста:

$$\pi_i = \pi = N^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} C \frac{1}{\varepsilon-1} \psi \text{ для всех } i = 1, \ldots, N.$$

По очевидным причинам прибыль фирмы-монополиста является убывающей функцией от эластичности спроса по цене. Более того, прибыль возрастает по аргументу C, который является мерой общего спроса на все виды товара и убывает по количеству видов товара N, так как при заданном значении C увеличение числа видов товара ведет к меньшим расходам на каждый из этих видов.

Несмотря на отмеченный выше эффект, общее влияние количества видов товара N на прибыль может оказаться положительным. Чтобы убедиться в этом, подставим выражения для идеального индекса цен (12.16) в равенство (12.13):

$$C = N^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon\psi}\left(m - g\left(N^{-\frac{1}{\varepsilon-1}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\psi,\ m\right)\right)$$

и

$$\pi = \frac{1}{\varepsilon N}\left(m - g\left(N^{-\frac{1}{\varepsilon-1}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\psi,\ m\right)\right).$$

Нетрудно убедиться, что в зависимости от вида функции $g(\cdot)$в уравнении (12.13) (который, в свою очередь, зависит от вида функции полезности u в равенстве (12.7)) прибыль фирмы-монополиста может как возрастать, так и убывать по количеству видов товара N (см. упражнение 12.12). На первый взгляд этот результат может показаться неожиданным: в большинстве случаев мы ожидаем, что прибыль сокращается при увеличении числа конкурирующих фирм. Однако предпочтение потребителей к разнообразию, вложенное в функцию Диксита—Стиглица, создает противоположный эффект, который ведет к возможному увеличению спроса. Этот эффект в макроэкономической литературе часто называют экстерналией совокупного спроса. Основная его идея в том, что увеличение числа видов товара N ведет к росту полезности агента от потребления каждого вида из-за предпочтения к разнообразию. Он является «экстерналией», так как воздействие появления нового вида товара (или воздействие увеличения производства одного из видов товара) на спрос на другие варианты товара действует как монетарная экстерналия. В этой модели размер влияния этой монетарной экстерналии на благосостояние агента может иметь первый порядок малости, так как рынки в ней не являются конкурентными и полными (и первая теорема экономики благосостояния оказывается неприменимой). Этот эффект играет важную роль во многих моделях эндогенных технологических изменений, и мы встретимся с ним еще раз в главе 21 при анализе модели ловушки бедности.

12.4.2. Модель Диксита—Стиглица с континуумом товаров

Как мы уже отметили в подпараграфе 12.4.1 (см. упражнение 12.12 для более подробного анализа), если количество видов товара N конечно, то равновесие, в котором каждая фирма устанавливает цену, заданную равенством (12.15), является лишь аппроксимацией (где мы полагаем, что воздействие цены каждой отдельной фирмы на идеальный индекс цен мало, и пренебрегаем им). Альтернативным способом моделирования является предположение о том, что в экономике существует континуум видов товара C. В этом случае уравнение (12.15) уже не является аппроксимацией. Более того, модель с континуумом видов товара является более удобной, так как в этом случае величина N уже не должна быть натуральным числом. По этой причине в большинстве случаев в литературе используется вариант модели Диксита—Стиглица с континуумом товаров. Мы также будем использовать этот вариант в оставшейся части книги.

Этот вариант модели очень схож с моделью из подпараграфа 12.4.1 с отличием в том, что в данном случае функция полезности репрезентативного домохозяйства имеет следующий вид:

$$U\left(\left[c_i\right]_{i\in[0,N]}, y\right) = u(C, y),$$

где

$$C \equiv \left(\int_0^N c_i^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

и константа N является мерой множества видов товара. Бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства принимает следующий вид:

$$\int_0^N p_i c_i di + y \le m.$$

Рассуждения, аналогичные приведенным в подпараграфе 12.4.1, приводят к тому, что решение задачи максимизации полезности описывается уравнением (12.10), а выражение для идеального индекса цен имеет следующий вид:

$$P = \left(\int_0^N p_i^{1-\varepsilon} di \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

Как и ранее, бюджетное ограничение задается неравенством (12.12). Уравнения (12.13) затем могут быть использованы для поиска значений y и C. Так как количество производителей различных видов товара бесконечно, их цена не влияет на значения величин P и C. Следовательно, формула (12.15) для цены фирмы-монополиста выполняется точно и прибыль каждой фирмы составляет:

$$\pi = \frac{1}{\varepsilon N}\left(m - g\left(N^{-\frac{1}{\varepsilon-1}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\psi,\ m \right)\right),$$

где функция $g(\cdot)$ определена в уравнении (12.13).

Далее представим, например, что существует бесконечное число возможных типов продуктов и определенная фирма может выбрать один из них с фиксированными издержками $\mu > 0$ и выйти на рынок. Тогда, как в статье [Chamberlin 1933] по монополистической конкуренции, для всех выходящих на рынок фирм должно выполняться следующее условие свободного выхода на рынок:

$$\frac{1}{\varepsilon N}\left(m - g\left(N^{-\frac{1}{\varepsilon-1}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\psi,\ m \right)\right) = \mu, \qquad (12.17)$$

и так как ex ante все фирмы идентичны, они все имеют нулевую прибыль.

Как будет показано в следующей главе, существует тесная связь между появлением на рынке новых товаров (выходом новых фирм) и технологическими изменениями в экономике. Оставляя подробное обсуждение этой связи до следующей главы, на данном этапе мы можем задаться простым вопросом: влечет ли существование экстерналии совокупного спроса недостаточное количество фирм в отрасли? Ответ на этот вопрос следующий: не всегда. Несмотря на то что фирмы в своих решениях не учитывают положительное влияние их выхода на рынок на прибыль других фирм, из существования эффекта кражи бизнеса, отмеченного в подпараграфе 12.3.4, следует, что выход на рынок новых фирм может привести к сокращению спроса на существующие товары. Поэтому в общем случае ответ на вопрос, является ли количество фирм на рынке слишком малым или слишком большим в моделях с множеством видов некоторого товара, зависит от специфики такой модели и ее параметризации (см. упражнение 12.13).

12.4.3. Задача фирмы-монополиста

На данном этапе представляется полезным кратко обсудить цели фирмы на рынке с монополистической конкуренцией. При изложении материала этого параграфа мы следуем литературе по теории отраслевых рынков и теории экономического роста и предполагаем, что даже когда фирма принадлежит репрезентативному домохозяйству, задача фирмы состоит в максимизации прибыли. Это предположение можно оспорить, так как, если в экономике отсутствует совершенная конкуренция и первая теорема экономики благосостояния не выполняется, полезность репрезентативного домохозяйства может быть увеличена, если фирма преследует другие цели. Однако в данном случае максимизация прибыли является подходящей целью для фирмы, так как все распределения ресурсов, при которых фирмы не максимизируют прибыль (а, например, действуют так, как поступил бы общественный планировщик), не могут быть равновесными. Чтобы убедиться в этом, заметим, что репрезентативное домохозяйство само рассматривает цены в экономике как заданные величины (например, потому что оно является одним из многих идентичных домохозяйств). Если некоторые фирмы отказываются от максимизации прибыли, то домохозяйства не будут приобретать акции этих фирм и в результате этого на рынок будут выходить другие фирмы, максимизирующие прибыль. Поэтому, если репрезентативное домохозяйство или множество домохозяйств со стороны спроса рассматривают цены как заданные величины (что является нашим предположением в этой главе), единственной состоятельной стратегией для фирмы на рынке с монополистической конкуренцией является задача максимизации прибыли.

Единственное предостережение состоит в возможных отклонениях в производственной структуре экономики. Например, некоторая фирма может купить все монополистически конкурирующие фирмы и действовать как единственный в экономике производитель товаров. В этом случае она может добиться распределения ресурсов, в котором полезность репрезентативного домохозяйства увеличивается по сравнению с равновесием, описанным выше (и в то же время увеличить свою прибыль). Несмотря на это, мы не будем рассматривать отклонения такого типа по двум причинам. Во-первых, мы рассматриваем рыночное устройство экономики как экзогенный параметр модели, а в данной модели мы предполагаем на рынке монополистическую конкуренцию, а не абсолютную монополию (с единственной фирмой-производителем товаров). Существование в экономике единственной фирмы, владеющей всеми производственными мощностями, представляет собой совершенно другой, намного менее реалистичный и подходящий для анализа интересующих нас вопросов тип рыночной организации. Во-вторых, в большинстве случаев различные фирмы специализируются на производстве товаров в различных секторах экономики и существование единственного монополиста, производящего всю экономическую деятельность, в общем случае является невозможным. Наконец, в работе [Acemoglu, Zilibotti 1997] авторы показывают, что в похожей модели существование в экономике единственной фирмы, владеющей всеми производственными мощностями, не может быть равновесием при условии свободного входа на рынок новых фирм. Мы обсудим этот вопрос более подробно в главе 17. Поэтому, принимая во внимание все вышеперечисленные аргументы, на протяжении всей книги мы будем предполагать, что задача фирмы состоит в максимизации прибыли.

12.4.4. Предельное ценообразование в модели Диксита—Стиглица

В параграфе 12.3 мы уже увидели, как в экономике может возникнуть предельное ценообразование в случае, когда инновации в процесс производства не являются достаточно радикальными по сравнению с существующими технологиями. Другой причиной возникновения в экономике предельного ценообразования может послужить присутствие пула конкурирующих фирм, способных имитировать технологии, доступные фирме-монополисту. Расширение модели Диксита—Стиглица, включающее в себя такой пул конкурирующих фирм, является несложным, и мы будем использовать его в последующих главах для параметризации величины конкурентного давления в экономике.

Предположим, что в экономике присутствует большое количество фирм, способных имитировать технологии, доступные существующей фирме-монополисту. Также предположим, что эта имитация эквивалентна производству схожего товара и не запрещается патентным законодательством. Логично предположить, что имитирующие фирмы являются менее эффективными по сравнению с фирмой-монополистом, владеющей технологией производства рассматриваемого вида товара и уже производящей его в течение некоторого времени. Простой способ формализовать этот подход состоит в предположении о том, что в то время, как фирма-монополист создает новый вариант товара, неся при этом фиксированные издержки, равные μ, и получает доступ к технологии производства с предельными издержками, равными ψ, фирма-имитатор не несет фиксированных издержек, однако получает доступ к технологии с предельными издержками, равными $\gamma\psi$, где $\gamma > 1$.

Из рассуждений, аналогичных приведенным в параграфе 12.3, следует, что если выполняется неравенство $\gamma \geq \varepsilon/(\varepsilon - 1)$, то фирмы-имитаторы оказываются недостаточно производительными и не могут производить товары с прибылью даже в случае, когда фирма-монополист устанавливает монопольную цену, заданную уравнением (12.5). С другой стороны, если выполняется неравенство $\gamma < \varepsilon/(\varepsilon - 1)$, то фирма-монополист вынуждена переходить к предельному ценообразованию. Тогда из рассуждений, аналогичных приведенным в параграфе 12.3, следует, что предельная цена задается следующим уравнением:

$$p = \gamma\psi < \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\psi.$$

Нетрудно убедиться, что условие выхода на рынок, которое определяет количество производимых вариантов товара, изменяется и принимает следующий вид:

$$\frac{(\gamma-1)}{\gamma N}\left(m - g\left(N^{-\frac{1}{\varepsilon-1}}\gamma\psi,\ m\right)\right) = \mu.$$

12.4.5. Недостатки

Наиболее важным недостатком модели Диксита—Стиглица является свойство, которое делает ее столь простой: постоянная величина наценки монополиста в уравнении (12.5). В частности, из модели следует, что наценка каждой фирмы не зависит от количества видов товара на рынке. Это свойство делает модель очень специфичной. В большинстве моделей в теории отраслевых рынков наценка над предельными издержками является убывающей функцией от количества конкурирующих между собой товаров (см., например, упражнение 12.14). Однако это свойство, будучи правдоподобным, делает модели эндогенного экономического роста более сложными технически, так как в большом классе таких моделей эндогенные технологические изменения проходят на фоне непрерывного роста количества товаров N. При этом, если по мере роста количества товаров наценка стремится к нулю, технологические изменения прекращаются и устойчивый экономический рост становится невозможным. В таком случае альтернативой могут послужить модели, в которых некоторая другая переменная, возможно капитал, в это же время увеличивают размер наценки, которую устанавливает фирма. Хотя такие модели могут быть построены, их анализ оказывается значительно сложнее анализа стандартной модели Диксита—Стиглица. По этой причине большинство работ опирается на спецификацию Диксита—Стиглица.

12.5. Неопределенность относительно успешности инноваций фирмы и фондовый рынок

Последний вопрос, который мы обсудим в этой главе, посвящен неопределенности относительно успешности исследовательского проекта. Как мы уже заметили в начале главы, предположение о том, что успешность исследования является случайной величиной, выглядит разумным. Поэтому поток выручки некоторой фирмы, ведущий исследовательский проект становится случайной величиной. Если индивиды обладают свойством неприятия риска, то в этом случае возможно, что этот случайный поток выручки будет оцениваться с некоторой премией за риск. Однако это не является необходимым требованием, если выполняются следующие три условия:

1. Исследовательские проекты выполняются большим количеством фирм.
2. Реализация неопределенности относительно успешности исследования распределена независимо между отдельными фирмами.
3. Домохозяйства и фирмы имеют доступ к «финансовому рынку», где каждый потребитель может сформировать *сбалансированный портфель* исследовательских проектов.

Во многих моделях, представленных в двух следующих главах, присутствует неопределенность (например, относительно успешности исследовательского проекта фирмы или того как долго фирма будет обладать монопольной силой), но в них выполняются три вышеперечисленных условия. В этом случае, даже если поток выручки индивидуальной фирмы является случайной величиной, доходность сбалансированного портфеля, которым владеет репрезентативное домохозяйство, будет детерминистской. Следующий пример иллюстрирует это утверждение.

Пример 12.2. Предположим, что репрезентативное домохозяйство обладает функцией полезности от потребления вида $u(c)$, где функция $u(\cdot)$ является строго возрастающей, дифференцируемой, строго вогнутой (то есть домохозяйства обладают свойством неприятия риска) и удовлетворяет условию $\lim_{c\to 0} u'(c)=\infty$. В начальный момент времени домохозяйство обладает запасом, равным $y > 0$. Этот запас может быть использован на потребление или инвестирован в рисковый исследовательский проект. Предположим, что вероятность успеха исследовательского проекта равна p и в случае успеха его доходность составляет $1 + R > 1/p$ на единицу вложений. С вероятностью $1 - p$ проект оказывается неуспешным, и в этом случае его доходность равна нулю. Если этот исследовательский проект является единственным доступным, то потребление домохозяйства после инвестиций в него становится случайной величиной. В частности оптимизационный выбор, который определяет размер инвестиций, является решением следующей задачи максимизации ожидаемой полезности:

$$\max_{x\in[0,y]} (1-p)u(y-x)+pu(y+Rx).$$

Из условия первого порядка для этой задачи следует, что оптимальный размер инвестиций в рисковый исследовательский проект задается следующим равенством:

$$\frac{u'(y-x)}{u'(y+Rx)}=\frac{pR}{1-p}.$$

Из предположения о том, что $\lim_{c\to 0} u'(c) = \infty$, следует, что $x < y$, то есть в исследовательский проект будет инвестирован не весь запас индивида даже в случае, когда этот проект обладает положительной ожидаемой доходностью. Интуитивным образом, для компенсации риска волатильности потребления домохозяйство будет требовать премию за риск за инвестиции в рисковый проект.

Далее представим себе ситуацию, когда большое число фирм может проводить инвестиции в схожие рискованные исследовательские проекты. Предположим, что реализации успеха или неуспеха каждого исследовательского проекта независимы между собой. Предположим, что домохозяйство инвестирует величину x/N в каждый из N исследовательских проектов. Из усиленного закона больших чисел следует, что в пределе при $N \to \infty$ доля p из этих проектов будет успешной, а оставшаяся доля $1 - p$ окажется неуспешной. Следовательно, полезность домохозяйства почти наверняка будет равна:

$$u(y + (p(1 + R) - 1)x).$$

Из того, что $1 + R > 1/p$, следует, что это выражение является строго возрастающей функцией по x, и поэтому домохозяйство будет предпочитать инвестировать весь свой запас в рискованные исследовательские проекты, то есть $x = y$. Таким образом, возможность формирования сбалансированного портфеля исследовательских проектов с независимо распределенными доходностями позволяет домохозяйству диверсифицировать риск потребления и действовать как нейтральный к риску агент. ■

Аналогичная логика может быть применена ко многим другим моделям, представленным в оставшейся части книги: несмотря на то что потоки выручки отдельных фирм являются случайными величинами, репрезентативное домохозяйство формирует сбалансированный портфель всех фирм в экономике и, таким образом, диверсифицирует индивидуальные риски. Из этого наблюдения также следует, что целью каждой фирмы является максимизация ожидаемой прибыли (без премии за риск).

12.6. Основные выводы

В этой главе представлен обзор некоторых концептуальных вопросов и методов моделирования, связанных с экономикой сектора НИОКР. Мы показали, почему ex post монопольная сила фирмы является важным механизмом создания стимулов для инновационной деятельности, как различаются стимулы к осуществлению инноваций у фирм, работающих на рынке с совершенной конкуренцией, и у фирм-монополистов, и провели сравнение этих стимулов с общественной стоимостью инновации. Мы подчеркнули важность эффекта возможности присвоения, из которого следует, что во многих случаях рыночная стоимость инновации оказывается меньше, чем ее общественная стоимость. Это утверждение следует из того, что даже при обладании ex post монопольной силой фирма-инноватор оказывается не в состоянии присвоить весь излишек потребителя, возникающий в результате улучшения качеств товара или снижения издержек его производства. Мы также остановились на эффекте замещения Эрроу, из которого следует, что присутствующая на рынке фирма-монополист обладает меньшими стимулами к осуществлению инноваций, чем фирмы, входящие на рынок. Несмотря на существование эффекта возможности присвоения, количество инноваций на рынке может превышать оптимальное значение в результате действия еще одной, направленной в обратную сторону, силы: эффекта кражи бизнеса, который стимулирует фирмы к осуществлению инноваций с целью получения монопольной силы и присвоения («кражи») монопольной ренты. Следовательно, ответ на вопрос, будет ли в рыночном равновесии осуществляться слишком мало или слишком много инноваций, зависит от предполагаемой рыночной структуры экономики и параметризации модели.

В этой главе также представлена модель Диксита—Стиглица, которая станет важной частью анализа в следующих нескольких главах. Эта модель позволяет сделать простую формализацию подхода Э. Чемберлина к монополистической конкуренции, в котором каждая фирма обладает некоторой монопольной силой, но из условия свободного входа на рынок новых фирм следует, что прибыль всех фирм (включая фирмы, планирующие выход на рынок) равна нулю. Модель Диксита—Стиглица является удобной с математической точки зрения, так как оптимальная наценка монополиста в ней не зависит от количества конкурирующих между собой фирм на рынке. Это свойство делает модель подходящей для изучения эндогенного экономического роста, так как в этом случае осуществление инноваций остается прибыльным даже при непрерывном росте количества товаров (и запаса капитала) в экономике.

12.7. Литература

Основная цель этой главы состоит не в обзоре достаточно обширной литературы по экономике сектора НИОКР в теории отраслевых рынков, а в демонстрации некоторых ключевых характеристик этого сектора, которые мы будем использовать в оставшейся части книги. Читателю, заинтересовавшемуся этой темой, мы рекомендуем обратиться к учебнику [Tirole 1988, chapter 10], в котором содержится прекрасный обзор различий между рыночной и общественной стоимостями инновации. Более современный обзор недавних исследований в области экономики инноваций представлен в работе [Scotchmer 2005].

Классическим источником по рыночной и общественной стоимостям инновации является работа [Arrow 1962]. Й. Шумпетер в своей книге

[Shumpeter 1934] был первым экономистом, отметившим важную роль монополии в процессе осуществления НИОКР и инноваций. Обсуждение важности существования монопольной силы для осуществления инноваций и следствий неконкурентности знаний представлено в работах Ромера [Romer 1990, 1993]. Важность существования ex post монопольной силы и патентного законодательства для возникновения стимулов к осуществлению инноваций подчеркивается в большинстве работ по теории отраслевых рынков, см., например, книгу [Scotchmer 2005]. Этот подход был подвергнут критике в недавней работе [Boldrin, Levine 2003].

Классическим источником по монополистической конкуренции является работа [Chamberlin 1933]. Так называемая модель Диксита—Стиглица была разработана в работах: [Dixit, Stiglitz 1977; Spence 1976]. Она была впервые использована для анализа экономики сектора НИОКР в работе [Dasgupta, Stiglitz 1980]. Прекрасное изложение модели Диксита—Стиглица предложено в учебнике [Matsuyama 1995]. Модель Диксита—Стиглица вместе с рядом других моделей экономики инноваций, включая модель из работы [Salop 1979], которая представлена в упражнении 12.14, также описана в книге [Tirole 1988].

Общий обзор вопросов экономики инноваций и важности размера рынка и стимулов к получению прибыли представлен в работе [Schmookler 1966]. Современные эмпирические свидетельства влияния размера рынка и стимулов к получению прибыли на количество инноваций представлены в работах: [Newell, Jaffee, Stavins 1999; Popp 2002; Finkelstein 2004; Acemoglu, Linn 2004].

Прекрасный обзор истории инноваций описан в работе [Mokyr 1990; Мокир 2014]. Обзор качественной литературы по теории инноваций и обсуждение различных типов инноваций также приведены в работе [Freeman 1982].

В оставшихся главах этой части книги, как и в этой главе, мы будем использовать модели монополистической конкуренции, в которых подходящей концепцией равновесия является не конкурентное равновесие, а равновесие, основанное на теоретико-игровых взаимодействиях между фирмами. Так как все игры, которые мы рассматриваем в этой книге, — это игры с полной информацией, подходящим понятием равновесия является стандартное равновесие по Нэшу, а в случае многоуровневой или динамической игры — равновесие по Нэшу, совершенное по подыграм или совершенное марковское равновесие. При изложении материала мы предполагаем, что читатель уже знаком с этими понятиями. Краткое введение в необходимый для этой книги аппарат теории игр представлено в книге [Tirole 1988], за более подробным изложением рекомендуем читателю обратиться к учебникам [Myerson 1991; Fudenberg, Tirole 1988; Osborne, Rubinstein 1994]. Краткий обзор теории динамических игр (на бесконечном горизонте планирования) содержится в приложении С.

12.8. Упражнения

12.1. Выведите уравнение (12.2).

12.2. Докажите утверждение 12.1. В частности, покажите следующее:

(a) Покажите, что даже если $p^M = \psi$, то в единственном равновесии по Нэшу выполняются равенства $q_1 = D(p^M)$ и $q_j = 0$ для всех $j > 1$. Почему?

(b) Покажите, что если $p^M > \psi$, то прибыль фирмы 1 не достигает максимума ни при одной цене $p_1 > \psi$ или $p_1 < \psi$. Покажите, что не существует равновесия, в котором $p_1 = \psi$ и $q_j > 0$ при некотором и $j > 1$. [Подсказка: найдите отклонение для фирмы 1, при котором ее прибыль будет увеличиваться.]

(c) Докажите, что и $\hat{\pi}_1^I > \pi_1^I$.

12.3. Выведите уравнение (12.5). Используя его, докажите утверждение 12.2.

12.4. Покажите, что если $\hat{\pi}_1^I > 0$, то $\hat{\mathcal{S}}_1^I > 0$ (где эти символы определены в утверждении 12.2).

12.5. Рассмотрите модель отрасли из параграфа 12.3 и предположите, что фирмы, осуществляющие инновации, не защищены патентным законодательством. Фирма имеет возможность осуществить два типа инноваций, неся в обоих случаях издержки, равные μ. В первом случае она осуществляет общее технологическое улучшение, которое может быть скопировано всеми другими фирмами. Это улучшение снижает предельные издержки производства товара до $\lambda^{-1}\psi$. Второй тип инновации является специфичным для данной фирмы и не может быть скопирован другими фирмами. Он снижает предельные издержки производства товара в $\lambda' < \lambda$ раз. Покажите, что фирма никогда не будет осуществлять инновации первого типа, но может осуществлять инновации второго типа. Вычислите разницу общественных стоимостей инноваций обоих типов.

12.6. Докажите утверждение 12.3. В частности убедитесь в том, что заключение утверждения также верно и при предельном ценообразовании, то есть покажите, что $\Delta\hat{\pi}_1^I < \pi_1^I$.

12.7. Рассмотрите модель из параграфа 12.3 с присутствующей на рынке фирмой-монополистом и фирмой, планирующей выход на рынок. Предположите, что издержки осуществления инновации для фирмы-монополиста равны μ, а для фирмы, планирующей выход на рынок, — $\chi\mu$, где $\chi \geq 1$. Покажите, что существует значение $\bar{\chi} > 1$, такое, что если $\chi < \bar{\chi}$, то большими стимулами к осуществлению инноваций обладает фирма, планирующая выход на рынок, а если $\chi > \bar{\chi}$, то большими стимулами к осуществлению инноваций обладает фирма-монополист. Как разница между стимулами к инновациям для фирмы-монополиста и фирмы, планирующей выход на рынок, связана с эластичностью функции спроса на товар по цене? Опишите интуицию, стоящую за вашими выводами.

12.8. **(a)** Докажите утверждение 12.4, предъявив пример экономики, в которой существуют избыточные стимулы к осуществлению инноваций.

(b) Какие факторы делают возможность существования избыточных стимулов к инновациям более вероятной?

12.9. В анализе, приведенном в тексте главы, мы предполагали специальный вид патентного законодательства, при котором фирма-инноватор получает ex post монопольную силу. Альтернативным вариантом защиты прав интеллектуальной собственности является лицензирование: фирмы, осуществляющие инновацию, получают право лицензировать использование этой инновации другим фирмам. В этом упражнении вам предлагается провести анализ такого типа защиты права интеллектуальной собственности. Далее предположите, что процесс лицензирования устроен следующим образом: фирма-инноватор делает предложение о продаже права на использование инновации (и производства любого количества товаров) при стоимости лицензии, равной v, одной или нескольким фирмам, которые могут принять это предложение или отказаться от него. Рассмотрите рынок с совершенной конкуренцией и покажите, что предоставление фирме 1 возможности лицензировать осуществленную инновацию другим фирмам не позволяет ей увеличить свою прибыль и не приводит к увеличению стимулов к осуществлению инноваций. Обоснуйте свой вывод.

Далее измените модель таким образом, чтобы функция переменных издержек производства для каждой фирмы $\psi_1(q)$ являлась строго вогнутой и возрастающей, а фиксированные издержки присутствия на рынке были равны $\psi_0 > 0$ (таким образом, график функции средних издержек производства имеет стандартный вид перевернутой буквы U). Покажите, что в этом случае лицензирование увеличивает прибыль фирмы 1 и приводит к увеличению стимулов к осуществлению инноваций. Объясните причину различия результатов в первом и во втором случаях.

12.10. Выведите выражение (12.11) для идеального индекса цен из равенства (12.10) и определения индекса потребления C.

12.11. Рассмотрите задачу максимизации (12.14) и выведите условия первого порядка, принимая во внимание влияние переменной p_i на переменные P и C. Покажите, что в пределе при $N \to \infty$ решение этой задачи сходится к условиям (12.15).

12.12. В модели Диксита—Стиглица из параграфа 12.4.1 найдите условия на функцию полезности $u(\cdot, \cdot)$ в равенстве (12.7), при которых прибыль фирмы-монополиста возрастает с ростом количества вариантов товара N.

12.13. Предположите, что функция полезности U имеет вид $U(C, y) = C + v(y)$, где $v(y) = y^{1-\alpha}/(1 - \alpha)$ при $\alpha \in (0, 1)$. Предположите, что фиксированные издержки выхода на рынок с новым вариантом товара равны μ.

(a) Рассмотрите распределение ресурсов в экономике, которое выбирает общественный планировщик, имеющий возможность контролировать цены. Определите количество видов товара, которые выберет производить общественный планировщик, максимизирующий функцию полезности репрезентативного домохозяйства.

(b) Предположите, что цены в отрасли заданы уравнением (12.15). Определите количество видов товара, которые выберет производить общественный планировщик, максимизирующий функцию полезности репрезентативного домохозяйства.

(c) Определите количество видов товара, производимое в равновесии монополистической конкуренции (в котором все фирмы-производители получают нулевую прибыль), и сравните его с вашими ответами на два предыдущих вопроса. Объясните причину различий между равновесным количеством видов товара и количеством, которое выбирает общественный планировщик в каждом случае.

12.14. В этом упражнении вам предлагается проанализировать модель рынка дифференцированных товаров из работы [Salop 1979]. Ее отличие от модели Диксита—Стиглица в том, что в ней равновесная наценка фирмы-монополиста является убывающей функцией от количества фирм на рынке. Предположите, что потребители распределены равномерно на окружности единичной длины. Различные точки на окружности соответствуют как различиям в предпочтениях разнородных потребителей, так и различным вариантам производимого в отрасли товара. Точка, в которой размещен определенный потребитель, соответствует наиболее предпочитаемому им варианту товара. Если потребитель, который находится в точке x на окружности, потребляет вариант товара z, то его полезность равна $R - t|z - x| - p$, если он выбирает нулевое потребление, то его полезность равна нулю. Параметр R в данном выражении соответствует резервационному значению полезности потребителя, а константа t параметризует «транспортные» издержки, которые несет индивид в связи с тем, что он потребляет не наиболее предпочтительный для себя товар. Предположите, что предельные издержки производства единицы товара для каждой фирмы равны ψ.

(a) Рассмотрите потребителя, расположенного в точке x, и две фирмы, расположенные в точках z_1 и z_2, где $z_1 > x > z_2$. Если цены этих фирм ненамного превышают цены фирм, расположенных далее от потребителя, то он будет приобретать товары у одной из этих фирм. Обозначьте цены каждой из этих фирм как p_1 и p_2. Покажите, что разница цен, при которой потребителю неважно, у какой из этих двух фирм он приобретет товар, удовлетворяет условию $p_1 - p_2 = (2x - z_1 - z_2)t$ при $t(z_1 - x) + p_1 \le R$.

(b) Предположите, что цены p_1 и p_2 удовлетворяют этому условию. Тогда покажите, что все потребители $x' \in [z_2, x)$ строго предпочитают приобретать товары у фирмы 2, а все потребители $x' \in (x, z_1]$ строго предпочитают приобретать товары у фирмы 1.

(c) Предположите, что в отрасли присутствуют три фирмы, расположенные в точках z_1, z_2 и z_3, где $z_1 > z_2 > z_3$. Покажите, что прибыль фирмы 2 задается следующим равенством:

$$\pi_2(p_1, p_2, p_3 \mid z_1, z_2, z_3) =$$
$$= (p_2 - \psi)\left(\frac{p_1 - p_2}{2t} + \frac{z_1 - z_2}{2} + \frac{p_3 - p_2}{2t} + \frac{z_2 - z_3}{2}\right),$$

и найдите цену, при которой ее прибыль достигает максимума.

(d) Предположите, что $p_1 = p_3$. Покажите, что в этом случае фирма 2 будет предпочитать располагаться на середине дуги между фирмами z_1 и z_3. Покажите, что в равновесии с N фирмами, устанавливающими равные цены, расстояние между двумя соседними фирмами равно $1/N$.

(e) Покажите, что если в отрасли присутствует N фирм, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, то в равновесии каждая фирма устанавливает цену, равную $p = \psi + t/N$. Объясните, почему в этой модели наценка монополиста является убывающей функцией от количества фирм, а в модели Диксита—Стиглица она не зависит от количества фирм в отрасли.

Глава 13
Модели с расширением разнообразия товаров

Наиболее простыми моделями эндогенных технологических изменений являются модели, в которых исследования и НИОКР приводят к расширению разнообразия машин и оборудования, используемых для производства товаров. В этой главе мы рассмотрим модели с расширением разнообразия производственных мощностей, в которых исследования приводят к созданию новых вариантов оборудования, а расширение разнообразия оборудования улучшает «разделение труда», увеличивая производительность в секторе производства конечных товаров (см.: [Romer 1987, 1990]. Следовательно, такая динамика может рассматриваться как инновации в процесс производства. Альтернативная формулировка задачи, представленная в работах: [Grossman, Helpman 1991a, b], состоит в описании инноваций в товары. В этой модели исследования ведут к созданию новых товаров, и в силу того, что домохозяйства обладают свойством предпочтения к разнообразию, они получают большую полезность при расширении набора потребляемых ими благ. Следовательно, в результате инноваций в товары увеличивается «реальный доход» домохозяйств. Математическая структура моделей инноваций в товары мало отличается от структуры моделей инноваций в процесс производства с расширением разнообразия производственных мощностей, и мы обсудим ее в конце этой главы.

Во всех этих моделях, так же как и в модели конкуренции в качестве товаров в следующей главе, мы будем использовать модель Диксита—Стиглица с функцией спроса с постоянной эластичностью по цене, описанную в главе 12.

13.1. Модель экономического роста «лабораторного оборудования» с разнообразием факторов производства

Важным элементом всех моделей эндогенных технологических изменений является граница инновационных возможностей (технологии в секторе НИОКР). Мы начнем с простого варианта модели эндогенного экономического роста с расширением разнообразия машин и оборудования, в которых производственная технология в секторе НИОКР устроена так, что для производства новых машин и оборудования используется только конечный продукт. Эту модель часто называют моделью «лабораторного оборудования», так как в ней для осуществления исследований необходимы лишь инвестиции в лабораторное оборудование, а не наем квалифицированных или неквалифицированных работников и ученых.

13.1.1. Демографическая структура, предпочтения и технологии

Рассмотрим экономику с бесконечным горизонтом планирования в непрерывном времени, допускающую существование репрезентативного домохозяйства с предпочтениями, описываемыми следующей целевой функцией:

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t)\frac{C(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt \tag{13.1}$$

Предположим, что рост населения отсутствует и общее число работников, поставляющих занятость на рынок труда абсолютно неэластично, равно L. Как и в предыдущей главе, предположим, что репрезентативное домохозяйство владеет сбалансированным портфелем всех фирм в экономике.

Единственный конечный продукт производится на рынке с совершенной конкуренцией, и производственная функция имеет следующий вид:

$$Y(t)=\frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^{N(t)} x(v,\ t)^{1-\beta}dv\right)L^\beta, \tag{13.2}$$

где константа L обозначает совокупную занятость, переменная $N(t)$ — количество типов оборудования (машин), доступных для использования в производственном процессе в момент времени t, а функция $x(v, t)$ — общее количество машин типа v, занятых в момент времени t. Предположим, что все они полностью выбывают после использования, таким образом, они могут рассматриваться в качестве факторов производства, промежуточных товаров или даже капитала при условии, что мы готовы принять его 100-процентную амортизацию. На протяжении этой главы мы будем называть эти товары «машинами». Предположение о том, что машины выбывают или полностью амортизируются после использования, гарантирует то, что количество этих машин, которое использовалось в производстве в прошлом, не является дополнительной переменной состояния в модели. Такое предположение позволяет значительно упростить математические выкладки (при этом результаты модели не изменяются без этого предположения, см. упражнение 13.23).

Выражение $(1-\beta)$ в производственной функции используется для упрощения обозначений. Заметим, что при фиксированном значении переменной $N(t)$, которое фирмы-производители конечного товара рассматривают как заданную величину, производственная функция (13.2) обладает свойством постоянной отдачи от масштаба. Из-за того, что некоторые фирмы в этой экономике обладают монопольной силой, мы не можем воспользоваться теоремой 5.4, и поэтому мы не будем работать с агрегированной производственной функцией для всей экономики. Несмотря на это, так как рынок конечного товара является рынком с совершенной конкуренцией, мы можем без потери общности моделировать сектор производства конечного товара с помощью производственной функции (13.2).

Мы можем переписать уравнение (13.2) в следующем виде:

$$Y(t)=\frac{1}{1-\beta}\tilde{X}(t)^{1-\beta}L^{\beta},$$

где

$$\tilde{X}(t)\equiv\left(\int_{0}^{N(t)}x(v,t)^{\frac{\varepsilon_\beta-1}{\varepsilon_\beta}}dv\right)^{\frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_\beta-1}},$$

и $\varepsilon_\beta=1/\beta$ является эластичностью замещения между различными типами оборудования. В этой форме записи подчеркивается как свойство постоянной отдачи от масштаба производственной функции, так и связь между этой моделью и моделью Диксита—Стиглица из предыдущей главы. В дальнейшем изложении мы нормализуем цену конечного товара в каждый момент времени единицей.

Ресурсное ограничение в экономике в момент времени t выглядит следующим образом:

$$C(t)+X(t)+Z(t)\leq Y(t), \tag{13.3}$$

где переменная $X(t)$ обозначает расходы на оборудование (эквивалент «инвестиций»), а переменная $Z(t)$ — расходы на НИОКР в момент времени t.

Далее опишем, каким образом производится оборудование и каким образом происходит изобретение новых машин. Предположим, что после того, как схема производства определенного типа машин открыта, каждая единица таких машин производится с предельными издержками, равными $\psi>0$ единиц конечного товара. Граница инновационных возможностей имеет следующий вид:

$$\dot{N}(t)=\eta Z(t), \tag{13.4}$$

где $\eta > 0$, и в начальный момент времени экономика обладает некоторым запасом технологий $N(0) > 0$. Из уравнения (13.4) следует, что увеличение расходов на НИОКР ведет к изобретению новых машин. В дальнейшем изложении мы будем предполагать свободный вход на рынок исследований, что означает, что в момент времени t любой индивид или фирма может понести расходы, равные единице конечного товара, что позволит сгенерировать поток конструкций новых машин с темпом η. Фирма, которая изобретает конструкцию новой машины, получает полностью защищенный вечный патент на данный вид машин. Мы также будем предполагать, что начальный запас видов машин $N(0)$ поставляется на рынок монополистом, обладающим бессрочным патентом.

В процессе инноваций отсутствует агрегированная неопределенность. Естественным образом, в экономике существует индивидуальная неопределенность, но в случае, когда НИОКР производится многими различными исследовательскими лабораториями, на агрегированном уровне равенство (13.4) будет выполняться с вероятностью 1.

При структуре патентного законодательства, описанной выше, фирма, изобретающая вид машин v, является единственным поставщиком на рынок такого типа машин (монополистом) и в момент времени t устанавливает цену $p^x(v, t)$, при которой ее прибыль достигает максимума. Так как машина полностью выходит из строя после использования, $p^x(v, t)$ также может быть рассмотрена как арендная стоимость или стоимость использования этого типа машин.

Спрос на машины типа v может быть найден из решения задачи максимизации прибыли фирмы в секторе конечных товаров. Так как машины выбывают после использования, а наем рабочей силы происходит на спот-рынке, задача максимизации прибыли фирмы в секторе конечных товаров может быть рассмотрена отдельно в каждый момент времени и просто сводится к максимизации моментальной прибыли репрезентативной фирмы в секторе конечных товаров. Моментальная прибыль фирмы может быть вычислена как разность между стоимостью произведенных товаров и суммарными издержками — стоимостью использования арендованных машин и стоимостью труда. Следовательно, задача максимизации в момент времени t выглядит следующим образом:

$$\max_{[x(v,t)]_{v\in[0,N(t)]},L} \frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^{N(t)} x(v, t)^{1-\beta}dv\right)L^{\beta} - \int_0^{N(t)} p^x(v, t)x(v, t)dv - w(t)L. \quad (13.5)$$

Условие первого порядка для этой задачи максимизации по $x(v, t)$ для любого $v \in [0, N(t)]$ задает спрос сектора конечных товаров на данный тип машин. Функция спроса имеет удобный изоэластичный вид:

$$x(v, t) = p^x(v, t)^{-1/\beta}L, \quad (13.6)$$

который является интуитивно очевидным, так как эластичность спроса на различные типы машин по цене равна $\varepsilon_\beta = 1/\beta$ (то есть $x(v, t) = p^x(v, t)^{-\varepsilon\beta}L$). Из равенства (13.6) следует, что спрос на различные типы машин зависит только от стоимости использования машины и равновесного предложения труда и не зависит от процентной ставки $r(t)$, заработной платы $w(t)$ и количества имеющихся типов машин $N(t)$. Это свойство функции спроса делает модель очень простой технически.

Далее рассмотрим приведенную дисконтированную стоимость владения устройством машины типа v. Эта стоимость равна:

$$V(v, t) = \int_t^\infty \exp\left(-\int_t^s r(s')ds'\right)\pi(v, s)ds, \qquad (13.7)$$

где функция

$$\pi(v, t) \equiv p^x(v, t)x(v, t) - \psi x(v, t)$$

обозначает прибыль фирмы-монополиста-производителя машин типа v в момент времени t[1]. С другой стороны, в предположении о том, что эта функция стоимости является дифференцируемой по времени, это уравнение может быть выписано в виде уравнения ГЯБ, как в теореме 7.10 из главы 7:

$$r(t)V(v, t) - \dot{V}(v, t) = \pi(v, t). \qquad (13.8)$$

В упражнении 13.1 приведен другой вывод этого уравнения, отличный от теоремы 7.10.

13.1.2. Характеристика равновесия

Распределение ресурсов в экономике описывает динамику следующих переменных: траекторию потребления, агрегированные расходы на машины и агрегированные расходы на НИОКР $[C(t), X(t), Z(t)]_{t=0}^\infty$, траекторию количества имеющихся типов машин $[N(t)]_{t=0}^\infty$, траектории цен и количества каждого типа машин $\left[p^x(v, t), x(v, t)\right]_{v\in[0,N(t)],t=0}^\infty$ и траектории процентной ставки и заработной платы $[r(t), w(t)]_{t=0}^\infty$.

Определим *равновесие* как распределение ресурсов, в котором каждая исследовательская фирма-монополист выбирает набор $\left[p^x(v, t), x(v, t)\right]_{v\in[0,N(t)],t=0}^\infty$,

[1] Как обычно, процентная ставка $r(t)$ определяется как цена ценной бумаги Эрроу (с нулевым чистым предложением), которая может быть использована домохозяйствами для межвременной торговли потреблением. В агрегированной экономике межвременной перенос ресурсов может происходить лишь за счет изменения количества типов машин $N(t)$.

на котором приведенная стоимость прибыли достигает максимума, динамика переменной $[N(t)]_{t=0}^{\infty}$ определяется условием свободного выхода на рынок исследований, динамика цен факторов производства $[r(t),\ w(t)]_{t=0}^{\infty}$ согласуется с условием равновесия на этих рынках, а динамика переменных $[C(t),\ X(t),\ Z(t)]_{t=0}^{\infty}$ согласуется с условием максимизации полезности домохозяйством. Заметим, что это равновесие не является «конкурентным», так как производители машин обладают монопольной силой.

Начнем с описания поведения фирмы. Так как функция спроса (13.6) обладает свойством постоянной эластичности, в решении задачи максимизации прибыли для любого монополиста $v \in [0, N(t)]$ фирма устанавливает одну цену во все моменты времени (см. упражнение 13.2):

$$p^x(v,\ t) = \frac{\psi}{1-\beta} \text{ для всех } v \text{ и } t.$$

Поэтому все монополисты устанавливают одну арендную стоимость, равную фиксированной наценке на их предельные издержки производства ψ. Нормализуем предельные издержки производства машин следующим образом: $\psi \equiv (1-\beta)$, так что

$$p^x(v,\ t) = p^x \text{ для всех } v \text{ и } t. \tag{13.9}$$

Из решения задачи максимизации прибыли также следует, что все монополисты в каждый момент времени сдают в аренду одинаковое количество машин, равное:

$$x(v,\ \mathrm{t}) = L \text{ для всех } v \text{ и } t. \tag{13.10}$$

Отсюда следует, что прибыль фирмы-монополиста составляет:

$$\pi(v,\ t) = \beta L \text{ для всех } v \text{ и } t. \tag{13.11}$$

Из уравнения (13.11) следует, что все фирмы-монополисты продают равное количество машин, устанавливают равные цены и получают одну и ту же прибыль во все моменты времени.

Подстановка уравнения (13.6) и уравнения для цены машин (13.2) ведет к следующему (приведенному) виду производственной функции в секторе конечных товаров:

$$Y(t) = \frac{1}{1-\beta} N(t) L. \tag{13.12}$$

Уравнение (13.12) является одним из основных уравнений модели с расширением разнообразия машин. Из него нетрудно увидеть, что несмотря на то, что производственная функция обладает свойством постоянной отдачи от масштаба с точки зрения фирм в секторе производства конечного товара (которые рассматривают величину $N(t)$ как заданную), в агрегированной экономике производство происходит с возрастающей отдачей от масштаба. Более того, из уравнения (13.12) нетрудно заметить, что увеличение количества типов машин $N(t)$ ведет к росту производительности труда и что при росте $N(t)$ с постоянным темпом доход на душу населения растет с тем же темпом.

Спрос на труд со стороны фирм в секторе конечных товаров следует из условия первого порядка для задачи максимизации (13.5) для переменной L и задает равновесную заработную плату следующим образом:

$$w(t) = \frac{\beta}{1-\beta} N(t). \tag{13.13}$$

Наконец из условия свободного входа на рынок исследований следует, что

$$(v, t) \leq 1, Z(v, t) \geq 0 \text{ и } (\eta V(v, t) - 1)Z(v, t) = 0 \text{ лдя всех } v \text{ и } t, \tag{13.14}$$

где функция $V(v, t)$ задана уравнением (13.7).

Чтобы понять условия (13.14), напомним, что расходы на НИОКР, равные единице конечного товара, ведут к изобретению η новых типов машин, каждый из которых приносит приведенную дисконтированную стоимость прибыли, заданную уравнением (13.7). Условие свободного входа на рынок имеет вид условия дополнительной нежесткости, так как исследования могут оказаться недостаточно прибыльными и тогда они не будут проводиться. В этом случае значение $\eta V(v, t)$ может быть строго меньше единицы. Несмотря на это, при подходящих значениях параметров модели в экономике будет проводиться положительное количество исследований и наблюдаться экономический рост (и технологический прогресс), поэтому для упрощения изложения модели мы часто будем записывать условие свободного входа на рынок исследований в следующей форме:

$$\eta V(v, t) = 1.$$

Заметим, что, так как каждая фирма-монополист $v \in [0, N(t)]$ производит суммарное количество машин, заданное уравнением (13.10), а в экономике имеется $N(t)$ таких фирм-монополистов, общие расходы на машины определяются следующим образом:

$$X(t) = (1 - \beta)N(t)L. \tag{13.15}$$

Наконец, из задачи максимизации полезности репрезентативным домохозяйством следует стандартное уравнение Эйлера для потребления в следующем виде:

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta}(r(t) - \rho) \tag{13.16}$$

и условие трансверсальности в виде:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)\int_0^{N(t)} V(v,\, t)dv\right]=0, \tag{13.17}$$

которое записано для рыночной стоимости и требует, чтобы величина общего благосостояния репрезентативного домохозяйства, которая равна стоимости корпоративных активов $\int_0^{N(t)} V(v,\, t)dv$, росла не быстрее нормы дисконтирования (см. упражнение 13.3).

В свете вышеописанных уравнений равновесие может быть определено более формально как траектории потребления, расходов, решений о НИОКР и общего количества типов машин $[C(t),\, X(t),\, Z(t),\, N(t)]_{t=0}^{\infty}$, такие, что выполняются равенства (13.3), (13.7), (13.14), (13.15), (13.16) и (13.17), траектории цен и количества каждого типа машин $[p^x(v,\, t),\, x(v,\, t)]_{v\in N(t),t=0}^{\infty}$, такие, что выполняются равенства (13.9) и (13.10), и траектории процентной ставки и заработной платы $[r(t),\, w(t)]_{t=0}^{\infty}$, такие, что выполняются равенства (13.13) и (13.16).

Траектория сбалансированного роста (ТСР) определяется как равновесие, в котором потребление $C(t)$ и выпуск $Y(t)$ растут с постоянным темпом. Тогда из уравнения (13.12) следует, что на ТСР количество типов машин $N(t)$ также растет с постоянным темпом. ТСР также иногда называют «стационарным состоянием», так как она является стационарным состоянием системы трансформированных переменных (при этом исходные переменные растут с постоянным темпом).

13.1.3. Траектория сбалансированного роста

На ТСР потребление должно расти с постоянным темпом, допустим с темпом g_C^*. Из условия (13.16) следует, что это возможно лишь в случае, когда процентная ставка является постоянной величиной. Поэтому рассмотрим равновесие, в котором

$$r(t)=r^* \text{ для всех } t,$$

где звездочка (*) обозначает значение переменной на ТСР. Так как прибыль в любой момент времени задается уравнением (13.11), а процентная ставка постоянна, то из условия (13.8) следует, что $\dot{V}(t)=0$. Подставляя это равенство в уравнение (13.7) или в уравнение (13.8), получаем следующую зависимость:

$$V^*=\frac{\beta L}{r^*}. \tag{13.18}$$

Это уравнение интуитивно очевидно: моментальная прибыль фирмы-монополиста составляет βL, и она дисконтируется по постоянной процентной ставке r^*.

Далее предположим, что условие свободного входа на рынок исследований (13.14) выполняется как равенство. В этом случае имеем следующее равенство:

$$\frac{\eta\beta L}{r^*} = 1.$$

Это уравнение позволяет найти процентную ставку на ТСР:

$$r^* = \eta\beta L.$$

Тогда из уравнения Эйлера для потребления (13.16) следует, что темп роста потребления на ТСР задается следующим условием:

$$g_C^* = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta}(r^* - \rho). \tag{13.19}$$

Более того, нетрудно убедиться, что текущий гамильтониан для задачи максимизации полезности репрезентативным домохозяйством является вогнутой функцией. Поэтому это условие вместе с условием трансверсальности являются достаточными для описаний единственной оптимальной траектории потребления репрезентативного домохозяйства (напомним теорему 7.14 из главы 7 и упражнение 8.11 из главы 8).

Темпы роста потребления и выпуска не могут отличаться друг от друга на ТСР (см. упражнение 13.6), то есть

$$g^* = g_C^*.$$

Подставляя в уравнение (13.19) процентную ставку на ТСР, получаем следующее значение долгосрочного темпа роста экономики:

$$g^* = \frac{1}{\theta}(\eta\beta L - \rho). \tag{13.20}$$

Далее предположим, что выполняются следующие неравенства:

$$\eta\beta L > \rho \text{ и } (1-\theta)\eta\beta L < \rho. \tag{13.21}$$

Первое неравенство гарантирует, что экономика растет с положительным темпом роста $g^* > 0$, а второе неравенство гарантирует, что полезность домохозяйства конечна и условие трансверсальности выполняется.

Утверждение 13.1. *Предположим, что условие* (13.21) *выполнено. Тогда в описанной выше модели лабораторного оборудования с расширяющимся разнообразием факторов производства существует единственная*

ТСР, на которой технологии, выпуск и потребление растут с постоянным темпом g^*, заданным уравнением (13.20).

Доказательство. Все утверждения, кроме выполнения условия трансверсальности, следуют из вышеприведенных рассуждений. Выполнение условия трансверсальности доказывается в упражнении 13.4. В нем также показано, что ресурсное ограничение (13.3) выполняется с положительным значением потребления во все моменты времени. ■

Важным свойством такого класса моделей эндогенного технологического прогресса является присутствие эффекта масштаба, который мы уже обсудили в параграфе 11.4 в контексте модели Ромера [Romer 1986a]: увеличение населения L ведет к увеличению темпа роста экономики. Эффект масштаба является следствием эффекта размера рынка в сильной форме, который мы обсудили в предыдущей главе. В свою очередь, эффект размера рынка в сильной форме, а значит и эффект масштаба, вытекают из возрастающей отдачи от масштаба в технологиях (как, например, показано в уравнении (13.12)). В параграфе 15.5 мы увидим, что существуют версии подобной модели, в которых присутствует эффект размера рынка, но не присутствует эффект масштаба.

13.1.4. Переходная динамика

Нетрудно увидеть, что в данной модели отсутствует переходная динамика. Чтобы показать этот результат, рассмотрим функции стоимости для каждой фирмы-монополиста из уравнения (13.8). Подставляя в него значение прибыли из уравнения (13.11) и замечая, что функция $V(v, t)$ не зависит от v (обозначим ее как $V(t)$), приходим к следующему равенству:

$$r(t)V(t)-\dot{V}(t)=\beta L.$$

В данном контексте важное наблюдение состоит в том, что из положительности темпа роста экономики в некоторый момент времени следует выполнение равенства $\eta V(t) = 1$ для всех t. Другими словами, если $\eta V(t) = 1$ при $t \in (t' - \varepsilon, t' + \varepsilon)$ при некоторых t' и $\varepsilon > 0$ то $\eta V(t) = 1$ при всех t. Более того, из условий (13.21) следует, что темп роста экономики не может быть нулевым во все моменты времени, и поэтому мы имеем $\eta V(t) = 1$ по меньшей мере на некотором временном интервале (см. упражнение 13.5). Дифференцируя затем равенство $\eta V(t) = 1$ по времени, получаем $\dot{V}(t)=0$ для всех t, что возможно лишь при постоянной процентной ставке $r(t) = r^*$ при всех t, и тогда выполняется равенство:

$$r^* = \eta\beta L \text{ для всех } t.$$

Утверждение 13.2. *Предположим, что условия* (13.21) *выполнены и начальный запас технологий равен* $N(0) > 0$. *Тогда в модели существует единственная равновесная траектория. В этом равновесии технологии, выпуск и потребление всегда растут с постоянным темпом* g^*, *заданным уравнением* (13.20).

Доказательство. См. упражнение 13.5. ■

В некотором смысле этот результат неудивителен. Математическая структура модели расширяющегося разнообразия схожа со структурой модели *AK* из главы 11 (что наиболее четко видно из выведенного уравнения (13.12) для агрегированного выпуска). Следовательно, как и в модели *AK*, экономика всегда растет с постоянным темпом. Несмотря на то что математическая структура двух моделей схожа, экономическое содержание рассмотренной модели значительно отличается от модели *AK*. В равновесии в утверждении 13.2 происходит эндогенный технологический прогресс. В частности, фирмы в секторе НИОКР расходуют ресурсы для изобретения новых типов машин. Они делают это, так как, обладая патентом на изобретение, они могут с прибылью продавать эти машины фирмам в секторе производства конечного товара. Поэтому причиной НИОКР являются стимулы к получению прибыли, а экономический рост возникает в результате исследований и открытия новых типов машин. Таким образом, мы *получили первую модель, в которой рыночные стимулы определяют темп* развития технологических возможностей экономики во времени.

13.1.5. Распределение ресурсов, оптимальное по Парето

Из наличия в экономике монополистической конкуренции следует, что равновесие в модели не обязательно будет оптимальным по Парето (и первая теорема экономики благосостояния не выполняется). Во-первых, в цене машин присутствует наценка на предельные издержки их производства. Во-вторых, количество машин, производимое в некоторый момент времени, также может быть не оптимальным. Первый источник неэффективности экономики знаком нам из статических моделей монополии, второй же возникает в результате эндогенного определения множества торгуемых товаров (Эрроу—Дебре) в этой экономике[2].

Чтобы увидеть различия между равновесием и распределением ресурсов, оптимальным по Парето, сформулируем задачу оптимального роста. Траектория оптимального роста является решением задачи общественного планировщика, максимизирующего функцию полезности нормативного

[2] Второй источник потенциальной неэффективности экономики связан с вопросом эндогенной неполноты рынков (покупка машины, которая не производится в равновесии, является невозможной). Его роль описана в параграфе 13.1.6. Она также обсуждается более подробно в параграфе 17.6.

репрезентативного домохозяйства (13.1) при ресурсном ограничении (13.3) и границе инновационных возможностей (13.4) с начальным условием $N(0) > 0$. Общественный планировщик выбирает $[x(v, t)]_{v\in[0,N(t)]}$ в каждый момент времени t и траектории $C(t)$, $Z(t)$ и $N(t)$. Ресурсное ограничение может быть выписано по-другому в следующем виде:

$$C(t)+Z(t)\le \frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^{N(t)} x(v,\ t)^{1-\beta}dv\right)L^{\beta} - \int_0^{N(t)} \psi(v,\ t)dv, \qquad (13.22)$$

где правая часть неравенства представляет собой чистый выпуск, определенный как $\tilde{Y}(t)\equiv Y(t)-X(t)$.

Нам удобно будет описать решение задачи оптимального роста в два шага. Первый состоит в описании статического распределения ресурсов (при заданном значении $N(t)$). Затем второй шаг описывает оптимальные траектории потребления $C(t)$ и количества типов машин $N(t)$. Первый шаг эквивалентен максимизации чистого выпуска $\tilde{Y}(t)$, то есть правой части уравнения (13.22). Из решения задачи максимизации вытекает следующее уравнение:

$$x^S(v,\ t) = (1-\beta)^{-1/\beta}L.$$

Подставляя это равенство в уравнение (13.2), находим выпуск в оптимальном по Парето распределении ресурсов:

$$Y^S(t)=\frac{(1-\beta)^{-(1-\beta)/\beta}}{1-\beta}N^S(t)L=(1-\beta)^{-1/\beta}N^S(t)L,$$

где мы используем индекс «S» для того, чтобы подчеркнуть, что уровень технологий, и, как следствие, уровень выпуска различаются в оптимальном по Парето распределении ресурсов и в равновесии. Чистый выпуск $\tilde{Y}^S(t)$ может быть найден следующим образом:

$$\tilde{Y}^S(t)=(1-\beta)^{-1/\beta}N^S(t)L-\int_0^{N^S(t)}\psi x^S(v,\ t)dv=$$
$$=(1-\beta)^{-1/\beta}N^S(t)L-(1-\beta)^{-(1-\beta)/\beta}N^S(t)L=(1-\beta)^{-1/\beta}\beta N^S(t)L.$$

При таком виде функции чистого выпуска и уравнении (13.4) второй шаг описания траектории оптимального роста сводится к решению следующей задачи максимизации:

$$\max\int_0^{\infty}\exp(-\rho t)\frac{C(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt$$

при ограничении

$$\dot{N}(t)=\eta\left[(1-\beta)^{-1/\beta}\beta N(t)L\right].$$

В этой задаче $N(t)$ является переменной состояния, а $C(t)$ — переменной управления. Построим текущий гамильтониан задачи в виде:

$$\hat{H}(N, C, \mu) = \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \mu(t)\left[\eta(1-\beta)^{-1/\beta}\beta N(t)L - \eta C(t)\right].$$

Еще раз используя теорему 7.13, получаем, что возможное решение этой задачи определяется следующими условиями:

$$\hat{H}_C(N, C, \mu) = C(t)^{-\theta} - \eta\mu(t) = 0,$$

$$\hat{H}_N(N, C, \mu) = \mu(t)\eta(1-\beta)^{-1/\beta}\beta L = \rho\mu(t) - \dot{\mu}(t),$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp(-\rho t)\mu(t)N(t)\right] = 0.$$

Нетрудно убедиться, что текущий гамильтониан является строго вогнутой функцией и удовлетворяет условиям теоремы 7.14. Следовательно, вышеприведенные условия описывают единственную оптимальную траекторию роста (см. упражнение 13.8).

Объединяя эти условия, получаем следующее выражение для темпа роста потребления на траектории оптимального роста:

$$\frac{\dot{C}^S(t)}{C^S(t)} = \frac{1}{\theta}(\eta(1-\beta)^{-1/\beta}\beta L - \rho). \tag{13.23}$$

Как и в равновесии, на траектории оптимального роста темп роста потребления оказывается постоянным (и переходная динамика отсутствует). Мы можем напрямую сравнить темп оптимального роста потребления, заданный уравнением (13.23), и темп роста потребления в равновесии, заданный уравнением (13.20). Это сравнение сводится к следующему:

$$(1-\beta)^{-1/\beta}\beta \text{ по сравнению с } \beta.$$

Первое выражение всегда больше второго, так как $(1-\beta)^{-1/\beta} > 1$, и поэтому оптимальный (по Парето) темп роста экономики всегда превышает темп роста экономики в равновесии.

Утверждение 13.3. *В описанной выше модели расширяющегося разнообразия факторов производства децентрализованное равновесие всегда является субоптимальным. Более того, при выполнении неравенства* $(1-\theta)\eta(1-\beta)^{-1/\beta}\beta L < \rho$ *при любом начальном значении* $N(0) > 0$ *в оптимальном по Парето распределении ресурсов экономика растет с постоянным темпом, равным:*

$$g^S = \frac{1}{\theta}(\eta(1-\beta)^{-1/\beta}\beta L - \rho),$$

который строго превышает равновесный темп роста g^*, заданный уравнением (13.20).

Доказательство. См. упражнения 13.9 и 13.10. ■

На интуитивном уровне, оптимальный по Парето темп роста экономики превышает равновесный темп роста, так как общественная стоимость инноваций превышает их рыночную стоимость. Это связано с тем, что в оптимальном по Парето распределении ресурсов отсутствует наценка и поэтому доступное множество машин используется более интенсивно. Таким образом, неэффективность рыночного равновесия связана с присутствием монетарной экстерналии, возникающей из-за наценки монополиста, которая ведет к сокращению множества торгуемых в экономике товаров (и поэтому к снижению темпа роста количества типов машин и технологий). Другие модели эндогенного технологического прогресса включают в себя технологические переливы, и в них причинами неэффективности рыночного равновесия являются как монетарная экстерналия, присутствующая в этой модели, так и технологические переливы.

13.1.6. Экономическая политика в моделях эндогенного технологического прогресса

Различие между децентрализованным равновесием и оптимальным по Парето распределением ресурсов позволяет поставить вопрос об экономической политике, направленной на улучшение рыночного равновесия по Парето. Мы можем рассмотреть две естественно возникающие альтернативы:

1. *Субсидирование исследовательской деятельности.* Субсидируя исследования, правительство может увеличить темп роста экономики, и в случае использования неискажающих налогов это может привести к улучшению по Парето (при разнородности агентов улучшение по Парето также требует использования подходящего перераспределения ресурсов так, чтобы полезность каждого агента увеличилась).
2. *Субсидирование использования машин и/или других факторов производства.* Неэффективность децентрализованного равновесия также связана с тем, что в нем используется недостаточное количество машин и/или других факторов производства (из-за наценки монополиста в цене машины), и поэтому субсидирование использования машин фирмами в секторе производства конечного товара также приведет к увеличению темпа роста экономики.

Более того, так же как и в моделях эндогенного роста первого поколения, в данной модели использование различных инструментов экономической политики, включая налог на инвестиционный доход и различные типы субсидий, ведет к изменению темпа роста экономики (а не только уровня выпуска, см., например, упражнение 13.12).

Очевидно, что как только мы начинаем задумываться об экономической политике как инструменте сокращения разрыва между децентрализованным равновесием и оптимальным по Парето распределением ресурсов, возникает вопрос о целевой функции политики, что приводит нас в сферу политической экономии, которой посвящена часть VIII данной книги. Поэтому мы не будем останавливаться на подробном описании оптимальной политики (неполному ее обсуждению посвящены упражнения 13.11–13.13). Несмотря на это, на данном этапе полезным представляется краткое обсуждение роли политики стимулирования конкуренции в моделях эндогенного технологического прогресса.

Напомним, что цена фирмы-монополиста на машины, на которой ее прибыль достигает максимума, определяется уравнением $p^x = \psi/(1-\beta)$. Представим себе, что пул конкурирующих фирм имеет возможность скопировать инновацию любого монополиста, однако обладает большими издержками производства машин (например, потому что фирма, проводящая исследования, владеет большим количеством технологических знаний). В частности, как и в предыдущей главе, предположим, что предельные издержки конкурирующих фирм составляют не ψ, а большую величину, равную $\gamma\psi$, где $\gamma > 1$. Если $\gamma > 1/(1-\beta)$, то конкурирующие фирмы не представляют угрозу фирме-монополисту, так как в этом случае она имеет возможность устанавливать свою идеальную максимизирующую прибыль цену и конкурирующие фирмы не смогут выйти на рынок, не неся потери. Однако если $\gamma < 1/(1-\beta)$, то присутствие конкурирующих фирм не позволит фирме-монополисту установить свою идеальную цену. В частности, в этом случае по причинам, в точности совпадающим с описанными в предыдущей главе, она вынуждена будет в этом случае перейти к предельному ценообразованию[3] и устанавливать цену, равную

$$p^x = \gamma\psi. \tag{13.24}$$

Если фирма-монополист устанавливает свою предельную цену, ее прибыль на единицу товара составляет:

$$(\gamma-1)\psi = (\gamma-1)(1-\beta),$$

что меньше прибыли на единицу товара в отсутствии пула конкурирующих фирм. Какие последствия это несет для экономического роста?

[3] Более точно, если цена фирмы-монополиста превышает значение $\gamma\psi$, то конкурирующие фирмы могут снизить цену, захватить рынок и получить положительную прибыль. Если цена фирмы-монополиста оказывается ниже этой величины, то она может поднять ее ближе к своей идеальной цене и увеличить прибыль. Поэтому единственное равновесное значение цены задается уравнением (13.24).

Нетрудно убедиться, что в этом случае экономика будет расти медленнее. Например, в базовой модели лабораторных исследований темп роста экономики составит:

$$\hat{g} = \frac{1}{\theta}(\eta\gamma^{-1/\beta}(\gamma-1)(1-\beta)^{-(1-\beta)/\beta}L-\rho),$$

что меньше g^*, заданного уравнением (13.20). Следовательно, в этой модели увеличение конкуренции, которое снижает наценку фирмы-монополиста (и поэтому статические искажения в экономике), также снижает долгосрочный темп роста экономики. На первый взгляд этот результат может показаться нелогичным, так как читатель может подумать, что наценка фирмы-монополиста является основным источником неэффективности в экономике, а увеличение конкуренции (снижение параметра γ) ведет к сокращению наценки. Однако, как мы уже отметили выше, неэффективность возникает как из-за присутствия наценки фирмы-монополиста, так и из-за того, что множество доступных машин может быть выбрано неподходящим образом. При снижении параметра γ наценка фирмы-монополиста сокращается, но при этом проблема недостаточного количества машин становится более серьезной. Причина этого в том, что при сокращении прибыли фирмы-монополиста, у нее также снижаются стимулы к проведению исследований. Так как мы можем интерпретировать γ как параметр антимонопольной политики, из этого результата следует, что в базовых моделях эндогенных технологических изменений более жесткая антимонопольная политика ведет к сокращению темпа экономического роста.

Необходимо отметить, что благосостояние агентов не связано напрямую с темпом экономического роста и некоторый уровень конкуренции, ведущий к снижению цены машин относительно идеальной цены фирмы-монополиста, может, в зависимости от нормы дисконтирования репрезентативного домохозяйства, вести к росту благосостояния. По существу, при снижении наценки домохозяйство может позволить себе более высокий уровень потребления при заданном значении величины N, однако при этом темп роста потребления замедлится (N будет расти медленнее). Оптимальный выбор в этом случае зависит от величины нормы дисконтирования репрезентативного домохозяйства (см. упражнение 13.14).

Схожие результаты наблюдаются и при анализе патентной политики. На практике патенты обычно обладают конечным сроком действия. В базовой модели мы предположили, что патенты действуют бессрочно: как только фирма изобретает новый тип машин, она получает полностью защищенный бессрочный патент на него. Если государство гарантирует защиту патентов, у пула конкурирующих фирм не будет возможности выйти на рынок и темп роста экономики вернется к значению, заданному уравнением (13.20). Даже в отсутствие пула конкурирующих фирм мы можем представить, что по истечении срока действия патента фирма-монополист прекращает получать прибыль за свое изобретение. В этом случае нетрудно показать, что темп роста экономики достигает максимума при бессрочном действии патентов, однако и здесь будет присутствовать показанный выше выбор между благосостоянием и темпом роста экономики.

Полученные выше результаты о влиянии антимонопольной и патентной политики на темп экономического роста в базовой модели эндогенного технологического прогресса являются экстремальными, отчасти из-за того, что модель не включает в себя значительную конкуренцию между фирмами. Шумпетерианские модели конкуренции в качестве товаров, представленные в следующей главе, позволяют провести более детальный анализ влияния антимонопольной и патентной политики на инновации и экономический рост.

13.2. Экономический рост с перетоком знаний

В модели из предыдущего параграфа экономический рост является следствием использования конечного товара в секторе НИОКР. В некотором смысле эта модель схожа с моделью Ребело [Rebelo 1991], представленной в главе 11, так как граница инновационных возможностей (технологий в секторе НИОКР) в ней является линейной по накапливаемым факторам производства.

Альтернативной моделью является модель, в которой в секторе НИОКР используются «редкие факторы производства». Другими словами, в ней вместо предположения о необходимости использования лабораторного оборудования предполагается, что основными создателями новых товаров являются исследователи и ученые. В моделях лабораторного оборудования устойчивый экономический рост возникает в результате инвестирования все большего и большего количества ресурсов в сектор НИОКР. Такая ситуация не представляется возможной при существовании редких факторов производства, так как по определению устойчивый рост использования этих факторов в секторе НИОКР невозможен. Следовательно, в альтернативной формулировке модели эндогенный экономический рост возможен лишь в том случае, когда в экономике присутствуют технологические переливы от предыдущих исследований, что ведет к устойчивому росту производительности редких факторов производства, используемых в секторе НИОКР. Другими словами, в этой модели исследователи, работающие в настоящее время, «стоят на плечах гигантов прошлого». Оригинальная формулировка модели эндогенных технологических изменений в работе [Romer 1990] основывается именно на таком типе технологических переливов. Несмотря на то что подобные технологические переливы могут быть важны на практике, модель лабораторного оборудования, представленная в предыдущем параграфе, является лучшей начальной точкой, так как в ней четко продемонстрирована роль накопления технологий и показано, что экономический рост возможен и в отсутствие технологических экстерналий и переливов.

Так как переливы знаний играют важную роль во многих моделях экономического роста, на данном этапе полезным представляется рассмотреть механизм базовой модели эндогенного технологического прогресса с такими переливами. Далее мы рассмотрим наиболее простую версию модели эндогенных технологических изменений с переливом знаний. Структура экономики в ней идентична структуре в модели из предыдущего параграфа с одним исключением. Граница инновационных возможностей в ней выглядит как

$$\dot{N}(t) = \eta N(t) L_R(t), \tag{13.25}$$

где переменная $L_R(t)$ обозначает количество труда, занятое в секторе НИОКР в момент времени t. Переменная $N(t)$ в правой части уравнения (13.25) описывает переливы, вызываемые запасом уже имеющихся знаний.

Увеличение значения $N(t)$ ведет к росту производительности работников в секторе исследований. Заметим, что из вида уравнения (13.25) следует, что переливы знаний имеют пропорциональную, или линейную, структуру. Именно эта линейность является источником эндогенного роста экономики в данной модели.

Переменная $L_R(t)$ в уравнении (13.25) обозначает количество работников в секторе исследований, которые являются представителями совокупной рабочей силы в экономике. В альтернативной формулировке модели, изначально используемой в работе [Romer 1990], предполагается, что в секторе производства знаний (НИОКР) могут быть заняты только квалифицированные работники или ученые. Далее мы будем использовать предположение об однородности рабочей силы, занятой в секторах производства знаний и конечного товара. Тогда из конкуренции за работников между фирмами в исследовательском секторе и секторе производства конечного товара следует, что стоимость работника в секторе НИОКР задается заработной платой в секторе производства конечного товара. Единственное изменение в структуре производства конечного товара в данной модели по сравнению с моделью из предыдущего параграфа состоит в том, что теперь количество труда, занятое в этом секторе, составляет $L_E(t)$, а не L, так как часть работников занята в секторе НИОКР. Из условия равновесия на рынке труда следует, что

$$L_R(t) + L_E(t) \le L.$$

Агрегированный выпуск задается следующим уравнением:

$$Y(t) = \frac{1}{1-\beta} N(t) L_E(t), \tag{13.26}$$

а прибыль фирмы-монополиста от продажи собственных машин составляет:

$$\pi(t) = \beta L_E(t). \tag{13.27}$$

Чистая приведенная дисконтированная стоимость фирмы-монополиста (производящей машины типа v) остается равной $V(v, t)$, как и в уравнениях (13.7) или (13.8), а ее потоковая прибыль задается уравнением (13.27). Однако условие свободного входа на рынок исследований принимает другой вид по сравнению с тем, который следует из условия (13.4). Теперь из условия (13.25) вытекает следующее условие свободного входа на рынок исследований (при положительном количестве исследований):

$$\eta N(t) V(v, t) = w. \tag{13.28}$$

Левая часть уравнения (13.28) составляет доход от найма еще одного работника в секторе НИОКР. Переменная $N(t)$ присутствует в левой части уравнения в силу того, что увеличение $N(t)$ ведет к росту производительности работников в секторе исследований. Правая часть уравнения (13.28) составляет потоковую стоимость найма дополнительного работника в секторе НИОКР, равную $w(t)$.

Равновесная заработная плата совпадает с заработной платой в модели лабораторного оборудования. В частности, $w(t) = \beta N(t)/(1-\beta)$, как в уравнении (13.13). Более того, процентная ставка на траектории сбалансированного роста продолжает оставаться равной постоянной величине r^*. Используя эти наблюдения вместе с условием свободного входа на рынок исследований, получаем следующее равенство для ТСР:

$$\eta N(t) \frac{\beta L_E(t)}{r^*} = \frac{\beta}{1-\beta} N(t). \tag{13.29}$$

Следовательно, процентная ставка на ТСР задается следующим равенством:

$$r^* = (1-\beta)\eta L_E^*(t),$$

где $L_E^*(t)$ составляет количество работников, занятых в секторе производства конечного товара на ТСР (определяемое равенством $L_E^*(t) = L - L_R^*(t)$). Из уравнения (13.29) следует, что на ТСР количество работников в секторе производства конечного товара остается постоянным. Далее, используя уравнение Эйлера для репрезентативного домохозяйства (13.16), имеем следующее равенство:

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta}((1-\beta)\eta L_E^* - \rho) \equiv g^* \text{ для всех } t. \tag{13.30}$$

Для завершения описания равновесия на ТСР нам осталось определить уровень занятости в секторе производства конечного товара на ней L_E^*. Из границы инновационных возможностей (13.25) следует, что $\dot{N}(t)/N(t) = \eta L_R^* = \eta(L - L_E^*)$. Более того, по определению темп роста потребления на ТСР совпадает с темпом технологического прогресса, поэтому $g^* = \dot{N}(t)/N(t)$. Отсюда следует, что уровень занятости в секторе производства конечного товара определен единственным образом и составляет:

$$L_E^* = \frac{\theta\eta L + \rho}{(1-\beta)\eta + \theta\eta}. \tag{13.31}$$

Дальнейший анализ остается неизменным. Нетрудно убедиться, что в децентрализованном равновесии в данной модели отсутствует переходная динамика (см. упражнение 13.17).

Утверждение 13.4. *Рассмотрим описанную выше модель расширяющегося разнообразия факторов производства с переливом знаний и предположим, что выполняется следующее неравенство:*

$$(1-\theta)(1-\beta)\eta L_E^* < \rho < (1-\beta)\eta L_E^*, \tag{13.32}$$

где переменная L_E^* составляет количество работников, занятых в секторе производства конечного товара на ТСР, заданное уравнением (13.31). *Тогда для любого начального значения запаса технологий* $N(0) > 0$ *в модели существует единственная равновесная траектория. На этой траектории технологии, выпуск и потребление растут с одинаковым темпом g^*, заданным уравнением* (13.30).

Доказательство. См. упражнение 13.16. ■

В этой модели, как и в модели лабораторного оборудования, равновесное распределение ресурсов является субоптимальным по Парето. В оптимальном по Парето распределении ресурсов темпы роста выпуска и потребления превосходят равновесные. На интуитивном уровне, в равновесии фирмы не принимают во внимание будущий рост производительности в секторе НИОКР, возникающий вследствие их собственных расходов на исследования, в то время как на траектории оптимального роста этот эффект учтен (см. упражнение 13.17). Наконец необходимо отметить, что в данной модели также присутствует эффект масштаба: увеличение общего уровня занятости L ведет к росту процентной ставки и темпа роста экономики.

13.3. Экономический рост без эффекта масштаба

В моделях, представленных выше, присутствует эффект масштаба в том смысле, что увеличение населения L ведет к росту процентной ставки и темпа роста экономики. Как показано в ряде работ Чада Джонса, в силу по меньшей мере трех причин эта связь выглядит проблематично с эмпирической точки зрения:

1. Страны с большим населением не всегда растут быстрее (хотя при этом больший размер рынка в США и в европейских странах мог быть преимуществом на ранней стадии индустриализации, см. также главу 21).
2. Население большинства стран растет, а не остается постоянным с течением времени. В предположении о росте населения из неоклассической модели экономического роста (то есть $L(t) = \exp(nt)L(0)$) в таких моделях отсутствует траектория сбалансированного роста. В этом случае темп роста экономики будет увеличиваться во времени и выпуск достигнет бесконечного значения за конечное время.
3. В эмпирических данных доля ресурсов, занятая в секторе НИОКР (например, занятость и выпуск), непрерывно увеличивается во времени, однако при этом в них не наблюдается предсказываемого моделью увеличения темпа роста экономики.

Каждое из этих возражений против существования эффекта масштаба может быть оспорено (например, на основании того, что отдельные страны не являются подходящими элементами для сравнения в связи с наличием международной торговли и других связей между ними, или на основании наблюдения о том, что темп роста мировой экономики действительно вырос, если мы смотрим на последние две тысячи, а не на сто лет лет). Тем не менее эти наблюдения подсказывают, что сильная форма эффекта масштаба, прогнозируемая базовыми моделями эндогенного технологического прогресса, может не быть хорошей аппроксимацией реальных данных. Эти наблюдения послужили мотивацией работы [Jones 1995], в которой предложена модифицированная версия базовой модели эндогенного технологического прогресса. Несмотря на то что подобная модификация, в которой отсутствует эффект масштаба, может быть сделана в рамках модели лабораторного оборудования (см. упражнение 13.22), с концептуальной точки зрения она оказывается более простой в контексте модели перелива знаний, описанной в предыдущем параграфе.

В частности, в этой модели эффект масштаба может быть нивелирован с помощью снижения размера воздействия перелива знаний.

Более точно — рассмотрим модель из предыдущего параграфа с двумя отличиями. Во-первых, введем рост населения с постоянным экспоненциальным темпом n, то есть $\dot{L}(t) = nL(t)$. Данная экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства с предпочтениями, заданными функцией полезности вида CRRA:

$$\int_0^\infty \exp(-(\rho - n)t)\frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}dt, \tag{13.33}$$

где переменная $c(t)$ обозначает потребление конечного товара на душу населения в экономике в момент времени t. Предположим, что производственная функция конечного товара продолжает оставаться заданной уравнением (13.2).

Во-вторых, в отличие от модели с переливом знаний из предыдущего параграфа, предположим, что в секторе НИОКР происходит лишь частичный перелив знаний, и уравнение (13.25) преобразуется в следующее уравнение:

$$\dot{N}(t) = \eta N(t)^{\phi} L_R(t), \tag{13.34}$$

где $\phi < 1$, а переменная $L_R(t)$ обозначает количество работников, занятых в секторе исследований в момент времени t. Из условия равновесия на рынке труда следует, что

$$L_E(t) + L_R(t) \leq L(t), \tag{13.35}$$

где переменная $L_E(t)$ обозначает количество работников в секторе производства конечного товара, а переменная $L(t)$ — население экономики в момент времени t. Основное предположение модели состоит в том, что $\phi < 1$. Случай $\phi = 1$ проанализирован в предыдущем параграфе, и, как показано выше, в этом случае рост населения ведет к расходящейся траектории роста и бесконечному значению полезности репрезентативного домохозяйства.

Как и в предыдущем параграфе, агрегированный выпуск и прибыль фирмы-монополиста задаются уравнениями (13.26) и (13.27). Равновесие в экономике также определяется схожим образом. Остановимся на ТСР, на которой доля работников, занятых в секторе НИОКР, остается неизменной, а процентная ставка и темп роста экономики составляют постоянную величину. Предположим, что темп роста экономики на такой ТСР положителен, а условие свободного входа на рынок исследований выполняется как равенство. Тогда, в предположении о том, что $r^* > n$, условие свободного входа на рынок исследований может быть выписано в следующем виде (см. упражнение 13.18):

$$\eta N(t)^{\phi}\frac{\beta L_E(t)}{r^*-n}=w(t). \qquad (13.36)$$

Как и ранее, равновесная заработная плата определяется производственной структурой экономики и задана уравнением (13.13). Объединяя уравнения (13.13) и (13.26), получаем следующий вид условия свободного входа на рынок исследований:

$$\eta N(t)^{\phi-1}\frac{(1-\beta)L_E(t)}{r^*-n}=1.$$

Далее, дифференцируя это условие по времени, приходим к следующему равенству:

$$(\phi-1)\frac{\dot N(t)}{N(t)}+\frac{\dot L_E(t)}{L_E(t)}=0.$$

Так как на ТСР доля работников, занятых в секторе исследований, остается постоянной, то $\dot L_E(t)/L_E(t)=n$. Поэтому темп роста технологий на ТСР задается следующим уравнением:

$$g_N^*\equiv\frac{\dot N(t)}{N(t)}=\frac{n}{1-\phi}. \qquad (13.37)$$

Из уравнений (13.12) и (13.27) следует, что темп роста агрегированного выпуска составляет g_N^*+n. Так как население экономики растет во времени, то темп роста потребления на душу населения определяется следующим образом:

$$g_C^*=g_N^*=\frac{n}{1-\phi}. \qquad (13.38)$$

Тогда процентная ставка на ТСР может быть найдена из уравнения Эйлера для потребления:

$$r^*=\theta g_N^*+\rho=\frac{\theta n}{1-\phi}+\rho.$$

Утверждение 13.5. *Допустим, что выполняется неравенство* $\rho>\frac{(1-\phi-\theta)n}{1-\phi}$.

Тогда в модели расширяющегося многообразия факторов производства с ограниченными переливами знаний существует единственная ТСР, на которой потребление на душу населения растет с темпом g_N^*, *заданным уравнением* (13.37), *а выпуск растет с темпом* g_N^*+n.

Из приведенного выше анализа следует, что устойчивый (и стабильный) рост дохода на душу населения в равновесии возможен и в экономике с растущим населением. На интуитивном уровне, в данной модели вместо пропорциональных (линейных) переливов в базовой модели Ромера присутствуют лишь ограниченные переливы знаний. Без увеличения населения этих переливов оказывается недостаточно для поддержания устойчивого долгосрочного роста экономики. Однако непрерывный рост населения приводит к постоянному увеличению размера рынка для новых технологий и позволяет сгенерировать устойчивый экономический рост даже при ограниченных переливах знаний. Несмотря на то что такой рост принято называть «экономическим ростом без эффекта масштаба», необходимо отметить два наблюдения, говорящих о том, что в некотором смысле ограниченный эффект масштаба присутствует в таких моделях. Во-первых, увеличение темпа роста населения ведет к увеличению темпа роста дохода на душу населения (см. упражнение 13.20). С эмпирической точки зрения мы не имеем явных свидетельств того, что в данных прослеживается такой тип эффекта масштаба. Другими словами, некоторые эмпирические наблюдения, которые мы использовали против эффекта масштаба в базовой модели эндогенных технологических изменений, могут оказаться несогласованными с таким типом моделей. Например, в послевоенных или более ранних исторических данных мы не в состоянии найти подтверждение того факта, что увеличение темпа роста населения ведет к увеличению равновесного темпа роста дохода на душу населения.

Необходимо отметить, что подобные модели зачастую называют моделями полуэндогенного роста, так как, несмотря на то что в них присутствует устойчивый эндогенный рост экономики, темп роста дохода на душу населения (13.38) определяется в них лишь темпом роста населения и технологиями, а изменения в налоговой или какой-либо другой экономической политике не оказывают воздействия на него. В литературе по теории экономического роста также разработаны модели эндогенного роста без эффекта масштаба, в которых равновесный темп роста экономики реагирует на изменения в экономической политике, однако зачастую в таких моделях используется ряд сильно ограничивающих предположений.

13.4. Экономический рост с расширяющимся разнообразием товаров

В конце этой главы мы коротко опишем эквивалентную модель, в которой источником экономического роста являются инновации в товары, а не инновации в процесс производства, другими словами, модель расширяющегося многообразия товаров, а не факторов производства. Рассмотрим экономику с постоянным населением, равным L, в непрерывном времени. Предположим, что она допускает существование репрезентативного домохозяйства с предпочтениями, заданными следующей целевой функцией:

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t)\log C(t)dt, \tag{13.39}$$

где переменная

$$C(t) \equiv \left(\int_0^{N(t)} c(\nu, t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dt \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \tag{13.40}$$

является индексом потребления, который задан в виде агрегата потребления различных типов товаров Диксита—Стиглица (ПЭЗ). Функция $c(\nu, t)$ обозначает потребление товара ν в момент времени t, а переменная $N(t)$ — общее количество товаров. Далее мы будем предполагать, что значение параметра ε удовлетворяет неравенству $\varepsilon > 1$. Таким образом, от модели расширяющегося разнообразия факторов производства мы приходим к модели расширяющегося разнообразия товаров. Логарифмический вид функции полезности был выбран для простоты и он может быть заменен на более общую функцию полезности вида CRRA.

Патент на производство товара типа $\nu \in [0, N(t)]$ принадлежит фирме-монополисту, и монополист, который изобретает способ производства нового продукта, получает полностью защищенный вечный патент на его выпуск. Каждый товар производится по следующей технологии:

$$y(\nu, t) = l(\nu, t), \tag{13.41}$$

где функция $l(\nu, t)$ обозначает количество работников, занятых в производстве данного типа товара.

Так как экономика закрыта, потребление и выпуск каждого товара совпадают:

$$c(\nu, t) = y(\nu, t).$$

Как и в модели с переливом знаний из параграфа 13.2, мы будем предполагать, что изобретение новых товаров происходит в соответствии со следующей производственной функцией:

$$\dot{N}(t) = \eta N(t) L_R(t). \tag{13.42}$$

Читатель может отметить очень тесную связь между этой моделью и моделью расширяющегося разнообразия факторов производства, представленной выше, в особенности с моделью с переливом знаний из параграфа 13.2. Например, если мы будем рассматривать $y(v, t)$ как промежуточный товар или фактор производства, а не как конечный товар, а функцию $C(t)$ в уравнении (13.40) как производственную функцию конечного товара, а не как индекс потребления в функции полезности репрезентативного домохозяйства, то две эти модели становятся почти идентичными. Единственное различие в такой интерпретации состоит в том, что в данной модели труд используется в производстве факторов производства, в то время как в модели из параграфа 13.2 он используется только в производстве конечного товара.

Равновесие и ТСР в модели определяются как и в предыдущих моделях. В данном случае репрезентативное домохозяйство принимает решения о распределении расходов на различные типы товаров и о траектории совокупных потребительских расходов. Так как экономика является закрытой, а капитал в ней отсутствует, потребление и выпуск совпадают в любой момент времени. Значение процентной ставки определяется уравнением Эйлера для потребления. Из условия равновесия на рынке труда вытекает следующее неравенство:

$$\int_0^{N(t)} l(v, t)dv + L_R(t) \le L. \tag{13.43}$$

Начнем анализ с описания решений домохозяйства о расходах на каждый тип товара. Из предпочтений Диксита—Стиглица следует, что функция спроса репрезентативного домохозяйства на товар v имеет следующий вид (см. упражнение 13.25):

$$c(v, t) = \frac{p^c(v, t)^{-\varepsilon}}{\left(\int_0^{N(t)} p^c(v, t)^{1-\varepsilon} dv\right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}} C(t), \tag{13.44}$$

где функция $p^c(v, t)$ обозначает цену товара типа v в момент времени t, а переменная $C(t)$ определена в уравнении (13.40).

Выражение в знаменателе в уравнении (13.40) составляет агрегированный ценовой индекс, возведенный в степень $-\varepsilon$. Мы будем рассматривать этот индекс цен в качестве единицы измерения. Тогда цена конечного товара равна единице в любой момент времени, то есть

$$\left(\int_0^{N(t)} p^c(v, t)^{1-\varepsilon} dv\right)^{-\frac{1}{1-\varepsilon}} = 1 \text{ для всех } t. \tag{13.45}$$

При таком выборе единицы измерения уравнение Эйлера для потребления принимает следующий вид (см. упражнение 13.26):

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = r(t) - \rho. \tag{13.46}$$

Используя рассуждения, аналогичные сделанным ранее, получаем, что чистая приведенная дисконтированная стоимость фирмы-монополиста, владеющей патентом на производство товара типа v, определяется следующим уравнением:

$$V(v,\ t) = \int_t^{\infty} \exp\left(-\int_t^s r(s')ds'\right)\left[p^c(v,\ s)c(v,\ s) - w(s)c(v,\ s)\right]ds,$$

где выражение $w(t)c(v, t)$ составляет общие издержки фирмы на производство $c(v, t)$ единиц товара v (при производственной функции (13.41) и заработной плате, равной $w(t)$ в момент времени t), а выражение $p^c(v, t)c(v, t)$ — выручку фирмы-монополиста, вытекающую из функции спроса (13.44). Как и ранее, задача максимизации чистой приведенной дисконтированной стоимости фирмы сводится к задаче максимизации моментальной прибыли в каждый момент времени. Так как каждая фирма-монополист наблюдает функцию спроса с постоянной эластичностью по цене, заданную уравнением (13.44), цена фирмы-монополиста, при которой прибыль достигает максимального значения, определяется следующим уравнением:

$$p^c(v,\ s) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} w(t) \text{ для всех } v \text{ и } t.$$

Таким образом, в равновесии все фирмы устанавливают одинаковые цены, производят одинаковое количество товара и нанимают одинаковое количество труда. В момент времени t в количество типов товаров составляет $N(t)$, и поэтому из равновесия на рынке товаров (13.43) следует, что

$$c(v,\ t) = l(v,\ t) = \frac{L_E(t)}{N(t)} \text{ для всех } v \text{ и } t, \tag{13.47}$$

где $L_E(t) = L - L_R(t)$. Моментальная прибыль каждой фирмы-монополиста определяется следующим уравнением:

$$\pi(v,\ t) = p^c(v,\ t)c(v,\ t) - w(t)c(v,\ t) = \frac{1}{\varepsilon - 1}\frac{L_E(t)}{N(t)} w(t) \text{ для всех } v \text{ и } t. \tag{13.48}$$

Так как цены, продажи и прибыль совпадают для всех фирм-монополистов, мы можем упростить обозначение следующим образом:

$$V(t) = V(v,\ t) \text{ для всех } v \text{ и } t.$$

Более того, так как $c(v, t) = c(t)$ для всех v, мы имеем следующее равенство:

$$C(t) = N(t)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} c(t) = L_E(t) N(t)^{\frac{1}{\varepsilon-1}}, \tag{13.49}$$

где второе равенство следует из уравнения (13.47).

Спрос на труд формируется фирмами в секторе исследований и в секторе производства конечных товаров. Как и ранее, мы можем рассчитать спрос на труд в секторе НИОКР с помощью условия свободного выхода на рынок исследований. В предположении о положительном количестве исследований (тогда условие свободного входа на рынок исследований выполняется как равенство) спрос на труд принимает следующий вид:

$$\eta N(t) V(t) = w(t). \tag{13.50}$$

Объединяя уравнения (13.50) и (13.48), приходим к следующему равенству:

$$\pi(t) = \frac{1}{\varepsilon - 1} L_E(t) \eta V(t), \tag{13.51}$$

где переменная $\pi(t)$ обозначает прибыль фирмы-монополиста в момент времени t. На ТСР, где доля работников, занятых в секторе исследований, постоянна, из уравнения (13.51) следует, что чистая приведенная дисконтированная стоимость фирмы-монополиста и ее моментальная прибыль растут с одинаковым темпом. Обозначим темп роста количества типов товаров $N(t)$ как g_N, темп роста прибыли и стоимости фирмы-монополиста как g_V и темп роста заработной платы как g_w. Более того, при нашем выборе единицы измерения темп роста потребления g^* совпадает с темпом роста заработной платы g_w. Из условия свободного выхода на рынок исследований тогда следует, что $g^* = g_N + g_V$. Тогда при постоянных темпах роста этих переменных и постоянной процентной ставке на ТСР из уравнения (13.48) получаем, что на ТСР выполняется следующее равенство:

$$V(t) = \frac{\pi(t)}{r^* - g^* + g_N}. \tag{13.52}$$

На интуитивном уровне, прибыль фирмы-монополиста в момент времени t равна $\pi(t)$. В дальнейшем, с ростом количества типов товара, занятость на производстве отдельного товара сокращается с темпом g_N, что ведет к сокращению прибыли, а заработная плата растет с темпом g^*, что ведет к росту прибыли. Учитывая дисконтирование с нормой r^*, приходим к уравнению (13.52). Далее, объединяя уравнения (13.52) и (13.51), имеем следующее равенство:

$$r^* = \frac{\eta}{\varepsilon - 1}(L - L_R^*) + g^* - g_N,$$

где константа L_R^* обозначает количество работников в секторе исследований. Объединяя это уравнение с производственной функцией в секторе НИОКР, получаем следующее выражение для темпа роста количества типов товаров:

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = g_N = \eta L_R^*.$$

Далее, из уравнения (13.46) находим темп роста экономики на ТСР $g^* = r^* - \rho$. Объединяя это равенство с двумя предыдущими уравнениями, получаем значение занятости в секторе исследований на ТСР:

$$L_R^* = \frac{\eta L - (\varepsilon - 1)\rho}{\eta\varepsilon}. \tag{13.53}$$

Предположим, что выполняется неравенство $L_R^* > 0$ (то есть $\eta L > (\varepsilon - 1)\rho$) и темп роста экономики является положительной величиной (в противном случае условие свободного выхода на рынок выполняется как неравенство и темп роста экономики равен нулю). Более того, из уравнения (13.49) следует равенство $g^* = g_N/(\varepsilon - 1)$, поэтому мы имеем следующее выражение для темпа роста экономики:

$$g^* = \frac{\eta L - (\varepsilon - 1)\rho}{\varepsilon(\varepsilon - 1)}. \tag{13.54}$$

Наконец, из неравенства $r^* > g^*$ (в силу предположения о логарифмической функции полезности) следует, что значение полезности домохозяйства всегда конечно и соответствующее условие трансверсальности выполнено.

Утверждение 13.6. *Предположим, что выполняется неравенство $\eta L > (\varepsilon - 1)\rho$. Тогда в модели расширяющегося разнообразия товаров существует единственная ТСР, на которой совокупное потребление $C(t)$ и заработная плата $w(t)$ растут с темпом g^*, заданным уравнением* (13.54).

В таком равновесии, несмотря на то что производственная функция для каждого типа товара остается неизменной, происходит рост реального дохода. Это связано с тем, что хотя в экономике и не совершаются инновации, снижающие издержки производства товаров или улучшающие их качество, количество товаров, доступных для потребления домохозяйства, увеличивается за счет инноваций в товары. Так как функция полезности репрезентативного домохозяйства (13.39) обладает свойством предпочтения к разнообразию, увеличение количества типов товаров ведет к росту значения полезности. Динамика дохода в экономике зависит от выбора единицы измерения. Естественной единицей измерения представляется та, при которой значение индекса цен (13.45) равно единице, что соответствует измерению дохода в различные моменты времени в схожих единицах. При таком выборе единицы измерения реальный доход растет с тем же темпом, что и потребление $C(t)$, то есть с темпом g^*. Сходство модели расширяющегося разнообразия товаров с моделью расширяющегося разнообразия факторов производства более подробно исследуется в упражнении 13.24. В упражнении 13.27 показано, что в этой модели, так же как и в модели расширяющегося разнообразия факторов производства, отсутствует переходная динамика и равновесие является субоптимальным в смысле Парето. Наконец нетрудно убедиться, что в модели также присутствует эффект масштаба. Из этих наблюдений следует, что выбор между моделью расширяющегося разнообразия товаров и моделью расширяющегося разнообразия факторов производства в основном является предметом предпочтений экономиста и, возможно, контекста исследования. Обе модели ведут к схожей структуре равновесия, схожим эффектам воздействия экономической политики на равновесный темп роста экономики и схожим выводам об уровне благосостояния репрезентативного домохозяйства.

13.5. Основные выводы

Эта глава посвящена первому знакомству с моделями эндогенного технологического прогресса. Основное свойство этих моделей состоит в том, что стимулы к получению прибыли определяют значения расходов на НИОКР и инвестиции, которые, в свою очередь, определяют динамику и темп роста технологий в экономике. В некотором смысле между моделями из этой главы и моделью эндогенного экономического роста с экстерналиями Ромера [Romer 1986a], представленной в параграфе 11.4, имеется значительное сходство: математическая структура обоих типов моделей схожа с неоклассической моделью *AK* (постоянный долгосрочный темп роста экономики и отсутствие переходной динамики), оба типа моделей генерируют эндогенный экономический рост (темп роста экономики является функцией от параметров предпочтений и экономической политики), в обоих типах моделей присутствие в экономике экстерналий (технологических или денежных) ведет к тому, что равновесный темп роста оказывается ниже оптимального по Парето. Несмотря на это, читателю не стоит недооценивать фундаментальное различие между моделью Ромера [Romer, 1986a] и моделью эндогенных технологических изменений. Несмотря на то что модель Ромера может быть интерпретирована как модель «накопления знаний», такое накопление не является в ней следствием целенаправленной экономической деятельности агентов, а происходит на фоне других решений (в данном случае решений индивида об оптимальном выборе инвестиций в физический капитал). Поэтому, хотя такая модель позволяет «эндогенизировать» технологические изменения, в ней это делается без явной спецификации издержек и выгод от инвестиций в новые технологии. В силу того что, как показано в главе 3, межстрановые технологические различия, скорее всего, являются важной причиной межстрановых различий в уровне дохода на душу населения, понимание причин технологических различий является существенной частью нашего исследования механики экономического роста. В этой связи модели, представленные в этой главе, представляют собой значительное улучшение моделей из главы 11.

Необходимо отметить, что модели, представленные в этой главе (а также в двух последующих главах), обладают важным недостатком. Запас технологий в обществе в них определяется исключительно исследованиями, которые производятся внутри экономики. Другими словами, технологические различия являются лишь следствием различий в количестве и качестве исследовательской деятельности. Однако в современном мире относительно свободного перетока знаний технологические улучшения во многих странах являются следствием не только исследований, проводимых внутри страны, но и расширения мировой технологической границы. Следовательно, на практике решения о внедрении технологий и межстрановый механизм их распространения могут быть не менее, а может быть и более, важны, чем исследования, направленные на открытие новых технологий (см. главу 18). Следовательно, основной вклад моделей, представленных в этой главе, в наше понимание экономического роста состоит не в явном указании на источники межстрановых технологических различий, а в демонстрации эндогенной природы накопления технологий и подхода к моделированию инвестиций в них. В дополнение, несмотря на то что в некоторых странах внедрение и имитация уже имеющихся технологий могут оказаться важнее, чем инновации для стимулирования экономического роста, модели эндогенных технологических изменений важны с точки зрения понимания механизма роста мировой экономики, так как расширение мировой технологической границы в основном связано с научными исследованиями.

13.6. Литература

Модели эндогенного технологического прогресса были впервые представлены в работах: [Romer 1987, 1990]. Их дальнейшему анализу и расширению посвящены, среди прочих, работы: [Aghion, Howitt 1992; Grossman, Helpman 1991, 1992; Segerstrom, Anant, Dinopoulos 1990]. Модель лабораторного оборудования, рассмотренная нами в параграфе 13.1, представлена в работе [Rivera-Batiz, Romer 1991]. Модель из работы [Romer 1990] схожа с моделью, представленной в параграфе 13.2, однако в ней в секторе НИОКР заняты лишь квалифицированные работники. Прекрасный обзор большого количества моделей, рассмотренных в этой главе, представлен в работе [Gancia, Zilibotti 2005]. В работе [Matsuyama 1995] читатель может найти понятное описание источников неэффективности по Парето в моделях с предпочтениями и производственной структурой типа Диксита—Стиглица, эти же причины являются источниками неэффективности в модели лабораторного оборудования, представленной в параграфе 13.1.

Критике моделей эндогенного экономического роста, связанной с наличием в них эффекта масштаба, посвящены работы: [Backus, Kehoe, Kehoe 1992; Jones 1995]. В работе [Backus, Kehoe, Kehoe 1992] показано то, что страны с большим населением не демонстрировали в послевоенный период более высокие темпы экономического роста. Статья [Jones 1995] посвящена анализу динамики временных рядов. В ней указывается, что при значительном росте доли сектора исследований, в частности общего количества работников, занятых исследовательской деятельностью, в эмпирических данных не наблюдается соответствующего увеличения равновесного темпа роста экономики. Другие экономисты утверждают, что наблюдения, содержащиеся в данных по XX веку, могут оказаться недостаточными для ответа на вопрос о существовании эффекта масштаба. В работе [Kramer 1993] на основании исторических оценок мирового населения утверждается, что в течение прошедшего миллиона лет темп роста мировой экономики увеличивается вместе с ростом населения планеты.

Модель из параграфа 13.3 схожа с моделями, представленными в работах: [Jones 1995, 1999]. Расширения этой модели, в которых изменения в экономической политике воздействуют на равновесный темп роста экономики, рассматриваются в работах: [Dinopoulos, Thompsom 1998; Segerstrom 1998; Young 1998; Howitt 1999].

Модель расширяющегося разнообразия товаров была впервые предложена в работе [Judd 1985]. Модели эндогенного экономического роста с расширяющимся разнообразием товаров были впервые представлены в работах: [Grossman, Helpman 1991 a,b]. Изложение в книге отличается от предложенного авторами тем, что мы использовали в качестве единицы измерения совокупный индекс цен, в то время как Дж. Гроссман и Е. Хелпман используют для этого показатель совокупных расходов.

13.7. Упражнения

13.1. Выведите уравнение (13.8) из уравнения (13.7).

(a) Перепишите уравнение (13.7) в момент времени t в следующем виде:

$$V(v,\ t)=\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\exp\left(-\int\limits_{t}^{s}r(\tau)d\tau\right)[p^{x}(v,\ s)-\psi]x(v,\ s)ds+$$
$$+\int\limits_{t+\Delta t}^{\infty}\exp\left(-\int\limits_{t}^{s}r(\tau)d\tau\right)[p^{x}(v,\ s)x(v,\ s)-\psi x(v,\ s)]ds.$$

Оно представляет собой тождество для любого Δt. Проинтерпретируйте это уравнение и покажите его связь с принципом оптимума для задачи в дискретном времени (теоремой 6.2).

(b) Покажите, что при малой величине приращения Δt это уравнение принимает следующий вид:

$$V(v,\ t)=[p^{x}(v,\ s)-\psi]x(v,\ s)\Delta t+\exp(r(t)\Delta t)V(v,\ t+\Delta t)+o(\Delta t),$$

и выведите из него следующее уравнение:

$$(p^{x}(v,\ s)-\psi)x(v,\ s)\Delta t+\exp(r(t)\Delta t)V(v,\ t+\Delta t)-$$
$$-\exp(r(t)\times 0)V(v,\ t)+o(\Delta t)=0.$$

Проинтерпретируйте это уравнение и объясните значение члена $o(\Delta t)$.

(c) Разделите обе части этого уравнения на Δt, перейдите к пределу при $\Delta t\to 0$ и покажите, что если функция $V(v,\ t)$ является дифференцируемой, то из него следует уравнение (13.8).

13.2. Выведите уравнения (13.9) и (13.10) из задачи максимизации прибыли для фирмы-монополиста.

13.3. Сформулируйте задачу максимизации полезности домохозяйством в терминах текущего гамильтониана и выведите необходимые условия для непрерывного внутреннего оптимума. Покажите, что эти условия эквивалентны уравнениям (13.16) и (13.17).

13.4. Закончите доказательство утверждения 13.1. В частности, покажите, что если выполняется условие (13.21), то значение функции полезности репрезентативного домохозяйства конечно и выполняется условие трансверсальности. Также покажите, что в равновесии ресурсное ограничение (13.3) всегда выполняется с положительным значением потребления во все моменты времени.

13.5. Покажите, что в модели из параграфа 13.1 для всех v и t выполняется равенство $V(v,t)=V(t)$. Более того, покажите, что если для некоторых значений t' и $\varepsilon>0$ при $t\in(t'-\varepsilon,\ t'+\varepsilon)$ выполняется равенство $\eta V(t)=1$, то $\eta V(t)=1$ при всех t, и наоборот, если это равенство не выполняется ни при каких значениях t' и $\varepsilon>0$, то $\eta V(t)<1$ и фирмы не выходят на рынок ни в один момент времени t. Затем покажите, что из условия (13.21) следует, что отсутствие выхода фирм на рынок не может быть равновесием. Используя эти наблюдения, приведите доказательство утверждения 13.2.

13.6. Рассмотрите модель расширяющегося разнообразия из параграфа 13.1 и обозначьте темпы роста потребления и совокупного выпуска на ТСР как g_C^* и g^* соответственно.

(a) Покажите, что неравенство $g_C^* > g^*$ не может выполняться в равновесии.

(b) Покажите, что если $g_C^* < g^*$, то условие трансверсальности не выполняется.

13.7. Рассмотрите модель мировой экономики, состоящей из $j = 1, ..., J$ государств. Предположите, что каждое из них является закрытой экономикой, обладающей доступом к одной и той же технологии в секторе НИОКР, описанной в параграфе 13.1. Государства различаются количеством рабочей силы L_j, производительностью в секторе НИОКР η_j и нормой дисконтирования ρ_j. Также предположите, что издержки единичных расходов на НИОКР в стране j составляют ζ_j единиц конечного товара. Обмен технологиями между государствами отсутствует.

(a) Определите понятие «равновесия в мировой экономике», в котором экономика каждого государства находится в равновесии по аналогии с равновесием в модели экономики одной страны из параграфа 13.1.

(b) Опишите равновесие в мировой экономике. Покажите, что в этом равновесии экономика каждого государства растет с постоянным темпом начиная с момента времени $t = 0$. Найдите решения для темпов роста в явном виде.

(c) Покажите, что за исключением специального случая темпы роста экономик различных государств различаются между собой.

(d) Вернитесь к обсуждению воздействия межстрановых различий в экономической политике и налогообложении на долгосрочные различия в уровне дохода на душу населения из глав 3 и 8. Покажите, что в модели, описанной в этом упражнении, сколь угодно малые межстрановые различия в экономической политике или норме дисконтирования ведут к бесконечно большим долгосрочным различиям в уровне дохода на душу населения. Помогает ли это свойство модели объяснить эмпирические наблюдения, представленные в этих главах?

13.8. **(a)** Убедитесь в том, что теорема 7.14 из главы 7 может быть использована для решения задачи общественного планировщика в параграфе 13.1.

(b) Выведите выражение (13.23) для темпа роста потребления на траектории оптимального роста.

13.9. Рассмотрите модель расширяющегося разнообразия факторов производства из параграфа 13.1. Покажите, что в ней возможна ситуация, когда условие трансверсальности выполняется для равновесного распределения ресурсов, но не выполняется для траектории оптимального роста. Проинтерпретируйте это наблюдение. Означает ли это, что решение задачи оптимального роста становится менее привлекательным? Покажите, что если условие из утверждения 13.3 выполняется, то условие трансверсальности выполняется на траектории оптимального роста и значение функции полезности репрезентативного домохозяйства на ней конечно.

13.10. Закончите доказательство утверждения 13.3. В частности покажите, что в оптимальном по Парето распределении ресурсов темп роста экономики всегда постоянный и в нем отсутствует переходная динамика.

13.11. Рассмотрите модель расширяющегося разнообразия факторов производства из параграфа 13.1.

(a) Предположите, что беневолентное правительство имеет возможность лишь субсидировать исследовательскую деятельность и финансирует субсидии за счет паушального налогообложения. Существует ли у него возможность выбрать уровень субсидии таким образом, чтобы равновесный темп роста экономики сравнялся с оптимальным по Парето темпом роста? Могут ли субсидии быть выбраны так, что равновесная траектория экономики совпадает с траекторией оптимального роста? Является ли выбор уровня субсидий, при котором экономика достигает оптимального по Парето темпа роста, предпочтительной политикой с точки зрения достижения максимума общественного благосостояния начиная с момента времени $t = 0$?

(b) Предположите, что правительство имеет возможность лишь субсидировать производство машин и, как и ранее, финансирует субсидии за счет паушального налогообложения. Существует ли у него возможность выбрать уровень субсидии таким образом, чтобы равновесный темп роста экономики сравнялся с оптимальным по Парето темпом роста? Могут ли субсидии быть выбраны так, что равновесная траектория экономики совпадает с траекторией оптимального роста?

(c) Будет ли политика, при которой правительство субсидирует как исследования, так и производство машин, предпочтительнее политик, описанных в пунктах (a) и (b) данного упражнения?

13.12. Рассмотрите модель расширяющегося разнообразия факторов производства из параграфа 13.1 и предположите, что прибыль фирм облагается пропорциональным налогом по налоговой ставке τ.

(a) Опишите равновесное распределение ресурсов в экономике.

(b) Рассмотрите две экономики, обладающие идентичными технологиями и начальными условиями, но с различными ставками налога на прибыль: τ и τ'. Найдите значение отношения уровней дохода в двух экономиках (как функцию времени).

***13.13.** Рассмотрите модель расширяющегося разнообразия факторов производства из параграфа 13.1 со следующим отличием. Предположите, что фирма, изобретающая новую машину, получает патент на нее, срок действия которого является пуассоновским процессом с параметром ι. После окончания действия патента машина производится на конкурентном рынке и ее цена для фирм в секторе производства конечного товара равна предельным издержкам производства.

(a) Опишите в этом случае равновесие на ТСР и покажите, что темп роста экономики на ней зависит от значения параметра ι. [Подсказка: заметьте, что в любой момент времени в экономике будут производиться два типа машин, поставляемых на рынок по различным ценам.]

(b) Опишите переходную динамику в модели. [Подсказка: покажите, что темп роста потребления в модели составляет постоянную величину, а темп роста выпуска изменяется во времени.]

(c) При каком значении параметра ι равновесный темп роста экономики достигает максимума?

(d) Покажите, что если $\iota = 0$, то уровень общественного благосостояния не обязательно достигает максимума в момент времени $t = 0$.

13.14. Рассмотрите антимонопольную политику, описанную в подпараграфе 13.1.6.

(a) Полностью опишите равновесную траекторию экономики.

(b) Найдите значение уровня благосостояния репрезентативного домохозяйства в момент времени $t = 0$ в этом равновесии.

(c) Найдите значение параметра γ, при котором функция благосостояния, найденная вами в пункте (b), достигает максимума.

(d) Почему оптимальное значение параметра γ не удовлетворяет неравенству $\gamma^* \geq 1/(1-\beta)$? Приведите объяснение, основанное на выборе между уровнем и темпом роста благосостояния.

(e) Опишите зависимость между оптимальным значением параметра γ и нормой дисконтирования ρ.

13.15. В этом упражнении от вас потребуется построить модель в дискретном времени, эквивалентную модели лабораторного оборудования с расширяющимся разнообразием из факторов производства параграфа 13.1. Предположите, что экономика допускает существование репрезентативного домохозяйства с предпочтениями в момент времени $t = 0$, описанными следующей целевой функцией:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta},$$

где дисконт $\beta \in (0, 1)$, а $\theta \geq 0$. Производственная технология совпадает с технологией в исходной модели, а граница технологических возможностей задана как $N(t+1) - N(t) = \eta Z(t)$.

(a) Определите равновесие на ТСР в такой экономике.

(b) Опишите ТСР и сравните структуру равновесия на ней с ТСР в модели из параграфа 13.1.

(c) Покажите, что в экономике отсутствует переходная динамика, и при любом начальном значении $N(0) > 0$ темп роста экономики является постоянной величиной.

13.16. Закончите доказательство утверждения 13.4. В частности покажите, что на равновесной траектории отсутствует переходная динамика и что при выполнении условия (13.32) значение функции полезности репрезентативного домохозяйства является конечной величиной и выполняется условие трансверсальности.

13.17. Опишите оптимальное по Парето распределение ресурсов в экономике в модели из параграфа 13.2. Покажите, что в нем темп роста экономики является постоянной величиной, превышающей равновесный темп роста из утверждения 13.4, и что в нем отсутствует переходная динамика.

13.18. Выведите уравнение (13.36) и объясните, почему знаменатель в нем равен $r^* - n$.

13.19. Рассмотрите модель эндогенного технологического прогресса с ограниченным переливом знаний, описанную в параграфе 13.3.

(a) Опишите переходную динамику экономики, начиная с произвольного исходного значения $N(0) > 0$.

(b) Опишите распределение ресурсов, оптимальное по Парето, и сравните его с равновесным распределением ресурсов из утверждения 13.5.

(c) Проанализируйте эффект следующих двух типов экономической политики: во-первых, субсидирования исследовательской деятельности, во-вторых, патентного законодательства, при котором срок действия патента является пуассоновским процессом с параметром $\iota > 0$. Объясните, почему влияние этих типов политики на темп экономического роста в данной модели отличается от их влияния в базовой модели эндогенного экономического роста.

13.20. Рассмотрите модель из параграфа 13.3. Предположите, что мир состоит из двух экономик с идентичными предпочтениями, технологиями и начальными условиями, однако начальное население экономики 1 составляет $L_1(0)$, а экономики 2 — $L_2(0) > L_1(0)$. Покажите, что значение дохода на душу населения в экономике 2 всегда превышает значение дохода на душу населения в экономике 1.

13.21. Опишите равновесную динамику в модели из параграфа 13.3 при начальном запасе технологий, равном $N(0) > 0$.

13.22. Рассмотрите модель лабораторного оборудования из параграфа 13.1, однако предположите, что граница инновационных возможностей имеет следующий вид:

$$\dot{N}(t) = \eta N(t)^{-\phi} Z(t),$$

где $\phi > 0$.

(a) Опишите равновесие в модели, найдите значение цен факторов производства, при которых рынки факторов находятся в равновесии, и выведите условие свободного входа на рынок исследований.

(b) Покажите, что при постоянном значении населения экономики в ней не происходит устойчивого экономического роста.

(c) Далее предположите, что население экономики растет экспоненциально с темпом n, и покажите, что в этом случае в модели присутствует устойчивый экономический рост по аналогии с моделью из параграфа 13.3.

13.23. Рассмотрите базовую модель эндогенных технологических изменений с расширяющимся разнообразием факторов производства из параграфа 13.1. Допустим, что переменная x обозначает машины, которые не выбывают сразу после использования. Предположите, что их амортизация следует экспоненциальному закону с нормой амортизации, равной δ. Предпочтения и производственная структура экономики остаются такими же, как и в базовой модели.

(a) Опишите равновесное распределение ресурсов на ТСР.

(b) Сформулируйте задачу максимизации прибыли для фирмы-производителя машин. [Подсказка: вам будет проще сформулировать задачу в единицах арендной стоимости машин, а не их цены.]

(c) Опишите равновесие в такой экономике и покажите, что в этой модели выполняются все результаты из параграфа 13.1.

13.24. Рассмотрите следующую модель. Население экономики растет с постоянным темпом n и в момент времени t составляет $L(t)$ (то есть $\dot{L}(t) = nL(t)$). Предпочтения репрезентативного домохозяйства заданы следующей целевой функцией:

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t)\frac{C(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt,$$

где переменная $C(t)$ обозначает потребление конечного товара, производственная функция которого имеет следующий вид:

$$Y(t)=\left(\int_0^{N(t)} y(v,\, t)^{\beta}dv\right)^{1/\beta},$$

где функция $y(v, t)$ обозначает количество промежуточного товара v, используемого в производстве в момент времени t. Производственная функция каждого промежуточного товара v задана как $y(v, t) = l(v, t)$, где функция $l(v, t)$ обозначает количество работников, занятых на производстве этого товара. Новые товары производятся работниками в секторе НИОКР с производственной функцией вида $\dot{N}(t)=\eta N(t)^{\phi}L_R(t)$, где $\phi \leq 1$, а переменная $L_R(t)$ обозначает количество работников, занятых в исследовательском секторе. Условие равновесия на рынке труда имеет следующий вид:

$$\int_0^{N(t)} l(v,\, t)dv+L_R(t)=L(t).$$

Нейтральные к риску фирмы в секторе НИОКР нанимают исследователей, и фирма, изобретающая новый тип товара, становится монополистом, обладающим полностью защищенным патентом на производство этого товара.

(a) Опишите ТСР в модели для случая $\phi = 1$ и $n = 0$ и покажите, что на ней отсутствует переходная динамика. Объясните почему. Почему долгосрочный темп роста экономики зависит от параметра ϕ? Находите ли вы такую зависимость правдоподобной?

(b) Предположите, что $\phi = 1$ и $n > 0$. Опишите динамику экономики и проинтерпретируйте ваши выводы.

(c) Опишите ТСР в модели для случая $\phi < 1$ и $n > 0$. Зависит ли темп роста экономики от населения L? Зависит ли он от темпа роста населения n? Почему? Находите ли вы параметризацию $\phi < 1$ и $n > 0$ более правдоподобной, чем параметризацию $\phi = 1$ и $n = 0$?

13.25. Выведите условие (13.44). [Подсказка: рассмотрите условие первого порядка для двух товаров v и v' и затем подставьте его в бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства с общими расходами, равными $C(t)$.]

13.26. Используйте выбор единицы измерения из условия (13.45) и уравнение (13.44) для постановки задачи максимизации полезности репрезентативным домохозяйством с помощью текущего гамильтониана. Выведите уравнение Эйлера для потребления (13.46).

13.27. Рассмотрите модель, представленную в параграфе 13.4.

(a) Покажите, что в распределении ресурсов, описанном в утверждении 13.6, полезность репрезентативного домохозяйства всегда достигает конечного значения и выполняется условие трансверсальности.

(b) Покажите, что в этой модели отсутствует переходная динамика.

(c) Опишите распределение ресурсов, оптимальное по Парето, и покажите, что равновесный темп роста экономики из утверждения 13.6 всегда меньше темпа роста в оптимальном по Парето распределении ресурсов.

Глава 14
Шумпетерианские модели экономического роста

В предыдущих главах мы рассмотрели ряд базовых моделей эндогенных технологических изменений, основанных на расширении разнообразия факторов производства, машин и типов конечных товаров. Основным преимуществом этих моделей является их математическая простота. Однако несмотря на то, что расширение разнообразия машин, используемых в производстве товаров, отчасти описывает некоторые аспекты инновационной деятельности, основные инновации в процесс производства на практике связаны с улучшением качества уже имеющихся в экономике товаров и снижением издержек их производства. Поэтому типичная производственная инновация обладает рядом отличительных черт, отделяющих ее от «горизонтальных инноваций», описанных в предыдущей главе. Например, в модели расширяющегося разнообразия машин новый тип компьютеров используется вместе со всеми другими типами компьютеров, изобретенными ранее. В реальности же новые компьютеры зачастую вытесняют старые из производственной деятельности. Поэтому модель расширяющегося многообразия факторов производства не позволяет адекватно описать динамику инноваций на практике, так как они не учитывают этот конкурентный аспект инновационной деятельности. Такие конкурентные рассуждения приводят нас к шумпетерианскому подходу созидательного разрушения, в котором экономический рост, по крайней мере отчасти, является следствием вытеснения присутствующих на рынке фирм новыми фирмами и старых типов машин, используемых в производстве, новыми. По этой причине модели, представленные в этой главе, зачастую называют «шумпетерианскими моделями экономического роста». Основная цель данной главы состоит в построении математически несложной шумпетерианской модели экономического роста.

В шумпетерианских моделях экономического роста поднимается ряд новых важных вопросов. Во-первых, в отличие от моделей расширяющегося разнообразия, в них возможна прямая ценовая конкуренция между фирмами, производящими товары различных типов и качества или обладающими различными издержками производства идентичных товаров. Эта конкуренция ведет к изменению как траектории процесса экономического роста, так и центральных выводов модели. Например, в моделях с такой конкуренцией рыночная структура экономики и антимонопольное законодательство могут иметь потенциально более важную роль. Во-вторых, конкуренция между присутствующими на рынке и новыми фирмами выводит эффекты замещения и кражи бизнеса, описанные в главе 12, на передний план, что приводит к возможности осуществления в экономике избыточных инноваций.

Такие рассуждения приводят к появлению в контексте шумпетерианских моделей экономического роста ряда новых богатых по структуре вопросов. В результате этого читатель может ожидать, что они имеют более сложную математическую структуру, чем модели расширяющегося разнообразия. Однако это предположение не совсем верно. В этой главе представлена базовая модель конкурентных инноваций, впервые рассмотренная в работе [Aghion, Howitt 1992] и в дальнейшем развитая в статьях: [Grossman, Helpman 1991 a,b; Aghion, Howitt 1998]. Литературы по шумпетерианским моделям экономического роста немного, и ее прекрасный обзор представлен в работе [Aghion, Howitt 1998]. Изложение в этой главе подчеркивает наиболее важные выводы из этих моделей и построено таким образом, чтобы сделать математическую структуру модели как можно более близкой со структурой модели расширяющегося разнообразия. В заключении главы и упражнениях к ней описаны некоторые экономические приложения этих моделей.

14.1. Базовая шумпетерианская модель экономического роста

14.1.1. Предпочтения и технологии

Рассмотрим экономику, допускающую существование репрезентативного домохозяйства со стандартными предпочтениями типа CRRA (например, с функцией полезности вида (13.1) из предыдущей главы) в непрерывном времени. Предположим, что население экономики постоянно и равно L, а предложение труда является абсолютно неэластичным. Ресурсное ограничение в момент времени t имеет следующий вид:

$$C(t) + X(t) + Z(t) \leq Y(t), \tag{14.1}$$

где переменная $C(t)$ обозначает потребление, переменная $X(t)$ — совокупные расходы на машины, а переменная $Z(t)$ — совокупные расходы на исследовательскую деятельность в момент времени t.

В производстве единственного конечного товара используется континуум типов машин. Так как количество типов машин постоянно, без ограничения общности мера множества типов машин может быть нормализована единицей. Обозначим каждый тип машин как $\nu \in [0, 1]$. Двигателем экономического роста в модели являются инновации в процесс производства, ведущие к *улучшению качества* машин. В начале опишем, каким образом качество машин изменяется во времени. Обозначим качество машин типа v в момент времени t как $q(v, t)$. Качество каждого типа машин определяется следующей «лестницей качества»:

$$q(v, t) = \lambda^{n(v,t)} q(v, 0) \text{ для всех } v \text{ и } t, \tag{14.2}$$

где $\lambda > 1$, $q(v, 0) \in \mathbb{R}_+$, а функция $n(v, t)$ обозначает количество инноваций для машин типа v, осуществленное с момента времени 0 до момента времени t. Из такой спецификации следует существование «лестницы качества» для машин типа v и то, что каждая инновация ведет к улучшению качества машины на одну ступень этой лестницы. Расстояние между всеми такими ступенями пропорционально равно, поэтому каждая инновация сопровождается пропорциональным улучшением качества в $\lambda > 1$ раз. Экономический рост является следствием этих качественных изменений. Заметим, что количество инноваций для машин типа v, осуществленное с момента времени 0 до момента времени t, $n(v, t)$, является случайной величиной, поэтому функция $q(v, t)$ также является случайной величиной. Следовательно, процесс улучшения качества машин является случайным процессом.

Производственная функция в секторе конечного товара схожа с функцией из предыдущей главы. Отличие состоит в том, что производительность определяется качеством машин. Агрегированная производственная функция конечного товара имеет следующий вид:

$$Y(t) = \frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^1 q(v, t) x(v, t \mid q)^{1-\beta} dv\right) L^{\beta}, \tag{14.3}$$

где функция $x(v, t \mid q)$ обозначает количество машин типа v и качества q, используемое для производства конечного товара в момент времени t. Более того, как будет показано далее, из того, что реализации качества различных типов машин независимы между собой, следует, что агрегированный выпуск в уравнении (14.3) не будет случайной величиной.

Заметим, что по аналогии с предыдущей главой агрегированный выпуск может быть записан в следующем виде:

$$Y(t) = \frac{1}{1-\beta} \tilde{X}(t)^{1-\beta} L^{\beta},$$

где

$$\tilde{X}(t) \equiv \left(\int_0^1 q(v, t) x(v, t \mid q)^{\frac{\varepsilon_\beta - 1}{\varepsilon_\beta}} dv\right)^{\frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_\beta - 1}},$$

а $\varepsilon_\beta \equiv 1/\beta$. Такой вид производственной функции указывает на связь модели с моделью расширяющегося разнообразия из главы 13.

Производственная функция (14.3) основана на неявном предположении о том, что в любой момент времени t в производстве используются машины только одного качества. Такое предположение не ведет к ограничению общности, так как машины одного типа, имеющие различное качество, являются совершенными заменителями и в равновесии будут использоваться только *передовые* (наилучшего качества) машины. Это свойство модели является причиной процесса созидательного разрушения: изобретение машин лучшего качества ведет к вытеснению («разрушению») машин того же типа с худшим качеством.

Далее опишем технологию производства машин различного качества и границу инновационных возможностей для данной экономики. Новые типы машин разрабатываются в секторе НИОКР. Исследовательская деятельность является накопительной в том смысле, что новые изобретения основываются на методах работы и конструкции машин предыдущих поколений. Например, рассмотрим машину типа v, обладающую в момент времени t качеством $q(v, t)$. Целью исследовательской деятельности является улучшение качества машин данного типа. Если фирма, занятая в секторе НИОКР, в момент времени t израсходует на исследования $Z(v, t)$ единиц конечного товара, то это приведет к потоку инноваций с темпом, равным

$$\frac{\eta Z(v, t)}{q(v, t)}.$$

Такая инновация ведет к переходу производственных навыков для этого типа машин на новую ступень «лестницы качества» и созданию машин типа v, имеющих качество $\lambda q(v, t)$. Заметим, что эффективность затрат на исследования пропорционально снижается при вложениях в более продвинутые типы машин. Этот результат интуитивно очевиден, так как мы можем ожидать, что процесс улучшения качества более продвинутых машин является более сложным. Такое предположение также является удобным с математической точки зрения, так как выгода от исследований также увеличивается с ростом качества машин (в частности улучшение качества происходит пропорционально: инновация ведет к росту качества с $q(v, t)$ до $\lambda q(v, t)$). Заметим также, что издержки проведения исследований равны для фирм, присутствующих на рынке и для новых фирм, планирующих вход на рынок.

Как и в предыдущих моделях, предположим свободный вход на рынок исследований, то есть будем считать, что любая фирма или индивид обладают возможностью проведения исследований для машин любого типа. Как и в модели расширяющегося разнообразия из предыдущей главы, предположим, что фирма, осуществляющая инновации, обладает бессрочным патентом на производство новых машин, которые она изобретает.

Однако патентное законодательство не запрещает другим фирмам в секторе НИОКР использовать для проведения исследований машины, изобретенные этой фирмой.

После того как машина определенного типа v и качества $q(v, t)$ изобретена, любое количество таких машин может быть произведено с предельными издержками, равными $\psi q(v, t)$. Еще раз отметим, что пропорциональная зависимость предельных издержек производства от качества представляется естественной, так как производство машин лучшего качества должно быть более дорогим.

Другое важное наблюдение, которое необходимо сделать в данный момент, связано с идентификацией фирм, осуществляющих исследовательскую деятельность и инновации. В модели расширяющегося разнообразия такая идентификация была не важна, так как в ней не происходит улучшение качества и все исследования связаны лишь с изобретением новых типов машин, поэтому какая именно фирма осуществляет инновацию, не имеет значения. С другой стороны, в данной модели качество существующих машин может быть улучшено (и в действительности улучшается) и именно эти улучшения являются причиной экономического роста. Как мы доказали в главе 12, если издержки ведения исследовательской деятельности равны для фирм, присутствующих на рынке и для новых фирм, то из эффекта вытеснения Эрроу следует, что все инновации будут осуществляться новыми фирмами. Аналогичные рассуждения применимы и к данной модели. Фирма, которая уже присутствует на рынке, обладает меньшими стимулами к осуществлению инноваций, так как они будут приводить к вытеснению ее собственных машин (тем самым сокращая прибыль фирмы). С другой стороны, такие рассуждения неприменимы к новой фирме. Следовательно, при равных издержках исследовательской деятельности для всех фирм все исследования всегда производятся новыми фирмами (см. упражнение 14.2). Однако на практике значительный вклад в инновации и рост производительности производится крупными, давно присутствующими на рынке фирмами. Мы отложим подробное обсуждение этого вопроса до параграфов 14.3 и 14.4.

14.1.2. Равновесие

Распределение ресурсов в этой модели состоит из траекторий потребления, совокупных расходов на машины и совокупных расходов на исследования $[C(t), X(t), Z(t)]_{t=0}^{\infty}$, траекторий качества машин на лестнице качества, которые мы обозначим как $[q(v, t)]_{v\in[0,1],t=0}^{\infty}$, траекторий цен и количества каждого типа машин вместе с траекторией приведенной дисконтированной стоимости прибыли для этого типа машин $\left[p^x(v, t\,|\,q), x(v, t\,|\,q), V(v, t\,|\,q)\right]_{v\in[0,1],t=0}^{\infty}$ и траекторий процентной ставки и заработной платы $[r(t),\ w(t)]_{t=0}^{\infty}$. Напомним, что функция $q(v,\ t)$ и, следовательно, соответствующие цены, количества и стоимости являются случайными величинами (и, таким образом, все вышеупомянутые траектории являются случайными процессами). Несмотря на это, агрегированные значения переменных являются детерминистскими величинами, что значительно упрощает анализ. Определение равновесия будет представлено ниже.

Начнем с описания фирм в секторе производства конечного товара. Из рассуждений, схожих с рассуждениями из предыдущей главы, следует, что функция спроса на машины со стороны фирм в секторе производства конечного товара имеет следующий вид:

$$x(v,\ t\,|\,q)=\left(\frac{q(v,\ t)}{p^{x}(v,\ t\,|\,q)}\right)^{1/\beta}L\ \text{для всех}\ v\in[0,\ 1]\ \text{и для всех}\ t, \tag{14.4}$$

где функция $p^x(v,\ t\,|\,q)$ обозначает цену машины типа v и качества $q(v,\ t)$ в момент времени t. Более точным является выражение $p^x(v,\ t\,|\,q(v,\ t))$, где функция $q(v,\ t)$ есть наилучшее качество машины типа v, доступное в момент времени t. Однако упрощенное обозначение, которое мы будем использовать в дальнейшем и для всех других переменных, не приведет к путанице, так как параметр q очевидным образом обозначает значение функции $q(v,\ t)$. Цена $p^x(v,\ t\,|\,q)$ определяется из решения задачи максимизации прибыли фирмой-монополистом, владеющей патентом на производство машин типа v с качеством $q(v,\ t)$. Заметим, что, как и в предыдущей главе, функция спроса на машины со стороны фирм в секторе производства конечного товара обладает постоянной эластичностью по цене, поэтому идеальная цена фирмы-монополиста, при которой ее прибыль достигает максимума, снова составляет фиксированную наценку над предельными издержками. Однако, в отличие от модели из предыдущей главы, в данной модели присутствует конкуренция между фирмами, имеющими доступ к машинам некоторого типа с различным качеством. Поэтому, как и в главе 12, мы вынуждены рассматривать два режима: в первом режиме осуществляются радикальные инновации, поэтому каждая фирма может устанавливать цену, при которой прибыль достигает глобального максимума, во втором режиме фирма вынуждена перейти к предельному ценообразованию. Независимо от того, в каком режиме находится экономика, математическая структура модели и основные выводы из нее остаются неизменными. Несмотря на это, для состоятельности модели нам необходимо выбрать одну из двух имеющихся альтернатив. Далее мы предположим, что разрыв в качестве между новыми и уже имеющимися машинами λ достаточно велик. В частности, предположим, что выполняется следующее неравенство:

$$\lambda \geq \left(\frac{1}{1-\beta} \right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}, \tag{14.5}$$

то есть экономика находится в режиме радикальных инноваций (вывод этого условия см. в упражнении 14.9, описанию структуры равновесия в альтернативном режиме посвящено упражнение 14.10). Как и в предыдущей главе, проведем нормализацию $\psi \equiv 1 - \beta$, из которой следует, что цена, при которой прибыль фирмы-монополиста достигает максимума (при использовании машин с наилучшим доступным в момент времени t качеством) составляет:

$$px(v, t \mid q) = q(v, t), \tag{14.6}$$

Объединяя уравнения (14.6) и (14.4), получаем следующее равенство:

$$x(v, t \mid q) = L. \tag{14.7}$$

Следовательно, потоковая прибыль фирмы, обладающей монопольной силой и использующей передовые машины с качеством $q(v, t)$, определяется следующим уравнением:

$$\pi(v, t \mid q)\beta q(v, t)L. \tag{14.8}$$

Это выражение отличается от выражения для потоковой прибыли в предыдущей главе только наличием множителя $q(v, t)$, описывающего качество машин. Далее, подставляя уравнение (14.7) в уравнение (14.3), получаем выражение для агрегированного выпуска:

$$Y(t) = \frac{1}{1-\beta} Q(t) L, \tag{14.9}$$

где переменная

$$Q(t) = \int_0^1 q(v, t) dv \tag{14.10}$$

обозначает среднее значение качества всех машин. Из закона больших чисел следует, что, несмотря на то, что функция $q(v, t)$ представляет собой случайную величину, переменная $Q(t)$ является детерминистской (так как реализации качества различных типов независимы друг от друга)[1]. Это выражение тесно связано с приведенной формой производственной

[1] Здесь необходимо сделать некоторое предостережение, так как закон больших чисел формулируется для среднего значения счетной последовательности случайных величин, а переменная $Q(t)$ представляет собой «среднее» значение континуума случайных величин. В некоторых случаях это может привести к некоторым техническим затруднениям, однако здесь переменная $Q(t)$ вполне определена. Подробное обсуждение этого вопроса см., например, в работе [Uhlig 1996].

функции (13.12) из предыдущей главы, однако производительность труда в нем определяется средним качеством машин в экономике $Q(t)$ (а не количеством типов машин $N(t)$, как в предыдущей главе). Это выражение также объясняет причину выбора функциональной формы, использованной выше. В частности, читатель имеет возможность убедиться в том, что зависимость производительности труда от среднего качества машин является следствием линейности агрегированной производственной функции в секторе производства конечного товара по качеству машин. При альтернативном предположении о структуре ценообразования выражение, схожее с выражением (14.9), также имеет место, однако усреднение качества машин в нем будет иметь более сложный вид, чем среднее арифметическое значение (см., например, параграф 14.2)[2]. Далее, агрегированные расходы на машины определяются следующим уравнением:

$$X(t) = (1-\beta)Q(t)L. \tag{14.11}$$

Как и в предыдущей главе, равновесная заработная плата труда, который используется только в секторе производства конечного товара, составляет:

$$w(t) = \frac{\beta}{1-\beta}Q(t). \tag{14.12}$$

Далее опишем функцию стоимости фирмы-монополиста, производящей машины типа v и качества $q(v, t)$ в момент времени t. Как и ранее, несмотря на то, что поток выручки каждой фирмы представляет собой случайный процесс, из наличия в экономике большого числа независимо распределенных фирм следует, что каждая из них будет максимизировать свою ожидаемую прибыль. Выражение для чистой приведенной стоимости ожидаемой прибыли может быть записано в виде уравнения ГЯБ:

$$r(t)V(v, t\,|\,q) - \dot{V}(v, t\,|\,q) = \pi(v, t\,|\,q) - z(v, t\,|\,q)V(v, t\,|\,q), \tag{14.13}$$

где функция $z(v, t\,|\,q)$ описывает темп, с которым происходят новые инновации в секторе v в момент времени t, а функция $\pi(v, t\,|\,q)$ — значение потоковой прибыли фирмы-монополиста. Такой вид функции стоимости несколько отличается от ее вида в предыдущих главах (например, уравнения (13.8)) присутствием в правой части уравнения (14.13) последнего члена, который описывает суть процесса шумпетерианского экономического роста. В момент, когда происходит новая инновация, фирма-монополист теряет свою монопольную силу и вытесняется с рынка фирмой-производителем машин лучшего качества. Начиная с этого момента ее

[2] Другая функциональная форма, при которой среднее арифметическое является подходящим агрегатом качества машин, используется далее в уравнении (14.33).

прибыль, а следовательно, и стоимость, становится равной нулю. Более того, в этом уравнении учитывается то, что в силу эффекта вытеснения Эрроу все инновации в экономике осуществляются новыми фирмами и поэтому функция $z(v, t \mid q)$ описывает темп вытеснения присутствующих на рынке фирм фирмами, входящими на рынок.

Как и ранее, из условия свободного выхода на рынок исследований вытекает следующее условие:

$$\eta V(v, t \mid q) \le \lambda^{-1} q(v, t) \text{ и } \eta V(v, t \mid q) = \lambda^{-1} q(v, t), \text{ если } Z(v, t \mid q) > 0. \quad (14.14)$$

Другими словами, стоимость расходов единицы конечного товара не должна быть строго положительной. Напомним, что использование единицы конечного товара в секторе исследования для машин качества $\lambda^{-1}q$ приводит к успешной инновации с потоковой «вероятностью», равной $\eta/(\lambda^{-1}q)$, и, в случае успеха, к изобретению новых машин качества q и к приросту чистой приведенной стоимости на $V(v, t \mid q)$. Если в экономике совершается положительное количество исследований, то есть если $Z(v, t \mid q) > 0$, то условие свободного входа на рынок исследований должно выполняться как равенство.

Заметим, что, несмотря на то что качество отдельных типов машин (функции $q(v, t)$) является случайной величиной (и зависит от успеха отдельных исследовательских проектов), среднее качество машин $Q(t)$, агрегированный выпуск $Y(t)$ и общие расходы на машины $X(t)$ представляют собой детерминистские величины, так как расходы на исследовательскую деятельность (функции $Z(v, t \mid q)$) не являются случайными величинами. Это свойство модели значительно упрощает ее анализ.

Из задачи максимизации полезности репрезентативным домохозяйством вытекает стандартное уравнение Эйлера для потребления в следующем виде:

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta}(r(t) - \rho) \quad (14.15)$$

и условие трансверсальности

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)\int_0^1 V(v, t \mid q)dv\right] = 0. \quad (14.16)$$

Такой вид условия трансверсальности очевиден с интуитивной точки зрения, так как общая стоимость корпоративных активов в экономике составляет $\int_0^1 V(v, t \mid q)dv$. Несмотря на то что динамика качества машин каждого типа представляет собой случайный процесс, стоимость машины типа v с качеством q в момент времени t $V(v, t \mid q)$ не является случайной величиной. В случае, когда q является наилучшим доступным в момент времени t качеством, оно определяется уравнением (14.13), в противном случае значение функции $V(v, t\,|\,q)$ равно нулю.

Этот набор уравнений завершает описание структуры экономики модели. *Равновесие* в ней представляет собой траектории потребления, агрегированных расходов на машины и агрегированных расходов на исследования $[C(t), X(t), Z(t)]_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющие условиям (14.1), (14.11), (14.13) и (14.14), стохастические траектории цен и количества каждого типа машин с наилучшим доступным в каждый момент времени качеством $\left[p^x(v, t\,|\,q), x(v, t\,|\,q)\right]_{v\in[0,1],t=0}^{\infty}$, заданные условиями (14.16) и (14.17), траектории процентной ставки и заработной платы $[r(t), w(t)]_{t=0}^{\infty}$ и функций стоимости $[V(v, t\,|\,q)]_{v\in[0,1],t=0}^{\infty}$, удовлетворяющие условиям (14.12)–(14.16). Как и ранее, мы начнем анализ с описания ТСР, на которой выпуск и потребление растут с постоянным темпом.

14.1.3. Траектория сбалансированного роста

Потребление на ТСР растет с темпом g_C^*. Из уже знакомых читателю рассуждений следует, что он должен совпадать с темпом роста выпуска g^*. Более того, из уравнения Эйлера для потребления (14.15) следует, что процентная ставка на ТСР также является постоянной, то есть $r(t) = r^*$ для всех t.

Если темп роста на ТСР является положительным, то, по крайней мере в некоторых секторах экономики, должны проводиться исследования. Из того, что прибыль и издержки исследовательской деятельности пропорциональны показателю качества машин, следует, что если для некоторого типа машин условие свободного входа на рынок исследований выполняется как равенство, то оно выполняется как равенство для всех типов машин. Тогда имеем следующее равенство:

$$V(v, t\,|\,q) = \frac{q(v, t)}{\lambda\eta}. \tag{14.17}$$

Заметим, что если это условие выполняется в течение промежутка времени между t и $t + \Delta t$, то $\dot{V}(v, t\,|\,q) = 0$. Это равенство следует из того, что функция $q(v, t)$ в правой части уравнения (14.17) обозначает качество машин, производимых присутствующей на рынке фирмой, которое не изменяется во времени (пока для машин типа v не произойдет инновация). На ТСР расходы на исследования $z(v, t)$ совпадают для всех типов машин, и мы обозначим их как z^* (см. упражнение 14.1). Тогда из уравнения (14.13) вытекает следующее равенство:

$$V(v, t\,|\,q) = \frac{\beta q(v, t)L}{r^* + z^*}. \tag{14.18}$$

Отметим различие между этим видом функции стоимости и функцией стоимости из предыдущей главы: вместо нормы дисконтирования r^* в знаменателе используется «эффективная» норма дисконтирования $r^* + z^*$, так присутствующая на рынке фирма-монополист осознает, что новые инновации приведут к вытеснению ее с рынка.

Объединяя это уравнение с уравнением (14.17), получаем следующее равенство:

$$r^* + z^* = \lambda\eta\beta L. \tag{14.19}$$

Более того, из равенства $g_C^* = g^*$ и из уравнения (14.15) следует, что процентная ставка определяется следующим уравнением:

$$r^* = \theta g^* + \rho. \tag{14.20}$$

Для того чтобы описать ТСР, нам необходимо еще одно уравнение, связывающее темп роста экономики g^* со значением z^*. Из уравнения (14.9) следует, что

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)}.$$

Заметим, что в течение интервала времени длиной Δt инновации происходят в $z(t)\Delta t$ секторах и производительность в них возрастает в λ раз. Мера множества секторов, в которых происходит более одной инновации в течение этого интервала времени, составляет $o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$, где $o(\Delta t)/\Delta t \to 0$ при $\Delta t \to 0$ (то есть величину более чем первого порядка малости). Следовательно, выполняется следующее равенство:

$$Q(t + \Delta t) = \lambda Q(t)z(t)\Delta t + (1 - z(t)\Delta t)Q(t) + o(\Delta t).$$

Далее, вычитая из обеих частей этого уравнения $Q(t)$, деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем следующее равенство:

$$\dot{Q}(t) = (\lambda - 1)z(t)Q(t). \tag{14.21}$$

Отсюда имеем:

$$g^* = (\lambda - 1)z^*. \tag{14.22}$$

Тогда, объединяя уравнения (14.19)–(14.22), получаем следующее выражение для темпа роста выпуска и потребления на ТСР:

$$g^* = \frac{\lambda\eta\beta L - \rho}{\theta + (\lambda - 1)^{-1}}. \tag{14.23}$$

Из вышеприведенных рассуждений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 14.1. *Рассмотрим описанную выше шумпетерианскую модель экономического роста. Предположим, что выполняются следующие неравенства:*

$$\lambda\eta\beta L > \rho > (1-\theta)(\lambda-1)\eta\beta L.$$

Тогда в этой модели существует единственная ТСР, на которой среднее качество машин, выпуск и потребление растут с темпом g^*, заданным уравнением (14.23). *Темп осуществления инноваций в экономике составляет $\frac{g^*}{\lambda-1}$.*

Доказательство. Большая часть доказательства проведена в изложенных выше рассуждениях. Проверка единственности ТСР и утверждения о том, что она удовлетворяет условию трансверсальности, предоставлена читателю в упражнении 14.4. ■

Из анализа, проведенного выше, следует, что математическая структура шумпетерианской модели экономического роста схожа со структурой моделей из предыдущей главы. Несмотря на это, процесс созидательного разрушения, при котором присутствующие на рынке фирмы вытесняются новыми фирмами, является важным новым элементом модели и предоставляет новую интерпретацию процесса экономического роста. Далее в этой главе мы рассмотрим некоторые приложения модели созидательного разрушения.

Прежде чем перейти к ним, кратко остановимся на описании переходной динамики в экономике модели. Из рассуждений, схожих с рассуждениями, использованными в предыдущей главе, вытекает следующее утверждение.

Утверждение 14.2. *В шумпетерианской модели экономического роста, описанной выше, при любом начальном значении среднего качества машин $Q(0) > 0$ отсутствует переходная динамика и темп роста экономики на равновесной траектории всегда является постоянной величиной, равной g^*, заданной уравнением* (14.23).

Доказательство. См. упражнение 14.5. ■

Как показано выше, равновесное распределение ресурсов зависит только от значения среднего качества машин в экономике $Q(t)$. Более того, стимулы к проведению исследований для двух типов машин v и v' с различными значениями качества $q(v, t)$ и $q(v', t)$ совпадают. Поэтому в экономике отсутствуют различия в исследовательских стимулах для более или менее продвинутых типов машин. Оба этих свойства модели следуют из выбора функциональной формы (14.3). Упражнение 14.14 посвящено анализу условий, при которых эти результаты оказываются неверными. С другой стороны, выбранная нами функциональная форма выглядит привлекательной, так как из нее следует, что исследования протекают в довольно широком секторе, а не направлены на усовершенствование некоторого специального подмножества типов машин.

14.1.4. Оптимальность по Парето

Описанное выше равновесие в шумпетерианской модели, так же как равновесие в модели эндогенного технологического прогресса с расширяющимся разнообразием, является субоптимальным по Парето. Первая причина субоптимальности связана с эффектом присвоения, который связан с тем, что фирма-монополист оказывается не в состоянии полностью получить общественные выгоды, создаваемые инновацией. Однако в шумпетерианской модели экономического роста также присутствует эффект кражи бизнеса, описанный в главе 12. Следовательно, равновесный темп осуществления инноваций и экономического роста может оказаться в ней как завышенным, так и заниженным по сравнению с темпом роста в оптимальном по Парето распределении ресурсов.

Как и в предыдущей главе, мы начнем с вывода уравнения для количества машин, используемых в секторе производства конечного товара на траектории оптимального роста (при заданном значении их среднего качества $Q(t)$). В этом распределении нет наценки на предельные издержки, поэтому выполняется следующее равенство:

$$x^S(v, t \mid q) = \psi^{-1/\beta}L = (1-\beta)^{-1/\beta}L. \tag{14.24}$$

Подставляя уравнение (14.24) в уравнение (14.3), приходим к следующему равенству:

$$Y^S(t) = (1-\beta)^{-1/\beta}Q^S(t)L,$$

где, как и ранее, индекс S обозначает оптимальное (с точки зрения общественного планировщика) распределение ресурсов. Значение чистого выпуска, который может быть распределен между потреблением и расходами на исследования, тогда определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{Y}^S(t) &\equiv Y^S(t) - X^S(t) = \\ &= (1-\beta)^{-1/\beta}Q^S(t)L - \int_0^1 \psi q(v,t)x^S(v, t \mid q)dv = \\ &= (1-\beta)^{-1/\beta}\beta Q^S(t)L.\end{aligned} \tag{14.25}$$

Более того, при заданной форме границы инновационных возможностей (в частности, уравнении (14.21)), общественный планировщик имеет возможность улучшить агрегированную технологию следующим образом:

$$\dot{Q}^S(t) = \eta(\lambda - 1)Z^S(t).$$

Это уравнение является следствием того, что при расходах на исследования, равных $Z^S(t)$, потоковый темп улучшения качества машин равен η и каждая новая инновация ведет к пропорциональному улучшению среднего качества машин в $\lambda - 1$ раз.

Из этого уравнения следует, что задача оптимального роста может быть поставлена в следующем виде:

$$\max \int_0^\infty \exp(-\rho t) \frac{C^S(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$

при ограничении

$$\dot{Q}^S(t) = \eta(\lambda - 1)\left[(1-\beta)^{-1/\beta}\beta Q^S(t)L - C^S(t)\right], \tag{14.26}$$

где уравнение (14.26) следует из выражения для чистого выпуска (14.25) и ресурсного ограничения (14.1). В этой задаче переменная $Q^S(t)$ является переменной состояния, а переменная $C^S(t)$ — переменной управления. Для описания решения задачи построим текущий гамильтониан в следующем виде:

$$\hat{H}(Q^S C^S, \mu^S) = \frac{C^S(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} +$$
$$+ \mu^S(t)\left[\eta(\lambda - 1)(1-\beta)^{-1/\beta}\beta Q^S(t)L - \eta(\lambda - 1)C^S(t)\right].$$

Как и ранее, из теоремы 7.13 следует, что возможное внутреннее решение задачи удовлетворяет следующим условиям:

$$\hat{H}_C(Q^S C^S, \mu^S) = C^S(t)^{-\theta} - \mu^S(t)\eta(\lambda - 1) = 0,$$

$$\hat{H}_Q(Q^S C^S, \mu^S) = \mu^S(t)\eta(\lambda - 1)(1-\beta)^{-1/\beta}\beta L = \rho\mu^S(t) - \dot{\mu}^S(t),$$

$$\lim_{t\to\infty}[\exp(-\rho t)\mu^S(t)Q^S(t)] = 0.$$

Из того, что текущий гамильтониан является вогнутой функцией по переменным C и Q, следует, что выполняются достаточные условия оптимума из теоремы 7.14. Более того, из рассуждений, схожих с рассуждениями, использованными в упражнении 8.11 из главы 8, следует, что решение, заданное этими условиями, представляет собой единственную оптимальную траекторию (см. упражнение 14.8). Объединяя эти условия, приходим к следующему выражению для темпа роста потребления в оптимальном по Парето распределении ресурсов (см. упражнение 14.8):

$$\frac{\dot{C}^S}{C^S} = g^S \equiv \frac{1}{\theta}(\eta(\lambda-1)(1-\beta)^{-1/\beta}\beta L-\rho). \tag{14.27}$$

Очевидно, что темп роста агрегированного выпуска и среднего качества машин в этом распределении ресурсов также равен g^S.

Нетрудно убедиться, что оптимальное по Парето распределение ресурсов в экономике всегда отличается от равновесного распределения ресурсов (в силу того, что в последнем цена включает в себя наценку фирмы-монополиста). Однако, в отличие от модели расширяющегося разнообразия, оптимальный в смысле Парето темп роста экономики не всегда превышает равновесный темп роста. Это следует из сравнения значений g^S и g^* из уравнения (14.23). В частности, если значение параметра λ достаточно высоко, то $g^S > g^*$, и в децентрализованном равновесии экономика растет с недостаточно высоким темпом. Например, при $\lambda \to \infty$ $g^S/g^* \to$ $\to (1-\beta)^{-1/\beta} > 1$. С другой стороны, для того чтобы получить пример, в котором в равновесии происходит избыточный рост экономики, предположим, что $\theta = 1$, $\beta = 0{,}9$, $\lambda = 1{,}3$, $\eta = 1$, $L = 1$ и $\rho = 0{,}38$. В этом случае нетрудно увидеть, что $g^S \approx 0$, а $g^* \approx 0{,}18 > g^S$[3]. Этот пример демонстрирует противоположное влияние эффектов присвоения и кражи бизнеса, описанных выше. Следующее утверждение резюмирует вышеприведенные результаты.

Утверждение 14.3. *В шумпетерианской модели экономического роста, описанной выше, децентрализованное равновесие является субоптимальным по Парето. Темп роста экономики в равновесии может оказаться как выше, так и ниже темпа роста в оптимальном по Парето распределении ресурсов.*

Нетрудно заметить, что в описанной модели, как и в моделях из предыдущей главы, присутствует эффект масштаба и поэтому при положительном темпе роста населения темп роста экономики расходится к бесконечности. В упражнении 14.11 читателю предоставляется возможность построения шумпетерианской модели экономического роста без эффекта масштаба.

14.1.5. Экономическая политика в шумпетерианской модели экономического роста

В данной модели, как и в предыдущей, антимонопольная политика, патентное и налоговое законодательство влияют на равновесный темп роста экономики. Например, темпы роста выпуска будут различаться в двух

[3] Заметим, что комбинация $\beta = 0{,}9$ и $\lambda = 1{,}3$ согласуется с условием (14.5), которое мы использовали при выводе равновесного темпа роста g^*.

экономиках, в которых корпоративная прибыль облагается налогом по различным ставкам.

При этом шумпетерианская модель экономического роста может оказаться более подходящей для анализа воздействия экономической политики, чем модели расширяющегося разнообразия. В предыдущих моделях ни один агент в экономике не обладает стимулом поддерживать искажающее налогообложение[4]. С другой стороны, в данной модели экономический рост происходит в результате процесса созидательного разрушения и поэтому в ней существует унаследованный конфликт интересов между агентами и, следовательно, некоторый тип искажающей экономической политики может получить поддержку ряда фирм и индивидов. Чтобы проиллюстрировать это утверждение, подробному обсуждению которого посвящена часть VIII книги, предположим, что расходы на исследовательскую деятельность облагаются налогом по ставке τ. Такой налог не влияет на текущую прибыль присутствующих на рынке фирм-монополистов, однако ведет к изменению их чистой приведенной стоимости за счет эффекта замещения. Так как налог на исследовательскую деятельность ведет к снижению стимулов к осуществлению инноваций, темп улучшения качества машин будет снижаться вместе со значением показателя исследовательских усилий на ТСР z^*. Тогда из условия (14.18) следует, что снижение темпа улучшения качества машин напрямую ведет к росту стоимости всех фирм-монополистов в стационарном состоянии. В частности, стоимость фирмы-монополиста, которая производит машины с темпом улучшения качества q, равна:

$$V(q) = \frac{\beta q L}{r^*(\tau) + z^*(\tau)},$$

где равновесная процентная ставка и темп улучшения качества машин являются функциями налоговой ставки τ. Появление налога на исследовательскую деятельность ведет к изменению условия свободного выхода на рынок исследований (14.14), которое принимает следующий вид:

$$V(q) = \frac{(1+\tau)}{\lambda\eta} q.$$

Из этого уравнения следует, что значение переменной $V(q)$ является возрастающей функцией от налоговой ставки в исследовательском секторе τ. Объединяя два вышеприведенных уравнения, нетрудно убедиться, что увеличение налоговой ставки τ ведет к снижению значения суммы

[4] Естественно, мы можем обогатить такие модели, предполагая, что налоговые поступления распределяются неравномерно между агентами, например когда поступления от налога на капитал распределяются между работниками. В этом случае некоторые группы агентов могут предпочесть искажающее налогообложение даже в базовой неоклассической модели экономического роста. Такие модели представлены в части VIII данной книги.

$r^*(\tau) + z^*(\tau)$ и поэтому стоимость присутствующей на рынке фирмы-монополиста растет (в соответствии с предыдущим уравнением). На интуитивном уровне, условие свободного выхода на рынок исследований требует, чтобы стоимость успешной инновации $V(q)$ росла с ростом издержек в исследовательском секторе (связанным с ростом налоговой ставки). Такая динамика возможна лишь при снижении эффективной нормы дисконтирования $r^*(\tau) + z^*(\tau)$. Снижение эффективной нормы дисконтирования, в свою очередь, достигается за счет снижения равновесного темпа роста экономики, который в данном случае определяется следующим уравнением:

$$g^*(\tau) = \frac{(1+\tau)^{-1}\lambda\eta\beta L - \rho}{\theta + (\lambda - 1)^{-1}}.$$

Темп роста экономики является строго убывающей функцией налоговой ставки τ. Однако, как показано выше, присутствующая на рынке фирма-монополист выигрывает от роста налога и будет поддерживать такую «тормозящую рост» экономическую политику.

Следовательно, одно из важных преимуществ шумпетерианской модели экономического роста состоит в том, что они позволяют нам понять, почему некоторые общества могут осуществлять экономическую политику, ведущую к снижению равновесного темпа экономического роста. Так как налогообложение исследований, совершаемых входящими на рынок фирмами, увеличивает стоимость присутствующих на рынке фирм-монополистов, несмотря на то что такое искажающее налогообложение ведет к снижению общественного благосостояния в целом, оно может возникнуть как политэкономическое равновесие в случае, когда присутствующие на рынке фирмы-монополисты обладают значительной политической мощью.

14.2. Односекторная шумпетерианская модель экономического роста

Шумпетерианская модель экономического роста, представленная в предыдущем параграфе, построена таким образом, чтобы максимизировать сходство между моделями этого класса и моделями расширяющегося разнообразия. Далее мы более подробно обсудим модель, более тесно связанную с моделью из оригинальной статьи [Aghion, Howitt 1992]. Она обладает двумя ключевыми отличиями от модели из предыдущего параграфа. Во-первых, улучшение качества в ней происходит лишь в одном секторе, а не на континууме различных типов машин. Во-вторых, в границе инновационных возможностей, как и в модели перелива знаний из параграфа 13.2 в предыдущей главе, используется редкий фактор производства труда. В силу того что эта модель во многом схожа с моделью из предыдущего параграфа, мы приведем лишь ее краткое описание.

14.2.1. Базовая модель Агийона—Ховитта

Структура сектора домохозяйств во многом совпадает с его структурой в предыдущей модели. Единственное различие состоит в том, что домохозяйства нейтральны к риску и поэтому процентная ставка в любой момент времени совпадает с нормой дисконтирования, $r^* = \rho$. Как и ранее, население экономики равно L и занятость поставляется на рынок труда абсолютно неэластично. Агрегированная производственная функция единственного в экономике конечного товара выглядит как

$$Y(t) = \frac{1}{1-\beta} x(t \mid q)^{1-\beta} (q(t) L_E(t))^{\beta}, \tag{14.28}$$

где переменная $q(t)$ обозначает качество единственного типа машин, используемых в производственной деятельности, и представлена для простоты в трудоинтенсивной форме. Переменная $x(t \mid q)$ обозначает количество этих машин, используемое в момент времени t, а переменная $L_E(t)$ — количество работников, занятых в производстве конечного товара. Отметим, что $L_E(t) < L$, так как $L_R(t)$ работников занято в исследовательском секторе.

Условие равновесия на рынке труда выглядит как

$$L_E(t) + L_R(t) \leq L.$$

После того как машины качества $q(t)$ изобретены, они могут производиться с предельными издержками, равными ψ единиц конечного товара. Как и в других моделях, нормализуем их равенством $\psi \equiv 1 - \beta$. Граница инновационных возможностей в данной модели обладает таким свойством, что в исследовательской деятельности используется рабочая сила. В частности, каждый работник, занятый в секторе НИОКР генерирует создание новых машин с потоковым темпом, равным η. Если качество машин, используемых в производственной деятельности, составляет $q(t)$, то качество новых машин равно $\lambda q(t)$.

Как и ранее, будем предполагать, что выполняется условие (14.5), и, таким образом, фирма-монополист устанавливает цену, при которой ее прибыль достигает глобального максимума. Тогда из рассуждений, схожих с рассуждениями из предыдущего параграфа, следует, что спрос на передовые машины (машины с наилучшим доступным качеством) определяется следующим уравнением:

$$x(t \mid q) = p^x(t)^{-1/\beta} q(t) L_E(t),$$

где, как и ранее, переменная q обозначает качество машин, а переменная $p^x(t, q)$ — их цену. Цена фирмы-монополиста на машины с наилучшим качеством определяется уравнением $p^x(t, q) = \psi/(1 - \beta) = 1$ для всех q и t[5]. Следовательно, спрос на машины с качеством q в момент времени t равен $x(t \mid q) = q(t)L_E(t)$, а прибыль фирмы-монополиста составляет $\pi(t \mid q) = \beta q(t)L_E(t)$. Тогда агрегированный выпуск определяется следующим уравнением:

$$Y(t \mid q) = \frac{1}{1-\beta} q(t) L_E(t)$$

и является функцией качества машин q, доступных в момент времени t. Из этого уравнения также следует, что равновесная заработная плата, определяемая условием (14.28), составляет:

$$w(t \mid q) = \frac{\beta}{1-\beta} q(t).$$

В том случае, когда временная динамика заработной платы не представляет интереса, мы будем рассматривать ее как функцию качества машин $w(q)$.

Далее остановимся на «стационарном равновесии», в котором потоковый темп инноваций составляет постоянную величину, равную z^*. Выражение «стационарное состояние» выше взято в кавычки, так как, несмотря на то что потоковый темп инноваций составляет постоянную величину, темпы роста потребления и выпуска не являются постоянными в силу стохастической природы инновационной деятельности (поэтому мы не используем в этом контексте термин «ТСР»). В любом случае занятость в исследовательском секторе в стационарном состоянии также составляет постоянную величину, равную L_R^*. Так как процентная ставка определяется равенством $r^* = \rho$, стоимость фирмы-монополиста, производящей машины с качеством q, определяется следующим уравнением:

$$V(q) = \frac{\beta q(L - L_R^*)}{\rho + z^*},$$

где мы используем наблюдение о том, что в стационарном состоянии общая занятость в секторе производства конечного товара составляет

[5] Это выражение используется в оригинальной статье [Aghion, Howitt 1992] и в нем предполагается, что фирмы-инноваторы не принимают во внимание влияние своих действий на равновесную заработную плату. Так как в базовой модели из параграфа 14.1 действует континуум монополистически конкурирующих фирм, каждая из них не оказывает влияния на равновесную заработную плату. В данной модели единственная фирма-монополист понимает, что ее цена влияет на равновесную заработную плату и поэтому на издержки исследовательской деятельности для ее конкурентов. В этом случае у нее могут быть стимулы установить цену меньшую, чем $\psi/(1 - \beta)$. Мы, следуя работе [Aghion, Howitt 1992], будем игнорировать это наблюдение.

$L_E^* = L - L_R^*$. Из условия свободного входа на рынок исследований следует, что при текущем значении качества машин, равном q, заработная плата в исследовательском секторе должна совпадать с потоковым значением выгоды от исследования. Так как при текущем значении качества машин q использование одного работника в исследовательском секторе ведет к изобретению новых машин с качеством λq с потоковым темпом η, потоковое значение выгоды от исследования составляет $\eta V(\lambda q)$. Более того, при заданной технологии в секторе НИОКР выполняется равенство $z^* = \eta L_R^*$. Объединяя эти соотношения, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\lambda(1-\beta)\eta(L-L_R^*)}{\rho+\eta L_R^*} = 1,$$

которое единственным образом определяет значение занятости в секторе исследований в стационарном состоянии следующим образом:

$$L_R^* = \frac{\lambda(1-\beta)\eta L - \rho}{\eta + \lambda(1-\beta)\eta}, \tag{14.29}$$

при условии, что значение этого выражения является положительной величиной (в противном случае условие свободного выхода на рынок исследований выполняется как неравенство и темп роста экономики равен нулю).

В отличие от модели из предыдущего параграфа, в шумпетерианской модели экономического роста выпуск не растет с постоянным темпом. Так как технологические изменения протекают дискретным образом только в одном секторе, развитие экономики происходит неравномерно. В частности, нетрудно убедиться, что уровень выпуска остается постоянным в течение некоторого периода времени (средней длины, равной $1/(\eta L_R^*)$, см. упражнение 14.16) с последующим за изобретением нового типа машин значительным ускорением роста экономики. Такой неравномерный характер экономического роста является следствием того, что экономика состоит всего лишь из одного, а не континуума (или из большого числа) секторов. Вопрос о том, является ли эта модель лучшей аппроксимацией действительности, чем модель из предыдущего параграфа, остается открытым. Несмотря на то что темп роста современных капиталистических экономик не является постоянной величиной, его динамика не выглядит настолько же неравномерной, как предсказывает шумпетерианская односекторная модель.

Вышеизложенные рассуждения резюмируются в следующем утверждении.

Утверждение 14.4. *Рассмотрим шумпетерианскую модель экономического роста, представленную в этом параграфе, и предположим, что выполняются следующие неравенства:*

$$\rho < \lambda(1-\beta)\eta L < \frac{\log\lambda + 1 + \lambda(1-\beta)}{\log\lambda}\rho. \qquad (14.30)$$

Тогда в ней существует единственное стационарное равновесие, в котором количество работников в исследовательском секторе составляет L_R^*, заданное уравнением (14.29). Средний темп роста экономики равен $g^* = \eta L_R^* \log\lambda$. Экономический рост происходит «неравномерно» в том смысле, что периоды с постоянным значением выпуска чередуются с дискретным ростом экономики в моменты осуществления инноваций.

Доказательство. Большая часть доказательства проведена в предыдущих рассуждениях. В упражнении 14.17 читателю предоставляется возможность убедиться, что средний темп роста экономики равен $g^* = \eta L_R^* \log\lambda$ и что неравенства (14.30) являются необходимыми условиями существования вышеописанного равновесия и выполнения в нем условия трансверсальности. ■

Из приведенного выше анализа следует, что основные выводы из односекторной шумпетерианской модели экономического роста, разработанной в статье [Aghion, Howitt 1992], во многом совпадают с выводами из базовой шумпетерианской модели экономического роста, представленной в параграфе 14.1. Основное отличие моделей состоит в том, что экономический рост в односекторной модели происходит неравномерно, так как его причиной являются дискретные инновации, сменяющиеся периодами с постоянным значением выпуска.

14.2.2. Неравномерный экономический рост и эндогенные циклы экономической активности

В подпараграфе 14.2.1 показано, что рост экономики в базовой односекторной шумпетерианской модели экономического роста имеет неравномерную динамику. В этой простой модели существует еще одна, более тесно связанная с процессом созидательного разрушения, причина этой неравномерности. Одно из свойств шумпетерианских моделей состоит в том, что будущий рост экономики снижает стоимость текущей инновации, так как он ведет к более быстрому замещению существующих технологий новыми. В предыдущих моделях эти эффекты не наблюдались, так как в моделях с континуумом секторов экономика развивается плавно и, как показано в утверждении 14.2, в ней существует единственное равновесие без переходной динамики. Однако эти эффекты отчетливо проявляются в односекторной модели, представленной в этом параграфе.

Чтобы продемонстрировать их влияние на развитие экономики, мы рассмотрим вариант модели с эндогенными циклами экономического роста.

Единственное отличие такой модели от модели из подпараграфа 14.2.1 состоит в предположении о том, что если в исследовательском секторе занято L_R работников, то темп инноваций в нем составляет

$$\eta(L_R)L_R,$$

где функция $\eta(\cdot)$ описывает экстерналию в исследовательской деятельности и является строго убывающей. Увеличение количества фирм, стремящихся изобрести технологии нового поколения, ведет к усилению эффекта вытеснения в исследовательской деятельности, что снижает вероятность успешной инновации для отдельной фирмы. Каждая фирма не принимает во внимание собственное влияние на агрегированный темп инноваций и поэтому рассматривает значение $\eta(L_R)$ как заданное (как показано в упражнении 14.22, это предположение не является существенным). Следовательно, если текущее значение качества машин составляет q, то условие свободного выхода на рынок исследований принимает следующий вид:

$$\eta(L_R(q))V(\lambda q) = w(q),$$

где переменная $L_R(q)$ обозначает количество работников, занятых в исследовательском секторе при текущем качестве используемых машин, равном q.

Далее проанализируем равновесие, которое обладает следующим циклическим свойством: темп инноваций, имеющих нечетный номер, отличается от темпа инноваций, имеющих четный номер (мы можем предположить, что нумерация инноваций начинается в некоторый произвольно выбранный момент времени $t = 0$). Такое равновесие будет существовать в экономике модели в том случае, когда структура ожиданий всех агентов допускает его существование (то есть оно является равновесием с самосбывающимися пророчествами). Обозначим количество работников, занятых в исследовательском секторе в нечетные и четные периоды, как L_R^1 и L_R^2. Тогда по аналогии с анализом из предыдущего подпараграфа в любом равновесии с циклической структурой инноваций их стоимости в нечетные и четные периоды (при качестве машин, равном q) определяются следующими уравнениями:

$$V^2(\lambda q) = \frac{\beta q(L - L_R^2)}{\rho + \eta(L_R^2)L_R^2} \text{ и } V^1(\lambda q) = \frac{\beta q(L - L_R^1)}{\rho + \eta(L_R^1)L_R^1}, \tag{14.31}$$

а условия свободного входа на рынок исследований выглядят как

$$\eta(L_R^1)V^2(\lambda q) = w(q) \text{ и } \eta(L_R^2)V^1(\lambda q) = w(q),$$

где переменная $w(q)$ обозначает равновесную заработную плату при качестве машин, равном q. Причина, по которой в формуле для инновации с четным номером присутствует множитель $V^1(\lambda q)$, заключается в том, что если у текущей технологии нечетный номер, то в этот момент времени в секторе исследований занято L_R^1 работников, но у инновации, которую они осуществляют, четный номер и поэтому ее стоимость составляет $V^2(\lambda q)$. Следовательно, в равновесии должны выполняться два следующих условия:

$$\eta(L_R^1)\frac{\lambda(1-\beta)q(L-L_R^2)}{\rho+\eta(L_R^2)L_R^2}=1 \text{ и } \eta(L_R^2)\frac{\lambda(1-\beta)q(L-L_R^1)}{\rho+\eta(L_R^1)L_R^1}=1. \qquad (14.32)$$

Далее. Нетрудно убедиться, что у этой системы уравнений есть решение L_R^1 и L_R^2, причем $L_R^1 \neq L_R^2$, что соответствует возможности существования в экономике эндогенных двухпериодных циклов экономической деятельности (см. упражнение 14.21).

14.2.3. Последствия процесса созидательного разрушения для рынка труда

Другое важное свойство процесса созидательного разрушения состоит в том, что экономический рост сопровождается разрушением существующих производственных единиц. В рассмотренных ранее моделях это приводило лишь к потере монопольной ренты присутствующими на рынке фирмами без сокращения занятости. Однако в более реалистичных экономиках созидательное разрушение может привести и к увольнению части занятых работников, которые становятся безработными до момента устройства на новую работу. В упражнении 14.19 показано, как процесс созидательного разрушения может приводить к появлению безработицы.

Последнее свойство процесса созидательного разрушения, которое необходимо отметить, состоит в разрушении специфичных для фирмы рабочих навыков. Оптимальная стратегия работника может заключаться в накоплении человеческого капитала, специфичного для фирмы, на которой он занят. Из модели созидательного разрушения следует, что при быстром экономическом росте горизонт планирования производственных единиц сокращается. Важным следствием из этого утверждения является то, что в быстрорастущих экономиках у работников (а иногда и у фирмы) будет меньше стимулов к осуществлению специфических инвестиций.

14.3. Инновации фирм, присутствующих на рынке, и фирм-новичков

Важной чертой процесса экономического роста является взаимосвязь инноваций и технологических улучшений, которые осуществляются присутствующими на рынке фирмами, с одной стороны и выходом на рынок более производительных новых фирм — с другой. Эмпирические свидетельства из теории отраслевых рынков, которые мы подробнее обсудим в параграфе 18.1, говорят о том, что большая часть роста производительности в промышленности (и поэтому на агрегированном уровне) происходит за счет улучшения производительности на существующих предприятиях. Однако выход на рынок новых предприятий также приносит нетривиальный вклад в рост производительности в промышленности. В шумпетерианской модели экономического роста, представленной в этой главе, двигателем экономического роста является выход на рынок новых фирм. В буквальной интерпретации этих моделей весь экономический рост объясняется выходом на рынок новых фирм, что противоречит эмпирическим фактам. Модели расширяющегося разнообразия, рассмотренные в предыдущей главе, также не предоставляют аппарата для анализа взаимодействия между фирмами, присутствующими на рынке, и выходящими на рынок фирмами[6]. В этом и следующем параграфах мы обсудим модели, в которых рост производительности отчасти происходит на существующих предприятиях (фирмах). В модели в этом параграфе вклад в рост производительности осуществляется как присутствующими на рынке фирмами, так и фирмами-новичками. Модель из следующего параграфа является во многих смыслах более богатой, однако в ней отсутствует выход на рынок новых фирм. Анализ этих двух моделей можно рассматривать как первое знакомство с моделями, которые могут оказаться полезными в изучении отраслевой структуры инноваций и роста производительности.

14.3.1. Модель

Структура экономики во многом идентична ее структуре в модели из параграфа 14.1. Предпочтения репрезентативного домохозяйства описываются стандартной функцией полезности вида CRRA. Население экономики постоянно и равно L, и занятость поставляется на рынок труда абсолютно неэластично. Ресурсное ограничение задано неравенством (14.1). Производственная функция единственного конечного товара имеет следующий вид:

$$Y(t)=\frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^1 q(v,\, t)^{\beta} x(v,\, t\,|\,q)^{1-\beta} dv\right)L^{\beta}, \qquad (14.33)$$

где функция $x(v,\, t\,|\,q)$ обозначает количество машин типа v с качеством q, используемых в производственной деятельности, а мера множества типов

[6] В моделях расширяющегося разнообразия индивидуальная характеристика фирмы, осуществляющей инновации, не имеет значения, поэтому мы можем предположить, что изобретение всех новых типов машин осуществляется фирмами, присутствующими на рынке, что равноценно любому другому предположению о распределении улучшений производительности между фирмами.

машин, как и ранее, нормализована единицей. Такой вид агрегированной производственной функции схож с ее видом в уравнении (14.3). Различие в том, что здесь в нее входит показатель качества машин в степени β. Эта модификация не влияет на выводы об экономическом росте в модели, однако из нее следует, что фирмы с различной производительностью будут иметь различные уровни продаж (см. упражнение 14.28). Двигателем экономического роста в модели, как и ранее, являются улучшения качества машин, при этом они могут происходить за счет двух типов инноваций: (1) инновации присутствующих на рынке фирм и (2) созидательное разрушение новыми фирмами.

Обозначим функцию качества машин типа v в момент времени t как $q(v, t)$. Тогда «лестница качества» для каждого типа машин, как и ранее, имеет следующий вид:

$$q(v, t) = \lambda^{n(v,t)} q(v, s) \text{ для всех } v \text{ и } t,$$

где $\lambda > 1$ и функция $n(v, t)$ обозначает количество *простейших* инноваций для этого типа машин, осуществленных между моментами времени $s \le t$ и t, где s обозначает момент времени, когда данный тип машин был изобретен, а функция $q(v, s)$ качество этих машин в этот момент времени. Присутствующая на рынке фирма владеет полностью защищенным патентом на машины, которые она изобретает (однако такой патент не запрещает новым фирмам вести работу над улучшением качества этих машин). Предположим, что в момент времени $t = 0$ каждый тип машин v имел качество $q(v, 0) > 0$ и права на него принадлежали некоторой присутствующей на рынке фирме. Простейшие инновации могут осуществляться только присутствующими на рынке фирмами. Мы можем рассматривать их как текущие инновации, которые ведут к улучшению качества используемых машин. Более точно, если присутствующая на рынке фирма несет расходы на инновацию для машин с качеством $q(v, t)$, равные $z(v, t)q(v, t)$ единиц конечного товара, то потоковый темп инноваций равен $\phi z(v, t)$ при $\phi > 0$. После осуществления инновации качество машин равно $\lambda q(v, t)$.

С другой стороны, в момент времени t новая фирма имеет возможность вести исследования, направленные на инновации для машин типа v. Если текущее качество машин составляет $q(v, t)$, то новая фирма, неся расходы, равные единице конечного товара, совершает инновацию с потоковым темпом $\eta(\hat{z}(v, t))/q(v, t)$, где функция $\eta(\cdot)$ является строго убывающей, непрерывной и дифференцируемой, а функция $\hat{z}(v, t)$ обозначает исследовательские расходы новой фирмы для товара с качеством v в момент времени t. Присутствующая на рынке фирма также имеет доступ к этой технологии радикальных инноваций. Однако из эффекта замещения Эрроу следует, что присутствующая на рынке фирма никогда не будет использовать эту технологию (так как если прибыль новой фирмы от использования такой технологии равна нулю, то прибыль присутствующей на рынке фирмы будет отрицательной, см. упражнение 14.24). Однако прибыль присутствующей на рынке фирмы от использования технологии простейших инноваций, недоступной новым фирмам, остается положительной.

Строгая монотонность функции $\eta(\cdot)$, которой мы также пользовались в подпараграфе 14.2.2, говорит о том, что если много фирм стремятся осуществить инновацию для одного и того же типа машин, то, скорее всего, они используют схожие конструкторские решения. Поэтому в исследовательской деятельности присутствует некоторая внешняя убывающая отдача от масштаба (новые фирмы «ловят рыбу в одном пруду»). Так как каждая новая фирма, совершающая исследования, малые в масштабах экономики, то она рассматривает значение функции $\eta(\hat{z}(v, t))$ как заданное. Далее мы везде будем предполагать, что функция $z\eta(z)$ является строго возрастающей по z и поэтому увеличение общего количества исследований для определенного типа машин ведет к росту вероятности изобретения лучших машин. Мы также будем предполагать, что функция $\eta(z)$ удовлетворяет следующим условиям типа условий Инада:

$$\lim_{z\to\infty} \eta(z) = 0 \text{ и } \lim_{z\to 0} \eta(z) = \infty. \tag{14.34}$$

Инновации, осуществляемые новыми фирмами, ведут к открытию машин с качеством $\kappa q(v, t)$, где $\kappa > \lambda$. Следовательно, инновации новых фирм являются более радикальными, чем инновации присутствующих на рынке фирм. Доступные эмпирические свидетельства из теории инноваций поддерживают точку зрения о том, что инновации новых фирм оказываются более значительными и радикальными, чем инновации фирм, присутствующих на рынке[7]. Вела ли новая фирма ранее деятельность в секторе машин данного или некоторого другого типа, не имеет значения для ее технологии осуществления инновации.

Как только происходит открытие типа машин с качеством $q(v, t)$, фирма получает возможность производства любого их количества с постоянными предельными издержками, равными ψ. Как и ранее, мы будем использовать нормализацию $\psi \equiv 1 - \beta$. Общие расходы на исследовательскую деятельность определяются следующим уравнением:

$$Z(t) = \int_0^1 \left[z(v, t) + \hat{z}(v, t)\right] q(v, t) dv, \tag{14.35}$$

[7] Несмотря на это, новой фирме может понадобиться значительное время, чтобы полностью воспользоваться увеличением производительности, связанным с этими инновациями. Мы не рассматриваем такой эффект в анализе этой модели.

где функция $q(v, t)$ обозначает наилучшее качество машин типа v, доступное в момент времени t. Также заметим, что общее количество исследований представляет собой сумму исследований, проводимых присутствующими на рынке и новыми фирмами ($z(v, t)$ и $\hat{z}(v, t)$ соответственно).

Распределение ресурсов в такой экономике состоит из траекторий потребления, совокупных расходов на машины и совокупных расходов на исследования $[C(t), X(t), Z(t)]_{t=0}^{\infty}$, стохастических траекторий исследовательских усилий присутствующих на рынке фирм и фирм-новичков $[z(v, t), \hat{z}(v, t)]_{v\in[0,1],t=0}^{\infty}$, стохастических траекторий цен и количества передовых машин и чистой приведенной дисконтированной стоимости прибыли от этих машин $\left[p^x(v, t\,|\,q), x(v, t\,|\,q), V(v, t\,|\,q)\right]_{v\in[0,1],t=0}^{\infty}$, траекторий процентной ставки и заработной платы $[r(t), w(t)]_{t=0}^{\infty}$. *Равновесие* в экономике определяется как распределение ресурсов, в котором исследовательские решения новых фирм максимизируют их дисконтированную стоимость, ценообразование, производство и исследовательские решения присутствующих на рынке фирм максимизируют их дисконтированную стоимость, потребительские решения репрезентативного домохозяйства максимизируют его функцию полезности, а рынки труда и капитала находятся в равновесии. Как и ранее, равновесную траекторию, на которой выпуск и потребление растут с постоянным темпом, мы будем называть ТСР.

Из максимизации прибыли фирмами в секторе производства конечного товара вытекает следующий вид функций спроса на машины наилучшего качества (эта функция является некоторым изменением функции (14.4) из параграфа 14.1):

$$x(v, t\,|\,q) = p^x(v, t\,|\,q)^{-1/\beta} q(v, t)L \text{ для всех } v \in [0, 1] \text{ и для всех } t, \tag{14.36}$$

где функция $p^x(v, t\,|\,q)$ обозначает цену машин типа v с качеством $q(v, t)$ в момент времени t. Так как спрос на машины со стороны сектора производства конечного товара является функцией с постоянной эластичностью по цене, цена, при которой прибыль фирмы-монополиста достигает глобального максимума, как обычно, составляет фиксированную наценку на предельные издержки производства ψ. Поэтому предположим, что выполняется следующее условие, аналогичное условию (14.5):

$$\kappa \geq \left(\frac{1}{1-\beta}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}. \tag{14.37}$$

Оно гарантирует, что фирма, осуществляющая инновацию, имеет возможность устанавливать цену, при которой прибыль достигает глобального максимума. Как следствие из него, присутствующие на рынке фирмы, осуществляющие дальнейшие инновации, также имеют возможность устанавливать такую цену.

14.3.2. Равновесие

Так как спрос на машины в уравнении (14.36) имеет постоянную эластичность по цене и $\psi \equiv 1 - \beta$, цена, при которой прибыль достигает максимума (для машин с наилучшим качеством), равна единице:

$$p^x(v, t \mid q) = 1. \tag{14.38}$$

Объединяя уравнения (14.38) и (14.36), имеем следующее равенство:

$$x(v, t \mid q) = qL. \tag{14.39}$$

Следовательно, потоковая прибыль фирмы-монополиста, производящей машины с качеством q, продолжает определяться уравнением (14.8). Подставляя равенство (14.39) в уравнение (14.33), получаем, что общий выпуск определяется уравнением (14.9), то есть $Y(t) = Q(t)L/(1 - \beta)$, где среднее качество машин $Q(t)$ задано условием (14.10). Более того, так как рынок труда является рынком с совершенной конкуренцией, заработная плата, как и ранее, определяется уравнением (14.12).

Далее найдем значение исследовательских усилий присутствующих на рынке фирм и фирм-новичков. Для этого воспользуемся формулой для приведенной стоимости фирмы-монополиста, производящей в момент времени t машины типа v с наилучшим доступным качеством q. Она задается стандартным уравнением ГЯБ в следующем виде:

$$\begin{aligned} r(t)V(v, t \mid q) - \dot{V}(v, t \mid q) = \max_{z(v,t \mid q) \geq 0} \{\pi(v, t \mid q) - z(v, t \mid q) q(v, t) + \\ + \phi z(v, t \mid q)(V(v, t \mid \lambda q) - V(v, t \mid q)) -{}' z(v, t \mid q)\eta(z(v, t \mid q)) V(v, t \mid q), \end{aligned} \tag{14.40}$$

где выражение $\hat{z}(v, t \mid q)\eta(\hat{z}(v, t \mid q))$ обозначает темп, с которым происходят осуществляемые новыми фирмами радикальные инновации в секторе v в момент времени t, а выражение $\phi z(v, t \mid q)$ темп, с которым улучшают технологию присутствующие на рынке фирмы. Первое слагаемое в уравнении (14.40), $\pi(v, t \mid q)$, обозначает потоковую прибыль, заданную равенством (14.8), а второе — расходы присутствующей на рынке фирмы на улучшение качества своих товаров. Вторая строка описывает изменение стоимости присутствующей на рынке фирмы в результате собственной инновации (качество ее товаров возрастает с q до λq с темпом $\phi z(v, t \mid q)$) или инновации новой фирмы (присутствующая на рынке фирма вытесняется и получает с этого момента времени нулевую прибыль с темпом $\hat{z}(v, t \mid q)\eta(\hat{z}(v, t \mid q))$). Уравнение для стоимости фирмы записано в виде задачи максимизации, так как функция $z(v, t \mid q)$ является для присутствующей на рынке фирмы переменной выбора.

Условие свободного выхода на рынок исследований имеет вид, схожий с условием (14.14) из параграфа 14.1:

$$\eta(\hat{z}(v, t \mid q))V(v, t \mid \kappa q) \leq q(v, t), \hat{z}(v, t \mid q) \geq 0$$

и

$$\eta(\hat{z}(v, t \mid q))V(v, t \mid \kappa q) = q(v, t), \text{ если } \hat{z}(v, t \mid q) > 0, \qquad (14.41)$$

в котором принимается во внимание тот факт, что при расходах новой фирмы в количестве $q(v, t)$ потоковый темп инноваций составляет $\eta(\hat{z})$ и они приводят к появлению машин с качеством κq. Поэтому стоимость инновации равна $\eta(\hat{z}(v, t \mid q))V(v, t \mid \kappa q)$.

Кроме того, выбор исследовательских усилий присутствующей на рынке фирмой определяется следующим условием дополнительной нежесткости:

$$\phi(V(v, t \mid \lambda q) - V(v, t \mid q)) \leq q(v, t), z(v, t \mid q) \geq 0$$

и

$$\phi(V(v, t \mid \lambda q) - V(v, t \mid q)) = q(v, t), \text{если } z(v, t \mid q) > 0. \qquad (14.42)$$

Как и ранее, из условия (14.15) следует, что процентная ставка на ТСР составляет постоянную величину, $r(t) = r^*$. Более того, $z(v, t \mid q) = z(q)$ и $\hat{z}(v, t \mid q) = \hat{z}(q)$. Из этих равенств следует, что на ТСР $\dot{V}(v, t \mid q) = 0$ и $V(v, t \mid \lambda) = V(q)$. Далее. Из того, что и прибыль, и издержки пропорциональны качеству q, нетрудно убедиться, что $\hat{z}(q) = \hat{z}$ и $V(q) = \upsilon q$ (в упражнении 14.23 в действительности показано, что $\hat{z}(v, t \mid q) = \hat{z}(t)$ и $V(v, t \mid \lambda) = \upsilon(t)q$ в любом равновесии, включая равновесия вне ТСР). Эти результаты позволяют получить простое описание ТСР и динамического равновесия в модели[8].

Начнем с поиска равновесия на внутренней ТСР. В таком равновесии присутствующие на рынке фирмы совершают исследования и поэтому выполняется следующее равенство:

$$\phi(V(v, t \mid \lambda q) - V(v, t \mid q)) = q(v, t). \qquad (14.43)$$

Так как функция V линейна по переменной q, из равенства (14.43) вытекает следующее полезное уравнение для стоимости фирмы, выпускающей машины с качеством q:

$$V(q) = \frac{q}{\phi(\lambda - 1)}. \qquad (14.44)$$

[8] Из того, что $\hat{z}(q) = \hat{z}$ для всех q, не обязательно следует, что $z(q) = z$ для всех q. На самом деле, как будет показано позже, мы можем найти равновесное значение лишь среднего уровня интенсивности исследовательской деятельности присутствующих на рынке фирм.

Более того, из условия свободного выхода на рынок исследований (которое в этом случае выполняется как равенство) мы имеем:

$$\eta(\hat{z})V(\kappa q)=q \text{ или } V(q)=\frac{q}{\kappa\eta(\hat{z})}.$$

Объединяя это выражение с равенством (14.44), получаем следующее уравнение:

$$\frac{\phi(\lambda-1)}{\kappa\eta(\hat{z})}=1.$$

Поэтому количество исследований новыми фирмами на ТСР $\hat{z}^*$ неявно определяется следующим уравнением:

$$\hat{z}(q)=\hat{z}^* \equiv \eta^{-1}\left(\frac{\phi(\lambda-1)}{\kappa}\right) \text{ для всех } q>0. \tag{14.45}$$

В дополнение — из уравнения (14.40) следует, что на ТСР

$$V(q)=\frac{\beta Lq}{r^*+\hat{z}^*\eta(\hat{z}^*)}. \tag{14.46}$$

Далее, объединяя уравнение (14.46) с уравнениями (14.44) и (14.45), приходим к следующему значению процентной ставки на ТСР:

$$r^*=\phi(\lambda-1)\beta L-\hat{z}^*\eta(\hat{z}^*). \tag{14.47}$$

Следовательно, из уравнения (14.15) получаем, что темп роста потребления и выпуска на ТСР составляет:

$$g^*=\frac{1}{\theta}(\phi(\lambda-1)\beta L-\hat{z}^*\eta(\hat{z}^*)-\rho). \tag{14.48}$$

Уравнение (14.48) имеет несколько важных следствий. В частности, оно задает связь между темпом осуществления инноваций новыми фирмами $\hat{z}^*$ и темпом роста экономики на ТСР g^*. В стандартной шумпетерианской модели экономического роста эта связь положительна. Нетрудно убедиться, что в отличие от нее, в данной модели связь между $\hat{z}^*$ и g^* отрицательна.

Уравнения (14.45) и (14.48) определяют темп экономического роста на ТСР, однако они не показывают, какая часть роста производительности обусловлена процессом созидательного разрушения (инновациями фирм-новичков), а какая его часть является следствием инноваций присутствующих на рынке фирм. Чтобы определить это распределение, повторим анализ из параграфа 14.1. Напомним, что в любой момент времени функция $z(v, t \mid q)$ не является функцией от v, однако может зависеть от значения переменной q. Поэтому динамика среднего качества машин $Q(t)$ определяется следующим уравнением:

$$Q(t+\Delta t) = (\lambda\phi z(t)\Delta t)Q(t) + (\kappa\hat{z}(t)\eta(\hat{z}(t))\Delta t)Q(t) + \\ + (1-\phi z(t)\Delta t - \hat{z}(t)\eta(\hat{z}(t))\Delta t)Q(t) + o(\Delta t), \tag{14.49}$$

где переменная

$$z(t) \equiv \frac{\int_0^1 z(v, t \mid q)q(v, t)dv}{Q(t)} \tag{14.50}$$

обозначает среднее значение исследовательских усилий присутствующей на рынке фирмы в момент времени t. Далее, вычитая из обеих частей равенства (14.49) $Q(t)$, деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)} = (\lambda - 1)\phi z(t) + (\kappa - 1)\hat{z}(t)\eta(\hat{z}(t)). \tag{14.51}$$

Следовательно, альтернативное уравнение для темпа роста экономики, которое разделяет его на вклады в экономический рост присутствующих на рынке фирм (первое слагаемое) и фирм-новичков (второе слагаемое), имеет следующий вид:

$$g^* = (\lambda - 1)\phi z^* + (\kappa - 1)\hat{z}^*\eta\left(\hat{z}^*\right), \tag{14.52}$$

где константа z^* обозначает среднее значение исследовательских усилий присутствующих на рынке фирм на ТСР. Из уравнения (14.51) и наблюдения о том, что темп роста среднего качества машин на ТСР составляет g^*, а значение исследовательских усилий фирм-новичков на ТСР равно $\hat{z}^*$, вытекает, что оно является постоянной величиной на ТСР. После того как уравнение (14.48) определяет темп роста выпуска и потребления на ТСР, уравнение (14.52) может быть использовано для нахождения значения z^* и, таким образом, для разделения экономического роста на вклады инноваций присутствующих на рынке фирм и инноваций, осуществляемых фирмами-новичками. Более того, нетрудно убедиться, что в данной модели в экономике отсутствует переходная динамика (см. упражнение 14.23). Следовательно, если равновесие с положительным темпом роста экономики существует, то в этом равновесии он равен g^*. Чтобы гарантировать существование такого равновесия, нам необходимо убедиться, что исследовательская деятельность является прибыльной как для присутствующих на рынке фирм, так и для фирм-новичков. Требование о том, что процентная ставка на ТСР r^*, заданная уравнением (14.47), превышает норму дисконтирования ρ, является достаточным для существования равновесия с положительным темпом роста экономики. С другой стороны, эта процентная ставка не должна принимать слишком высокое значение, так как в противном случае значение целевой функции репрезентативного домохозяйства расходится к бесконечности (что ведет к нарушению условия трансверсальности). Наконец, необходимо убедиться в том, что присутствующие на рынке фирмы также осуществляют инновации. Следующие неравенства объединяют три вышеупомянутых требования (см. упражнение 14.23):

$$\phi(\lambda-1)\beta L-(\theta(\kappa-1)+1)\hat{z}^*\eta\left(\hat{z}^*\right)>\rho>(1-\theta)\left(\phi(\lambda-1)\beta L-\hat{z}^*\eta\left(\hat{z}^*\right)\right), \quad (14.53)$$

где значение $\hat{z}^*$ определяется уравнением (14.45).

Другой набор интересных следствий из этой модели связан с динамикой размера фирмы. Мы можем определить размер фирмы как объем ее продаж, и в этом случае он задается следующим равенством:

$$x(v, t \mid q)=qL \text{ для всех } v \text{ и } t.$$

Чтобы вывести закон изменения продаж фирмы, рассмотрим равновесие, в котором выполняется равенство $z(v, t \mid q)=z^*$ для всех q. Тогда качество машин на каждой присутствующей на рынке фирме растет с потоковым темпом, равным ϕz^*, где z^* определяется уравнениями (14.48) и (14.52). В то же время в экономике происходит процесс вытеснения присутствующих на рынке фирм с потоковым темпом, равным $\hat{z}^*\eta\left(\hat{z}^*\right)$. Следовательно, при достаточно малом значении Δt случайный процесс, описывающий размер определенной фирмы, задается следующими равенствами:

$$x(v, t+\Delta t \mid q)=$$
$$=\begin{cases}\lambda x(v, t \mid q) & \text{с вероятностью } \phi z^*\Delta t+o(\Delta t),\\ 0 & \text{с вероятностью } \hat{z}^*\eta(\hat{z}^*)\Delta t+o(\Delta t),\\ x(v, t \mid q) & \text{с вероятностью } (1-\phi z^*\Delta t-\hat{z}^*\eta(\hat{z}^*)\Delta t)+o(\Delta t),\end{cases} \quad (14.54)$$

для всех v и t, где значения величин $\hat{z}^*$ и $\hat{z}^*$ задаются уравнением (14.45) и уравнениями (14.48) и (14.52) соответственно. Следовательно, темп роста размера фирмы является случайной величиной, при этом размер выживающей фирмы в среднем увеличивается со временем. Однако с некоторой положительной вероятностью фирма может быть вытеснена с рынка (и в действительности каждая фирма будет вытеснена со стопроцентной вероятностью в некоторый момент времени).

Утверждение 14.5. *Рассмотрим описанную выше модель экономики с начальным значением среднего качества машин $Q(0) > 0$. Предположим, что в ней выполняются условия (14.34) и (14.53), и остановимся на равновесии, в котором все присутствующие на рынке фирмы прикладывают равное значение исследовательских усилий. Тогда в такой модели существует единственное равновесие. В этом равновесии экономический рост всегда является сбалансированным, то есть технологии $Q(t)$, агрегированный выпуск $Y(t)$ и агрегированное потребление $C(t)$ растут с равным постоянным темпом g^*, заданным уравнением (14.48), где значение величины $\hat{z}^*$ определяется уравнением (14.45). Экономический рост в равновесии вызван как инновациями присутствующих на рынке фирм, так и процессом созидательного разрушения со стороны новых фирм. Размер любой фирмы в равновесии в среднем растет в течение всей ее жизни, однако каждая фирма с вероятностью 1 в некоторый момент времени вытесняется с рынка фирмой-новичком.*

Доказательство. См. упражнение 14.23. ■

Утверждение 14.5 описывает равновесие, в котором все присутствующие на рынке фирмы прикладывают равный уровень исследовательских усилий. В упражнении 14.27 показано, что аналогичные результаты имеют место в равновесии и в общем случае. Нетрудно убедиться, что при правдоподобной параметризации модели на описанной выше ТСР значительная часть прироста производительности генерируется присутствующими на рынке фирмами. Следовательно, такой класс моделей позволяет описать более богатую равновесную динамику экономики, в которой вклад в рост производительности производится как присутствующими на рынке фирмами, так и фирмами-новичками.

14.3.3. Влияние экономической политики на темп роста экономики

В этом подпараграфе мы используем эту модель для анализа влияния различных мер экономической политики на равновесный темп роста производительности в экономике и его распределение между вкладами присутствующих на рынке и новых фирм. Так как модель имеет шумпетерианскую структуру (где двигателем экономического роста является улучшение качества товаров и процесс созидательного разрушения играет важную роль в динамике экономики), естественно предположить, что аналогично базовой модели, представленной в начале этой главы, создание барьеров к выходу на рынок (или налогообложение возможных фирм-новичков) отрицательно скажется на экономическом росте. Чтобы определить является ли такое предположение верным, рассмотрим политику налогообложения исследовательских расходов новых фирм по ставке τ_e, а исследовательских расходов присутствующих на рынке фирм — по ставке τ_i.

(Мы также можем представить себе, что эти ставки отрицательны, и интерпретировать такую ситуацию как политику предоставления субсидий.) Также заметим, что налогообложение новых фирм можно интерпретировать как политику ужесточения патентного законодательства по сравнению с базовой моделью, где новая фирма не предоставляет присутствующей на рынке фирме компенсации за возможность использования уже накопленных знаний и технологий. Несмотря на это, в целях сохранения краткости изложения, мы рассмотрим лишь случай, когда налоговые поступления используются для осуществления государственных расходов, а не возвращаются присутствующим на рынке фирмам в качестве лицензионных отчислений.

Повторяя рассуждения, сделанные выше, мы имеем следующее условие равновесия:

$$\eta\left(\hat{z}^*\right)V(\kappa q)=(1+\tau_e)q \text{ или } V(q)=\frac{q(1+\tau_e)}{\kappa\eta\left(\hat{z}^*\right)}. \tag{14.55}$$

Налогообложение присутствующей на рынке фирмы также изменяет уравнение (14.43), описывающее оптимальное поведение присутствующей на рынке фирмы. Оно принимает вид $\phi(V(\lambda q) - V(q)) = (1 + \tau_i)q$. Объединяя его с уравнением (14.55), получаем следующее равенство:

$$\phi\left(\frac{(\lambda-1)(1+\tau_e)}{\kappa\eta\left(\hat{z}^*\right)(1+\tau_i)}\right)=1.$$

Следовательно, при налогообложении исследовательских расходов фирм-новичков по ставке τ_e их влияние на ТСР $\hat{z}^*$ определяется следующим уравнением:

$$\hat{z}^* \equiv \eta^{-1}\left(\frac{\phi(\lambda-1)(1+\tau_e)}{\kappa\eta\left(\hat{z}^*\right)(1+\tau_i)}\right). \tag{14.56}$$

Уравнение (14.46) продолжает выполняться, и поэтому процентная ставка на ТСР задается как $r^*=(1+\tau_e)^{-1}\kappa\eta\left(\hat{z}^*\right)\beta L-\hat{z}^*\eta\left(\hat{z}^*\right)$. Тогда, подставляя уравнение (14.56), получаем следующие выражения для процентной ставки:

$$r^*=\frac{\phi(\lambda-1)\beta L}{1+\tau_i}-\hat{z}^*\eta\left(\hat{z}^*\right)$$

и темпа роста экономики на ТСР:

$$g^* = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\phi(\lambda-1)\beta L}{1+\tau_i} - \eta\left(\hat{z}^*\right)\hat{z}^* - \rho\right),$$

где значение величины $\hat{z}^*$ задается уравнением (14.56). Отсюда немедленно вытекает следующее утверждение.

Утверждение 14.6. *Темп роста экономики является убывающей функцией от налоговой ставки на присутствующую на рынке фирму, то есть $dg^*/d\tau_i < 0$, и возрастающей функцией от налоговой ставки на фирму-новичка, то есть $dg^*/d\tau_e > 0$.*

Результат, полученный в этом утверждении, выглядит довольно неожиданным и экстремальным. Ранее мы убедились в том, что в базовой шумпетерианской модели экономического роста препятствование выходу на рынок новых фирм (с помощью создания прямых барьеров или налогообложения исследовательских расходов фирм-новичков) отрицательно сказывается на экономическом росте. В данной модели, несмотря на ее шумпетерианскую структуру, политика, затрудняющая выход на рынок новых фирм, ведет к увеличению темпа роста экономики. Более того, как показано в упражнении 14.25, в децентрализованном равновесии в модели количество выходов на рынок новых фирм оказывается завышенным и поэтому их налогообложение ведет к увеличению благосостояния. Интуитивное объяснение этого результата связано с основным отличием этой модели от стандартной шумпетерианской модели. Улучшение качества машин продолжает оставаться в ней двигателем экономического роста, однако здесь инновации осуществляются как присутствующими на рынке фирмами, так и фирмами-новичками. Создание барьеров к выходу на рынок защищает присутствующие на нем фирмы и ведет к росту их стоимости, что, в свою очередь, стимулирует инвестиции в НИОКР и приводит к увеличению темпа роста производительности. Налогообложение фирм-новичков делает присутствующие на рынке фирмы более прибыльными и, таким образом, поощряет их дальнейшие инновации. Налогообложение фирм-новичков, как и создание других барьеров к выходу на рынок, также ведет к увеличению вклада присутствующих на рынке фирм в общий рост производительности.

Необходимо отметить, что этот результат должен интерпретироваться с достаточной долей предосторожности. Рассмотренная модель представляет собой частный случай, в котором исследовательская технология присутствующих на рынке фирм является линейной. Результат утверждения 14.6 во многом базируется на этой линейности. В упражнении 14.26 описано равновесие в модели для случая, когда функция $\phi(z)$ является вогнутой функцией, и показано, что тогда налогообложение новых фирм может вести как к увеличению, так и к снижению темпа роста экономики. Поэтому утверждение 14.6 демонстрирует лишь один из возможных каналов воздействия налоговой политики наиболее прозрачным способом и не является реалистическим описанием этого воздействия на инновационную деятельность.

14.4. Пошаговые инновации*

В базовой шумпетерианской модели экономического роста, а также в расширенной шумпетерианской модели из предыдущего параграфа новые фирмы имеют возможность осуществлять инновации для любого типа машин без предварительного накопления знаний и навыков в производстве отдельных типов оборудования. Такое предположение приводит к простой структуре модели, во многом схожей со структурой модели расширяющегося разнообразия из предыдущей главы. Однако на практике процесс улучшения качества товаров может иметь важный кумулятивный аспект. Часто в процессе дальнейшего улучшения качества могут участвовать лишь фирмы, обладающие достаточным уровнем знаний и навыков в производстве определенных товаров или машин. Например, в работе [Abernathy 1978, p. 70], посвященной анализу инноваций в широком ряде отраслей экономики, автор утверждает, что «каждая из больших фирм зачастую делает более частые инновации в некоторой определенной отрасли». Он объясняет такое наблюдение тем, что предыдущие инновации облегчают процесс осуществления дальнейших инноваций. Этот аспект исследовательской деятельности полностью отсутствует в базовой шумпетерианской модели экономического роста, где любая фирма имеет возможность выйти на рынок исследований и изобрести новое поколение машин с лучшим качеством (более того, из эффекта вытеснения Эрроу следует, что присутствующие на рынке фирмы не осуществляют инновации, хотя это предположение ослаблено в модели из параграфа 14.3). Более реалистичным описанием процесса исследовательской деятельности будет модель, в которой небольшое количество фирм непрерывно заняты кумулятивными инновациями и в каждый момент времени конкурируют между собой на рынке определенного товара или типа оборудования.

В этом параграфе представлена модель кумулятивных инноваций такого типа. Следуя работе [Aghion et al. 2001], мы будем называть эту модель моделью *пошаговых инноваций*. Такие модели не только представляют интерес как альтернативное описание процесса шумпетерианского экономического роста, но и позволяют эндогенизировать равновесную рыночную структуру экономики, провести более глубокий анализ воздействия антимонопольной политики и политики защиты права интеллектуальной собственности (ПИС). Вместе с моделью из предыдущего параграфа, в которой инновации осуществляются как присутствующими на рынке, так и новыми фирмами, эта модель является первым шагом на пути к созданию модельного аппарата, в котором присутствующие на рынке фирмы производят вклад в рост производительности и осуществляют инновации, основываясь на предыдущих собственных исследованиях (что согласуется с эмпирическими свидетельствами, представленными в параграфе 18.1). Необходимо отметить, что модель, представленная в этом параграфе, обладает рядом отличительных свойств. Например, в предыдущих моделях ослабление патентной защиты и увеличение конкуренции между фирмами ведут к сокращению темпа роста экономики. Несмотря на это, имеющиеся у нас эмпирические наблюдения свидетельствуют о том, что отрасли с большим уровнем конкуренции зачастую демонстрируют более высокий темп роста. В шумпетерианских моделях с эндогенной рыночной структурой усиление конкуренции (и ослабление защиты ПИС) при некоторых предположениях ведут к увеличению темпа роста экономики.

14.4.1. Предпочтения и технология

Рассмотрим экономику, допускающую существование репрезентативного домохозяйства. Предположим, что общая занятость нормализована единицей и она поставляется на рынок труда абсолютно неэластично. Для упрощения дальнейшего анализа допустим, что моментальная функция полезности является логарифмической. Таким образом, целевая функция репрезентативного домохозяйства имеет следующий вид:

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t)\log C(t)dt, \tag{14.57}$$

где константа $\rho > 0$ обозначает норму дисконтирования, а переменная $C(t)$ — потребление в момент времени t.

Обозначим общий выпуск конечного товара в момент времени t как $Y(t)$. Предположим, что экономика является закрытой и что конечный товар используется только для потребления (то есть инвестиции и расходы на машины отсутствуют). Тогда $C(t) = Y(t)$. Из вида целевой функции (14.57) вытекает, что стандартное уравнение Эйлера для потребления имеет следующий вид:

$$g(t) \equiv \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = r(t) - \rho, \tag{14.58}$$

где переменные $g(t)$ и $r(t)$ в этом уравнении определены как темп роста потребления и выпуска и процентная ставка в момент времени t соответственно.

Конечный товар Y производится из континуума промежуточных товаров, расположенных на множестве единичной меры с помощью производственной функции типа Кобба—Дугласа в следующем виде:

$$Y(t) = \exp\left(\int_0^1 \log y(v,\ t)dv\right), \tag{14.59}$$

где функция $y(v, t)$ обозначает выпуск v-го промежуточного товара в момент времени t. Далее мы будем рассматривать цену конечного товара (или совокупный индекс цен промежуточных товаров) в качестве единицы измерения и обозначим цену промежуточного товара v в момент времени t переменной $p^y(v, t)$. Также предположим свободный выход на рынок производства конечного товара. Из этих предположений и производственной функции типа Кобба—Дугласа (14.59) вытекает, что каждый производитель конечного товара обладает следующей функцией спроса на промежуточные товары:

$$y(v,\ t) = \frac{Y(t)}{p^y(v,\ t)} \text{ для всех } v \in [0,\ 1]. \tag{14.60}$$

Предположим, что существует два типа промежуточных товаров $v \in [0, 1]$, каждый из которых производится одной из двух фирм в этом секторе и ни одна другая фирма не имеет возможности производить промежуточные товары. Два типа промежуточного товара являются совершенными заменителями и рынок имеет структуру конкуренции по Бертрану. Фирмы $i = 1$ и $i = 2$ в этом секторе имеют доступ к следующей производственной технологии:

$$y_i(v,\ t) = q_i(v,\ t)l_i(v,\ t), \tag{14.61}$$

где функция $l_i(v, t)$ обозначает занятость в фирме i, а функция $q_i(v, t)$ — запас технологий в ней в момент времени t. Единственное различие между двумя фирмами состоит лишь в их технологиях, определяемых эндогенно. Из производственной функции (14.61) следует, что предельные издержки производства промежуточного товара v фирмой i в момент времени t составляют:

$$MC_i(v,\ t) = \frac{w(t)}{q_i(v,\ t)}, \tag{14.62}$$

где переменная $w(t)$ обозначает заработную плату в экономике в момент времени t.

Обозначим технологического лидера в каждой отрасли как i, а технологического отстающего как $-i$. Тогда получаем следующее неравенство:

$$q_i(v,\ t) \geq q_{-i}(v,\ t).$$

Из конкуренции по Бертрану следует, что все промежуточные товары поставляются на рынок фирмой-лидером по предельной цене (см. упражнение 14.29):

$$p_i^y(v, t) = \frac{w(t)}{q_{-i}(v, t)}. \tag{14.63}$$

Тогда из уравнения (14.60) вытекает следующий вид функции спроса на промежуточные товары:

$$y_i(v, t) = \frac{q_{-i}(v, t)}{w(t)} Y(t). \tag{14.64}$$

Исследовательская деятельность приводит к стохастической структуре осуществления инноваций. Если инновация осуществляется лидером, то его технология улучшается в $\lambda > 1$ раз. С другой стороны, отстающая фирма также имеет возможность вести исследования, для того чтобы приблизиться к технологической границе экономики. Предположим, что в силу того, что такие инновации осуществляются для типа товаров, которые производит отстающая фирма и основаны на ее собственных предыдущих исследованиях, они не являются нарушением патентного права фирмы-лидера и поэтому у отстающей фирмы отсутствует необходимость предоставлять ей компенсацию.

Для упрощения анализа предположим, что издержки и вероятность успеха исследовательского проекта для фирмы-лидера и для отстающей фирмы совпадают. В частности, каждая фирма (в каждой отрасли) имеет доступ к следующей исследовательской технологии (границе инновационных возможностей):

$$z_i(v, t) = \Phi(h_i(v, t)), \tag{14.65}$$

где функция $z_i(v, t)$ обозначает потоковый темп инноваций в момент времени t, а функция $h_i(v, t)$ — количество работников, занятых исследовательской деятельностью в фирме i в отрасли v в момент времени t. Предположим, что функция $\Phi(\cdot)$ является дважды дифференцируемой, удовлетворяет неравенствам $\Phi'(\cdot) > 0$, $\Phi''(\cdot) < 0$ и $\Phi'(0) < \infty$ и что существует вещественное $\bar{h}$, такое, что $\Phi'(\mathrm{h}) = 0$ для всех $h \geq \bar{h}$. Из предположения о том, что $\Phi'(0) < \infty$, следует, что условие Инада не выполняется, если $h_i(v, t) = 0$. С другой стороны, из последнего предположения следует существование верхней границы для потокового темпа осуществления инноваций. Так как заработная плата на рынке труда равна $w(t)$, издержки исследовательской деятельности составляют $w(t)G(z_i(v, t))$, где $G(z_i(v, t)) \equiv \equiv \Phi^{-1}(z_i(v, t))$ и из предположений о виде функции $\Phi(\cdot)$ моментально следует, что функция $G(\cdot)$ является дважды дифференцируемой, удовлетворяет неравенствам $G'(\cdot) > 0$, $G''(\cdot) > 0$, $G'(0) > 0$ и $\lim_{z \to \bar{z}} G'(z) = \infty$, где $\bar{z} \equiv \Phi(\bar{h})$ равно максимальному потоковому темпу осуществления инноваций (значение $\bar{h}$ определено выше).

Далее опишем динамику развития технологии в каждой отрасли. Предположим, что фирма-лидер i в отрасли ν в момент времени t обладает технологией

$$q_i(\nu, t) = \lambda^{n_i(\nu, t)}, \tag{14.66}$$

а отстающая фирма — технологией

$$q_{-i}(\nu, t) = \lambda^{n_{-i}(\nu, t)}, \tag{14.67}$$

где естественным образом $n_i(\nu, t) > n_{-i}(\nu, t)$. Обозначим технологический разрыв в отрасли ν в момент времени t как $n(\nu, t) \equiv n_i(\nu, t) - n_{-i}(\nu, t)$. Если фирма-лидер осуществляет инновацию в течение периода времени Δt, то технологический разрыв увеличивается до $n(\nu, t + \Delta t) = n(\nu, t) + 1$ (так как вероятность осуществления двух и более инноваций в течение периода времени Δt составляет $o(\Delta t)$. С другой стороны, если в течение периода времени Δt инновация осуществляется отстающей фирмой, то $n(\nu, t + \Delta t) = 0$. Более того, предположим, что правительство осуществляет политику защиты ПИС в следующем виде: патент, которым владеет фирма-лидер, истекает по экспоненциальному закону с темпом $\kappa < \infty$, и в момент его истечения отстающая фирма обладает возможностью закрыть технологический разрыв и получает доступ к технологии фирмы-лидера. При такой структуре накопления технологий закон, определяющий динамику технологического разрыва, выглядит следующим образом:

$$n(\nu, t + \Delta t) =$$
$$= \begin{cases} n(\nu, t) + 1 & \text{с вероятностью } z_i(\nu, t)\Delta t + o(\Delta t), \\ 0 & \text{с вероятностью } (z_{-i}(\nu, t) + \kappa)\Delta t + o(\Delta t), \\ n(\nu, t) & \text{с вероятностью } 1 - (z_i(\nu, t) + z_{-i}(\nu, t) + \kappa)\Delta t + o(\Delta t). \end{cases} \tag{14.68}$$

В первой строке в случае когда $n(\nu, t) = 0$, то есть фирмы обладают одинаковыми технологиями, мы предполагаем, что $z_i(\nu, t) = 2z_0(\nu, t)$. Слагаемое $o(\Delta t)$, как и ранее, представляет собой величину более чем первого порядка малости при $\Delta t \to 0$ и, в частности, соответствует вероятности осуществления более чем одной инновации в течение периода времени Δt. Функции $z_i(\nu, t)$ и $z_{-i}(\nu, t)$ обозначают потоковые темпы осуществления инновации фирмой-лидером и отстающей фирмой соответственно, а величина κ — потоковый темп, с которым отстающая фирма получает возможность копировать технологию фирмы-лидера.

Далее запишем выражение для моментальной *операционной* прибыли фирмы-лидера (прибыли до совершения исследовательских расходов и выплаты лицензионных отчислений). Прибыль фирмы-лидера i в отрасли v в момент времени t имеет следующий вид:

$$\Pi_i(v, t) = (p_i^y(v, t) - MC_i(v, t))y_i(v, t) =$$
$$= \left(\frac{w(t)}{q_{-i}(v, t)} - \frac{w(t)}{q_i(v, t)}\right)\frac{Y(t)}{p_i^y(v, t)} = \left(1 - \lambda^{-n(v,t)}\right)Y(t), \tag{14.69}$$

где, напомним, функция $n(v, t)$ обозначает технологический разрыв в отрасли v в момент времени t. В первом равенстве просто используется определение операционной прибыли как произведения разности цены и предельных издержек производства и количества проданных товаров. Во втором равенстве используется уравнение (14.63), говорящее о том, что равновесная предельная цена составляет $p_i^y(v, t) = \dfrac{w(t)}{q_{-i}(v, t)}$, а в последнем равенстве используются определения функций $q_i(v, t)$ и $q_{-i}(v, t)$ из уравнений (14.66) и (14.67). Из уравнения (14.69) также следует, что если фирмы обладают одинаковыми технологиями (идут нога в ногу), то операционная прибыль в отрасли равна нулю. Отстающие фирмы также имеют нулевую прибыль, так как их продажи равны нулю. Так как значение прибыли $\Pi(v, t)$ в уравнении (14.69) зависит только от выпуска $Y(t)$ и показателя технологического разрыва между фирмой-лидером и отстающей фирмой $n(v, t)$, обозначим его как $\Pi_n(t)$.

Столь простой вид функции прибыли (14.69) — это следствие из предположения о том, что агрегированная производственная функция является функцией Кобба—Дугласа (уравнение (14.59)), так как из него вытекает, что прибыль зависит только от технологического разрыва в отрасли и значения агрегированного выпуска. Это делает технологический разрыв в каждой отрасли единственной отраслевой переменной состояния, определяющей финансовые потоки фирм.

Задача каждой фирмы состоит в максимизации чистой приведенной дисконтированной стоимости своей чистой прибыли. Принимая решения, каждая фирма рассматривает траектории процентной ставки $[r(t)]_{t=0}^{\infty}$, агрегированного выпуска $[Y(t)]_{t=0}^{\infty}$, заработной платы $[w(t)]_{t=0}^{\infty}$, исследовательских расходов других фирм и параметров экономической политики как заданные величины. Заметим, что, так же как и в базовой шумпетерианской модели экономического роста из параграфа 14.1, несмотря на то что технология и выпуск в каждой отрасли имеют стохастическую структуру, общий выпуск $Y(t)$, заданный уравнением (14.59), представляет собой детерминистскую величину.

14.4.2. Равновесие

Введем функцию распределения уровня технологического разрыва по отраслям $\mu(t) \equiv \{\mu_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, где $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(t) = 1$. Например, переменная $\mu_0(t)$ будет обозначать долю отраслей, в которых фирмы идут нога в ногу в момент времени t. В дальнейшем анализе модели мы остановимся только на совершенном марковском равновесии (СМР), в котором стратегии являются функциями лишь переменных, непосредственно влияющих на выигрыши участников. В данном контексте понятие СМР является естественной концепцией равновесия, так как в нем запрещен неявный сговор между фирмой-лидером и отстающей фирмой (справку по понятию СМР и его более полное описание см. в приложении С). Несмотря на то что если в отрасли присутствует всего две фирмы, то сговор между ними вполне вероятен, большинство отраслей состоит из намного большего количества присутствующих фирм, а также возможных новых фирм, что значительно затрудняет сговор между ними. Упростив обозначение, мы опустим индекс v, определяющий отрасль, и обозначим исследовательские решения для фирмы-лидера, опережающей отстающую фирму на n шагов, как z_n, а для отстающей от лидера на n шагов фирмы — как z_{-n}. Весь набор решений фирмы-лидера и отстающей фирмы с технологическим разрывом, равным n, обозначим как $\xi_n(t) \equiv \langle z_n(t), p_i^y(v, t), y_i(v, t)\rangle$ и $\xi_{-n}(t) \equiv z_{-n}(t)$ соответственно. Функция ξ в дальнейшем обозначает всю последовательность решений в каждом состоянии $\xi(t) \equiv \{\xi_n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty} Y(t)$[9].

СМР в модели представляет собой набор траекторий

$$\left[\xi^*(t),\ w^*(t),\ r^*(t),\ Y^*(t)\right]_{t=0}^{\infty},$$

такой, что

1. Траектории $\left[p_i^{y*}(v, t)\right]_{t=0}^{\infty}$ и $\left[y_i^*(v, t)\right]_{t=0}^{\infty}$, определяемые $\left[\xi^*(t)\right]_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяют условиям (14.63) и (14.64).
2. Исследовательские решения $\left[z^*(t)\right]_{t=0}^{\infty}$ являются лучшими ответами на самих себя, то есть они максимизируют ожидаемую прибыль всех

[9] Здесь мы дважды злоупотребляем обозначениями. Во-первых, решения о ценообразовании и выпуске, заданные уравнениями (14.63) и (14.64), также зависят от агрегированного выпуска $Y(t)$. Однако из уравнения (14.69) следует, что прибыль и другие переменные выбора не зависят от $Y(t)$, и мы опускаем этот индекс без каких-либо последствий для анализа. Во-вторых, последовательности $\left[p_i^{y*}(v, t)\right]_{t=0}^{\infty}$ и $\left[y_i^*(v, t)\right]_{t=0}^{\infty}$ случайны, в то время как другие объекты анализа яввляются детерминистскими величинами. Так как стохастическая природа этих последовательностей не влияет на анализ, мы также ее опускаем.

фирм при заданных траекториях агрегированного выпуска $\left[Y^*(t)\right]_{t=0}^{\infty}$, цен факторов производства $\left[w^*(t), r^*(t)\right]_{t=0}^{\infty}$ и исследовательских решений других фирм $\left[z^*(t)\right]_{t=0}^{\infty}$.

3. Траектория агрегированного выпуска задана уравнением (14.59).
4. При заданных ценах факторов производства $\left[w^*(t), r^*(t)\right]_{t=0}^{\infty}$ рынки труда и капитала находятся в равновесии.

Далее опишем такое равновесие. Так как товары производятся только фирмой — технологическим лидером, спрос на труд в отрасли с технологическим разрывом $n(v, t) = n$ выражается следующим образом:

$$l_n(t) = \frac{\lambda^{-n}Y(t)}{w(t)} \text{ для } n \geq 0. \tag{14.70}$$

Более того, спрос на труд возникает в исследовательской деятельности, осуществляемой как фирмами-лидерами, так и отстающими фирмами. Используя уравнение (14.65) и определение функции $G(\cdot)$, мы можем представить спрос на труд в секторе НИОКР в отрасли с технологическим разрывом n так:

$$h_n(t) = G(z_n(t)) + G(z_{-n}(t)). \tag{14.71}$$

Тогда условие равновесия на рынке труда выглядит как

$$1 \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(t)\left(\frac{1}{\omega(t)\lambda^n} + G(z_n(t)) + G(z_{-n}(t))\right) \tag{14.72}$$

при условии дополнительной нежесткости $\omega_n(t) \geq 0$, где переменная $\omega(t)$, определенная как

$$\omega(t) \equiv \frac{w(t)}{Y(t)}, \tag{14.73}$$

представляет собой долю дохода труда в выпуске в момент времени t. В условии равновесия на рынке труда используется предположение о том, что предложение труда равно 1 и спрос не может превышать эту величину. Если спрос падает ниже единицы, то заработная плата w, и поэтому доля дохода труда в выпуске $\omega(t)$, становятся равными нулю (однако в равновесии такая ситуация практически невозможна).

Подходящий индекс среднего качества товаров в данной экономике уже не является средним арифметическим, а вслед за агрегатором Кобба—Дугласа в производственной функции (14.59) принимает следующий вид:

$$\log Q(t) \equiv \int_0^1 \log q(v, t)dv. \tag{14.74}$$

Из уравнения (14.74) следует, что равновесная заработная плата может быть записана как (см. упражнение 14.30)

$$w(t) = Q(t)\lambda^{-\sum_{n=0}^{\infty} n\mu_n(t)}. \qquad (14.75)$$

14.4.3. Стационарное равновесие

Далее остановимся на стационарном СМР, в котором функция распределения отраслей $\mu(t) \equiv \{\mu_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ является стационарной, переменная $\omega(t)$ определена уравнением (14.73) и темп роста экономики g^* является постоянной во времени величиной. Если в момент времени $t = 0$ экономика находится в стационарном состоянии, то по определению $Y(t) = Y_0 e^{g^* t}$ и $w(t) = w_0 e^{g^* t}$. Из двух этих уравнений также следует, что $\omega(t) = \omega^*$ для всех $t \geq 0$.

Из стандартных рассуждений следует, что стоимость фирмы-лидера, находящейся на n шагов впереди (когда отстающая фирма выбирает $z_{-n}^*(t)$), определяется следующим уравнением:

$$r(t)V_n(t) - \dot{V}_n(t) = \max_{z_n(t)}\{[\Pi_n(t) - w^*(t)G(z_n(t))] +$$
$$+ z_n(t)[V_{n+1}(t) - V_n(t)] + [z_{-n}^*(t) + \kappa][V_0(t) - V_n(t)]\}. \qquad (14.76)$$

В стационарном равновесии чистая приведенная стоимость фирмы, находящейся на n шагов впереди $V_n(t)$, также растет с постоянным темпом g^* для всех $n \geq 0$. Введем нормализованные переменные следующим образом:

$$\upsilon_n(t) = \frac{V_n(t)}{Y(t)} \qquad (14.77)$$

для всех n. В стационарном равновесии они не будут зависеть от времени, то есть $\upsilon_n(t) = \upsilon_n$.

Используя уравнение (14.77) и наблюдение о том, что из уравнения (14.58) следует равенство $r(t) = g(t) + \rho$, получаем следующее уравнение для функции стоимости из уравнения (14.76) в стационарном равновесии:

$$\rho\upsilon_n = \max_{z_n}\{(1-\lambda^{-n}) - \omega^* G(z_n) + z_n[\upsilon_{n+1} - \upsilon_n] +$$
$$+ [z_{-n}^* + \kappa][\upsilon_0 - \upsilon_n]\} \quad \text{для всех} \quad n \geq 1, \qquad (14.78)$$

где z_{-n}^* является равновесным значением исследований для фирмы, отстающей от лидера на n шагов, ω^* — равновесным значением доли дохода труда в выпуске (а значение z_n выбирается явным образом для максимизации стоимости υ_n).

Аналогично стоимость фирм, идущих нога в ногу, определяется следующей задачей максимизации:

$$\rho\upsilon_0 = \max_{z_0}\{-\omega^* G(z_0) + z_0[\upsilon_1 - \upsilon_0] + z_0^*[\upsilon_{-1} - \upsilon_0]\}, \tag{14.79}$$

где стоимость отстающей фирмы не зависит от того, на сколько шагов она отстает от фирмы-лидера (потому что единственная инновация оказывается достаточной, чтобы ее догнать) и определяется как

$$\rho\upsilon_{-1} = \max_{z_{-1}}\{-\omega^* G(z_{-1}) + [z_{-1} + \kappa][\upsilon_0 - \upsilon_{-1}]\}. \tag{14.80}$$

Из задачи максимизации функции стоимости непосредственно вытекает следующий вид решения для исследовательских решений, максимизирующих прибыль фирмы:

$$z_n^* = \max\left\{G'^{-1}\left(\frac{[\upsilon_{n+1} - \upsilon_n]}{\omega^*}\right),\ 0\right\}, \tag{14.81}$$

$$z_{-1}^* = \max\left\{G'^{-1}\left(\frac{[\upsilon_0 - \upsilon_{-1}]}{\omega^*}\right),\ 0\right\}, \tag{14.82}$$

$$z_0^* = \max\left\{G'^{-1}\left(\frac{[\upsilon_1 - \upsilon_0]}{\omega^*}\right),\ 0\right\}, \tag{14.83}$$

где значение z_{-1}^* обозначает исследовательские решения всех отстающих фирм, а функция $G'^{-1}(\cdot)$ является функцией, обратной к производной функции $G(\cdot)$. Так как функция $G(\cdot)$ дважды дифференцируема и вогнута, функция $G'^{-1}(\cdot)$ является дифференцируемой и строго возрастающей. Из этих уравнений следует, что темпы инноваций z_n^* возрастают по приращению стоимости фирмы от перехода на следующий уровень технологий и убывают по издержкам осуществления инновации, измеряемым нормализованным значением заработной платы ω^*. Также заметим, что из того, что $G'(0) > 0$ следует, что уровень исследовательской активности может оказаться равным нулю, поэтому в уравнениях (14.81)–(14.83) использован оператор максимума.

Зависимость темпа осуществления инноваций z_n^* от приращения стоимости $\upsilon_{n+1} - \upsilon_n$ является ключевым экономическим механизмом модели. Например, экономическая политика, которая снижает патентную защищенность фирмы-лидера, находящейся на $n + 1$ шагов впереди (увеличение значения параметра κ), ведет к снижению прибыли этой фирмы и поэтому к снижению $\upsilon_{n+1} - \upsilon_n$ и z_n^*. Это соответствует стандартному *эффекту снижения инновационных стимулов* при смягчении защиты ПИС. Однако смягчение защиты ПИС также создает благоприятный *эффект композиции*:

из того, что последовательность приращений стоимости $\{\upsilon_{n+1}-\upsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ является убывающей, следует, что для всех $n \geq 1$ значение z_{n-1}^* превышает значение z_n^* (см. утверждение 14.9 ниже). Ослабление патентной защиты (например, сокращение времени действия патента) ведет к увеличению доли отраслей с идущими нога в ногу фирмами и возможному увеличению равновесного значения уровня исследовательской активности в экономике.

При заданных значениях уровня исследовательской активности стационарное распределение отраслей по состояниям μ^* определяется следующими бухгалтерскими тождествами:

$$\left(z_{n+1}^* + z_{-1}^* + \kappa\right)\mu_{n+1}^* = z_n^* \mu_n^* \text{ при } n \geq 1, \tag{14.84}$$

$$\left(z_1^* + z_{-1}^* + \kappa\right)\mu_1^* = 2z_0^*\mu_0^*, \tag{14.85}$$

$$2z_0^*\mu_0^* = z_{-1}^* + \kappa. \tag{14.86}$$

В первом уравнении выход из состояния $n + 1$ (который происходит, когда фирма-лидер переходит на следующую ступень или когда отстающая фирма догоняет лидера) приравнивается ко входу в это состояние (который происходит, когда фирма-лидер, находящаяся на n шагов впереди, осуществляет еще одну инновацию). Уравнение (14.85) представляет собой аналогичные вычисления для состояния 1, принимая во внимание то, что вход в такое состояние происходит, когда одна их фирм, идущих нога в ногу, осуществляет инновацию. Наконец, в уравнении (14.86) выход из состояния 0 приравнивается ко входу в это состояние, который происходит, когда отстающая фирма осуществляет инновацию в отрасли с $n \geq 1$.

Условие равновесия на рынке труда в стационарном состоянии имеет следующий вид:

$$1 \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^* \left(\frac{1}{\omega^* \lambda^n} + G\left(z_n^*\right) + G(z_{-n}^*) \right) \tag{14.87}$$

с условием дополнительной нежесткости вида:

$$\omega^* \geq 0.$$

Следующее утверждение описывает стационарный темп роста данной экономики.

Утверждение 14.7. *Темп роста вышеописанной экономики в стационарном состоянии задается следующим уравнением:*

$$g^* = \log\lambda \left(2\mu_0^* z_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^* z_n^* \right). \tag{14.88}$$

Доказательство. Из уравнений (14.73) и (14.75) вытекает следующее равенство:

$$Y(t)=\frac{w(t)}{\omega(t)}=\frac{Q(t)\lambda^{-\sum_{n=0}^{\infty}n\mu_n^*}}{\omega(t)}.$$

Из того, что $\omega(t)=\omega^*$ и значения $\left\{\mu_n^*\right\}$ в стационарном состоянии являются постоянными величинами, следует, что $Y(t)$ растет с тем же темпом, что и $Q(t)$. Поэтому

$$g^*=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\log Q(t+\Delta t)-\log Q(t)}{\Delta t}.$$

В течение интервала времени Δt в доле отраслей μ_n^* с технологическим разрывом $n\geq 1$ фирмы-лидеры осуществляют инновации с темпом $z_n^*\Delta t+o(\Delta t)$, а в доле отраслей μ_0^* с технологическим разрывом $n=0$ инновации осуществляются обеими фирмами и поэтому общий темп осуществления инноваций в отрасли составляет $2z_0^*\Delta t+o(\Delta t)$. Предыдущее уравнение тогда следует из того, что каждая инновация ведет к росту производительности в λ раз. Объединяя эти наблюдения, имеем следующее равенство:

$$\log Q(t+\Delta t)=\log Q(t)+\log\lambda\left(2\mu_0^*z_0^*\Delta t+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^*z_n^*\Delta t+o(\Delta t)\right).$$

Вычитая из обеих частей этого уравнения $\log Q(t)$, деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получаем уравнение (14.88). ■

В этом утверждении показано, что стационарный рост экономики имеет два источника: (1) исследовательская деятельность фирм-лидеров и фирм, идущих нога в ногу, и (2) распределение отраслей по различным уровням технологического разрыва $\mu^*\equiv\left\{\mu_n\right\}_{n=0}^{\infty}$. Второй источник связан с эффектом композиции, описанным выше. Присутствие эффекта композиции приводит к тому, что связь между конкурентностью экономики и экономическим ростом (или связь между степенью защиты ПИС и экономическим ростом) в этой модели является более сложной, чем в моделях, рассмотренных ранее, так как в данном случае изменения в экономической политике ведут к эндогенным изменениям равновесной рыночной структуры (распределения отраслей по уровню технологического разрыва).

Стационарное равновесие описывается набором $\langle\mu^*,\mathbf{v},\mathbf{z}^*,\omega^*,g^*\rangle$ таким, что распределение отраслей μ^* удовлетворяет условиям (14.84), (14.85) и (14.86), значения $\mathbf{v}=\left\{\upsilon_n\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяют условиям (14.78), (14.79) и (14.80), исследовательские решения $\mathbf{z}^*$ заданы условиями (14.81), (14.82) и (14.83), доля дохода труда в выпуске в стационарном состоянии ω^* удовлетворяет условию (14.87) и темп роста экономики в стационарном состоянии g^* задан условием (14.88). Далее мы приведем описание стационарного равновесия. Первое утверждение является техническим результатом, необходимым для этого описания.

Утверждение 14.8. *В стационарном равновесии выполняется неравенство* $\upsilon_{-1} \le \upsilon_0$, *и последовательность* $\{\upsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ограничена строго возрастающей последовательностью, сходящейся к некоторому положительному значению* υ_∞. *Более того, существует* $n^* \ge 1$, *такое, что* $z_n^* = 0$ *для всех* $n \ge n^*$.

Доказательство. Обозначим исследовательские решения фирм как $\{z_n\}_{n=-1}^{\infty}$, а последовательность стоимостей фирм при заданных решениях других фирм и распределении отраслей $\{z_n^*\}_{n=-1}^{\infty}$, $\{\mu_n^*\}_{n=-1}^{\infty}$, ω^*, g^* как $\{\upsilon_n\}_{n=-1}^{\infty}$. Выбирая $z_n = 0$ при всех $n \ge -1$, фирма имеет $\upsilon_n \ge 0$ при всех $n \ge -1$. Обозначим нормализованную потоковую прибыль в отрасли с технологическим разрывом, равным n, как π_n. Тогда из того, что $\pi_n \le 1$ для всех $n \ge -1$, и $\upsilon_n \le 1/\rho$ для всех $n \ge -1$ следует, что последовательность $\{\upsilon_n\}_{n=-1}^{\infty}$ является ограниченной и $\upsilon_n \in [0, 1/\rho]$ при всех $n \ge -1$.

Доказательство неравенства $\upsilon_1 > \upsilon_0$. Предположим, что $\upsilon_1 \le \upsilon_0$. Тогда из условия (14.83) следует, что $z_0^* = 0$, и из симметрии задачи в равновесии и из уравнения (14.79) следует, что $\upsilon_0 = \upsilon_1 = 0$. В результате из уравнения (14.82) получаем, что $z_{-1}^* = 0$. Тогда из уравнения (14.78) получаем $z_{-1}^* = 0$ и $\upsilon_1 \ge (1 - \lambda^{-1})/(\rho + \kappa)$. Таким образом, получаем противоречие с $\upsilon_1 = 0$, что доказывает неравенство $\upsilon_1 > \upsilon_0$.

Доказательство неравенства $\upsilon_{-1} \le \upsilon_0$. Чтобы получить противоречие, предположим, что $\upsilon_{-1} > \upsilon_0$. Тогда из условия (14.82) следует, что $z_{-1}^* = 0$, откуда получаем равенство $\upsilon_{-1} = \kappa\upsilon_0/(\rho + \kappa)$. Это равенство противоречит предположению о том, что $\upsilon_{-1} > \upsilon_0$, так как $\kappa/(\rho + \kappa) < 1$ (при $\kappa < \infty$).

Доказательство неравенства $\upsilon_n < \upsilon_{n+1}$. Чтобы получить противоречие, предположим, что $\upsilon_n \ge \upsilon_{n+1}$. Тогда из условия (14.82) следует, что $z_n^* = 0$ и уравнение (14.78) принимает следующий вид:

$$\rho\upsilon_n = (1 - \lambda^{-n}) + z_{-1}^*[\upsilon_0 - \upsilon_n] + \kappa[\upsilon_0 - \upsilon_n].$$

Также из уравнения (14.78) следует, что стоимость фирмы в состоянии $n + 1$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\rho\upsilon_{n+1} \ge (1 - \lambda^{-n-1}) + z_{-1}^*[\upsilon_0 - \upsilon_{n+1}] + \kappa[\upsilon_0 - \upsilon_{n+1}].$$

Объединяя два предыдущих выражения, имеем следующее неравенство:

$$(1-\lambda^{-n})+z_{-1}^{*}[\upsilon_0-\upsilon_n]+\kappa[\upsilon_0-\upsilon_n]\geq$$
$$\geq 1-\lambda^{-n-1}+z_{-1}^{*}[\upsilon_0-\upsilon_{n+1}]+\kappa[\upsilon_0-\upsilon_{n+1}].$$

Тогда из того, что $\lambda^{-n-1}<\lambda^{-n}$ следует, что $\upsilon_n<\upsilon_{n+1}$, а это противоречит предположению, что $\upsilon_n\geq\upsilon_{n+1}$, и завершает доказательство неравенства $\upsilon_n<\upsilon_{n+1}$.

Таким образом, последовательность $\{\upsilon_n\}_{n=-1}^{\infty}$ является неубывающей, а последовательность $\{\upsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ — строго возрастающей. Так как неубывающая последовательность на компактном множестве имеет предел, последовательность $\{\upsilon_n\}_{n=-1}^{\infty}$ сходится к некоторому строго положительному значению υ_∞ (это следует из того, что последовательность $\{\upsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ является строго возрастающей и имеет неотрицательное начальное значение). Доказательство утверждения завершается в упражнении 14.31, где показано, что существует $n^*\geq 1$, такое, что $z_n^*=0$ для всех $n\geq n^*$. ■

В следующем утверждении представлен наиболее важный экономический результат этой модели и показано, что последовательность $\mathbf{z}^*\equiv\{z_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ является убывающей. Фирма — технологический лидер, имеющая больший технологический отрыв, осуществляет меньше исследовательской деятельности. На интуитивном уровне, выгода от дальнейших инвестиций в исследования убывает при увеличении технологического отрыва, так как оно приводит к меньшему приросту наценки монополиста и его прибыли (см. уравнение 14.69). Факт того, что фирма-лидер, находящаяся достаточно далеко от своих конкурентов на технологической лестнице, осуществляет малое количество исследований, является основной причиной, по которой эффект композиции играет важную роль в этой модели. Например, при прочих равных условиях сокращение технологического разрыва между фирмой-лидером и отстающей фирмой ведет к увеличению расходов на исследовательскую деятельность в экономике и темпа ее роста.

Утверждение 14.9. *В любом стационарном равновесии при всех $n\geq 1$ выполняется неравенство $z_{n+1}^*\leq z_n^*$. При этом если $z_n^*>0$, то $z_{n+1}^*<z_n^*$. Более того, $z_0^*>z_1^*$ и $z_0^*\geq z_{-1}^*$.*

Доказательство. Из условия (14.81) следует, что проверка неравенства

$$\delta_{n+1}\equiv\upsilon_{n+1}-\upsilon_n<\upsilon_n-\upsilon_{n-1}\equiv\delta_n \tag{14.89}$$

достаточна для доказательства неравенства $z^*_{n+1} \le z^*_n$. Рассмотрим следующую задачу максимизации:

$$\bar{\rho}\upsilon_n = \max_{z_n}\{(1-\lambda^{-n}) - \omega^* G(z_n) + z_n[\upsilon_{n+1} - \upsilon_n] + (z^*_{-1} + \kappa)\upsilon_0\}, \qquad (14.90)$$

где $\bar{\rho} \equiv \rho + z^*_{-1} + \kappa$. Так как значения функций стоимости υ_{n+1}, υ_n и υ_{n-1} достигают максимума на z^*_{n+1}, z^*_n и z^*_{n-1} соответственно, из уравнения (14.90) вытекают следующие уравнения и неравенства:

$$\bar{\rho}\upsilon_{n+1} = 1 - \lambda^{-n-1} - \omega^* G(z^*_{n+1}) + z^*_{n+1}[\upsilon_{n+2} - \upsilon_{n+1}] + (z^*_{-1} + \kappa)\upsilon_0,$$

$$\bar{\rho}\upsilon_n \ge 1 - \lambda^{-n} - \omega^* G(z^*_{n+1}) + z^*_{n+1}[\upsilon_{n+1} - \upsilon_n] + (z^*_{-1} + \kappa)\upsilon_0, \qquad (14.91)$$

$$\bar{\rho}\upsilon_n \ge 1 - \lambda^{-n} - \omega^* G(z^*_{n-1}) + z^*_{n-1}[\upsilon_{n+1} - \upsilon_n] + (z^*_{-1} + \kappa)\upsilon_0,$$

$$\bar{\rho}\upsilon_{n+1} = 1 - \lambda^{-n+1} - \omega^* G(z^*_{n-1}) + z^*_{n-1}[\upsilon_n - \upsilon_{n-1}] + (z^*_{-1} + \kappa)\upsilon_0,$$

Далее, вычитая $\bar{\rho}\upsilon_n$ и используя определение δ_n, получаем следующие неравенства:

$$\bar{\rho}\delta_{n+1} \le \lambda^{-n}(1-\lambda^{-1}) + z^*_{n+1}(\delta_{n+2} - \delta_{n+1}),$$

$$\bar{\rho}\delta_n \ge \lambda^{-n+1}(1-\lambda^{-1}) + z^*_{n-1}(\delta_{n+1} - \delta_n).$$

Следовательно, имеем неравенство:

$$(\bar{\rho} + z^*_{n-1})(\delta_{n+1} - \delta_n) \le -k_n + z^*_{n+1}(\delta_{n+2} - \delta_{n+1}),$$

где $k_n = (\lambda - 1)^2\lambda^{-n-1}$. Далее, для того чтобы получить противоречие, предположим, что $\delta_{n+1} - \delta_n \ge 0$. Тогда, так как значение k_n строго положительно, из предыдущего неравенства следует, что $\delta_{n+2} - \delta_{n+1} > 0$. Повторяя такие выкладки несколько раз, получаем, что если $\delta_{n'+1} - \delta_{n'} \ge 0$, то $\delta_{n+1} - \delta_n > 0$ для всех $n' \ge n$. Однако из утверждения 14.8 следует, что последовательность $\{\upsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ является строго возрастающей и сходится к вещественному υ_∞. Тогда при достаточно больших значениях n имеем $\delta_{n+1} - \delta_n < 0$ (при $\delta_n \uparrow 0$), что противоречит предположению о том, что $\delta_{n+1} - \delta_n \ge 0$ при всех $n \ge n' \ge 0$ и, таким образом, доказывает неравенство $z^*_{n+1} \le z^*_n$. Чтобы убедиться в том, что неравенство становится строгим при $z^*_n > 0$, достаточно заметить, что неравенство (14.89) уже доказано, то есть $\delta_{n+1} - \delta_n < 0$. Тогда, если значение z^*_n в уравнении (14.81) положительно, то выполняется строгое неравенство $z^*_{n+1} < z^*_n$.

Доказательство неравенства $z_0^* \geq z_{-1}^*$. Выпишем уравнение (14.79) в следующем виде:

$$\bar{\rho}\upsilon_0 = -\omega^* G(z_0^*) + z_0^*[\upsilon_{-1} + \upsilon_1 - 2\upsilon_0]. \tag{14.92}$$

Из утверждения 14.8 имеем неравенство $\upsilon_0 \geq 0$. Предположим, что $\upsilon_0 > 0$. Тогда из уравнения (14.92) следует, что $z_0^* > 0$ и выполняется следующее неравенство:

$$\upsilon_{-1} + \upsilon_1 - 2\upsilon_0 > 0, \text{ или } \upsilon_1 - \upsilon_0 > \upsilon_0 - \upsilon_{-1}. \tag{14.93}$$

Объединяя это неравенство с уравнениями (14.83) и (14.82), получаем неравенство $z_0^* > z_{-1}^*$. Далее предположим, что $\upsilon_0 = 0$. Тогда неравенство (14.93) становится нестрогим и из него следует, что $z_0^* \geq z_{-1}^*$. Более того, так как функция $G(\cdot)$ строго вогнута, а значение z_0^* задается уравнением (14.83), из уравнения (14.92) следует, что $z_0^* = 0$, поэтому $z_{-1}^* = 0$.

Доказательство неравенства $z_0^* > z_1^*$. См. упражнение 14.32. ■

Следовательно, это утверждение говорит о том, что наибольший объем исследований проводится в отраслях с фирмами, идущими нога в ногу. Это объясняет, почему эффект композиции может привести к росту агрегированного количества инноваций. В упражнении 14.33 показано, каким образом ослабление защиты ПИС может привести к увеличению темпа роста экономики.

До сих пор мы не предъявили явный вид решения для темпа экономического роста в данной модели. В общем случае это не представляется возможным сделать в силу эндогенности рыночной структуры экономики в ней. При этом мы можем доказать, что в этой экономике существует стационарное равновесие, однако доказательство этого факта довольно сложно и не содержит дополнительной экономической интуиции (см. работу [Acemoglu, Akcigit 1986]).

Важное свойство модели состоит в том, что равновесное значение наценки на предельные издержки в ней является эндогенной величиной и изменяется во времени как функция от степени конкуренции между фирмами, работающими в одной отрасли. Более важным является то, что из утверждения 14.9 следует, что если некоторая фирма значительно опережает своего преследователя, то она проводит незначительный объем исследований. Следовательно, из данной модели, в отличие от базовой шумпетерианской модели экономического роста и от модели расширяющегося разнообразия, следует, что увеличение конкуренции в экономике (то есть сокращение технологического разрыва между фирмой-лидером и отстающей фирмой) может привести к увеличению темпа экономического роста. Это связано с тем, что в этом случае фирма-лидер начинает проводить больший объем исследований для того, чтобы избавиться от конкуренции с отстающей фирмой. Эта модель может быть расширена с помощью включения различных типов рыночной организации и барьеров к выходу на рынок, и в этом случае влияние конкурентности на экономический рост может быть как положительным, так и отрицательным.

14.5. Основные выводы

В этой главе представлена базовая шумпетерианская модель экономического роста. Шумпетерианский рост экономики основан на процессе созидательного разрушения, когда новые товары и машины замещают их старые модели, а новые фирмы вытесняют фирмы, присутствующие на рынке.

Основная модель описывает процесс инноваций, ведущих к улучшению качества товаров. Описание процесса экономического роста в этой модели во многих смыслах является более реалистичным, чем в моделях расширяющегося разнообразия. В частности, в ней технологический прогресс не всегда приводит к появлению новых товаров или машин, дополняющих уже существующие, а связан с появлением фирм, производящих товары лучшего качества и вытесняющих с рынка присутствующие на нем фирмы. Из эффекта вытеснения Эрроу, описанного в главе 12, следует, что новые фирмы обладают значительными стимулами к проведению исследований, так как новые товары с лучшим качеством вытесняют старые модели, и, таким образом, шумпетерианский процесс созидательного разрушения становится двигателем экономического роста. Несмотря на то что описание процесса экономического роста в этой модели оказывается богаче, ее математическая структура во многом схожа со структурой модели расширяющегося разнообразия. В своей сокращенной форме модель напоминает модель *AK*. Важное отличие этой модели заключается в том, что в ней стоимость инновации зависит от темпа роста экономики, так как он определяется скоростью замещения старых товаров новыми.

Важный вывод из шумпетерианских моделей состоит в том, что экономический рост зачастую происходит на фоне конфликта интересов различных агентов. Процесс созидательного разрушения нивелирует монопольную ренту присутствующих на рынке фирм. Это ведет к тому, что искажающая экономическая политика может возникать эндогенно как способ защиты ренты присутствующих на рынке фирм, обладающих значительной политической силой. Таким образом, в шумпетерианских моделях экономического роста естественным образом поднимаются вопросы политической экономии, центральные для нашего понимания фундаментальных причин экономического роста. Поэтому эти модели проливают свет как на эндогенность процесса технологического развития, так и на возможные причины препятствования технологическому прогрессу.

Шумпетерианские модели роста также являются связующим звеном между теорией экономического роста и теориями отраслевых рынков и инноваций. Из процесса созидательного разрушения следует, что рыночная структура экономики может развиваться во времени эндогенным образом. Несмотря на это, базовая шумпетерианская модель экономического роста обладает рядом недостатков и их исправление является важной задачей для дальнейших исследований. Важное несоответствие между базовыми моделями и эмпирическими данными состоит в том, что в моделях весь рост производительности происходит за счет созидательного разрушения и выхода на рынок новых фирм, в то время как в данных значительная его часть обусловлена инновациями присутствующих на рынке фирм и предприятий. Модель из параграфа 14.3 является первым знакомством с тем, каким образом базовая модель может быть расширена для того, чтобы учесть эти эмпирические результаты, и предоставляет более широкий аппарат для анализа отраслевой организации инновационной деятельности. Второй важный недостаток базовых моделей в том, что в них наценка монополиста на предельные издержки является постоянной величиной и поставка товара на весь рынок осуществляется единственной фирмой. Эти выводы также могут быть ослаблены с помощью некоторых расширений модели, например включением в нее кумулятивных или пошаговых инноваций и конкуренции между различными фирмами, ведущими инновационную деятельность. Такое расширение базовой модели представлено в параграфе 14.4. Возможно, наиболее интересный вывод состоит в том, что в моделях, включающих в себя различные аспекты отраслевой организации инновационной активности, влияние антимонопольной и патентной экономической политики на экономический рост потенциально оказывается более богатым. Отсюда следует, что такие расширения шумпетерианских моделей роста являются удобным аппаратом для анализа влияния на экономический рост различных мер экономической политики, включая антимонопольную, лицензионную и политику защиты ПИС.

14.6. Литература

Базовая шумпетерианская модель экономического роста, рассмотренная в параграфе 14.1, основана на работе [Aghion, Howitt 1992]. Схожие модели также представлены в работах: [Segerstrom, Anant, Dinopoulos 1990; Grossman and Helpman 1991 a, b]. Прекрасный обзор большого количества шумпетерианских моделей экономического роста и множества их расширений предложен в работе [Aghion, Howitt 1998]. Подход в оригинальной работе [Aghion, Howitt 1992] во многом схож с изложением в параграфе 14.2. В статье [Aghion, Howitt 1992] также исследуется вопрос неравномерности роста и возможного возникновения циклов экономического роста, анализ которого приведен в параграфе 14.2. В работе [Matsuyama 1999] показано, что неравномерный экономический рост и циклы также возникают и в других моделях эндогенного технологического прогресса. Так как экономические причины такой цикличности наиболее отчетливо заметны в шумпетерианских моделях экономического роста, мы остановились на возможности их появления лишь в контексте таких моделей.

Первый анализ влияния процесса созидательного разрушения на безработицу был предложен в работе [Aghion, Howitt 1994]. Анализ воздействия процесса созидательного разрушения на специфичные для фирмы инвестиции представлен в работах: [Francois, Roberts 2003; Martimort, Verdier 2004].

Модель из параграфа 14.3 основана на работе [Acemoglu 2008b] и является первой попыткой построения модели, в которой рост производительности обусловлен действиями и присутствующих на рынке фирм, и фирм-новичков. В работе [Klette, Kortum 2004] построена связанная с ней модель фирмы и агрегированной динамики инноваций, основанная на модели расширяющегося разнообразия товаров. В работе [Klepper 1996] представлен ряд эмпирических фактов о размере фирм, их выходе на рынок и уходе с рынка и инновациях.

Анализу пошаговых или кумулятивных инноваций посвящены работы: [Aghion, Harris, Vickers 1999; Aghion et al. 2001]. Модель, представленная в этой главе, является упрощенной версией модели из статьи [Acemoglu, Akcigit 2006]. Подробное обсуждение концепции совершенного марковского равновесия, использованной в параграфе 14.4, представлено в приложении С и в работе [Fudenberg, Tirole 1994].

Эмпирические свидетельства того, что усиление конкуренции может стимулировать экономический рост и технологический прогресс, читатель может найти в работах: [Nickell 1996; Blundell, Griffith, Van Reenen 1999; Aghion et al. 2005]. В последней работе показано, что в отраслях с меньшим технологическим разрывом между фирмами обычно происходит большее количество инноваций. В статьях [Aghion и др. 2001, 2005] показано, что в моделях пошаговых инноваций усиление конкуренции может привести к увеличению темпа роста экономики.

14.7. Упражнения

14.1. Докажите, что в базовой шумпетерианской модели экономического роста из параграфа 14.1 количество исследований для различных типов машин на ТСР должно равняться некоторому значению z^*. [Подсказка: используйте условие (14.14) вместе с уравнением (14.13).]

14.2. **(a)** Докажите, что в базовой шумпетерианской модели экономического роста из параграфа 14.1 все исследования проводятся новыми фирмами и никогда не проводятся присутствующими на рынке фирмами. [Подсказка: перепишите уравнение (14.13) в виде, допускающем выбор объема инвестиций в НИОКР.]

(b) Далее предположите, что потоковый темп успеха исследования для фирмы, присутствующей на рынке равен $\phi\eta/q$, а для новой фирмы — η/q. Покажите, что при любом значении $\phi \leq \lambda(\lambda - 1)$ присутствующая на рынке фирма не будет проводить исследования. Объясните это результат.

14.3. В базовых моделях эндогенных технологических изменений, включая шумпетерианские модели экономического роста, используется предположение о том, что новые товары защищены бессрочным патентом. Строго говоря, с точки зрения логики этих моделей такое предположение не является необходимым. Допустим, что ни одна из инноваций не защищена патентным законодательством, но копирование инновации сопряжено с фиксированными издержками, равными $\varepsilon > 0$. Понеся эти издержки, любая фирма получает доступ к технологии, доступной фирме-инноватору. Покажите, что в равновесии в такой модели копирований инноваций не производится и выполняются все результаты из модели с бессрочными патентами.

14.4. Завершите доказательство утверждения 14.1. В частности, убедитесь в единственности темпа роста экономики в равновесии, в том, что он составляет строго положительную величину, и в том, что выполняется условие трансверсальности (14.16).

14.5. Докажите утверждение 14.2.

14.6. Измените базовую модель из параграфа 14.1 таким образом, чтобы агрегированная производственная функция имела следующий вид:

$$Y(t)=\frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^1 q(\nu,\, t)x(\nu,\, t\,|\, q)^{1-\beta}d\nu\right)L^{\beta}.$$

Предположите, что все остальные предположения модели остаются неизменными. Покажите, что в ней не существует ТСР. Каким образом вы изменили бы модель для того, чтобы гарантировать существование ТСР в ней.

***14.7.** В базовой шумпетерианской модели экономического роста предположите, что производственная функция в секторе конечного товара вместо уравнения (14.3) имеет следующий вид:

$$Y(t)=\frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^1 q(\nu,\, t)^{\varsigma_1} x(\nu,\, t\,|\, q)^{1-\beta}d\nu\right)L^{\beta}.$$

Предположите, что издержки производства единицы промежуточного товара с качеством q составляют ψq^{ζ_2} и что расходование единицы конечного товара на исследовательскую деятельность для машин с качеством q генерирует инновацию с потоковым темпом, равным η/q^{ζ_3}. Опишите равновесие в такой экономике и определите при каких ограничениях на параметры ζ_1, ζ_2 и ζ_3 в ней существует ТСР.

14.8. **(a)** Убедитесь в том, что теорема 7.14 из главы 7 может быть применена для решения задачи оптимального роста в базовой шумпетерианской модели экономического роста из параграфа 14.1.

(b) Покажите, что решение этой задачи единственно. [Подсказка: используйте упражнение 8.11 из главы 8.]

(c) Выведите уравнение (14.27).

14.9. Покажите, что выполнение условия (14.5) достаточно для того, чтобы гарантировать, что фирма-инноватор устанавливает цену, при которой прибыль монополиста достигает своего глобального максимума. [Подсказка: Сначала предположите, что фирма-инноватор устанавливает на товар с качеством q цену, равную $\psi q/(1-\beta)$. Затем рассмотрите фирму, производящую товар со следующим значением качества, $\lambda^{-1}q$. Предположите, что цена этой фирмы равна ее предельным издержкам производства $\psi\lambda^{-1}q$. Найдите значение λ, при котором производителям конечного товара все равно, какую машину покупать: машину с качеством q по цене $\psi q(1-\beta)$ или машину с качеством $\lambda^{-1}q$ по цене $\psi\lambda^{-1}q$.]

14.10. Проведите анализ базовой шумпетерианской модели экономического роста в предположении о том, что условие (14.5) не выполняется.

(a) Покажите, что фирма-монополист устанавливает предельную цену.

(b) Опишите темп роста экономики на ТСР.

(c) Опишите оптимальное по Парето распределение ресурсов и сравните его с равновесием.

(d) Далее рассмотрите гипотетическую экономику, в которой производитель предыдущего товара наилучшего качества уходит с рынка и поэтому фирма-монополист вместо предельной цены устанавливает наценку на предельные издержки, равную $1/(1-\beta)$. Покажите, что темп роста экономики на ТСР в такой гипотетической экономике строго превышает темп роста, описанный вами в части (b). Объясните этот результат.

14.11. Предположите, что население экономики растет экспоненциально с постоянным темпом, равным n. Измените базовую модель из параграфа 14.1 таким образом, чтобы в ней отсутствовал эффект масштаба и экономика росла с постоянным темпом. [Подсказка: Предположите, что расходование единицы конечного товара на исследовательскую деятельность для машин с качеством q ведет к инновациям с потоковым темпом η/q^{ϕ}, где $\phi > 1$.]

***14.12.** Рассмотрите шумпетерианскую модель экономического роста, в которой x-сы не полностью выбывают после использования (по аналогии с упражнением 13.23 из предыдущей главы). Предпочтения домохозяйств и остальная технологическая структура модели совпадают с моделью из параграфа 14.1.

(a) Сформулируйте задачу максимизации для фирмы-монополиста, производящей товары наилучшего качества и определите равновесие и ТСР.

(b) Покажите, что в отличие от упражнения 13.23 свойства этой модели отличаются от свойств модели из параграфа 14.1. Объясните, почему динамика амортизации машин была нам не важна в модели расширяющегося разнообразия, но становится важной в шумпетерианской модели экономического роста.

14.13. Рассмотрите вариант шумпетерианской модели экономического роста, в которой инновации ведут к сокращению издержек производства, а не к улучшению качества товаров. В частности, предположите, что агрегированная производственная функция имеет следующий вид:

$$Y(t)=\frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^1 x(v,\,t)^{1-\beta}dv\right)L^{\beta},$$

а предельные издержки производства машин типа v в момент времени t заданы функцией $MC(v,\,t)$. Каждая инновация ведет к снижению предельных издержек в λ раз.

(a) Определите равновесие и ТСР в такой экономике.

(b) Опишите вид границы инновационных возможностей, допускающей существование ТСР.

(c) Опишите ТСР в этой экономике и покажите, что в ней отсутствует переходная динамика.

(d) Сравните ТСР с оптимальным по Парето распределением ресурсов в этой экономике. Возможны ли в ней избыточные инновации?

14.14. Рассмотрите модель из параграфа 14.2, в которой исследовательская деятельность осуществляется работниками. Предположите, что агрегированная производственная функция для конечного товара имеет следующий вид:

$$Y(t)=\frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^1 q(v,\,t)x(v,\,t\,|\,q)^{1-\beta}dv\right)L_E(t)^{\beta},$$

где переменная $L_E(t)$ обозначает количество работников, занятых в секторе производства конечного товара в момент времени t.

(a) Покажите, что в этом случае исследования будут проводиться только для машин с наилучшим качеством $q(v, t)$.

(b) Каким образом вы изменили бы модель для того, чтобы в равновесии исследовательская деятельность была распределена между секторами?

14.15. Рассмотрите шумпетерианскую модель экономического роста из параграфа 14.1 с единственным отличием: инновация, в случае успеха, приводит к улучшению технологии, являющемуся случайной величиной λ с функцией распределения $H(\lambda)$ и носителем $[(1-\beta)^{-(1-\beta)/\beta}, \bar{\lambda}]$.

(a) Определите и опишите ТСР экономики в такой модели.

(b) Почему значение левого конца отрезка носителя случайной величины λ выбрано равным $(1 - \beta)^{-(1-\beta)/\beta}$? Как бы изменился ваш анализ, если бы это предположение было ослаблено?

(c) Покажите, что в этой экономике в равновесии отсутствует переходная динамика.

(d) Сравните ТСР с оптимальным по Парето распределением ресурсов в этой экономике. Возможны ли в ней избыточные инновации?

14.16. В модели из параграфа 14.2 покажите, что экономика не демонстрирует рост в течение интервалов времени со средней длиной, равной $1/(\eta L_R^*)$.

14.17. **(a)** Докажите утверждение 14.4, в частности убедитесь в том, что описанное в нем распределение ресурсов единственно, средний темп роста экономики задан равенством $g^* = \log\lambda\eta L_R^*$ и условие (14.30) является необходимым и достаточным условием существования равновесия, описанного в этом утверждении.

(b) Объясните, почему в уравнении для темпа роста экономики присутствует $\log\lambda$, а не $\lambda - 1$, как в модели из параграфа 14.1.

14.18. Рассмотрите односекторную шумпетерианскую модель экономического роста в дискретном времени. Как и в модели из параграфа 14.2, предположите, что домохозяйства являются нейтральными к риску, население экономики постоянно во времени и производственная функция в секторе конечного товара задана уравнением (14.28). Производственная технология в секторе промежуточных товаров линейна и предельные издержки производства любого промежуточного товара (уже изобретенного на данный момент времени) составляют ψ единиц конечного товара. Также предположите, что исследовательская технология в экономике устроена так, что занятость $L_R > 0$ работников в секторе НИОКР в периоде t

обязательно приводит к инновации в периоде $t+1$ и качество (размер) инновации определяется лишь количеством работников в секторе НИОКР посредством функции $\Lambda(L_R)$. То есть если качество машин в периоде t равно q, то в следующем периоде времени $t+1$ оно составляет $q' = \Lambda(L_R)q$. Предположите, что инновации происходят только если $L_R > 0$ и что функция $\lambda(\cdot)$ является строго возрастающей, дифференцируемой, строго вогнутой и удовлетворяет соответствующим условиям Инада.

(a) Опишите ТСР экономики и найдите ограничения на параметры модели, при которых выполняется условие трансверсальности. [Подсказка: чтобы упростить математические выкладки, предположите, что, после того как изобретен новый тип машин, старые машины перестают использоваться и, таким образом, в экономике отсутствует предельное ценообразование.]

(b) Сравните ТСР с оптимальным по Парето распределением ресурсов. Покажите, что размер инновации на ТСР всегда недостаточен по сравнению с размером инновации в оптимальном по Парето распределении ресурсов.

***14.19.** Рассмотрите односекторную шумпетерианскую модель экономического роста в дискретном времени из предыдущего упражнения. Предположите, что теперь функция $\Lambda(\cdot)$ обозначает вероятность осуществления инновации и что каждая инновация ведет к улучшению качества машины q до λq, где $\lambda > 1$. Также предположите, что, когда происходит новая инновация, доля φ работников, занятых в секторе производства конечного товара оказывается не способной пользоваться новой технологией и эти работники становятся безработными в течение одного периода.

(a) Определите равновесие и стационарное распределение ресурсов (ТСР) в такой экономике. [Подсказка: используйте в определении количество безработных в равновесии.]

(b) Определите подходящее обобщение понятия стационарного равновесия в такой экономике и найдите количество безработных в таком равновесии.

(c) Покажите, что рынок труда описывается периодами роста безработицы с последующими периодами полной занятости.

(d) Покажите, что снижение параметра ρ ведет к увеличению темпа роста экономики и среднего значения безработицы в ней.

***14.20.** Выведите уравнения (14.31)–(14.32).

***14.21.** Рассмотрите модель, описанную в подпараграфе 14.2.2.

(a) Выберите вид функции $\eta(\cdot)$, такой, что уравнения имеют решение L_R^1 и $L_R^2 \neq L_R^1$. Объясните, почему, в случае когда такое решение существует, в экономике наблюдается равновесие с двухпериодными экономическими циклами.

(b) Покажите, что, даже если такое решение существует, в экономике также существует и стационарное равновесие, в котором объем исследований является постоянной величиной.

(c) Покажите, что если такого решения не существует, то в экономике существует равновесие с осциллирующей переходной динамикой, сходящейся к стационарному равновесию, описанному вами в части (b).

***14.22.** Покажите, что качественные результаты модели из подпараграфа 14.2.2 возможно обобщить для случая, когда исследования осуществляются только одной фирмой, которая в этом случае принимает во внимание влияние переменной L_R на значение функции $\eta(L_R)$.

***14.23.** В этом упражнении приведена схема доказательства утверждения 14.5.

(a) Заметьте, что на внутренней ТСР, где выполняется равенство $\phi(V(v, t \mid \lambda q) - V(v, t \mid q)) = q$ функция V линейна по аргументу q и поэтому $V(v, t \mid q) = \upsilon q$, что мы использовали в тексте главы. Из этого наблюдения покажите, что значение $\hat{z}^*$ определяется уравнением (14.45) единственным образом и является строго положительным, а уравнение (14.48) задает единственное значение темпа роста экономики, который также является строго положительным. Наконец, покажите, что если выполняются неравенства (14.53), то выполняется условие трансверсальности (14.16).

(b) Далее покажите, что внутренняя ТСР из части (a) также задает единственную динамическую равновесную траекторию экономики. Во-первых, покажите, что если выполняется условие (14.53), то функция $V(v, t \mid q)$ всюду линейна по q и поэтому имеет вид $V(v, t \mid q) = \upsilon(t)q$ при некоторой функции $\upsilon(t)$. Следовательно, из условия (14.53) следует, что $\phi(\lambda - 1)\upsilon(t) = 1$ для всех t. Продифференцируйте это уравнение по времени и покажите, что неравенство (14.41) выполняется как равенство, то есть $\eta(\hat{z}(v, t \mid \kappa^{-1}q))\upsilon(t) = 1$ для всех t. Отсюда сделайте вывод о том, что $r(t)\upsilon = \beta L - \hat{z}\eta(\hat{z})\upsilon$ для всех t и поэтому все переменные моментально принимают свое значение на ТСР, то есть $r(t) = r^*$ и $\hat{z}(t) = \hat{z}^*$ для всех t.

Во-вторых, приведите набросок доказательства для случая если уравнение (14.43) не выполняется для некоторых $v \in \mathcal{N} \subset [0, 1]$, q и t. [Подсказка: используйте уравнение (14.40) для того, чтобы вывести дифференциальное уравнение для функции $\hat{z}(v, t \mid q)$

и покажите, что единственным автономным решением этого уравнения является ТСР, описанная выше, и это автономное решение является неустойчивым.]

14.24. Предположите, что в модели из параграфа 14.3 присутствующие на рынке фирмы также как и фирмы-новички, имеют доступ к технологии радикальных инноваций. Покажите, что в такой модели не существует равновесия, в котором присутствующие на рынке фирмы проводят положительный объем исследований при такой технологии.

14.25. Выпишите задачу общественного планировщика (максимизирующего целевую функцию репрезентативного домохозяйства) в модели из параграфа 14.3.

(a) Покажите, что текущий гамильтониан этой задачи максимизации является вогнутой функцией, и найдите единственное решение этой задачи. Покажите, что в этом решении потребление репрезентативного домохозяйства растет с постоянным темпом во все моменты времени.

(b) Покажите, что общественный планировщик может выбрать более высокий темп роста экономики, так как на оптимальной траектории в цене машины отсутствует наценка монополиста. С другой стороны, он может выбрать меньшее количество новых фирм из-за присутствия отрицательной экстерналии в исследовательской деятельности. Приведите численные примеры, в которых темп роста экономики в оптимальном по Парето распределении ресурсов оказывается выше или ниже темпа роста в децентрализованном равновесии.

14.26. Рассмотрите модель из параграфа 14.3 и предположите, что технология в секторе НИОКР для присутствующей на рынке фирмы устроена таким образом, что если такая фирма, производящая машины с качеством q, несет расходы zq на шаговую инновацию, то потоковый темп осуществления инновации равен $\phi(z)$ (и, как и ранее, такая инновации ведет к улучшению качества машин этой фирмы до λq). Предположите, что функция $\phi(z)$ является строго возрастающей, строго вогнутой, дифференцируемой и удовлетворяет условиям $\lim_{z\to 0}\phi'(z)=\infty$ и $\lim_{z\to\infty}\phi'(z)=0$.

(a) Остановитесь на стационарном равновесии (ТСР) и предположите, что функция $V(\cdot)$имеет вид $V(q)=\upsilon q$. Используя это предположение, покажите, что присутствующая на рынке фирма выбирает значение исследовательской активности z^*, такое, что $(\lambda-1)\upsilon=\phi'(z^*)$. Объедините это уравнение с условием свободного входа на рынок исследований для новых фирм и уравнением для темпа роста экономики (14.52) и покажите, что в модели существует единственная равновесная ТСР (в предположении о том, что функция $V(\cdot)$ является линейной).

(b) Существует ли в модели равновесие, в котором значения z для присутствующих на рынке фирм с машинами различного качества отличаются друг от друга?

(c) В свете вашего ответа на вопрос из части (b) опишите равновесие в предельном варианте модели, где $\phi(z) = \text{const}$.

(d) Покажите, что в этом равновесии исследования проводятся как присутствующими на рынке фирмами, так и фирмами-новичками.

(e) Введите в модель налогообложение исследовательских расходов присутствующих на рынке фирм и фирм-новичков по налоговым ставкам τ_i и τ_e соответственно. Покажите, что в отличие от результата из утверждения 14.6 в этом случае влияние обоих типов налога на темп роста экономики неоднозначно. Что произойдет, если $\eta(z) = \text{const}$?

***14.27.** Докажите утверждение 14.5 для случая, когда значения $z(v, t \mid q)$ различаются для присутствующих на рынке фирм с различными значениями q. Покажите, что в этом случае ТСР совпадает с ТСР из утверждения 14.5 и она по существу является единственной в том смысле, что среднее значение исследовательской активности присутствующей на рынке фирмы всегда равно z^*.

***14.28.** Рассмотрите модель из параграфа 14.3, изменив производственную функцию следующим образом:

$$Y(t) = \left[\int_0^1 q(v, t)x(v, t \mid q)^{1-\beta} dv\right] L^{\beta}/(1-\beta).$$

Предположите, как и в базовой модели из параграфа 14.1, что производство промежуточного товара с качеством q требует ψq единиц конечного товара. Покажите, что темп роста экономики и распределение вкладов присутствующих на рынке и новых фирм в рост технологии совпадает с результатом из параграфа 14.3, однако в этом случае размер фирмы остается неизменным во времени. Объясните почему. Изменяется ли прибыль фирмы? Как выглядит динамика распределения прибыли между фирмами?

***14.29.** Выведите уравнение (14.63).

***14.30.** Выведите уравнение (14.75). [Подсказка: запишите уравнение

$$\log Y(t) = \int_0^1 \log q(v, t) l(v, t) dv \int_0^1 \left[\log q(v, t) + \log \frac{Y(t)}{w(t)} \lambda^{-n(v)}\right] dv$$

и преобразуйте его.]

14.31. Завершите доказательство утверждения 14.8. В частности, покажите, что существует $n^* \geq 1$, такое, что $z_n^* = 0$ для всех $n \geq n^*$.

14.32. Завершите доказательство утверждения 14.9. В частности, докажите, что $z_0^* > z_1^*$. [Подсказка: используйте рассуждения схожие с рассуждениями из первой части доказательства.]

14.33. Рассмотрите стационарное равновесие в модели из параграфа 14.4. Предположите, что $\kappa = 0$ и $G'(0) < (1 - \lambda)/\rho$. Положите $z^* \equiv G'^{-1} \times$ $\times ((1 - \lambda)/\rho)$ и также предположите, что выполняется следующее неравенство:

$$G'(0) < \frac{z^*(1-\lambda)/\rho + G(z^*)}{\rho + z^*}.$$

(a) Покажите, что в этом случае темп роста экономики в стационарном равновесии равен нулю.

(b) Покажите, что если $\kappa > 0$, то темп роста экономики становится положительным. Проинтерпретируйте этот результат и сравните его с отрицательным влиянием на рост ослабления защиты ПИС в базовой шумпетерианской модели экономического роста.

***14.34.** Измените модель, представленную в параграфе 14.4 таким образом, что отстающие фирмы имеют возможность использовать инновацию технологического лидера и моментально его догнать, однако для этого они должны заплатить лидеру стоимость лицензии ζ.

(a) Опишите ТСР в такой модели.

(b) Выпишите уравнение для функции стоимости.

(c) Объясните, почему в этом случае лицензирование может привести к увеличению темпа роста экономики и сравните ваш вывод с результатом из утверждения 12.9, где лицензирование никогда не используется в равновесии. В чем причина различия между двумя множествами результатов?

14.35. Проведите анализ следующей однопериодной модели. Рассмотрите дуополию фирм, производящих однородный товар и конкурирующих по Бертрану. В начале каждого периода предельные издержки производства фирмы 1 определяются как реализация равномерно распределенной на отрезке $[0, \bar{c}_1]$ случайной величины, а предельные издержки второй фирмы определяются как реализация равномерно распределенной на отрезке $[0, \bar{c}_2]$ случайной величины, независимой от первой. Фирмы принимают решения о ценах после наблюдения реализаций обоих значений предельных издержек. Функция спроса имеет вид $Q = A - P$, где $A > 2\max\{\bar{c}_1, \bar{c}_2\}$.

(a) Опишите равновесные ценовые стратегии и вычислите ожидаемую ex ante прибыль каждой из фирм.

(b) Далее представьте, что предельные издержки обеих фирм распределены на отрезке $[0, \bar{c}]$ и они могут вести исследовательскую деятельность с издержками μ. Если фирма ведет исследования, то с вероятностью η носитель распределения предельных издержек производства смещается до $[0, \bar{c}-\alpha]$, где $\alpha < \bar{c}$. Найдите условия, при которых инвестиции в НИОКР осуществляются лишь одной фирмой и при которых они осуществляются обеими фирмами.

(c) Как изменяется равновесие при снижении значения параметра $\bar{c}$? Проинтерпретируйте снижение $\bar{c}$ как усиление конкуренции в экономике и опишите его влияние на стимулы к осуществлению инноваций. Почему ваш ответ отличается от вывода из базовых моделей эндогенного технологического прогресса с расширяющимся разнообразием или шумпетерианских моделей?

Глава 15
Направленный технологический прогресс

Две предыдущие главы посвящены знакомству с базовыми моделями эндогенного технологического прогресса. Эти модели предоставляют математически простой аппарат для анализа агрегированных технологических изменений, однако в них рассматривается лишь единственный тип технологии. Даже когда в модели присутствуют различные типы машин, их роли в увеличении совокупной производительности совпадают. Такие модели являются неполными по двум важным причинам. Во-первых, на практике технологические изменения зачастую не выглядят «нейтральными»: некоторые факторы производства и агенты в экономике получают от них больше пользы, чем другие. Смещения такого типа могут быть проигнорированы только в частных случаях, например в моделях с агрегированной производственной функцией типа Кобба—Дугласа. Изучение вопроса о том, почему технологические изменения в некоторых случаях смещены в сторону определенных факторов производства, важно как для понимания природы эндогенного технологического прогресса, так и для прояснения его влияния на распределение доходов в экономике, что, в свою очередь, определяет группы агентов, поддерживающих технологический прогресс, и группы агентов, препятствующих ему. Во-вторых, анализ, основанный только на единственном типе технологических изменений, может оказаться недостаточным для демонстрации различных конкурирующих между собой эффектов, определяющих природу технологического прогресса.

Цель этой главы состоит в построении расширений моделей из двух предыдущих глав, позволяющих ввести понятие *направленного технологического прогресса*, при котором направление и смещение открываемых и внедряемых технологий определяются эндогенным образом. Модели направленного технологического прогресса не только предоставляют новое понимание природы технологических изменений, но и позволяют поставить новые вопросы о технологическом развитии мировой экономики и ответить на них.

Мы начнем с краткого описания ряда экономических задач, в которых эндогенное смещение технологии играет важную роль, и опишем ряд общих экономических принципов, на которых базируются модели направленного технологического прогресса. Основные результаты представлены в параграфе 15.3. Оставшаяся часть главы посвящена обобщению этих результатов и анализу ряда их приложений. В параграфе 15.6 эти модели используются для анализа вопроса, поставленного в главе 2, о том, почему технологический прогресс может иметь исключительно трудоинтенсивную (нейтральную по Харроду) природу. В параграфе 15.8 представлен альтернативный подход к анализу этого же вопроса, основанный на работе [Jones 2005].

15.1. Важность смещенного технологического прогресса

Чтобы убедиться в потенциальной важности смещенного технологического прогресса, вначале остановимся на ряде примеров.

1. Одним из возможно самых важных примеров смещенных технологических изменений являются *технологические изменения, смещенные в сторону квалификации,* которые играют важную роль в анализе недавних изменений в структуре заработных плат в экономике. На рис. 15.1 представлена динамика показателя относительного предложения квалифицированной рабочей силы (определенного как отношение количества работников с высшим образованием к количеству работников без него)

Рис. 15.1. Относительное предложение выпускников университетов и премия за высшее образование на рынке труда в США

и показателя вознаграждения за навыки, премии за высшее образование. График показывает, что в последние шестьдесят лет относительное количество квалифицированной рабочей силы в США значительно возросло. Однако вознаграждение за навыки при этом не снизилось. Наоборот, размер премии за высшее образование непрерывно увеличивался в течение всего этого периода времени. Стандартное объяснение такой динамики на рынке труда состоит в том, что новые технологии в послевоенное время имели *смещение в сторону квалификации*. На самом деле это утверждение в некотором смысле тавтологично: если квалифицированные и неквалифицированные работники являются несовершенными заменителями, то увеличение относительного предложения квалифицированной рабочей силы без компенсирующего его изменения спроса на нее обязательно будет вести к сокращению вознаграждения за навыки.

Из рис. 15.1 также следует, что начиная с конца 1960-х гг. относительное предложение квалифицированной рабочей силы растет быстрее, чем ранее. Вознаграждение за навыки также растет быстрее, чем ранее, с конца 1970-х гг. Стандартным объяснением этого роста является ускорение смещенного в сторону квалификации технологического прогресса, которое произошло одновременно со значительным изменением относительного предложения квалифицированной рабочей силы или чуть позже него.

Естественным образом возникающий вопрос заключается в том, почему в последние шестьдесят, а может и сто, лет технологические изменения смещены в сторону квалификации. Связанный с ним вопрос: почему смещенный в сторону квалификации технологический прогресс ускорился в 1970-е гг. одновременно с увеличением предложения квалифицированной рабочей силы на рынке труда? Несмотря на то что некоторые экономисты рассматривают такое смещение в технологических изменениях как экзогенное, такой подход не является полностью удовлетворительным. Мы уже убедились в том, что понимание эндогенного характера технологических изменений является важной частью анализа межстрановых различий в уровне дохода и процесса современного экономического роста. Если амплитуда технологических изменений является эндогенной величиной, то утверждение о том, что смещение в технологических изменениях имеет полностью экзогенную природу, представляется маловероятным. Следовательно, изучение факторов, определяющих структуру эндогенного смещения технологических изменений и причин их смещения в сторону квалификации, в последние десятилетия является важной задачей.

2. Вывод о важности смещения технологического прогресса оказывается более значимым, если мы взглянем на историческую динамику технологических изменений. В отличие от развития в последние несколько

десятилетий, технологический прогресс в XVIII и XIX вв. выглядит *смещенным в сторону неквалифицированного труда*. Ремесленное производство замещалось фабричным, а позднее — стандартизированными деталями и конвейерной сборкой. Товары, которые ранее производились квалифицированными ремесленниками, начали производиться на фабриках работниками с относительно низкой квалификацией, а множество ранее сложных производственных процессов значительно упростилось, что привело к снижению спроса на квалифицированную рабочую силу. Краткая характеристика этого процесса представлена в книге [Mokyr 1990, р. 137; Мокир 2014]:

> Технологии, основанные на стандартизированных деталях, оказались более продвинутыми и вытеснили квалифицированных ремесленников, работавших с долотом и огнем, сначала в производстве огнестрельного оружия, затем — часов, насосов, замков, механическом ремонте печатных машинок, швейных машин и, наконец, двигателей и велосипедов.

Несмотря на то что типы навыков, имевших цену на рынке труда в течение XIX в., отличались от тех, которые поставляются на рынок сегодняшними выпускниками университетов, сопоставление технологических изменений, смещенных в сторону выпускников университетов в недавнем прошлом, с технологическими изменениями, смещенными в сторону от наиболее квалифицированных работников, в XIX в. приводит в замешательство и выглядит интригующим. Оно поднимает простой вопрос о том, почему технологические изменения, которые в основном были смещены в сторону квалификации в XX в., имели смещение в сторону неквалифицированных работников в XIX в.

3. В качестве другого примера рассмотрим возможное влияние состояния рынка труда на процесс технологических изменений. Безработица и доля дохода труда в национальном доходе значительно увеличились в конце 1960-х и начале 1970-х гг. в ряде континентальных европейских стран. В течение 1980-х гг. безработица продолжила свой рост, однако доля дохода труда начала быстро снижаться и во многих странах упала ниже своего начального значения. Интерпретация из работы [Blanchard 1997] связывает первый период с реакцией экономики на требования работников о повышении заработной платы, а второй период с возможными последствиями технологических изменений, *смещенных в сторону капитала*. Вопрос, который интересует нас, заключается в том, существует ли связь между технологическими изменениями в европейских экономиках, смещенными в сторону капитала, и предшествовавшими им требованиями работников о повышении заработной платы.

4. Другим очевидным примером важности направленных технологических изменений является использование нейтрального по Харроду (исключительно трудоинтенсивного) технологического прогресса в моделях

экономического роста. Напомним, что в главах 2 и 8 мы доказали, что если технологический прогресс не является трудоинтенсивным, то равновесный рост экономики не будет сбалансированным. При этом ряд эмпирических свидетельств позволяют сделать вывод о сбалансированности характера современного экономического роста мировой экономики. В данном случае интересующий нас вопрос заключается в том, есть ли у нас причины ожидать, что эндогенные технологические изменения будут иметь трудоинтенсивную структуру.

В этой главе мы покажем, что модели направленного технологического прогресса могут предоставить возможные ответы на поставленные выше вопросы. Основная идея этих моделей в том, что стимулы к получению прибыли являются определяющими факторами не только амплитуды, но и направления технологических изменений. Перед тем как перейти к подробному изложению модели, проведем краткий обзор ее основных положений, которые интуитивно являются достаточно очевидными.

Представим себе экономику с двумя факторами производства, которые обозначим L и H (что соответствует неквалифицированной и квалифицированной рабочей силе), и двумя типами технологии, которые дополняют (улучшают) производительность каждого из факторов. Естественно ожидать, что если прибыльность технологии, улучшающей производительность фактора H, превышает прибыльность технологии, улучшающей производительность фактора L, то исследовательская фирма, максимизирующая прибыль, будет размещать большее количество ресурсов в улучшение именно этой технологии. Какие факторы определяют относительную прибыльность развития различных типов технологии? Ответ на этот вопрос резюмирует большинство экономического содержания моделей направленного технологического прогресса. Относительная прибыльность различных типов технологий определяется двумя разнонаправленными эффектами:

1. *Эффект цены*: если товары, для производства которых требуются некоторые технологии, имеют высокую цену, то фирма, проводящая исследования, будет обладать значительными стимулами развивать именно эти технологии.
2. *Эффект размера рынка*: фирма получает большую прибыль при развитии технологий, имеющих большую долю рынка (например, по причинам, описанным в главе 12).

Важный вывод из анализа в этой главе состоит в том, что эффект размера рынка оказывается достаточно велик для того, чтобы перевесить влияние эффекта цены. В действительности при относительно мягких общих предположениях о структуре экономики справедливы два следующих результата.

Слабое (относительное) равновесное смещение. Увеличение относительного предложения некоторого фактора всегда ведет к технологическим изменениям, смещенным в сторону этого фактора.

Сильное (относительное) равновесное смещение. Если эластичность замещения между факторами достаточно велика, то увеличение относительного предложения некоторого фактора ведет к достаточно сильному смещению технологического прогресса в сторону этого фактора и функция относительного спроса на эту эндогенную технологию становится возрастающей.

Чтобы объяснить эти результаты более подробно, предположим, что обратная функция относительного спроса имеет вид $w_H/w_L = D(H/L, A)$, где переменная w_H/w_L обозначает относительную стоимость фактора H по сравнению с фактором L, переменная H/L — относительное предложение фактора H, а $A \in \mathbb{R}_+$ является технологической переменной, величину которой для простоты положим равной единице. Технологию A будем называть *смещенной в сторону фактора* H, если функция D возрастает по аргументу A, то есть увеличение A ведет к росту относительного спроса на фактор H. Из стандартной микроэкономической теории следует, что функция D всегда убывает по аргументу H/L. Равновесное смещение описывает поведение технологической переменной A при изменении относительного предложения H/L, поэтому рассмотрим функцию $A(H/L)$. В качестве нормализации предположим, что технология A смещена в сторону фактора H, то есть что функция $D(H/L, A)$ возрастает по A. Тогда слабое равновесное смещение состоит в том, что функция $D(H/L, A)$ является возрастающей (неубывающей) по H/L. С другой стороны, сильное равновесное смещение ведет к тому, что функция $A(H/L)$ оказывается достаточно чувствительной к изменениям относительного предложения факторов H/L и его увеличение ведет к росту относительной стоимости факторов w_H/w_L. Другими словами, обозначим кривую относительного спроса на эндогенную технологию как $w_H/w_L = D(H/L, A(H/L)) \equiv \tilde{D}(H/L)$. Тогда сильное равновесное смещение соответствует случаю, когда функция относительного спроса на эндогенную технологию $\tilde{D}(\cdot)$ является возрастающей.

На первый взгляд результаты о слабом и сильном равновесном смещении выглядят необычными. Однако они становятся интуитивно понятными после того, как мы выясним логику направленных технологических изменений. Более того, они имеют ряд важных следствий. В частности, в подпараграфе 15.3.3 будет показано, что из результатов и при слабом и сильном относительном смещении вытекают возможные ответы на вопросы, поставленные в начале этого параграфа.

15.2. Основные понятия и определения

Прежде чем перейти к анализу модели направленных технологических изменений, необходимо прояснить разницу между фактороинтенсивными технологическими изменениями и технологическими изменениями, смещенными в сторону некоторого фактора, зачастую нечетко описанную в литературе. Предположим, что производственная структура экономики может быть описана следующей агрегированной производственной функцией:

$$Y(t) = F(L(t), H(t), A(t)),$$

где переменная $L(t)$ обозначает труд, переменная $H(t)$ — еще один фактор производства (который может быть квалифицированным трудом, капиталом, землей или некоторыми промежуточными товарами), а переменная $A(t) \in \mathbb{R}_+$ — технологический фактор. Для конкретики предположим, что переменная $H(t)$ обозначает квалифицированный труд. Без ограничения общности положим, что выполняется неравенство $\partial F/\partial A > 0$, то есть увеличение параметра A соответствует улучшению производственной технологии. Напомним, что в случае, когда технологические изменения интенсивны по фактору L, производственная функция имеет вид $F(AL, H)$. С другой стороны, если технологические изменения интенсивны по фактору H, то производственная функция имеет вид $F(L, AH)$.

Несмотря на то что концепция технологических изменений, смещенных в сторону некоторого фактора, часто смешивается с понятием интенсивности технологического прогресса по этому фактору, между этими двумя понятиями существует важное различие. Мы будем говорить, что технологические изменения *смещены* в сторону фактора L, если технологический прогресс ведет к росту относительной предельной производительности фактора L по сравнению с производительностью фактора H. На математическом языке это означает, что

$$\frac{\partial \dfrac{\partial F(L,H,A)/\partial L}{\partial F(L,H,A)/\partial H}}{\partial A} \geq 0.$$

Другими словами, смещенные технологические изменения сдвигают кривую относительного спроса на фактор производства таким образом, что цена этого фактора увеличивается при заданном отношении используемых факторов (при заданном относительном количестве факторов). С другой стороны, мы будем говорить, что технологические изменения смещены в сторону фактора H, если выполняется противоположное неравенство. На рис. 15.2 показано влияние технологического прогресса,

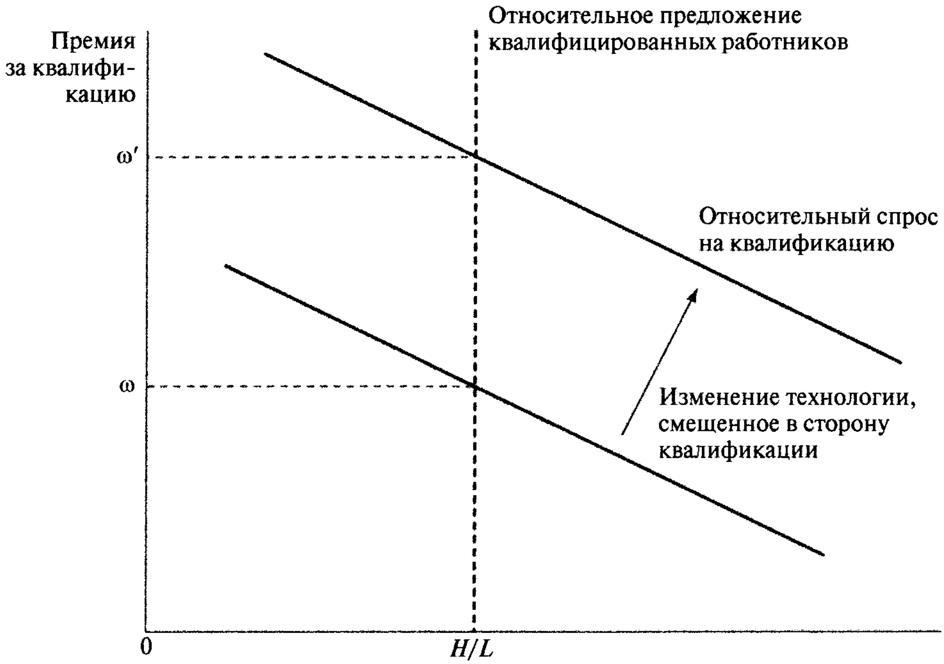


Рис. 15.2. Влияние технологического прогресса, смещенного в сторону фактора *H* на относительный спрос и относительную стоимость факторов производства

смещенного в сторону фактора *H* (в сторону квалификации) на относительный спрос на фактор *H* и его относительную стоимость (премию за образование).

Для дальнейшего объяснения этих понятий рассмотрим производственную функцию вида ПЭЗ (см. пример 2.3 из главы 2), которая может быть записана как

$$Y(t) = \left[\gamma_L (A_L(t)L(t))^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_H (A_H(t)H(t))^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

где переменные $A_L(t)$ и $A_H(t)$ обозначают два различных технологических параметра, а константы γ_L и γ_H определяют значимость каждого из факторов в производственной функции, причем $\gamma_L + \gamma_H = 1$. Наконец, параметр $\sigma \in (0, \infty)$ равен эластичности замещения между двумя факторами производства. Напомним, что если $\sigma = \infty$, то два фактора являются совершенными заменителями, и производственная функция становится линейной, если $\sigma = 1$, то производственная функция имеет вид функции Кобба—Дугласа, а если $\sigma = 0$, то замещение факторами производства отсутствует и производственная функция является леонтьевской функцией. Мы будем говорить, что факторы производства являются валовыми заменителями, если $\sigma > 1$, и что они являются валовыми дополняющими товарами, если $\sigma < 1$. Несмотря на то что в микроэкономической литературе существует несколько различных определений понятий замещаемости и дополняемости, принятое нами определение позволяет легко разделить случаи, когда $\sigma > 1$ и $\sigma < 1$, которые ведут к очень различным следствиям в данном контексте.

Очевидно, что по построению технология $A_L(t)$ является интенсивной по фактору L, а технология $A_H(t)$ — интенсивной по фактору H. Однако интересно отметить, что ответ на вопрос, будут ли интенсивные по фактору L (или по фактору H) технологические изменения смещены в сторону фактора L или в сторону фактора H, зависит от значения эластичности замещения σ. Запишем относительную предельную производительность двух факторов в следующем виде:

$$\frac{MP_H}{MP_L} = \gamma\left(\frac{A_H(t)}{A_L(t)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left(\frac{H(t)}{L(t)}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}, \tag{15.1}$$

где $\gamma \equiv \gamma_H/\gamma_L$. Относительная предельная производительность фактора H является убывающей функцией от его относительного количества $H(t)/L(t)$. Такая связь является следствием стандартного эффекта замещения, ведущего к убывающей зависимости между относительным предложением и относительной предельной производительностью (стоимостью) и, соответственно, к убывающей функции относительного спроса, показанной на рис. 15.2. Однако влияние переменной $A_H(t)$ на относительную предельную производительность зависит от значения параметра σ. Если $\sigma > 1$, то увеличение $A_H(t)$ (по отношению к $A_L(t)$) ведет к росту относительной предельной производительности фактора H. С другой стороны, если $\sigma < 1$, то увеличение $A_H(t)$ ведет к снижению относительной предельной производительности фактора H. Следовательно, если факторы производства являются валовыми заменителями, то интенсивные по фактору H технологические изменения также являются смещенными в сторону этого фактора. В противном случае, если факторы производства являются валовыми дополняющими товарами, то эта зависимость изменяется: интенсивные по фактору H технологические изменения становятся смещенными в сторону фактора L. Естественным образом, если $\sigma = 1$ и производственная функция имеет вид функции Кобба—Дугласа, то ни одна из технологий $A_H(t)$ и $A_L(t)$ не является смещенной в сторону какого-либо фактора производства[1].

Интуитивное объяснение причины, по которой интенсивные по фактору H технологические изменения являются смещенными в сторону

[1] Для дальнейшего анализа также отметим, что из уравнения (15.1) нетрудно увидеть, что параметр σ действительно удовлетворяет определению эластичности замещения $\sigma = -[d\log(MP_H/MP_L)/d\log(H/L)]^{-1}$.

фактора L, если $\sigma < 1$, простое, но при этом достаточно важное: если факторы производства являются валовыми дополняющими товарами ($\sigma < 1$), то увеличение производительности фактора H ведет к росту спроса на труд L в большей пропорции, чем спроса на фактор H. Вследствие этого предельная производительность труда увеличивается значительнее, чем предельная производительность фактора H. Чтобы убедиться в этом наиболее простым способом, рассмотрим предельный случай $\sigma \to 0$, когда производственная функция становится леонтьевской. В этом случае, начиная с равновесия, в котором выполняется равенство $\gamma_L A_L(t)L(t) = \gamma_H A_H(t) H(t)$, дальнейшее увеличение переменной $A_H(t)$ ведет к возникновению «избыточного предложения услуг» фактора H (и, соответственно, «избыточного спроса» на фактор L) и цена фактора H падает до нуля.

Выше мы ввели понятия технологических изменений, смещенных в сторону фактора H и фактора L. Следующий полезный шаг состоит в определении двух играющих важную роль в дальнейшем изложении в этой главе понятий. Мы будем говорить о *слабом равновесном смещении* технологии, если увеличение относительного предложения фактора H, H/L влечет технологические изменения, смещенные в сторону фактора H. На математическом языке это значит, что

$$\frac{\partial MP_H / MP_L}{\partial A_H / A_L} \frac{dA_H / A_L}{dH / L} \geq 0.$$

Из уравнения (15.1) очевидно следует, что это неравенство выполняется только если

$$\frac{d(A_H(t)/A_L(t))^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{dH/L} \geq 0,$$

то есть в ответ на изменение относительного предложения факторов производства отношение $A_H(t)/A_L(t)$ изменяется в направлении, смещенном в сторону фактора, количество которого стало более значительным.

С другой стороны, мы будем говорить о *сильном равновесном смещении* технологии, если увеличение отношения H/L влечет достаточно значительное изменение смещения технологии, то есть если вследствие изменения предложения факторов производства *относительная* предельная производительность фактора H (по сравнению с фактором L) возрастает. На математическом языке это утверждение эквивалентно следующему неравенству:

$$\frac{dMP_H / MP_L}{dA_H / A_L} > 0,$$

где в этом случае мы используем строгое неравенство для того, чтобы различить сильное равновесное смещение и случай, когда относительная предельная производительность факторов производства не зависит от их относительного предложения (например, когда факторы производства являются совершенными заменителями). Из этих уравнений нетрудно заметить, что основное различие между сильным и слабым равновесным смещением связано с тем, в какой точке вычисляется значение относительного предельного продукта двух факторов производства: в точке их начального относительного предложения (в случае слабого смещения) или в точке их нового относительного предложения (в случае сильного смещения). Следовательно, сильное равновесное смещение является намного более строгим понятием, чем слабое равновесное смещение.

15.3. Базовая модель направленного технологического прогресса

В этом параграфе мы проанализируем базовую модель направленного технологического прогресса, которая основана на модели эндогенных технологических изменений с расширяющимся разнообразием. Спецификация границы инновационных возможностей описана в модели лабораторного оборудования, рассмотренной в главе 13. С одной стороны, такой выбор обусловлен тем, что модель расширяющегося разнообразия является в некотором смысле более простой, чем шумпетерианская модель экономического роста из предыдущей главы. С другой стороны, спецификация, основанная на модели лабораторного оборудования, позволит нам сделать вывод о том, что полученные результаты не зависят от присутствия в экономике технологических экстерналий. Модель направленного технологического прогресса с переливом знаний представлена в параграфе 15.4, а в упражнении 15.8 показано, что основные результаты этого параграфа обобщаются и для шумпетерианской модели экономического роста.

Рассмотрим экономику с постоянным предложением двух факторов производства H и L, допускающую существование репрезентативного домохозяйства со стандартными предпочтениями вида CRRA, заданными следующей целевой функцией:

$$\int_0^\infty \exp(-\rho t)\frac{C(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}dt, \qquad (15.2)$$

где, как обычно, предположим, что $\rho > 0$. Совокупное предложение описывается агрегированной производственной функцией, где конечный товар производится из двух промежуточных товаров с постоянной эластичностью их замещения:

$$Y(t)=\left[\gamma_L Y_L(t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}+\gamma_H Y_H(t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \tag{15.3}$$

где переменные $Y_L(t)$ и $Y_H(t)$ обозначают выпуск двух промежуточных товаров. Выбор индексов подразумевает, что в производстве первого товара используется фактор L, а в производстве второго товара используется фактор H. Параметр $\varepsilon \in [0, \infty)$ определяет эластичность замещения между двумя промежуточными товарами. Предположение о том, что производственная функция (15.3) имеет вид функции ПЭЗ, значительно упрощает дальнейший анализ, однако не является критичным с точки зрения результатов модели. В заключении главы мы покажем, как они изменяются при ослаблении этого предположения.

Ресурсное ограничение в экономике в момент времени t имеет следующий вид:

$$C(t) + X(t) + Z(t) \leq Y(t), \tag{15.4}$$

где, как и ранее, переменная $X(t)$ обозначает общие расходы на машины, а переменная $Z(t)$ — агрегированные расходы на исследования. Два промежуточных товара производятся на рынке с совершенной конкуренцией с помощью производственных функций следующего вида:

$$Y_L(t)=\frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^{N_L(t)} x_L(v, t)dv\right)L^{\beta}, \tag{15.5}$$

$$Y_H(t)=\frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^{N_H(t)} x_H(v, t)dv\right)H^{\beta}, \tag{15.6}$$

где функции $x_L(v, t)$ и $x_H(v, t)$ обозначают количества различных типов машин, используемых в производстве каждого из промежуточных товаров и $\beta \in (0, 1)$[2]. Как и ранее, предположим, что машины полностью выбывают после использования. Нетрудно заметить сходство между этими производственными функциями и агрегированной производственной функцией в экономике из базовой модели расширяющегося разнообразия из главы 13. Однако здесь присутствуют два важных различия. Во-первых, в этой модели это производственные функции промежуточных товаров, а не конечного товара. Во-вторых, в двух производственных функциях, (15.5) и (15.6), используются различные типы машин. Набором машин,

[2] Заметим, что множества машин, используемые в двух секторах, различаются (эти два множества не пересекаются). Для упрощения обозначений мы используем символ v для обоих множеств машин.

дополняющих труд L, является множество $[0, N_L(t)]$, а набором машин, дополняющих фактор H, является множество $[0, N_H(t)]$.

Как и в главе 13, предположим, что все машины в обоих секторах производятся фирмами-монополистами с полностью защищенными патентами с неограниченным по времени сроком действия. Обозначим цену, которую устанавливает фирма-монополист в момент времени t на машины типа $v \in [0, N_L(t)]$, как $p_L^x(v, t)$, а на машины типа $v \in [0, N_H(t)]$ как $p_H^x(v, t)$. С момента изобретения любая машина производится с постоянными предельными издержками, равными $\psi > 0$ единиц конечного товара, и, как и ранее, мы используем нормализацию $\psi \equiv 1 - \beta$. Таким образом, общее количество ресурсов, используемых в производстве машин в момент времени t, составляет:

$$X(t) = (1-\beta)\left(\int_0^{N_L(t)} x_L(v, t)dv + \int_0^{N_H(t)} x_H(v, t)dv\right).$$

Предположим, что граница инновационных возможностей, которая задает технологию создания новых типов машин, имеет вид, схожий с ее спецификацией в модели лабораторного оборудования из главы 13:

$$\dot{N}_L(t) = \eta_L Z_L(t) \text{ и } \dot{N}_H(t) = \eta_H Z_H(t), \tag{15.7}$$

где переменная $Z_L(t)$ обозначает исследовательские расходы, направленные на изобретение машин, улучшающих производительность труда, в момент времени t, а переменная $Z_H(t)$ — исследовательские расходы, направленные на изобретение машин, улучшающих производительность фактора H. Совокупные расходы на исследования задаются как сумма этих показателей, то есть

$$Z(t) = Z_L(t) + Z_H(t).$$

Стоимость фирмы-монополиста, изобретающей один из таких типов машин, как и ранее, задается стандартной формулой для вычисления приведенной дисконтированной стоимости прибыли следующего вида:

$$V_f(v, t) = \int_t^{\infty} \exp\left(-\int_t^s r(s')ds'\right)\pi_f(v, s)ds, \tag{15.8}$$

где функция $\pi_f(v, t) \equiv p_f^x(v, t)x_f(v, t) - \psi x_f(v, t)$ обозначает моментальную прибыль, где $f = L$ или $f = H$, а переменная $r(t)$ — рыночную процентную ставку в момент времени t. Вариант ГЯБ для этой функции стоимости имеет вид:

$$r(t)V_f(v, t) - \dot{V}_f(v, t) = \pi_f(v, t). \tag{15.9}$$

Далее нормализуем цену конечного товара в любой момент времени t единицей, что эквивалентно приравниванию единице совокупного индекса цен двух промежуточных товаров, то есть

$$\left[\gamma_L^{\varepsilon} p_L(t)^{1-\varepsilon} + \gamma_H^{\varepsilon} p_H(t)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = 1 \text{ для всех } t, \tag{15.10}$$

где переменная $p_L(t)$ обозначает ценовой индекс товара Y_L в момент времени t, а переменная $p_H(t)$ — ценовой индекс товара Y_H в момент времени t. В этом случае межвременная цена переноса единицы товара во времени задается траекторией процентной ставки $[r(t)]_{t=0}^{\infty}$. Наконец, обозначим цены факторов производства L и H как $w_L(t)$ и $w_H(t)$ соответственно.

15.3.1. Описание равновесия

Определим *распределение ресурсов* в экономике следующим набором: траектории потребления, общих расходов на машины и агрегированных исследовательских расходов $[C(t),\ X(t),\ Z(t)]_{t=0}^{\infty}$, траектории количества доступных типов машин $[N_L(t),\ N_H(t)]_{t=0}^{\infty}$, траектории цен и количества каждого типа машин $\left[p_L^x(v,\ t),\ x_L(v,\ t)\right]_{v\in[0,N_L(t)],t=0}^{\infty}$, $\left[p_H^x(v,\ t),\ x_H(v,\ t)\right]_{v\in[0,N_H(t)],t=0}^{\infty}$ и траектории цен факторов производства $[r(t),\ w_L(t),\ w_H(t)]_{t=0}^{\infty}$.

Назовем *равновесием* распределение ресурсов, в котором все фирмы-монополисты (ведущие исследовательскую деятельность) выбирают значения $\left[p_f^x(v,\ t),\ x_f(v,\ t)\right]_{v\in[0,N_f(t)],t=0}^{\infty}$, где $f = L$ или $f = H$, при которых их прибыль достигает максимума, динамика количества типов машин $[N_L(t),\ N_H(t)]_{t=0}^{\infty}$ определяется условием свободного выхода на рынок исследований, траектории цен факторов производства $[r(t),\ w_L(t),\ w_H(t)]_{t=0}^{\infty}$ являются равновесными на их рынках, а траектории переменных $[C(t),\ X(t),\ Z(t)]_{t=0}^{\infty}$ являются решением задачи максимизации полезности репрезентативного домохозяйства.

Чтобы описать (единственное) равновесие, рассмотрим задачи максимизации прибыли фирмами в обоих секторах. Так как машины полностью выбывают после использования, эти задачи максимизации являются статическими и имеют следующий вид:

$$\max_{L,[x_L(v,t)]_{v\in[0,N_L(t)]}} p_L(t)Y_L(t) - w_L(t)L - \int_0^{N_L(t)} p_L^x(v,\ t)x_L(v,\ t)dv, \tag{15.11}$$

$$\max_{H,[x_H(v,t)]_{v\in[0,N_H(t)]}} p_H(t)Y_H(t) - w_H(t)H - \int_0^{N_H(t)} p_H^x(v,\ t)x_H(v,\ t)dv. \tag{15.12}$$

Основное различие между этими задачами и задачей максимизации прибыли фирмы-производителя конечного товара в главе 13 состоит в присутствии в них цен $p_L(t)$ и $p_H(t)$, которые отражают то, что в этих секторах производятся промежуточные товары, в то время как цены факторов производства и машин выражены в единицах измерения конечного товара.

Из двух задач максимизации (15.11) и (15.12) непосредственно вытекают следующие функции спроса на машины в двух секторах:

$$x_L(v,\ t)=\left(\frac{p_L(t)}{p_L^x(v,\ t)}\right)^{1/\beta} L \text{ для всех } v\in[0,\ N_L(t)] \text{ и для всех } t, \quad (15.13)$$

$$x_H(v,\ t)=\left(\frac{p_H(t)}{p_H^x(v,\ t)}\right)^{1/\beta} H \text{ для всех } v\in[0,\ N_H(t)] \text{ и для всех } t. \quad (15.14)$$

Так же, как и в главе 13, эти функции обладают свойством постоянной эластичности по цене, поэтому из максимизации прибыли следует, что каждая фирма-монополист устанавливает цену как фиксированную наценку на предельные издержки, то есть

$$p_L^x(v,\ t)=p_H^x(v,\ t)=1 \text{ для всех } v \text{ и } t.$$

Подставляя эти выражения для цен в уравнения (15.13) и (15.14), приходим к следующим равенствам:

$$x_L(v,\ t)=p_L(t)^{1/\beta} \text{ и } x_H(v,\ t)=p_H(t)^{1/\beta} \text{ для всех } v \text{ и } t.$$

Так как эти количества зависят лишь от того, в каком секторе используется машина, а не от ее конкретного типа, прибыль фирмы также не зависит от типа производимой ей машины. В частности, имеем следующие уравнения:

$$\pi L(t)=\beta p_L(t)^{1/\beta} \text{ и } \pi H(t)=\beta p_H(t)^{1/\beta} H. \quad (15.15)$$

Из уравнения (15.15) следует, что чистая приведенная дисконтированная стоимость фирмы-монополиста зависит лишь от того, в каком секторе используются производимые ею машины, и мы можем обозначить ее как $V_L(t)$ и $V_H(t)$.

Далее, объединяя функции спроса на машины с уравнениями (15.5) и (15.6), получаем *приведенные* производственные функции двух промежуточных товаров следующего вида:

$$Y_L(t)=\frac{1}{1-\beta}p_L(t)^{\frac{1-\beta}{\beta}}N_L(t)L, \quad (15.16)$$

$$Y_H(t) = \frac{1}{1-\beta} p_H(t)^{\frac{1-\beta}{\beta}} N_H(t) H. \tag{15.17}$$

Эти приведенные производственные функции схожи с функцией (13.12) из главы 13 с отличием в том, что в них присутствует переменная цены.

Наконец, цены двух промежуточных товаров определяются из условия на предельную производительность в секторе производства конечного товара, из которого вытекает следующее уравнение:

$$\begin{aligned} p(t) \equiv \frac{p_H(t)}{p_L(t)} = \gamma \left(\frac{Y_H(t)}{Y_L(t)} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \\ = \gamma \left(p(t)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \frac{N_H(t) H}{N_L(t) L} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \gamma^{\frac{\varepsilon\beta}{\sigma}} \left(\frac{N_H(t) H}{N_L(t) L} \right)^{-\frac{\beta}{\sigma}}, \end{aligned} \tag{15.18}$$

где, как и ранее, $\gamma = \gamma_H / \gamma_L$ и параметр

$$\sigma \equiv \varepsilon - (\varepsilon - 1)(1 - \beta) = 1 + (\varepsilon - 1)\beta$$

является (приведенной) эластичностью замещения между двумя факторами производства. В первой строке уравнения (15.18) переменная $p(t)$ определяется как относительная цена двух промежуточных товаров и используется наблюдение о том, что она должна равняться отношению предельной производительности двух промежуточных товаров. Во второй строке используется подстановка уравнений (15.16) и (15.17). Используя условие (15.18), получаем следующее уравнение для относительной цены факторов производства в экономике модели:

$$\omega(t) \equiv \frac{w_H(t)}{w_L(t)} = p(t)^{1/\beta} \frac{N_H(t)}{N_L(t)} = \gamma^{\frac{\varepsilon}{\sigma}} \left(\frac{N_H(t)}{N_L(t)} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \left(\frac{H}{L} \right)^{-\frac{1}{\sigma}}. \tag{15.19}$$

В первой строке уравнения (15.19) переменная $\omega(t)$ определяется как относительная заработная плата фактора H по сравнению с фактором L. Во второй строке используется определение предельной производительности вместе с уравнениями (15.15) и (15.16), в третьей строке используется уравнение (15.18). Мы будем называть параметр σ (приведенной) эластичностью замещения между двумя факторами производства, так как он равен

$$\sigma = -\left(\frac{d \log \omega(t)}{d \log(H/L)} \right)^{-1}.$$

Чтобы завершить описание равновесия в производственном секторе экономики, необходимо наложить следующие условия свободного выхода на рынок исследований:

$$\eta_L V_L(t) \leq 1, Z_L(t) \geq 0 \text{ и } \eta_L V_L(t) = 1, \text{ если } Z_L(t) > 0, \tag{15.20}$$

$$\eta_H V_H(t) \leq 1, Z_H(t) \geq 0 \text{ и } \eta_H V_H(t) = 1, \text{ если } Z_H(t) > 0. \tag{15.21}$$

Наконец, из максимизации полезности домохозяйством вытекают уравнение Эйлера в следующем виде:

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta}(r(t) - \rho) \tag{15.22}$$

и условие трансверсальности:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)(N_L(t)V_L(t) + N_H(t)V_H(t))\right] = 0, \tag{15.23}$$

в котором используется тот факт, что общая стоимость всех корпоративных активов в экономике составляет $N_L(t)V_L(t) + N_H(t)V_H(t)$.

Далее определим ТСР в модели как равновесие, в котором потребление растет с постоянным темпом g^* и относительная цена $p(t)$ остается постоянной величиной. Тогда из уравнения (15.10) следует, что на определенной таким образом ТСР цены $p_L(t)$ и $p_H(t)$ также являются постоянными величинами.

Обозначим чистую приведенную дисконтированную стоимость новых изобретений в двух секторах на ТСР как V_L и V_H. Тогда из уравнения (15.19) получаем следующие равенства:

$$V_L = \frac{\beta p_L^{1/\beta} L}{r^*} \text{ и } V_H = \frac{\beta p_H^{1/\beta} H}{r^*}, \tag{15.24}$$

где константа r^* обозначает процентную ставку на ТСР, а константы p_L и p_H — цены двух промежуточных товаров на ТСР. Сравнение двух этих стоимостей имеет ключевое значение в модели. Как мы уже заметили на интуитивном уровне выше, рост стоимости V_H по сравнению со стоимостью V_L ведет к увеличению стимулов к изобретению машин N_H, улучшающих производительность сектора H, а не машин NL. Разделив одно из уравнений (15.24) на другое, получаем следующее равенство:

$$\frac{V_H}{V_L} = \left(\frac{p_H}{p_L}\right)^{\frac{1}{\beta}} \frac{H}{L}.$$

Это выражение демонстрирует два эффекта направленных технологических изменений, которые мы упомянули в параграфе 15.1.

1. Эффект цены проявляется в том, что отношение V_H/V_L — это возрастающая функция относительной цены p_H/p_L. Чем больше относительная цена, тем больше значение V_H/V_L, поэтому тем выше стимулы к изобретению технологий, дополняющих фактор H. Из того, что товары, производимые с использованием относительно редких факторов, имеют более высокую относительную цену, следует, что эффект цены благоприятствует технологиям, дополняющим редкие факторы производства.
2. Эффект размера рынка — следствие того, что отношение V_H/V_L является возрастающей функцией относительного предложения факторов H/L. Рынок для технологии представлен работниками (или другими факторами производства), которые используют эту технологию в экономической деятельности. Следовательно, увеличение предложения некоторого фактора производства — расширение рынка для технологии, дополняющей этот фактор. Эффект размера рынка стимулирует инновации для фактора с большим предложением.

Однако вышеприведенные аргументы не полны, так как цены в модели являются эндогенными переменными. Мы можем избавиться от них с помощью уравнений (15.24) и (15.18), и тогда относительная производительность двух технологий описывается следующим равенством:

$$\frac{V_H}{V_L}=\gamma^{\frac{\varepsilon}{\sigma}}\left(\frac{N_H(t)}{N_L(t)}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{H}{L}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}. \tag{15.25}$$

Заметим для дальнейшего анализа, что если $\sigma > 1$, то увеличение относительного предложения фактора H/L ведет к росту относительной стоимости V_H/V_L, и к ее снижению, если $\sigma < 1$. Таким образом, эластичность замещения между факторами производства σ определяет, будет ли эффект цены доминировать над эффектом размера рынка. Так как σ является приведенным, а не начальным параметром модели, мы можем исследовать вопрос о том, когда его значение превышает единицу. Нетрудно убедиться, что

$$\sigma \gtreqless 1 \Leftrightarrow \varepsilon \gtreqless 1.$$

Другими словами, факторы производства будут валовыми заменителями, если два промежуточных товара являются валовыми заменителями в производстве конечного товара.

Далее, используя два условия свободного входа на рынок исследований (15.20) и (15.21) и предполагая, что они оба выполняются как равенства, получаем следующее *условие равновесия рынка технологий* на ТСР:

$$\eta_L V_L = \eta_H V_H. \tag{15.26}$$

Объединяя уравнение (15.26) с уравнением (15.25), находим следующее выражение для относительного количества технологий на ТСР:

$$\left(\frac{N_H}{N_L}\right)^* = \eta^\sigma \gamma^\varepsilon \left(\frac{H}{L}\right)^{\sigma-1}, \tag{15.27}$$

где $\eta \equiv \eta_H/\eta_L$ и звездочка (*) обозначает то, что это выражение описывает значение переменной на ТСР. Важное следствие из этого уравнения состоит в том, что относительная производительность определяется видом границы инновационных возможностей и относительным предложением двух факторов производства. Уравнение (15.27) содержит в себе основной экономический смысл модели направленного технологического прогресса. Однако прежде чем перейти к его обсуждению, опишем темп роста экономики на ТСР. Это сделано в двух следующих утверждениях.

Утверждение 15.1. *Рассмотрим модель направленного технологического прогресса, описанную выше. Предположим, что выполняются следующие неравенства:*

$$\beta\left[\gamma_H^\varepsilon (\eta_H H)^{\sigma-1} + \gamma_L^\varepsilon (\eta_L L)^{\sigma-1}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} > \rho$$

и

$$(1-\theta)\beta\left[\gamma_H^\varepsilon (\eta_H H)^{\sigma-1} + \gamma_L^\varepsilon (\eta_L L)^{\sigma-1}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} < \rho. \tag{15.28}$$

Тогда в модели существует единственное равновесие на ТСР, в котором значение относительного количества технологий задается уравнением (15.27) *и темп роста потребления и выпуска равен:*

$$g^* = \frac{1}{\theta}\left(\beta\left[\gamma_H^\varepsilon (\eta_H H)^{\sigma-1} + \gamma_L^\varepsilon (\eta_L L)^{\sigma-1}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} - \rho\right). \tag{15.29}$$

Доказательство. Вывод уравнения (15.29) следует из рассуждений, представленных выше. Проверке утверждения о том, что из неравенств (15.28) следует выполнение условия свободного выхода на рынок исследований, посвящено упражнение 15.2. В этом упражнении также показано, что это равновесие является единственным равновесием с постоянным значением относительного количества технологий, темп роста экономики определяется уравнением (15.29), полезность репрезентативного домохозяйства конечна и выполняется условие трансверсальности. ■

Нетрудно убедиться, что переходная динамика в экономике имеет следующую структуру. Для любого начального запаса технологий $N_H(0)$ и $N_L(0)$ существует единственная равновесная траектория, на которой экономика монотонно сходится к равновесию на ТСР, описанному в утверждении 15.1. Этот результат описан в следующем утверждении.

Утверждение 15.2. *Рассмотрим модель направленного технологического прогресса, описанную выше. Тогда для любого начального запаса технологий $N_H(0) > 0$ и $N_L(0) > 0$ в ней существует единственная равновесная траектория. Если $N_H(0)/N_L(0) < (N_H/N_L)^*$, заданному уравнением* (15.27), *то $Z_H(t) > 0$ и $Z_L(t) = 0$ до тех пор, пока не выполнено равенство $N_H(t)/N_L(t) = (N_H/N_L)^*$. Если $N_H(0)/N_L(0) > (N_H/N_L)^*$, заданному уравнением* (15.27), *то $Z_H(t) = 0$ и $Z_L(t) > 0$ до тех пор, пока не выполнено равенство $N_H(t)/N_L(t) = (N_H/N_L)^*$.*

Доказательство. См. упражнение 15.3. ■

Более интересными результатами модели, чем совокупный темп роста экономики и структура переходной динамики в ней, являются выводы о направлении технологических изменений и их влиянии на относительные цены факторов производства. Они описаны в следующем подпараграфе.

15.3.2. Направленный технологический прогресс и цены факторов производства

Начнем с анализа уравнения (15.27). Из него следует, что если $\sigma > 1$, то в экономике существует возрастающая зависимость между относительным предложением фактора H, H/L и относительным количеством технологий N_H^*/N_L^*. С другой стороны, если приведенная эластичность замещения между факторами меньше единицы, то эта зависимость становится убывающей. Отсюда можно предположить, что в зависимости от значения эластичности замещения между факторами производства (или между промежуточными товарами) изменение предложения факторов может вызвать технологические изменения, смещенные в сторону фактора, чье предложение возросло, или смещенные от него. Однако такое предположение неверно. Напомним из параграфа 15.2, что значение N_H^*/N_L^* обозначает отношение количества технологий, связанных с двумя факторами производства (или отношение *физических* производительностей факторов). Смещение технологий же определяется *значениями предельной производительности* факторов, которые изменяются вместе с изменениями относительных цен. Мы уже заметили, что связь между интенсивностью технологии по некоторому фактору и ее смещением в сторону этого фактора зависит от того, как связан параметр σ с единицей. Таким образом, если $\sigma > 1$, то увеличение отношения N_H^*/N_L^* относительно смещено в сторону фактора H, а если $\sigma < 1$, то снижение отношения N_H^*/N_L^* относительно смещено в сторону фактора H.

Из этих рассуждений непосредственно вытекает следующий *результат о слабом равновесном смещении.*

Утверждение 15.3. *Рассмотрим модель направленного технологического прогресса, описанную выше. В ней всегда наблюдается слабое равновесное (относительное) смещение в том смысле, что увеличение относительного предложения фактора производства H/L всегда вызывает технологические изменения, относительно смещенные в сторону фактора H.*

Напомним, что в определении слабого смещения в параграфе 15.2 используется нестрогое неравенство. Поэтому утверждение 15.3 также верно и когда $\sigma = 1$, однако в этом случае из уравнения (15.27) нетрудно заметить, что значение N_H^*/N_L^* не зависит от значения H/L.

Утверждение 15.3 составляет основу дискуссии из параграфа 15.1 о смещенных технологических изменениях, вызванных изменением предложения факторов производства, и проливает свет на то, как изменение относительного предложения квалифицированных работников могло стать причиной технологических изменений, смещенных в сторону квалификации. Дальнейшему анализу этого вопроса посвящен подпараграф 15.3.3.

Результат этого утверждения отражает силу эффекта размера рынка. Напомним, что эффект цены создает силу, благоприятствующую фактору, относительное предложение которого сокращается. С другой стороны, эффект размера рынка, который связан с неконкурентностью знаний, описанной в главе 12, ведет к тому, что изменение технологий благоприятствует фактору, чье относительное предложение увеличивается. Утверждение 15.3 говорит о том, что эффект размера рынка всегда доминирует над эффектом цены.

Утверждение 15.3 описывает направление технологических изменений, вызванных изменением относительного предложения факторов производства, однако в нем говорится о том, будет ли вызванный эффект достаточно сильным для того, чтобы эндогенная функция относительного спроса на факторы стала возрастающей. Как упомянуто в параграфе 15.1, направленный технологический прогресс может привести к, казалось бы, парадоксальному выводу о том, что если принимать в расчет эндогенность технологических изменений, то функция относительного спроса на факторы может оказаться возрастающей. Для того чтобы убедиться в этом, подставим значение N_H^*/N_L^* из уравнения (15.27) в выражение для относительной заработной платы при заданных технологиях (15.19) и получим следующую формулу для отношения цен факторов производства (см. упражнение 15.4):

$$\omega^* \equiv \left(\frac{w_H}{w_L}\right)^* = \eta^{\sigma-1}\gamma^{\varepsilon}\left(\frac{H}{L}\right)^{\sigma-2}. \qquad (15.30)$$

Анализ этого уравнения позволяет найти условия для *сильного равновесного (относительного) смещения.*

Утверждение 15.4. *Рассмотрим модель направленного технологического прогресса, описанную выше. Если выполняется неравенство* $\sigma > 2$, *то в ней наблюдается сильное равновесное (относительное) смещение в том смысле, что увеличение относительного предложения фактора производства* H/L *вызывает рост его относительной цены* ω^*.

Результаты утверждений 15.3 и 15.4 показаны на рис. 15.3. Как и в первом случае, рассмотренном в параграфе 15.1, на этом рисунке в качестве фактора H используется квалифицированный труд, а в качестве фактора L — неквалифицированный труд. Кривая, обозначенная символами CT, показывает относительный спрос при неизменных технологиях

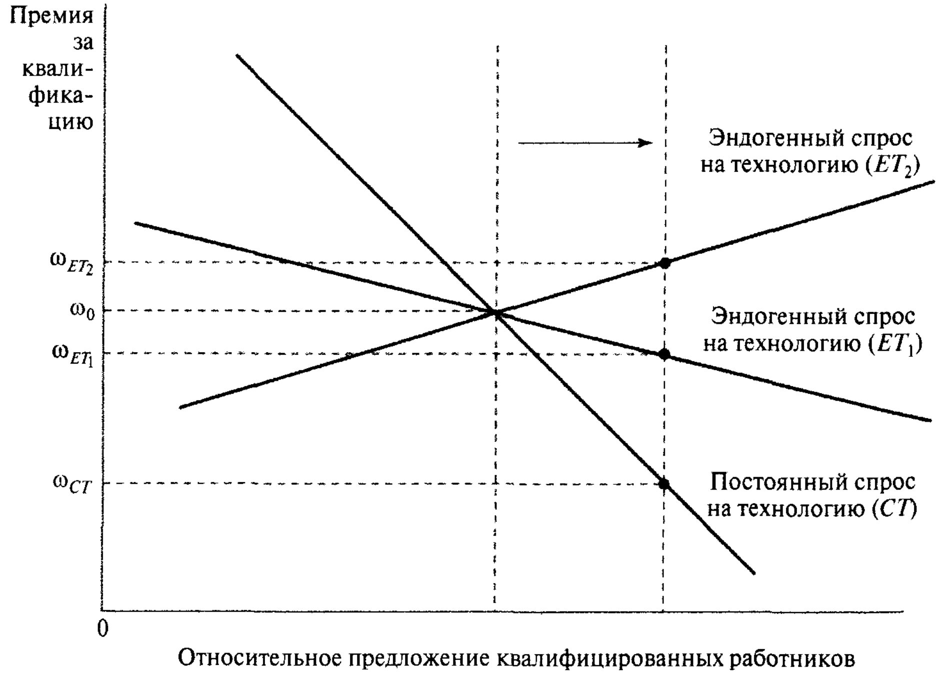


Рис. 15.3. Зависимость между относительным предложением квалифицированного труда и премией за квалификацию в модели направленного технологического прогресса

из уравнения (15.19). Она всегда является убывающей, так как на ней отношение N_H/N_L остается постоянным и поэтому она описывает только стандартный эффект замещения. То, что эта функция является убывающей, следует из базовой теории фирмы. Кривая, обозначенная символами ET_1, показывает относительный спрос при эндогенных технологиях в случае, если условие $\sigma > 2$ из утверждения 15.4 не выполняется. В утверждении 15.3 говорится о том, что даже в этом случае рост относительного предложения фактора H/L влечет технологические изменения, смещенные в сторону квалификации (в сторону фактора H). Поэтому если H/L превышает свое начальное значение, то технологические изменения сдвигают кривую спроса при неизменных технологиях CT вправо (то есть после изменения технологий возникает новая кривая CT, лежащая выше исходной). Поэтому значение премии за образование, связанной с увеличением относительного предложения H/L, равно ω_{ET_1}, а не ω_{CT}. Если относительное предложение H/L меньше своего исходного значения, аналогичный эффект сдвигает кривую CT влево. Следовательно, множество точек, соответствующих спросу при эндогенных технологиях, является более пологой кривой, чем кривая спроса при неизменных технологиях CT. (В этом нетрудно убедиться, сравнив функции спроса при неизменных и при эндогенных технологиях (15.19) и (15.30) и заметив, что значение $-1/\sigma$ никогда не превышает значение $\sigma - 2$.

Нетрудно увидеть очевидную аналогию между этим результатом и принципом Ле Шателье, сформулированным П. Самуэльсоном. В нем утверждается, что в долгосрочной перспективе, после того как все факторы производства подстраиваются под изменения, кривая спроса является более эластичной, чем в краткосрочной перспективе, когда некоторые факторы остаются неизменными. В данном контексте кривая спроса при эндогенных технологиях может быть рассмотрена как результат подстройки «факторов производства» к технологическим изменениям. Однако такая аналогия несовершенна, так как результат модели получен в контексте общего равновесия, а принцип Ле Шателье описывает частное равновесие. Нетрудно показать, что в базовой теории фирмы все кривые спроса являются убывающими функциями, независимо от того, присутствует ли эффект Ле Шателье. В это же время в данной модели функция ET_2, соответствующая случаю, когда выполняются предположения утверждения 15.4, является возрастающей: рост относительного предложения квалифицированного труда ведет к увеличению премии за квалификацию (на рис. 15.3 значение ω_{ET_2} превышает значение ω_0).

Чтобы увидеть интуицию этого результата, вернемся к главе 12, в которой мы убедились в важности неконкурентности знаний. В данной модели, как и в базовых моделях эндогенного технологического прогресса из двух предыдущих глав, неконкурентность знаний приводит к агрегированной производственной функции с возрастающей отдачей от масштаба (по всем факторам производства, включая технологии). Именно возрастающая отдача от масштаба является причиной возможного возрастания функции относительного спроса. Другими словами, эффект размера рынка, который возникает в результате неконкурентности знаний и является причиной агрегированной возрастающей отдачи от масштаба, может стимулировать технологические изменения, достаточно сильные для того, чтобы относительная предельная производительность и относительная цена фактора производства, чье предложение возросло, увеличились.

15.3.3. Выводы

Одним из наиболее интересных приложений утверждений 15.3 и 15.4 является анализ изменения структуры заработных плат и премии за квалификацию. Для этого предположим, что фактор H обозначает работников с высшим образованием. Несмотря на значительное увеличение предложения работников с высшим образованием на рынке труда США, премия за квалификацию не демонстрирует тенденции к снижению. Наоборот, после короткого периода спада в 1970-х гг., последовавшего после значительного увеличения предложения работников с высшим образованием, премия за квалификацию (образование) быстро росла в течение 1980-х и 1990-х гг. и достигла своего максимального значения за послевоенные годы. Динамика премии за квалификацию представлена на рис. 15.1.

Наиболее популярным объяснением этого наблюдения является технологический прогресс, смещенный в сторону квалификации. Например, экономисты утверждают, что появление компьютеров и новых информационных технологий (ИТ) благоприятствовало квалифицированным работникам в большей степени, чем неквалифицированным работникам. Однако интересный вопрос состоит в том, почему в течение последних тридцати лет и, обощенно, в течение всего XX в. экономика развивает и внедряет технологии, смещенные в сторону квалификации? Этот вопрос становится еще более важным, если мы вспомним, что в течение XIX в. многие технологии, такие как фабричное производство, прядение и ткачество, ставшие двигателем экономического роста, были смещены в сторону неквалифицированного труда. Таким образом, мы можем кратко сформулировать следующие стилизованные факты, описывающие технологический прогресс.

1. Технологические изменения, смещенные в сторону квалификации, вели к росту спроса на квалифицированный труд в течение всего XX в.
2. В течение последних двадцати пяти лет, возможно, произошло ускорение технологического прогресса, смещенного в сторону квалификации.

3. В течение XIX в. ряд важных технологических изменений был смещен в сторону неквалифицированного труда.

Утверждения 15.3 и 15.4 предоставляют аппарат для анализа этих наблюдений.

1. Из утверждений 15.3 и 15.4 следует, что увеличение количества квалифицированных работников, которое произошло в течение XX в., должно вести к непрерывным технологическим изменениям, смещенным в сторону квалификации. Следовательно, модели направленного технологического прогресса предоставляют естественное объяснение непрерывного технологического прогресса, смещенного в сторону квалификации, в течение последнего столетия.
2. Рост увеличения количества квалифицированных работников в течение последних двадцати пяти лет, показанный на рис. 15.1, должен вызывать ускорение технологического прогресса, смещенного в сторону квалификации. Если выполняется неравенство $\sigma > 2$ и справедливо утверждение 15.4, то это ускорение также ведет к росту премии за квалификацию. Далее в этом параграфе мы обсудим то, как такой класс моделей может быть использован для объяснения динамики цен факторов производства при эндогенных технологических изменениях.
3. Способна ли эта модель также объяснить преобладание в конце XVIII в. и в XIX в. технологических изменений, смещенных в сторону неквалифицированного труда и замещения навыков? Несмотря на то что данные об относительном предложении факторов производства и технологическом развитии в течение этого исторического периода неполны, доступные эмпирические свидетельства говорят о том, что в этот период происходил значительный рост количества неквалифицированных работников, доступных для найма на фабриках. Например, в книге [Bairoch 1988, p. 254] быстрый рост предложения неквалифицированного труда в городах описан следующим образом:

> ...между 1740 и 1840 годами население Англии <...> возросло с 6 млн до 15,7 млн человек, <...> в то же время в 1740 г. в сельском хозяйстве было занято 60–70% рабочей силы, а в 1840 г. этот показатель снизился до 22%.

В широко известном описании процесса технологического развития в XIX в. из книги [Habakkuk 1962, p. 136–137] также подчеркивается важность увеличения предложения неквалифицированного труда в городах Англии, которое объясняется рядом причин. Во-первых, «технологические изменения в сельском хозяйстве привели к росту предложения труда, доступного для занятости в промышленности» (p. 137). Во-вторых, «темп роста населения был очень высок» (p. 136). В-третьих, промышленное производство переходило из сельской местности в города. В-четвертых, «наблюдалась значительная миграция работников из Ирландии» (р. 137).

В дополнение к объяснению технологического развития, смещенного в сторону квалификации в последние десятилетия и в сторону неквалифицированного труда в исторической перспективе XVIII–XIX вв., эта модель предоставляет возможную интерпретацию динамики премии за высшее образование в течение 1970-х и 1980-х гг. Логично предположить, что значение N_H/N_L изменяется медленно в результате постепенного накопления и развития новых технологий (что следует из описания переходной динамики в утверждении 15.2). В этом случае быстрое увеличение предложения квалифицированного труда вначале, пока технологии в экономике остаются неизменными (при постоянном значении N_H/N_L), ведет к снижению премии за квалификацию, как показано на рис. 15.4. Через некоторое время технологии подстраиваются под изменения и экономика возвращается на возрастающую кривую относительного спроса на факторы производства, что ведет к относительно значительному увеличению премии за квалификацию. Следовательно, такой подход позволяет объяснить и снижение премии за высшее образование в 1970-х гг., и последующий затем ее резкий рост. Модель связывает оба этих наблюдения со значительным увеличением предложения квалифицированных работников на рынке труда.

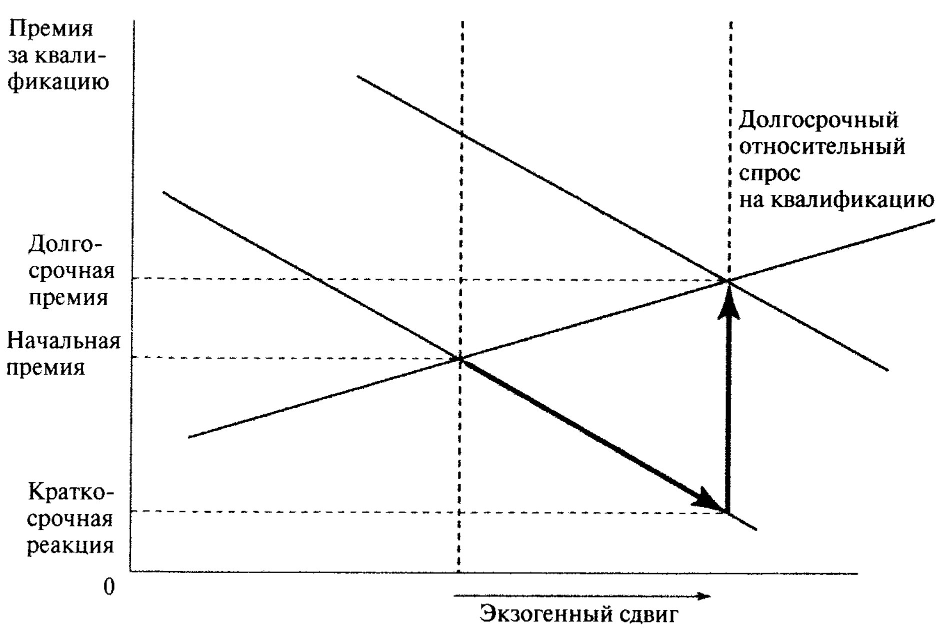


Рис. 15.4. Динамика премии за квалификацию в результате экзогенного увеличения относительного предложения квалифицированного труда при возрастающей функции относительного спроса на факторы производства с эндогенной технологией

С другой стороны, если выполняется неравенство $\sigma < 2$, то долгосрочная кривая относительного спроса на факторы производства является убывающей (однако более пологой, чем краткосрочная кривая относительного спроса). В этом случае вслед за увеличением относительного предложения квалифицированного труда премия за высшее образование также вначале снижается, а затем растет по мере того, как технологии подстраиваются под изменения. Отметим, что в конце концов она оказывается ниже своего начального значения (рис. 15.5).

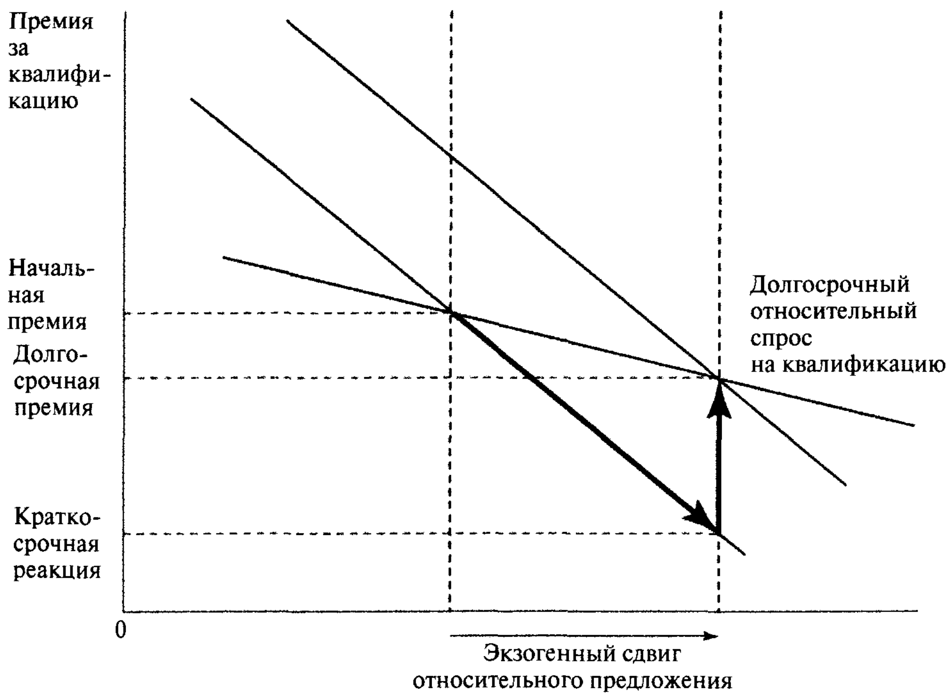


Рис. 15.5. Динамика премии за квалификацию в результате экзогенного увеличения относительного предложения квалифицированного труда при убывающей функции относительного спроса на факторы производства с эндогенной технологией

Следовательно, модель направленного технологического прогресса проливает свет как на долгосрочное смещение технологии в сторону квалификации, так и на краткосрочную динамику изменений цен факторов производства, вызванную этими технологическими изменениями. Прежде чем перейти к обсуждению других выводов из полученных результатов, сделаем несколько дополнительных наблюдений. Во-первых, в утверждении 15.4 показано, что возрастающая функция относительного спроса на факторы производства возникает только в случае $\sigma > 2$. В контексте замещения между квалифицированным и неквалифицированным трудом значение эластичности замещения, значительно превышающее 2, выглядит эмпирически необоснованным. Большинство эмпирических оценок эластичности замещения лежат между 1, 4 и 2. В параграфе 15.4 показано, что выполнение неравенства $\sigma > 2$ не является критическим с точки зрения полученных результатов, для возрастания функции относительного спроса на факторы производства необходимо, чтобы σ превышала некоторое пороговое значение (см., в частности, утверждение 15.8). Во-вторых, интерес представляет взаимосвязь между эффектами размера рынка и масштаба, в частности является ли результат о вызванных технологических изменениях артефактом эффекта масштаба (который многие экономисты не рассматривают как привлекательный элемент моделей эндогенного технологического прогресса). В параграфе 15.5 показано, что это не так, и такие же результаты имеют место в модели без эффекта масштаба. В-третьих, полезное упражнение состоит в использовании этой модели для оправдания предположения о трудоинтенсивности технологического прогресса в неоклассической модели экономического роста. Этот вопрос рассмотрен в параграфе 15.6. Наконец, важно различать равновесное и оптимальное по Парето распределения ресурсов, чему посвящено упражнение 15.6. В этом упражнении показано, что качественные результаты для рыночного равновесия, включая утверждения о слабом и сильном равновесном смещении, имеют место и в оптимальном по Парето распределении ресурсов.

15.4. Направленный технологический прогресс с переливом знаний

В этом параграфе мы добавим в модель, рассмотренную выше, модель направленного технологического прогресса перелива знаний. Такое упражнение имеет три цели. Во-первых, мы покажем, что основные результаты модели направленного технологического прогресса могут быть обобщены в рамках модели с другой стандартной спецификацией границы инновационных возможностей. Во-вторых, мы убедимся в том, что результат о сильном равновесном смещении из утверждения 15.4 выполняется при несколько более слабых предположениях. В-третьих, такая постановка задачи является существенной в анализе трудоинтенсивного технологического прогресса в параграфе 15.6.

Спецификация границы инновационных возможностей в рамках модели лабораторного оборудования является частным случаем, так как в ней отсутствует *зависимость от состояния*. Под зависимостью от состояния здесь мы понимаем ситуацию, когда динамика предыдущих инноваций оказывает влияние на относительные стоимости различных типов инноваций сейчас. Из модели лабораторного оборудования следует, что расходы на НИОКР всегда ведут к одинаковому увеличению количества машин, дополняющих факторы производства L и H. Далее мы введем спецификацию с переливом знаний, которая допускает зависимость от состояния. Напомним из параграфа 13.2 из главы 13, что если в исследовательской деятельности используются редкие факторы производства, то устойчивый рост экономики не может быть достигнут за счет непрерывного увеличения количества таких факторов, занятых в секторе НИОКР. Следовательно, для достижения устойчивого экономического роста необходимо, чтобы со временем эти факторы становились все более и более производительными за счет перелива знаний из предыдущих исследований. Здесь мы для простоты предположим, что исследования осуществляются учеными и что предложение ученых в экономике постоянно во времени и равно S (в упражнении 15.7 показано, что результаты модели схожи со случаем, когда в исследовательском секторе могут быть заняты рабочие). В односекторной модели их параграфа 13.2 устойчивый эндогенный экономический рост возможен лишь если значение $\dot{N}/N$ пропорционально S. С другой стороны, в двухсекторной модели существует ряд спецификаций с различной степенью зависимости от состояния, так как производительность в каждом секторе может зависеть от количества знаний в обоих секторах. Достаточно гибкая формулировка выглядит следующим образом:

$$\dot{N}_L(t) = \eta_L N_L(t)^{(1+\delta)/2} N_H(t)^{(1-\delta)/2} S_L(t)$$

и

$$\dot{N}_H(t) = \eta_H N_L(t)^{(1-\delta)/2} N_H(t)^{(1+\delta)/2} S_H(t), \tag{15.31}$$

где $\delta \leq 1$ и переменная $S_L(t)$ обозначает количество ученых, занятых в производстве машин, дополняющих фактор L, а переменная $S_H(t)$ — количество ученых, занятых в производстве машин, дополняющих фактор H. Очевидно, что условие равновесия на рынке труда для ученых имеет следующий вид:

$$S_L(t) + S_H(t) \leq S. \tag{15.32}$$

В такой спецификации параметр δ определяет степень зависимости от состояния. Если $\delta = 0$, то зависимость от состояния отсутствует: $(\partial \dot{N}_H(t)/\partial S_H)/(\partial \dot{N}_L(t)/\partial S_L) = \eta_H/\eta_L$ вне зависимости от значений N_L и N_H вследствие того, что и N_L и N_H создают переливы знаний в текущих исследованиях в обоих секторах. В этом случае все результаты совпадают с результатами в модели из предыдущего параграфа. С другой стороны, если $\delta = 1$, то в экономике наблюдается крайняя степень зависимости от состояния. В этом случае $(\partial \dot{N}_H(t)/\partial S_H)/(\partial \dot{N}_L(t)/\partial S_L) = (\eta_H N_H)/(\eta_L N_L)$ и тогда увеличение количества машин, дополняющих фактор L, сегодня ведет к удешевлению будущих инноваций, дополняющих фактор L, но не влияет на стоимость инновации, дополняющей фактор H. Эти наблюдения проясняют роль параметра δ и смысл понятия зависимости от состояния. В некотором смысле зависимость от состояния добавляет в модель еще один уровень «возрастающей отдачи от масштаба», в данном случае не для всей экономики, а для определенных технологических линий. В частности из значительной степени зависимости от состояния следует, что если значение N_H велико по сравнению со значением N_L, то осуществление инноваций в машины, дополняющие фактор H, становится более прибыльным.

С такой формулировкой границы инновационных возможностей условия свободного выхода на рынок исследований принимают следующий вид:

$$\eta_L N_L(t)^{(1+\delta)/2} N_H(t)^{(1-\delta)/2} V_L(t) \le w_S(t),$$

$$\eta_L N_L(t)^{(1+\delta)/2} N_H(t)^{(1-\delta)/2} V_L(t) = w_S(t), \text{ если } S_L(t) > 0 \tag{15.33}$$

и

$$\eta_H N_L(t)^{(1-\delta)/2} N_H(t)^{(1+\delta)/2} V_H(t) \le w_S(t),$$

$$\eta_H N_L(t)^{(1-\delta)/2} N_H(t)^{(1+\delta)/2} V_L(t) = w_S(t), \text{ если } S_H(t) > 0, \tag{15.34}$$

где переменная $w_S(t)$ обозначает заработную плату ученого в момент времени t. Если оба этих условия свободного выхода на рынок исследований выполняются, то условие равновесия для технологий на ТСР имеет следующий вид:

$$\eta_L N_L(\mathrm{t})^{\delta} \pi_L = \eta_H N_H(t)^{\delta} \pi_H, \tag{15.35}$$

где параметр δ описывает важность зависимости от состояния в условии равновесия для технологий, а прибыль не зависит от времени, так как условие сформулировано для ТСР, на которой, как и в предыдущем параграфе, значение прибыли постоянно (см. уравнение (15.15)). Если $\delta = 0$, то это условие совпадает с уравнением (15.26). Следовательно, как замечено выше, в этом случае все результаты относящиеся к направлению технологических изменений, совпадают с результатами из модели лабораторного оборудования.

Это не так, если $\delta > 0$. Чтобы описать результаты в этом случае, объединим условие (15.35) с уравнениями (15.15) и (15.18). Тогда получаем следующее условие для равновесного относительного количества технологий (см. упражнение 15.8):

$$\left(\frac{N_H}{N_L}\right)^* = \eta^{\frac{\delta}{1-\delta\sigma}} \gamma^{\frac{\varepsilon}{1-\delta\sigma}} \left(\frac{H}{L}\right)^{\frac{\sigma-1}{1-\delta\sigma}}, \tag{15.36}$$

где, напомним, $\gamma \equiv \gamma_H/\gamma_L$ и $\eta \equiv \eta_H/\eta_L$.

Это уравнение показывает, что связь между относительным предложением факторов производства и относительной физической производительностью теперь зависит от значения параметра δ. Этот результат интуитивен: если $\delta > 0$, то увеличение N_H ведет к снижению относительной стоимости инноваций, дополняющих фактор H, и поэтому для того, чтобы выполнялось условие равновесия для технологий, прибыль π_L должна вырасти по отношению к прибыли π_H. Подставляя уравнение (15.36) в формулу для относительной цены факторов производства при заданных технологиях (15.19), получаем следующую долгосрочную (при эндогенной технологии) зависимость между относительной ценой и относительным предложением факторов производства:

$$\omega^* \equiv \left(\frac{w_H}{w_L}\right)^* = \eta^{\frac{\sigma-1}{1-\delta\sigma}} \gamma^{\frac{(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta\sigma}} \left(\frac{H}{L}\right)^{\frac{\sigma-2+\delta}{1-\delta\sigma}}. \tag{15.37}$$

Как отмечено выше, если $\delta = 0$, то оба уравнения, (15.36) и (15.37), совпадают с их аналогами в предыдущем параграфе, уравнениями (15.27) и (15.30).

Темп роста экономики определяется количеством ученых в ней. На ТСР оба сектора растут с одинаковым темпом, поэтому $\dot{N}_L(t)/N_L(t) = \dot{N}_H(t)/N_H(t)$, или

$$\eta_H N_H(t)^{\delta-1} S_H(t) = \eta_L N_L(t)^{\delta-1} S_L(t).$$

Объединяя это уравнение с уравнениями (15.32) и (15.36), получаем следующее условие для распределения исследователей между двумя различными типами технологий на ТСР:

$$\eta^{\frac{1-\sigma}{1-\delta\sigma}} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^{-\frac{\varepsilon(1-\delta)}{1-\delta\sigma}} \left(\frac{H}{L}\right)^{-\frac{(\sigma-1)(1-\delta)}{1-\delta\sigma}} = \frac{S_L^*}{S-S_L^*}. \tag{15.38}$$

Заметим, что при заданном значении H/L распределение исследователей на ТСР, S_L^* и S_H^* определено единственным образом и задает значение темпа роста экономики, что показано в следующем утверждении.

Утверждение 15.5. *Рассмотрим модель направленного технологического прогресса с переливом знаний и зависимостью от состояния на границе инновационных возможностей. Предположим, что выполняется следующее неравенство:*

$$(1-\theta)\frac{\eta_L \eta_H \left(N_H/N_L\right)^{(\delta-1)/2}}{\eta_H \left(N_H/N_L\right)^{(\delta-1)} + \eta_L} S < \rho,$$

где отношение $N_H N_L$ задано уравнением (15.36).

Тогда в экономике существует единственное равновесие на ТСР, в котором относительное количество технологий задано уравнением (15.36), *а темп роста потребления и выпуска составляет:*

$$g^* = \frac{\eta_L \eta_H \left(N_H / N_L\right)^{(\delta-1)/2}}{\eta_H \left(N_H / N_L\right)^{(\delta-1)} + \eta_L} S. \tag{15.39}$$

Доказательство. См. упражнение 15.9. ■

Однако в данной модели, в отличие от модели лабораторного оборудования, переходная динамика не всегда приводит экономику в равновесие на ТСР. Это связано с дополнительной возрастающей отдачей от масштаба, отмеченной выше. При большой степени зависимости от состояния, в случае если значение $N_H(0)$ намного превышает значение $N_L(0)$, фирме уже может оказаться невыгодно проводить исследования для технологий, дополняющих труд (фактор L). Возможность такой реализации зависит от сравнения степени зависимости от состояния δ с эластичностью замещения σ. Эластичность замещения имеет значение в данном контексте в силу того, что она задает функциональную зависимость между изменениями цен и композицией технологий, поэтому определяет размер влияния эффекта цены на направление технологического прогресса. Переходная динамика в этом случае описана в следующем утверждении.

Утверждение 15.6. *Рассмотрим модель направленного технологического прогресса с переливом знаний и зависимостью от состояния на границе инновационных возможностей. Предположим, что выполняется неравенство* $\sigma < 1/\delta$. *Тогда при любом начальном запасе технологий* $N_H(0) > 0$ *и* $N_L(0) > 0$ *в экономике существует единственная равновесная траектория. Если* $N_H(0)/N_L(0) < (N_H/N_L)^*$, *заданного уравнением* (15.36), *то* $Z_H(t) > 0$ *и* $Z_L(t) = 0$ *до тех пор, пока не выполняется равенство* $N_H(t)/N_L(t) = (N_H/N_L)^*$. *Если* $N_H(0)/N_L(0) > (N_H/N_L)^*$, *заданного уравнением* (15.36), *то* $Z_H(t) = 0$ *и* $Z_L(t) > 0$ *до тех пор, пока не выполняется равенство* $N_H(t)/N_L(t) = (N_H/N_L)^*$.

Если $\sigma > 1/\delta$, *то при начальных значениях* $N_H(0)/N_L(0) > (N_H/N_L)^*$ *экономика расходится к состоянию* $N_H(t)/N_L(t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$, *а при начальных значениях* $N_H(0)/N_L(0) < (N_H/N_L)^*$ *экономика расходится к состоянию* $N_H(t)/N_L(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство. См. упражнение 15.11. ■

Основной интерес в данной модели представляют утверждения о направлении технологического прогресса. Следующий результат, относящийся к слабому равновесному смещению, непосредственно обобщает утверждение о нем из предыдущего параграфа.

Утверждение 15.7. *Рассмотрим модель направленного технологического прогресса с переливом знаний и зависимостью от состояния на границе инновационных возможностей. Тогда в ней всегда присутствует слабое равновесное (относительное) смещение в том смысле, что увеличение относительного предложения факторов H/L всегда вызывает технологические изменения, смещенные в сторону фактора H.*

Доказательство. См. упражнение 15.12. ■

В то время, когда результат о слабом равновесном смещении остается неизменным, анализ уравнения (15.37) показывает, что получить в данной модели сильное равновесное смещение оказывается проще.

Утверждение 15.8. *Рассмотрим модель направленного технологического прогресса с переливом знаний и зависимостью от состояния на границе инновационных возможностей. Тогда если выполняется неравенство*

$$\sigma > 2 - \delta,$$

то в экономике присутствует сильное равновесное (относительное) смещение в том смысле, что увеличение относительного предложения факторов H/L ведет к росту относительной предельной производительности и относительной заработной платы фактора H по сравнению с фактором L.

На интуитивном уровне дополнительная возрастающая отдача от масштаба вследствие зависимости от состояния позволяет получить сильное равновесное смещение проще, так как вызванный изменениями эффект технологии оказывается сильнее. Рост предложения некоторого фактора производства, допустим фактора H, стимулирует увеличение N_H по отношению к N_L (в случае, если $\sigma > 1$). Зависимость от состояния делает дальнейший рост N_H более прибыльным, что оказывает еще большее воздействие на значение N_H/N_L. Так как при $\sigma > 1$ рост отношения N_H/N_L ведет к увеличению относительной цены фактора H по сравнению с фактором L, это сильное равновесное смещение становится более вероятным.

Вернемся к дискуссии о влиянии результата о сильном равновесном смещении на динамику премии за квалификацию на рынке труда в США. Из утверждения 15.8 следует, что значение эластичности замещения между квалифицированным и неквалифицированным трудом, достаточное для появления сильного равновесного смещения, может быть значительно меньшим 2. То, насколько эластичность замещения может быть меньшей 2, зависит от значения параметра δ. К сожалению, измерение этого параметра на практике достаточно затруднительно, однако существующие эмпирические свидетельства говорят о наличии некоторой зависимости от состояния в секторе НИОКР. Например, существование зависимости от состояния подтверждается эмпирическими наблюдениями о том, что большинство патентов на изобретения в определенной отрасли цитируют и берут в пример ранее выданные патенты на изобретения в этой же отрасли.

15.5. Направленный технологический прогресс без эффекта масштаба

В этом параграфе мы покажем, что эффект размера рынка и его влияние на направление технологического прогресса не зависит от наличия в экономике эффекта масштаба. Под эффектом размера рынка мы здесь понимаем влияние относительного размера рынка для пользователей двух различных типов технологий, в то время как эффект масштаба связан с влиянием размера населения экономики на равновесный темп экономического роста. Результаты из этого параграфа утверждают, что возможно полностью отделить эффект размера рынка, влекущий слабое и сильное эндогенное смещение технологического прогресса, от эффекта масштаба.

Рассмотрим модель НИОКР, основанную на знаниях, из предыдущего параграфа, однако предположим лишь ограниченный размер перелива знаний из предыдущих исследований. В частности, изменим уравнения (15.31) следующим образом:

$$\dot{N}_L(t) = \eta_L N_L^{\lambda} S_L \text{ и } \dot{N}_H(t) = \eta_H N_H^{\lambda} S_H, \tag{15.40}$$

где $\lambda \in [0, 1]$. В этом случае, если $\lambda = 1$, то имеет место спецификация границы инновационных возможностей из предыдущего параграфа, однако уже с крайней степенью зависимости от состояния. Если же $\lambda < 1$, то величина перелива знаний из предыдущих исследований ограниченна и в отсутствие роста населения экономика не будет демонстрировать устойчивого роста.

Изменим структуру модели, предположив, что общее население экономики, включая ученых, экспоненциально растет с темпом n. Используя рассуждения, схожие с рассуждениями из параграфа 13.3 в главе 13, нетрудно показать, что если $\lambda < 1$, то выпуск на душу населения в такой экономике растет с темпом (см. упражнение 15.14)

$$g^* = \frac{n}{1-\lambda}. \tag{15.41}$$

В данном случае важным элементом анализа является влияние эффекта размера рынка на направление технологического прогресса. Чтобы изучить этот вопрос, заметим, что условие равновесия на рынке технологий, вытекающее из уравнения (15.40), имеет по аналогии с уравнением (15.35) следующий вид:

$$\eta_L N_L^{\lambda} \pi_L = \eta_H N_H^{\lambda} \pi_H. \tag{15.42}$$

Тогда из рассуждений, схожих со сделанными выше, следует, что относительное количество технологий задается следующим уравнением:

$$\left(\frac{N_L}{N_H}\right)^* = \eta^{\frac{\sigma}{1-\lambda\sigma}} \gamma^{\frac{\varepsilon}{1-\lambda\sigma}} \left(\frac{H}{L}\right)^{\frac{\sigma-1}{1-\lambda\sigma}}. \tag{15.43}$$

Далее, объединяя уравнение (15.43) с уравнением (15.19), которое продолжает определять относительную цену факторов производства при заданных технологиях, получаем следующее равенство:

$$\omega^* \equiv \left(\frac{w_H}{w_L}\right)^* = \eta^{\frac{\sigma-1}{1-\lambda\sigma}} \gamma^{\frac{(1-\lambda)\varepsilon}{1-\lambda\sigma}} \left(\frac{H}{L}\right)^{\frac{\sigma-2+\lambda}{1-\lambda\sigma}}. \tag{15.44}$$

Это уравнение показывает, что даже при отсутствии в экономике эффекта масштаба, в ней имеют место результаты из предыдущего параграфа.

Утверждение 15.9. *Рассмотрим модель направленного технологического прогресса без эффекта масштаба, описанную выше. Тогда в ней всегда наблюдается слабое равновесное (относительное) смещение в том смысле, что увеличение относительного предложения факторов производства H/L всегда влечет технологические изменения, относительно смещенные в сторону фактора H. Более того, если выполняется неравенство*

$$\sigma > 2 - \lambda,$$

то в экономике наблюдается сильное равновесное (относительное) смещение в том смысле, что увеличение относительного предложения факторов производства H/L ведет к росту относительной предельной производительности и относительной заработной платы фактора H по сравнению с фактором L.

15.6. Эндогенный трудоинтенсивный технологический прогресс

Одно из преимуществ моделей направленного технологического прогресса в том, что они позволяют провести анализ вопроса, почему технологический прогресс может проходить исключительно трудоинтенсивно, как требуется для существования в экономике траектории сбалансированного роста (см. теорему 2.6 из главы 2). В этом параграфе мы покажем, что из моделей направленного технологического прогресса вытекает естественное объяснение причин, по которым технологическое развитие может оказаться более трудоинтенсивным, чем капиталоинтенсивным. Однако в большинстве случаев технологические изменения в равновесии не оказываются исключительно трудоинтенсивными, и как следствие в экономике не существует ТСР. Несмотря на это, в одном важном частном случае модели технологические изменения в долгосрочной перспективе оказываются исключительно трудоинтенсивными, в точности как в неоклассической модели экономического роста, таким образом предоставляя обоснование для одного из сильных предположений большинства стандартных моделей экономического роста.

Для анализа трудоинтенсивного технологического прогресса рассмотрим двухфакторную модель, в которой фактор H будет соответствовать капиталу, то есть в агрегированной производственной функции (15.3) положим $H(t) = K(t)$. Соответственно, множества типов машин, используемых в двух секторах, обозначим как N_L и N_K. Для упрощения выкладок предположим, что норма амортизации капитала равна нулю и поэтому арендная стоимость капитала совпадает с процентной ставкой $r(t)$.

Вначале заметим, что в контексте замещения между трудом и капиталом эмпирические свидетельства говорят о том, что значение эластичности замещения, меньшее единицы, $\sigma < 1$, выглядит намного более правдоподобным описанием действительности (в то время как в контексте замещения между квалифицированным и неквалифицированным трудом эмпирические наблюдения говорят в пользу неравенства $\sigma > 1$). Значение эластичности замещения, меньшее единицы, не только согласуется с эмпирическими данными, но и выглядит правдоподобным с экономической точки зрения. Например, для производственной функции вида ПЭЗ при значении эластичности замещения между капиталом и трудом, превышающим единицу, производство становится возможным даже при наличии единственного фактора — труда или капитала, что не согласуется с интуитивными предположениями.

Далее напомним, что если $\sigma < 1$, то смещение технологии происходит в сторону фактора, по которому она не интенсивна. Следовательно, трудоинтенсивный технологический прогресс соответствует смещению технологии в сторону капитала. Тогда интересующий нас вопрос выглядит так: при каких обстоятельствах технологические изменения в экономике будут относительно смещены в сторону капитала? И в каком случае в равновесии технологии будут смещены в сторону капитала в достаточной степени для того, чтобы технологический прогресс был нейтральным по Харроду? Основное отличие капитала от труда состоит в том, что он является накапливаемым фактором производства. Другими словами, в большинстве моделей экономического роста присутствует некоторый тип расширения капитала, то есть отношение $K(t)/L$ увеличивается по мере роста экономики. Тогда, в отличие от предыдущих моделей, в которых мы изучали последствия одномоментного разового изменения относительного предложения факторов производства, здесь фокус анализа должен быть смещен на изучение влияния непрерывных изменений относительного предложения капитала на технологические изменения. В свете этого наблюдения ответ на первый вопрос очевиден: расширение капитала вместе с утверждением 15.3 ведет к тому, что технологические изменения должны быть более трудоинтенсивными, чем капиталоинтенсивными.

Следующее утверждение резюмирует основную идею предыдущего абзаца. Для простоты в этом утверждении динамика роста $K(t)/L$ рассматривается как последовательность одномоментных увеличений (полная равновесная динамика описана в двух последующих утверждениях).

Утверждение 15.10. *Рассмотрим базовую модель направленного технологического прогресса с капиталом, где $H(t) = K(t)$. Тогда, если значение $K(t)/L$ увеличивается со временем и $\sigma < 1$, относительное количество технологий $N_L(t)/N_K(t)$ также увеличивается со временем, то есть технологические изменения являются относительно трудоинтенсивными.*

Доказательство. Из уравнений (15.27) и (15.36) следует, что есть $\sigma < 1$, то рост $K(t)/L$ влечет рост $N_L(t)/N_K(t)$. ■

Из этого результата уже следуют важные экономические выводы. Логика направленного технологического прогресса объясняет существование естественных причин, по которым технологии могут быть более трудоинтенсивными, чем капиталоинтенсивными. Несмотря на то что этот результат может показаться обнадеживающим, в следующем утверждении показано, что его непросто согласовать с наблюдением о том, что технологический прогресс должен быть исключительно трудоинтенсивным (нейтральным по Харроду). Чтобы сделать формулировку этого утверждения наиболее простой и облегчить дальнейшее изложение материала этого параграфа, сделаем упрощающее предположение о том, что накопление капитала в экономике проходит экспоненциально с экзогенно заданным темпом, то есть

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s_K. \qquad (15.45)$$

Утверждение 15.11. *Рассмотрим базовую модель направленного технологического прогресса с переливом знаний и зависимостью от состояния. Предположим, что в ней выполняется неравенство $\sigma < 1$, а процесс накопления капитала описывается уравнением* (15.45). *Тогда в модели не существует ТСР.*

Доказательство. См. упражнение 15.21. ■

На интуитивном уровне, даже когда технологические изменения более трудоинтенсивны, чем капиталоинтенсивны, в равновесии продолжает происходить капиталоинтенсивный технологический прогресс. Этот процесс, вместе с накоплением капитала, противоречит существованию в экономике ТСР. На самом деле мы можем наблюдать даже в некотором смысле более отрицательный результат (см. упражнение 15.21): в любом асимптотическом равновесии процентная ставка не может быть постоянной величиной, поэтому темп роста потребления и выпуска также не будет постоянным.

Несмотря на этот общий отрицательный результат, существует частный случай модели, который оправдывает принципиальную структуру неоклассической модели экономического роста. Рассмотрим случай, когда зависимость от состояния в экономике достигает крайней степени, то есть $\delta = 1$. Несмотря на то что это предположение в некотором смысле выглядит экстремально, оно также возникает естественным образом. В нем утверждается, что переливы знаний происходят лишь внутри заданного класса технологий, поэтому граница инновационных возможностей (записанная как функция трудоинтенсивных или капиталоинтенсивных технологий) имеет следующий вид:

$$\frac{\dot{N}_L(t)}{N_L(t)} = \eta_L S_L(t) \text{ и } \frac{\dot{N}_K(t)}{N_K(t)} = \eta_K S_K(t).$$

В этом случае нетрудно убедиться, что из условия равновесия на рынке технологий вытекает соотношение между долями доходов капитала и труда в национальном доходе на ТСР (см. упражнение 15.22):

$$\frac{r(t)K(t)}{w(t)L} = \eta^{-1}. \tag{15.46}$$

Таким образом, направленный технологический прогресс ведет к тому, что в долгосрочной перспективе доля дохода капитала в национальном доходе оказывается постоянной. Из постоянства долей факторов производства (вместе с расширением капитала) следует, что асимптотически все технологические изменения должны быть трудоинтенсивными. Если быть более точными, напомним, что из уравнения (15.19) вытекает следующее равенство:

$$\frac{r(t)}{w(t)} = \gamma^{\frac{\varepsilon}{\sigma}} \left(\frac{N_K(t)}{N_L(t)} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \left(\frac{K(t)}{L} \right)^{-\frac{1}{\sigma}},$$

где $\gamma \equiv \gamma_K / \gamma_L$, а параметр γ_K заменяет γ_H в производственной функции (15.3). Следовательно, мы имеем равенство:

$$\frac{r(t)K(t)}{w(t)L} = \gamma^{\frac{\varepsilon}{\sigma}} \left(\frac{N_K(t)}{N_L(t)} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \left(\frac{K(t)}{L} \right)^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}.$$

В этом случае из уравнений (15.46) и (15.45) следует, что

$$\frac{\dot{N}_L(t)}{N_L(t)} - \frac{\dot{N}_K(t)}{N_K(t)} = s_K. \tag{15.47}$$

Более того, нетрудно убедиться, что равновесная процентная ставка задается следующим уравнением (см. упражнение 15.23):

$$r(t) = \beta\gamma_K N_K(t) \left[\gamma_L \left(\frac{N_L(t)L}{N_K(t)K(t)} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_K \right]^{\frac{1}{\sigma-1}}. \tag{15.48}$$

Далее определим ТСР в экономике как равновесную траекторию, на которой потребление растет с постоянным темпом (при этом два сектора экономики и запасы технологий в них могут расти с разными темпами). Из уравнения (15.22) следует, что это возможно, только если процентная ставка $r(t)$ постоянна и равна некоторому значению r^*. Тогда из уравнения (15.47) следует, что отношение $(N_L(t)L)/(N_K(t)K(t))$ также будет постоянным, а из уравнения (15.48) вытекает постоянство $N_K(t)$. Таким образом, из уравнения (15.47) следует, что, для того чтобы экономика в конечном счете сходилась к ТСР, необходимо чтобы технологический прогресс в долгосрочной перспективе протекал трудоинтенсивно. Эти рассуждения резюмируются в следующем утверждении.

Утверждение 15.12. *Рассмотрим базовую модель направленного технологического прогресса с двумя факторами производства, соответствующими труду и капиталу. Предположим, что в спецификации границы инновационных возможностей присутствуют переливы знаний с крайней степенью зависимости от состояния, то есть* $\delta = 1$, *а накопление капитала описывается уравнением* (15.45). *Тогда в экономике существует единственное равновесное распределение ресурсов на ТСР, в котором технологический прогресс протекает исключительно трудоинтенсивно, процентная ставка постоянна и потребление и выпуск растут с постоянным темпом.*

Доказательство. Часть доказательства представлена в рассуждениях, предшествующих утверждению. Окончанию доказательства посвящено упражнение 15.24, в котором показано, что других ТСР с постоянным темпом роста экономики не существует. ■

Заметим, что из утверждения 15.12 не следует, что все технологические изменения должны быть нейтральными по Харроду (исключительно трудоинтенсивными). На траектории переходной динамики могут происходить (и действительно происходят) капиталоинтенсивные технологические изменения. Однако в долгосрочной перспективе (асимптотически или в пределе при $t \to \infty$) все технологические изменения являются трудоинтенсивными.

Также нетрудно убедиться, что распределение ресурсов на ТСР с исключительно трудоинтенсивным технологическим прогрессом является глобально устойчивым при $\sigma < 1$ (см. упражнение 15.25). Этот результат выглядит разумным, особенно в свете утверждения 15.6, в котором говорится, что для устойчивости равновесной динамики в модели с переливом знаний требуется выполнение неравенства $\sigma < 1/\delta$. Так как мы предполагаем крайнюю степень зависимости от состояния ($\delta = 1$), то это неравенство превращается в неравенство $\sigma < 1$. На интуитивном уровне если бы капитал и труд были валовыми заменителями ($\sigma > 1$), то в равновесии бы происходили быстрое накопление капитала и капиталоинтенсивные технологические изменения, ведущие к асимптотическому расхождению темпа роста потребления. С другой стороны, если капитал и труд являются валовыми дополняющими товарами ($\sigma < 1$), то накопление капитала ведет к более чем пропорциональному росту стоимости труда и прибыль от трудоинтенсивных технологий возрастает в большей степени, чем от капиталоинтенсивных. Это является стимулом к дальнейшим трудоинтенсивным технологическим изменениям. Этот важный эффект цены играет ключевую роль в устойчивости распределения ресурсов на ТСР в утверждении 15.12. Как подсказывает интуиция, значение эластичности замещения между капиталом и трудом, меньшее единицы, заставляет экономику стремиться к сбалансированному распределению эффективных единиц капитала и труда (под «эффективным» мы здесь понимаем количество капитала и труда, скорректированное на дополняющие их технологии). Так как накопление капитала происходит с постоянным темпом, в сбалансированном распределении ресурсов производительность труда должна расти быстрее, в частности экономика должна сходиться к равновесной траектории с исключительно трудоинтенсивным технологическим прогрессом.

15.7. Обобщения и другие приложения

Результаты, полученные в этой главе, основываются на ряде специфических предположений, присущих моделям эндогенного технологического прогресса (например, на предположениях о предпочтениях Диксита—Стиглица и о линейной структуре экономики, позволяющих добиться устойчивого роста экономики). Читатель естественным образом может поставить вопрос о том, возможно ли обобщение результатов о сильном и слабом равновесном смещениях технологии в моделях, где эти предположения ослаблены. В общем смысле ответ на этот вопрос положительный. В работе [Acemoglu 2007a] показано, что если все технологические изменения являются интенсивными по некоторому фактору производства, то все основные результаты этой главы выполняются и в моделях, где производственная функция и функция издержек принимают более общий вид. В частности, в более общей модели всегда наблюдается слабое (относительное) равновесное смещение в ответ на увеличение относительного предложения факторов производства, а сильное равновесное смещение наблюдается, если эластичность замещения между факторами достаточно велика. Однако если мы рассмотрим более широкий выбор типов технологических изменений, то эти результаты выполняются не всегда. Несмотря на это, утверждения из этой главы имеют намного более общий смысл. В работе [Acemoglu 2007a] вводятся дополнительные понятия слабого и сильного *абсолютного* равновесного смещения, которые связаны с изменениями стоимости фактора производства в результате изменения предложения этого фактора (а не с изменением стоимости одного фактора по сравнению со стоимостью другого фактора, чему посвящена данная глава). При достаточно слабых предположениях о регулярности модели в экономике всегда наблюдается слабое абсолютное равновесное смещение в том смысле, что увеличение предложения некоторого фактора производства всегда вызывает технологические изменения, смещенные в сторону этого фактора. Более того, несмотря на то что из стандартной теории фирмы следует, что увеличение предложения некоторого фактора производства должно вести к снижению его стоимости, при достаточно правдоподобных предположениях вызываемые этим технологические изменения могут оказаться достаточно значительными для того, чтобы стоимость этого фактора возросла. В этом случае в экономике наблюдается сильное абсолютное равновесное смещение и функции спроса на факторы производства становятся возрастающими (в общем равновесии). Мы не представляем эти результаты здесь, так как их доказательство требует введения дополнительных обозначений и использует немного другие математические рассуждения.

Полезным представляется также коротко остановиться на ряде других важных приложений моделей направленного технологического прогресса. Для того чтобы не перегружать книгу, оставляем их читателю в качестве упражнений. В частности, в упражнении 15.19 показано, каким образом эта модель может быть использована для анализа известной в экономической истории гипотезы Хабаккука, которая связывает быстрый темп технологического прогресса в США в XIX в. с относительной нехваткой рабочей силы. Несмотря на важность этой гипотезы в экономической истории, экономисты не обладают убедительной моделью этого процесса. В упражнении показано, почему неоклассическая модель экономического роста не позволяет описать эту динамику и то, каким образом модель направленного технологического прогресса может быть использована для объяснения этого феномена в случае, когда эластичность замещения между капиталом и трудом не превосходит единицы.

В упражнении 15.20 демонстрируется влияние международной торговли на направление технологического прогресса. В нем показано, что международная торговля часто воздействует на направление развития технологического прогресса и что часто причиной этого воздействия является эффект цены, описанный в этой главе.

Упражнение 15.26 возвращается к обсуждению рассмотренного выше вопроса о связи технологического прогресса и безработицы, наблюдаемой в странах континентальной Европы. В нем показано, что «шок скачка заработных плат» может вначале привести к росту равновесного значения безработицы, а затем вызвать эндогенные технологические изменения, смещенные в сторону капитала, что приводит к сокращению спроса на труд и к дальнейшему росту безработицы.

Наконец, в упражнении 15.27 обсуждается вопрос о том, каким образом относительное предложение факторов производства может быть сделано в эндогенной переменной модели и исследуется двухсторонняя причинно-следственная связь между относительным предложением и относительными технологиями.

15.8. Альтернативный подход к трудоинтенсивному технологическому прогрессу*

Все модели, рассмотренные ранее в этой главе, основаны на базовом подходе к направленному технологическому прогрессу, развитому в работах [Acemoglu 1998, 2002a]. В параграфе 15.6 показано, как этот подход может быть использован для поиска условий, при которых технологический прогресс эндогенно становится трудоинтенсивным. Альтернативный подход к этому вопросу предложен в статье [Jones 2005]. Далее мы коротко опишем этот альтернативный подход.

В моделях, описанных выше, различные типы технологий (например, N_H и N_L в предыдущем параграфе) рассматриваются как переменные состояния. Поэтому краткосрочная производственная функция соответствует множеству производственных возможностей при заданных значениях переменных состояния, в то время как долгосрочная производственная функция описывает ситуацию после подстройки технологических переменных состояния. В статье [Jones 2005] предложен другой подход, основанный на классической работе [Houthakker 1955]. В ней делается предположение о том, что агрегированная производственная функция может быть выведена как верхняя огибающая множества различных идей (или производственных проектов). Каждая технология или проект соответствует определенному способу объединения капитала и труда (то есть леонтьевской производственной функции с этими факторами производства). Однако, если фирма имеет доступ к различным способам объединения труда и капитала, огибающая функция будет отличаться от леонтьевской. В одном из важных утверждений в работе [Houthakker 1955] показано, что если распределение различных проектов задано распределением Парето (формальное определение которого будет дано ниже), то верхняя огибающая большого количества проектов соответствует производственной функции типа Кобба—Дугласа. Таким образом, в работе предложено обоснование выбора производственной функции типа Кобба—Дугласа, основанное на «анализе множества проектов».

Статья [Jones 2005] базируется на этих выводах и расширяет их. В ней автор утверждает, что долгосрочная производственная функция должна рассматриваться как верхняя огибающая большого количества идей, возникающих со временем. В заданный момент времени множество идей, которые общество может использовать в производственной деятельности, фиксировано и эти идеи определяют вид краткосрочной производственной функции экономики. Однако в долгосрочной перспективе общество создает новые идеи (в процессе исследований или экзогенным образом) и долгосрочная производственная функция является верхней огибающей этого расширяющегося множества идей. Используя комбинацию распределения Парето и леонтьевских производственных функций для заданной идеи, Ч. Джонс показывает важное различие между краткосрочной и долгосрочной производственными функциями. В частности, в работе [Houthakker 1955] долгосрочная производственная функция имеет вид функции Кобба—Дугласа и поэтому доли факторов производства в национальном доходе являются постоянными величинами. Однако это не всегда справедливо для краткосрочной производственной функции. Тогда, используя рассуждения, схожие с рассуждениями из параграфа 15.6, можно показать, что в процессе перехода от краткосрочной к долгосрочной производственной функции в экономике происходят трудоинтенсивные технологические изменения.

Далее мы приведем краткое изложение модели Джонса, сделав упор на основные экономические выводы. Как показано выше, основными элементами модели Джонса являются «идеи». Идея в данном контексте — это метод объединения капитала и труда для производства товара. В любой заданный момент времени экономика получает доступ к множеству различных идей. Обозначим множество всех возможных идей как $\mathcal{I}$, а множество идей, доступных в момент времени t, — как $\mathcal{I}(t) \subset \mathcal{I}$. Каждая идея $i \in \mathcal{I}$ определяется вектором (a_i, b_i). Суть модели состоит в построении множества производственных возможностей экономики из множества доступных идей. Чтобы это сделать, необходимо разъяснить, как определенная идея используется в производственной деятельности. Предположим, что в экономике существует единственный конечный товар Y, для производства которого может быть использована любая идея $i \in \mathcal{I}$ с помощью леонтьевской производственной функции

$$Y(t) = \min\{b_i K(t), a_i L(t)\}, \tag{15.49}$$

где переменные $K(t)$ и $L(t)$ обозначают количество капитала и труда в экономике соответственно. В общем случае в экономике могут использоваться различные идеи, поэтому для обозначения количеств капитала и труда, занятых в идее i, необходимо индексировать переменные $K(t)$ и $L(t)$ индексом i. Однако, следуя работе [Jones 2005], мы предположим, что в любой заданный момент времени в экономике используется лишь одна идея. Это предположение ограничивает анализ, однако существенно упрощает модель и ее изложение (см. упражнение 15.29). Из вида производственной функции (15.49) очевидно, что параметр a_i соответствует трудоинтенсивной производительности идеи i, а параметр b_i — ее капиталоинтенсивной производительности.

Вспомним из параграфа 15.6 о том, что в стандартной модели технологические изменения являются исключительно трудоинтенсивными лишь при ограничивающем предположении о крайней степени зависимости от состояния, то есть когда $\delta = 1$ (см. утверждение 15.2). В этой модели мы также, следуя работе [Houthakker 1955], вынуждены сделать специфическое предположение о том, что идеи независимы между собой и являются выборкой из распределения Парето. Случайная величина y распределена по Парето, если ее функция распределения выглядит как $G(y) = 1 - \Gamma y^{-\alpha}$ при $\Gamma > 0$ и $\alpha > 0$. Далее, предполагая, что каждая компонента a_i и b_i идеи i является независимой выборкой из двух распределений Парето, получаем следующие равенства:

$$\Pr[a_i \le a] = 1 - \left(\frac{a}{\gamma_a}\right)^{-\alpha} \text{ и } \Pr[b_i \le b] = 1 - \left(\frac{b}{\gamma_b}\right)^{-\beta},$$

при $a \ge \gamma_a > 0$, $b \ge \gamma_b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha + \beta > 1$ (важность последнего неравенства обсуждается в упражнении 15.31).

Предположение о распределении Парето играет важнейшую роль в выводе результатов этой модели. Поэтому нам необходимо уяснить, в чем состоят важные свойства распределения Парето и почему они играют важную роль во многих разделах экономики. Распределение Парето обладает двумя связанными между собой свойствами. Одно из них заключается в том, что оно имеет «толстые» хвосты (и по этой причине дисперсия случайной величины, распределенной по Парето, может равняться бесконечности, см. упражнение 15.30). Второе важное свойство распределения Парето заключается в том, что условное математическое ожидание случайной величины y с таким распределением при условии, что она больше некоторого значения y', $\mathbb{E}[y \mid y \geq y']$, пропорционально y'. Поэтому, условно говоря, распределение Парето несет в себе некоторую степень пропорциональной зависимости: ожидаемое значение чего-то лучшего в будущем пропорционально уже достигнутому сегодня. Это свойство делает распределение Парето очень удобным для моделирования процессов, связанных с экономическим ростом.

Далее, используя эту структуру, введем следующую функцию:

$$\mathbb{G}(b, a) \equiv \Pr[a_i \geq a \text{ и } b_i \geq b] = \left(\frac{b}{\gamma_b}\right)^{-\beta}\left(\frac{a}{\gamma_a}\right)^{-\alpha} \tag{15.50}$$

которая является совместной вероятностью события $a_i \geq a$ и $b_i \geq b$. Обозначим уровень агрегированного выпуска, которого можно достичь, используя идею i, капитал K и труд L как $\tilde{Y}_i(K, L)$. До момента реализации значений a_i и b_i для идеи i это значение выпуска — случайная величина. Так как производственная функция является леонтьевской, распределение $\tilde{Y}_i$ может быть описано функцией распределения этой случайной величины:

$$\begin{aligned} H(y) \equiv \Pr\left[\tilde{Y}_i \leq y\right] &= 1 - \Pr[a_i L \geq y \text{ и } b_i K \geq y] = \\ &= 1 - \mathbb{G}\left(\frac{y}{K}, \frac{y}{L}\right) = \\ &= 1 - \gamma K^{\beta} L^{\alpha} y^{-(\alpha+\beta)}, \end{aligned} \tag{15.51}$$

где вторая строка следует из определения функции $\mathbb{G}$, третья строка следует из уравнения (15.50) и $\gamma \equiv \gamma_a^{\alpha}\gamma_b^{\beta}$. Таким образом, случайная величина $\tilde{Y}_i$ также распределена по Парето (при условии $y \geq \min\{\gamma_b K, \gamma_a L\}$).

Далее перейдем к описанию «глобальной» производственной функции, которая задает максимальное количество выпуска, который может быть произведен с помощью любой из доступных идей. Другими словами, введем функцию $\tilde{Y}(K, L) = \max\limits_{i \in \mathcal{I}(t)} \tilde{Y}_i(K, L)$. Обозначим общее число производственных технологий (идей), лежащих в множестве $\mathcal{I}(t)$ (в момент времени t), как $N(t)$. Тогда в момент времени t в экономике имеется $N(t)$ различных производственных идей. Так как, по предположению, все $N(t)$ идей независимы друг от друга, глобальная производственная функция может быть записана в следующем альтернативном виде:

$$\tilde{Y}(t, N(t)) = F(K(t), L(t), N(t)) \equiv \max_{i=1,\ldots,N(t)} \min\{b_i K(t), a_i L(t)\}. \tag{15.52}$$

Так как реализация всех $N(t)$ идей случайна, выпуск в момент времени t, $\tilde{Y}(t, N(t))$ при заданных значениях $K(t)$ и $L(t)$ также является случайной величиной. Мы заинтересованы в описании ее функции распределения. Независимость выборки $N(t)$ идей между собой значительно упрощает дальнейший анализ. Вероятность того, что реализация $\tilde{Y}(t,\ N(t))$ окажется меньше y, равна вероятности того, что производство с использованием каждой из $N(t)$ идей будет меньше y. Тогда получаем следующее равенство:

$$\Pr[\tilde{Y}(t,\ N(t)) < y] = H(y)^{N(t)} = (1 - \gamma K(t)^{\beta} L(t)^{\alpha} y^{-(\alpha+\beta)})^{N(t)}. \quad (15.53)$$

Из уравнения (15.53) нетрудно увидеть, что с увеличением количества доступных идей $N(t)$ вероятность того, что выпуск $\tilde{Y}(t,\ N(t))$ окажется меньше, чем любое заданное значение y, стремится к нулю. Это утверждение просто является перифразом наблюдения о том, что выпуск неограниченно растет, что в данной модели следует из неограниченности носителя распределения Парето. Следовательно, у нас нет возможности описать функцию распределения выпуска при $N(t) \to \infty$. Вместо этого необходимо вести анализ агрегированного выпуска, нормализованного подходящей переменной, например такой, как его математическое ожидание (и применить рассуждения, аналогичные центральной предельной теореме). Из распределения Парето следует, что нормализующая переменная выглядит как $n(t) \equiv \left(\gamma N(t) K(t)^{\beta} L(t)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$. Поэтому получаем следующее равенство:

$$\Pr[\tilde{Y}(t,\ N(t)) \le \left(\gamma N(t) K(t)^{\beta} L(t)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} y] =$$

$$= (1 - \gamma K(t)^{\beta} L(t)^{\alpha} (n(t) y)^{-(\alpha+\beta)})^{N(t)} = \left(1 - \frac{y^{-(\alpha+\beta)}}{N(t)}\right)^{N(t)}, \quad (15.54)$$

где из второй строки нетрудно заметить, что переменная $n(t) \equiv$ $\equiv (\gamma N(t) K(t)^{\beta} L(t)^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$ действительно является подходящим нормализующим фактором. Далее, используя предел $\lim_{N\to\infty} (1 - x/N)^N = \exp(-x)$, для любого $y > 0$ получаем следующее равенство:

$$\lim_{N(t)\to\infty} \Pr[\tilde{Y}(t,\ N(t)) \le \left(\gamma N(t) K(t)^{\beta} L(t)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} y] = \exp\left(-y^{-(\alpha+\beta)}\right). \quad (15.55)$$

Уравнение (15.55) задает знаменитое *распределение Фреше*, которое является одним из трех распределений экстремальных значений[3]. Точнее, из уравнения (15.55) следует, что

[3] В частности, один из замечательных результатов в математической статистике состоит в том, что если взять N независимых реализаций из некоторого распределения F, то функция распределения самого большого значения при $N \to \infty$ сходится к одному из трех распределений: распределению Вейбулла, распределению Гумбеля или распределению Фреше. См., например, учебник [Billingsley 1995, section 14].

$$\frac{\tilde{Y}(t,\ N(t))}{\left(\gamma N(t)K(t)^{\beta}L(t)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}} \sim \text{Fréchet}(\alpha+\beta),$$

то есть долгосрочная функция распределения соответствующим образом нормализованного выпуска асимптотически сходится к распределению Фреше. Тогда, по мере того как переменная $N(t)$ растет и в экономике появляются новые идеи (то есть в пределе при $t \to \infty$), долгосрочная глобальная производственная функция может быть аппроксимирована следующим образом:

$$\tilde{Y}(t,\ N(t)) \approx \varepsilon(t)\left(\gamma N(t)K(t)^{\beta}L(t)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \tag{15.56}$$

где случайная величина $\varepsilon(t)$ имеет распределение Фреше. Интуитивное объяснение этой формулы схоже с объяснением из работы [Houthakker 1955], в которой показано, что агрегирование по различным способам производства с независимо распределенными по Парето технологиями ведет к производственной функции типа Кобба—Дугласа. Однако следствия из этих двух результатов различаются между собой. В частности, из того, что долгосрочная производственная функция примерно выглядит как функция Кобба—Дугласа, следует, что доли факторов производства в национальном доходе должны быть постоянными в долгосрочной перспективе. При этом краткосрочная производственная функция (для конечного множества идей) не является функцией Кобба—Дугласа. Следовательно, по мере того как переменная $N(t)$ возрастает, производственная функция эндогенно сходится к своему предельному виду функции Кобба—Дугласа с постоянными долями факторов производства и, аналогично анализу из параграфа 15.6, это означает, что технологические изменения в конечном счете должны стать исключительно трудоинтенсивными. Следовательно, модель Джонса показывает, что из выводов из работы [Houthakker 1955] о статической производственной функции следует, что краткосрочная производственная функция изменяется эндогенно и технологические изменения в пределе становятся трудоинтенсивными, и это гарантирует, что в долгосрочной перспективе экономика ведет себя так, как будто производственная функция имеет вид функции Кобба—Дугласа.

Несмотря на то что эта идея представляет интерес, а распределение Парето встречается во многих важных разделах экономики и обладает рядом хороших свойств, из этого не следует, что она предоставляет убедительные причины того, что технологические изменения в долгосрочной перспективе являются трудоинтенсивными. Трудоинтенсивный технологический прогресс должен быть результатом равновесной динамики экономики (следствием исследовательской и инновационной активности фирм и работников). Модели направленного технологического прогресса показывают, каким образом стимулы к проведению такой активности определяют динамику экономики при различных сценариях равновесия.В модели Джонса производственная функция типа Кобба—Дугласа возникает исключительно в результате агрегирования. В ней отсутствуют цены, эффект размера рынка и равновесные взаимодействия между агентами. В связи с этим не совсем ясно, анализу какой экономической единицы посвящена модель. Ее выводы могут быть применены к единичной фирме, к определенной отрасли или к некоторому региону страны. Поэтому, если мы готовы использовать ее для анализа всей экономики, мы также можем применить ее ко всем фирмам, отраслям, регионам и сделать вывод о том, что долгосрочная производственная функция каждой фирмы, отрасли и региона должна иметь вид функции Кобба—Дугласа. Однако доступные эмпирические свидетельства говорят о значительных различиях производственных функций в разных отраслях и о том, что они не могут быть аппроксимированы функцией Кобба—Дугласа (см. обзор эмпирических свидетельств о виде производственных функций на уровне отраслей и на агрегированном уровне в работе [Acemoglu 2003a]. Отсюда следует, что значительный интерес может представить совместный анализ агрегирования различных проектов или идей, как в работах [Houthakker 1955] и [Jones 2005], и равновесного взаимодействия агентов в экономике. Такой анализ может помочь определить, на каком уровне должно вестись агрегирование и почему оно возможно для всей экономики, но не всегда возможно для отдельных фирм и отраслей.

15.9. Основные выводы

В этой главе представлен ряд базовых моделей направленного технологического прогресса. Подход, развитый в ней, отличается от моделей эндогенных технологических изменений из двух предыдущих глав тем, что в нем описывается не только динамика накопления технологий, но и направление и смещение технологических изменений. Модели направленного технологического прогресса позволяют вести анализ ряда новых вопросов. Среди них стоит выделить вопросы о смещении технологического прогресса в сторону квалификации в течение последних ста лет, об ускорении технологического прогресса, смещенного в сторону квалификации в последние десятилетия, о причинах смещения технологического прогресса в сторону неквалифицированного труда в XIX в. и о связи между институтами на рынке труда и типами развиваемых и внедряемых в экономике технологий. Еще одно важное приложение этих моделей состоит в том, что они позволяют нам понять, почему технологический прогресс в моделях неоклассического типа может быть во многом трудоинтенсивным.

Модели направленного технологического прогресса относительно простого вида позволяют пролить свет на все эти вопросы. Они имеют достаточно простую математическую структуру и позволяют получить решения для относительного количества технологий и темпа роста экономики в явном виде. Ответы на эмпирические вопросы, поставленные выше, следуют из двух важных и, возможно, на первый взгляд неожиданных результатов: о «слабом равновесном смещении» и о «сильном равновесном смещении». В первом утверждается, что при достаточно слабых предположениях увеличение относительного предложения фактора производства всегда вызывает эндогенные технологические изменения, относительно смещенные в сторону этого фактора. Следовательно, изменения отношения количества квалифицированных и неквалифицированных работников и отношения капитала к труду оказывают значительное влияние на относительную производительность этих факторов. Утверждение о сильном равновесном смещении оказывается более неожиданным. Оно говорит о том, что вопреки выводам из базовой теории фирмы функция относительного спроса на фактор производства является возрастающей по цене. В частности если эластичность замещения между факторами достаточно высока, то увеличение относительного предложения фактора производства влечет технологические изменения, достаточно сильные для того, чтобы стоимость этого фактора возросла. Другими словами, долгосрочная (при эндогенных технологиях) функция относительного спроса на фактор становится возрастающей. Возможное возрастание функции относительного спроса на фактор производства не только имеет ряд важных эмпирических следствий, но и демонстрирует силу индуцированных технологических изменений.

В главе также представлено несколько приложений этих идей в ряде эмпирически важных областей. Модели направленного технологического прогресса достаточно молоды, и в дальнейшем они будут развиваться по многим теоретическим направлениям. Важнее то, что идеи этих моделей имеют значительное количество приложений.

Наконец, модели, представленные в этой главе, еще раз убеждают в том, что мы не должны рассматривать технологии как черный ящик, наоборот, они должны моделироваться как результат принятия решений фирмами, индивидами и другими агентами в экономике. Отсюда следует, что стимулы к получению прибыли играют важную роль в определении как агрегированного темпа технологического прогресса, так и в направлении смещения развиваемых и внедряемых технологий.

15.10. Литература

Модели направленного технологического прогресса были развиты в работах: [Acemoglu 1998, 2002a, 2003a,b, 2007a; Kiley 1999; Acemoglu, Zilibotti 2001]. В этих статьях используется термин «направленный технический прогресс», однако здесь мы используем связанный с ним термин «направленный технологический прогресс» для того, чтобы продемонстрировать связь с моделями эндогенного технологического прогресса, представленными в предыдущих главах. Модельный аппарат, предложенный в этой главе, основан на работе [Acemoglu 2002a]. Более общая модель без ограничений на функциональный вид зависимостей представлена в статье [Acemoglu 2007a].

Среди других статей, посвященных анализу направленного технологического прогресса, необходимо выделить работы: [Xu 2001; Gancia 2003; Thoening, Verdier 2003; Ragot 2003; Duranton 2004; Benabou 2005; Caselli, Coleman 2005; Jones 2005].

Модели направленного технологического прогресса тесно связаны с более ранней литературой об индуцированных инновациях. Первое упоминание об индуцированных инновациях было сделано неявным образом Дж. Хиксом, который в своей книге *The Theory of Wages* (1932, p. 124–125) утверждает, что «Изменение относительных цен факторов производства само по себе является толчком для изобретений, причем изобретений определенного типа — направленных на экономичное использование фактора, относительная стоимость которого возросла». Понятие «границы инновационных возможностей» введено в важной работе [Kennedy 1964], в которой автор утверждает, что именно форма этой границы, а не вид заданной неоклассической производственной функции определяет распределение национального дохода между факторами производства. Далее Ч. Кеннеди утверждает, что индуцированные инновации приводят экономику в равновесие с постоянными относительными долями факторов производства (см. также работы: [Drandakis, Phelps 1965; Samuelson 1965]. Примерно в это же время была опубликована важная книга Дж. Хабаккука *American and British Technology in the Nineteenth Century: The Search for Labor-Saving Inventions* (1992), в которой автор утверждает, что недостаток трудовых ресурсов и поиск трудосберегающих технологий были центральными определяющими факторами технологического прогресса. Его рассуждения основаны на индуцированных инновациях: недостаток трудовых ресурсов ведет к росту заработных плат, что, в свою очередь, стимулирует развитие трудосберегающих технологий. Несмотря на это, ни в книге [Hubakkuk 1962], ни в последующей литературе по индуцированным инновациям не было предложено микрообоснованного подхода к технологическому прогрессу или процессу внедрения технологий.

Например, в работе [Kennedy 1964] производственная функция на уровне фирмы обладает свойством возрастающей отдачи от масштаба, так как фирмы имеют возможность выбирать не только количество используемых факторов производства, но и «количество технологий». Однако эта возрастающая отдача от масштаба не учитывается в анализе. Схожие проблемы также присущи и другим ранним работам. Например, в них отсутствует четкое описание того, какие фирмы ведут исследовательскую деятельность и как в ней происходит финансирование и ценообразование. Эти недостатки стали причиной снижения интереса к этому разделу литературы.

С другой стороны, анализ в статье [Acemoglu 1998] и последующих работах в этой области основан на явной спецификации микрообоснований модели эндогенного технологического прогресса, представленной в двух предыдущих главах. Предположение о монополистической конкуренции в экономике в микрообоснованной модели позволяет избежать проблем, которые присутствовали в ранних работах по индуцированным инновациям с возрастающей отдачей от масштаба в экономике.

В работах [Acemoglu 2002 a, b] показано, что основные результаты модели направленного технологического прогресса не зависят от выбора способа моделирования процесса эндогенных технологических изменений. Это также показано в упражнениях 15.18 и 15.28. Более того, несмотря на то что в книге основной фокус изложения направлен на технологический прогресс, в работе [Acemoglu 2007a] показано, что все результаты обобщаются для моделей внедрения технологий. В этой же статье вводятся альтернативные понятия слабого абсолютного смещения и сильного абсолютного смещения, которые связаны с предельной производительностью определенного фактора, а не с относительной предельной производительностью, и доказываются намного более общие теоремы о слабом и сильном абсолютном смещении. Чтобы разделить результаты, полученные в этой главе, и результаты из работы [Acemoglu 2007a], мы используем термины «слабое относительное смещение» и «сильное относительное смещение». В статье [Acemoglu 2007a] также показано, что предположение о функции типа ПЭЗ не является необходимым условием для полученных результатов. В тексте главы мы используем структуру ПЭЗ для того, чтобы упростить математическое описание модели.

Обзор динамики уровня неравенства в заработных платах в США в течение последних шестидесяти лет представлен в работах: [Autor, Katz, Krueger 1998; Katz, Autor 2000; Acemoglu 2002b]. В последних двух работах также обсуждается вопрос о том, как модели направленного технологического прогресса могут быть использованы для объяснения изменений в уровне неравенства в заработных платах в США и Великобритании в течение последних ста лет и в направлении технологических изменений в этих странах в течение последних двухсот лет. Значительное количество работ посвящено оцениванию эластичности замещения между квалифицированным и неквалифицированным трудом. Оценки этого параметра обычно лежат в интервале между 1,4 и 2. См., например, статьи: [Katz, Murphy 1992; Angrist 1995; Krusell et. al. 1999]. Обзор и обсуждение ряда таких оценок представлены в работах: [Hammermesh 1993; Acemoglu 2002b].

Эмпирические свидетельства о том, что в XIX в. технологии в основном были трудодополняющими (смещенными в сторону неквалифицированного труда), приведены в работах: [James, Skinner 1995; Mokyr 1990; Мокир 2014]. В статье [Goldin, Katz 1998] авторы утверждают, что ряд важных технологий начала XX в. также обладал этим свойством.

Работа [Blanchard 1997] посвящена анализу персистентности безработицы в странах Европы. В ней автор утверждает, что динамика безработицы в 1990-х гг. может быть объяснена только технологическими изменениями, приведшими к снижению спроса на относительно дорогую рабочую силу. Эта же идея лежит в основе упражнения 15.26. В статье [Caballero, Hammour 1999] приведено альтернативное объяснение динамики безработицы, дополняющее выводы из работы [Blanchard 1997].

В работе [Acemoglu 2003b] автор утверждает, что рост объема международной торговли может вести к эндогенным технологическим изменениям, смещенным в сторону квалификации. Упражнение 15.20 основано на этой идее. Некоторые варианты этой теории описаны в работах: [Xu 2001; Gancia 2003; Toenig, Verdier 2003].

Модель долгосрочного, исключительно трудоинтенсивного технологического прогресса, описанная в параграфе 15.6, впервые была предложена в работе [Acemoglu 2003a]. Модель, представленная в тексте главы, — это упрощенная версия модели из этой статьи (также см. работу [Funk 2002]). Предположение о том, что значение эластичности замещения между капиталом и трудом меньше единицы, подтверждается рядом различных эмпирических исследований, краткое описание которых представлено в работе [Acemoglu 2003a]. Материал параграфа 15.8 базируется на статье [Jones 2005], также см. работы: [Houthakker 1955; Lagos 2001].

15.11. Упражнения

15.1. Выведите уравнение (15.1).

15.2. Завершите доказательство утверждения 15.1. В частности, убедитесь в том, что на любой TCP выполняется уравнение (15.27), и выведите формулу для равновесного темпа роста экономики (15.29). Также покажите, что из неравенств (15.28) следует, что оба условия свободного выхода на рынок исследований (15.20) и (15.21) выполняются как равенства. Наконец, проверьте, что неравенства (15.28) являются достаточным условием для того, чтобы целевая функция репрезентативного домохозяйства принимала конечное значение и выполнялось условие трансверсальности. [Подсказка: найдите равновесную процентную ставку и используйте уравнение (15.22).]

15.3. Докажите утверждение 15.2. [Подсказка: используйте уравнение (15.9) и покажите, что если отношение $N_H(0)/N_L(0)$ не удовлетворяет уравнению (15.27), то оба условия (15.20) и (15.21) не могут выполняться как равенства.]

15.4. Выведите уравнение (15.30).

15.5. Объясните, почему зависимость темпа роста экономики на ТСР в уравнении (15.29) в утверждении 15.1 неоднозначна. В каких случаях она будет возрастающей? Приведите интуитивное объяснение вашего вывода.

15.6. В этом упражнении вам предстоит описать оптимальное по Парето распределение ресурсов в экономике в модели из параграфа 15.3. Сформулируйте задачу оптимального роста для этой модели. Покажите, что в распределении ресурсов на оптимальной по Парето траектории отсутствует наценка монополиста, то есть выполняются следующие равенства:

$$x_L^S(v,\, t)=(1-\beta)^{-1/\beta}\, p_L(t)^{1/\beta} L \text{ и } x_H^S(v,\, t)=(1-\beta)^{-1/\beta}\, p_H(t)^{1/\beta} H.$$

Используя эти уравнения, покажите, что решение задачи оптимального роста может быть описано с помощью текущего гамильтониана вида

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\left(N_L^S,\, N_H^S,\, Z_L^S,\, Z_H^S,\, \mu_L,\, \mu_H\right)=&\\ =\frac{C^S(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}+\mu_L(t)\eta_L Z_L^S(t)+\mu_H(t)\eta_H Z_H^S(t),&\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}C^S(t)=(1-\beta)^{-1/\beta}\beta\left[\gamma_L^{\varepsilon/\sigma}\left(N_L^S(t)L\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+\gamma_H^{\varepsilon/\sigma}\left(N_H^S(t)H\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}-&\\ -Z_L^S(t)-Z_H^S(t).&\end{aligned}$$

Покажите, что эта задача имеет единственное решение, в котором отношение $\left(N_H^S/N_L^S\right)$ в пределе при $t\to\infty$ сходится к единственному значению $\left(N_H^S/N_L^S\right)^*$, которое задано уравнением (15.27), и темп роста потребления сходится к значению

$$g^S = \frac{1}{\theta}\left((1-\beta)^{-1/\beta}\beta\left[\gamma_H^{\varepsilon}(\eta_H H)^{\sigma-1}+\gamma_L^{\varepsilon}(\eta_L L)^{\sigma-1}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}}-\rho\right).$$

Покажите, что это значение темпа роста потребления строго превышает его значение в равновесии на ТСР g^*, заданное уравнением (15.29). Наконец, покажите, что в таком оптимальном по Парето распределении ресурсов выполняются результаты, эквивалентные утверждениям о слабом и сильном равновесном смещении.

15.7. Выведите условия свободного выхода на рынок исследований (15.33) и (15.34). Приведите интуитивные объяснения.

15.8. Выведите уравнение (15.36).

15.9. Докажите утверждение 15.5. В частности, убедитесь в единственности ТСР и в том, что темп роста экономики на ТСР удовлетворяет условию трансверсальности.

15.10. В модели из параграфа 15.4 покажите, что увеличение параметра η_H ведет к росту на ТСР количества ученых, занятых в технологиях, дополняющих фактор производства H, если $\sigma > 1$ ($\sigma < 1/\delta$), и к снижению их числа, если $\sigma < 1$. Проинтерпретируйте этот результат.

15.11. **(a)** Докажите утверждение 15.6. В частности, используйте уравнение (15.9) и покажите, что если уравнение (15.36) не выполняется, то оба условия свободного выхода на рынок исследований не могут выполняться одновременно. Далее покажите, что если выполнено неравенство $\sigma < 1/\delta$, то в экономике превалируют стимулы к проведению исследований в секторе относительно редких технологий и что обратное утверждение верно в случае, когда $\sigma > 1/\delta$.

(b) Проинтерпретируйте экономическую важность неравенства $\sigma < 1/\delta$. [Подсказка: свяжите ее с тем, что если $\sigma < 1/\delta$, то $\partial\left(N_H^{\delta}V_H/N_L^{\delta}V_L\right)/\partial\left(N_H/N_L\right)<0$ и что обратное неравенство выполняется в случае, когда $\delta > 1/\delta$.]

15.12. Докажите утверждение 15.7.

15.13. Опишите оптимальное по Парето распределение ресурсов в модели с переливом знаний и зависимостью от состояния (параграф 15.4). Покажите, что значение отношения технологий в стационарном оптимальном по Парето распределении ресурсов уже не совпадает с его значением в равновесии на ТСР. Объясните, почему этот результат отличается от вывода из модели из параграфа 13.3.

15.14. Выведите уравнение (15.41).

15.15. Покажите, что если в модели из параграфа 15.5 выполняется условие $\lambda = 1$, то в ней не существует ТСР.

15.16. Выведите уравнения (15.42) и (15.43).

***15.17.** Обобщите модель из параграфа 15.4, предположив, что в ней отсутствуют ученые и в секторе НИОКР используется только квалифицированная и неквалифицированная рабочая сила. Тогда условия равновесия на рынке труда принимают следующий вид:

$$H^E(t)+H_L^R(t)+H_H^R(t)\leq H \text{ и } L^E(t)+L_L^R(t)+L_H^R(t)\leq L,$$

где переменные $H^E(t)$ и $L^E(t)$ обозначают занятость в секторе производства конечного товара, а переменные $H_L^R(t)$, $H_H^R(t)$, $L_L^R(t)$ и $L_H^R(t)$ — занятость в двух исследовательских секторах экономики. Предположите, что исследовательские технологии в обоих секторах используют квалифицированный и неквалифицированный труд в соответствии с единой производственной функцией, обладающей свойством постоянной отдачи от масштаба.

(a) Определите равновесие, распределение ресурсов на ТСР и опишите условия свободного выхода на рынок исследований.

(b) Опишите равновесие на ТСР.

(c) Покажите, что в такой модели выполняются утверждения, эквивалентные утверждениям 15.3 и 15.4.

(d) Опишите переходную динамику в экономике и покажите, что она схожа с динамикой в утверждении 15.2.

(e) Опишите оптимальное по Парето распределение ресурсов в этой экономике и покажите, что оптимальное по Парето значение отношения технологий в стационарном равновесии продолжает задаваться уравнением (15.27).

***15.18.** Рассмотрите версию базовой модели направленного технологического прогресса, представленной в параграфе 15.3, с единственным отличием в том, что технологические изменения происходят за счет улучшения качества товаров, а не расширения множества типов машин. В частности, предположите, что производственные функции в секторе промежуточных товаров имеют следующий вид:

$$Y_L(t)=\frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^1 q_L(v,\,t)x_L(v,\,t\,|\,q)^{1-\beta}dv\right)L^{\beta}$$

и

$$Y_H(t)=\frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^1 q_H(v,\,t)x_H(v,\,t\,|\,q)^{1-\beta}dv\right)H^{\beta}.$$

Издержки производства машины с качеством q составляют ψq, где, как и ранее, мы используем нормализации $\psi \equiv 1 - \beta$. Расходы на исследования в размере $Z_f(v, t)$, направленные на определенный тип машин с качеством $q_f(v, t)$, ведут к осуществлению инновации с потоковым темпом $\eta_f Z_f(v, t)/q_f(v, t)$ и, в случае успеха, к улучшению качества машин до $\lambda q_f(v, t)$, где $f = L$ или H, а $\lambda \geq (1 - \beta)^{-(1-\beta)/\beta}$, так что фирмы, которые осуществляют инновацию, имеют возможность устанавливать цену, при которой их прибыль достигает глобального максимума.

(a) Определите и опишите равновесие и распределение ресурсов на ТСР.

(b) Покажите, что значение отношения технологий на ТСР задается уравнением (15.27).

(c) Покажите, что в такой модели справедливы утверждения, эквивалентные утверждениям 15.3 и 15.4.

(d) Опишите переходную динамику в модели и покажите, что она схожа с переходной динамикой из утверждения 15.2.

(e) Опишите оптимальное по Парето распределение ресурсов в экономике и покажите, что значение отношения технологий в оптимальном по Парето распределении задается уравнением (15.27).

(f) Опишите преимущества и недостатки этой модели по сравнению с моделью, описанной в параграфе 15.3.

15.19. Рассмотрите в качестве одного из приложений моделей направленного технологического прогресса знаменитую гипотезу Хабаккука, которая состоит в том, что процесс внедрения технологий в XIX в. в экономике США проходил быстрее, чем в экономике Великобритании в силу того, что в США наблюдался относительный недостаток рабочей силы.

(a) Во-первых, рассмотрите модель неоклассического типа с двумя факторами производства — трудом и технологией и производственной функцией $F(A, L)$, обладающей свойством постоянной отдачи от масштаба, где переменная A обозначает технологию. Предположите, что каждая фирма выбирает значение технологии, издержки ее использования для нее составляют $\Gamma(A)$ единиц конечного товара и функция $\Gamma(\cdot)$ является непрерывной, дифференцируемой, строго возрастающей и вогнутой. Покажите, что увеличение заработной платы (вызванное сокращением предложения труда или экзогенным изменением законодательства о минимальной заработной плате) не может привести к росту A.

(b) Далее рассмотрите модель направленного технологического прогресса, рассмотренную в этой главе. Предположите, что переменная H обозначает землю и что значение переменной N_H фиксировано (таким образом, НИОКР ведет к росту лишь переменной N_L). Покажите, что если $\sigma > 1$, то справедливо утверждение, противоположное гипотезе Хабаккука. С другой стороны, если значение σ достаточно меньше единицы, то из модели следует результат, согласующийся с гипотезой Хабаккука. Проинтерпретируйте этот результат и объясните, почему он отличается от выводов из неоклассической модели в части (a).

15.20. Рассмотрите базовую модель направленного технологического прогресса из параграфа 15.3 и предположите, что экономика находится в стационарном равновесии.

(a) Покажите, что в стационарном равновесии значение относительной цены двух промежуточных товаров p пропорционально $(H/L)^{-\beta}$.

(b) Далее предположите, что экономика открывается международной торговле и мировая относительная цена промежуточных товаров равна $p' < p$. Опишите последствия открытия экономики для эндогенного технологического прогресса. Объясните, почему ваш результат отличается от выводов из текста главы. [Подсказка: свяжите ваш результат с эффектом цены.]

15.21. **(a)** Докажите утверждение 15.11. Покажите, что в любом равновесии на ТС выполняется уравнение (15.36) и что это уравнение не согласуется с динамикой накопления капитала в экономике.

(b) Докажите, что в экономике не существует равновесия, в котором потребление растет с постоянным темпом. [Подсказка: покажите, что в равновесии должно выполняться условие, схожее с уравнением (15.36), и что тогда переменная $N_K(t)$ будет расти во времени, откуда следует, что процентная ставка не может оставаться постоянной величиной.

15.22. Выведите уравнение (15.46).

15.23. Выведите уравнение (15.48).

***15.24.** Завершите доказательство утверждения 15.12 и покажите, что в экономике не может существовать другого равновесия на ТСР.

***15.25.** Покажите, что если выполняются неравенства $\sigma < 1$ и $S_K < \eta_L S$, то равновесие на ТСР в утверждении 15.12 является глобально устойчивым. Покажите, что если $\sigma > 1$, то оно будет неустойчивым. Свяжите ваш вывод с утверждением 15.6.

15.26. В этом упражнении мы используем утверждение 15.12 для дальнейшего анализа безработицы в странах континентальной Европы, сделанного в работе [Blanchard 1997]. Рассмотрите модель из параграфа 15.6. Опишите, каким образом скачок заработных плат, вызванный установлением минимальной заработной платы выше равновесного уровня, ведет, во-первых, к росту безработицы, а затем, если выполняется неравенство $\sigma < 1$, вызывает технологические изменения, смещенные в сторону капитала. Позволяет ли такая модель пролить свет на персистентность динамики безработицы в континентальной Европе? [Подсказка: рассмотрите два случая: (1) значение минимальной заработной платы фиксировано и (2) минимальная заработная плата индексируется темпом роста экономики страны.]

***15.27.** В моделях, представленных в тексте главы, предложение факторов производства предполагается заданным экзогенно и изучается влияние изменения относительного количества факторов на их относительную цену. Это упражнение посвящено анализу совместной динамики относительного предложения факторов производства и технологии. Рассмотрите модель с двумя факторами производства, например с квалифицированным и неквалифицированным трудом. Предположите, что в каждый период времени в экономике рождается континуум υ неквалифицированных работников, каждый из которых подвержен случайной смерти с потоковым темпом υ. Таким образом, население равно единице (как в модели из параграфа 9.8). После рождения каждый агент имеет возможность получить образование и стать квалифицированным работником. Чтобы стать квалифицированным работником, агенту x требуется обучение в течение времени K_x, и во время обучения он не получает трудового дохода. Распределение случайной величины K_x задано функцией распределения $\Gamma(K)$. В остальном модель совпадает с моделью из текста главы. Предположите, что функция распределения $\Gamma(K)$ непрерывна. Определите ТСР как равновесие, в котором отношение H/L и значение премии за квалификацию остаются постоянными.

(a) Покажите, что если в равновесии на ТСР индивид с издержками получения образования K_x решает пройти обучение, то все агенты с издержками $K_{x'} < K_x$ также будут проходить обучение и существует значение $\bar{K}$, такое, что все агенты с издержками $K_x > \bar{K}$ остаются неквалифицированными работниками.

(b) Покажите, что в пределе при $\upsilon \to 0$ относительное предложение факторов производства на ТСР аппроксимируется следующим выражением:

$$\frac{H}{L} \approx \frac{\Gamma(\bar{K})}{1-\Gamma(\bar{K})}.$$

(c) Покажите, что на ТСР $\bar{K} = \log\omega/(r^* + \upsilon - g^*)$, где константы r^* и g^* обозначают процентную ставку и темп роста экономики на ТСР соответственно.

(d) Объедините выражения из частей (b) и (c) с уравнением (15.30) и найдите значение премии за квалификацию на ТСР. Может ли в экономике существовать несколько равновесий? Объясните интуитивно ваши выводы.

***15.28.** Рассмотрите экономику с постоянным населением и нейтральными к риску домохозяйствами. Предположите, что норма дисконтирования будущего равна r. Население экономики состоит из L неквалифицированных работников, H квалифицированных работников и S ученых. Полезность каждого агента зависит от значения потребления конечного товара, выпуск которого описывается следующей производственной функцией: $Y(t) = \left(\int_0^n y(v, t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dv\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$,

где $\varepsilon > 1$ и для производства промежуточных товаров может быть использован как квалифицированный, так и неквалифицированный труд. После изобретения нового промежуточного товара для его производства используется только квалифицированный труд с производственной функцией $y(v, t) = h(v, t)$, но с течением времени другая фирма находит способ производства этого товара с помощью неквалифицированного труда с производственной функцией $y(v, t) = l(v, t)$. Предположите, что новые товары создаются учеными в соответствии с границей инновационных возможностей в следующем виде:

$$\dot{n}(t) = b_n n(t)^{\delta} m(t)^{1-\delta} S_n(t) \text{ и } \dot{m}(t) = b_m m(t)^{\delta} n(t)^{1-\delta} S_m(t),$$

где $\delta < 1$ и переменные $S_n(t)$ и $S_m(t)$ — количество ученых, занятых в двух секторах, при этом $S_n(t) + S_m(t) \le S$.

Обозначьте заработную плату ученого как $\omega(t)$. Фирма, изобретающая новый товар, становится его монополистическим производителем, однако она может быть вытеснена с рынка другой фирмой, которая находит более дешевый способ производства этого товара с помощью неквалифицированного труда.

(a) Обозначьте заработные платы неквалифицированных и квалифицированных работников как $w(t)$ и $v(t)$ соответственно. Покажите, что до тех пор, пока $v(t)$ значительно превосходит $w(t)$ моментальная прибыль фирм-монополистов, производящих интенсивные по навыкам и трудоинтенсивные товары, задается следующими уравнениями:

$$\pi_h(t) = \frac{1}{\varepsilon - 1}\frac{v(t)H}{n(t) - m(t)} \text{ и } \pi_l(t) = \frac{1}{\varepsilon - 1}\frac{w(t)L}{n(t)}.$$

Проинтерпретируйте эти уравнения. Почему предположение о том, что $v(t)$ значительно превосходит $w(t)$ является необходимым?

(b) Далее предположите, что для фирмы, проводящей исследование, направленное на замещение производства с помощью квалифицированного труда, вероятности вытеснения всех из $n(t) - m(t)$ производимых таким образом товаров совпадают. Определите ТСР как распределение ресурсов в экономике, в котором переменные n и m растут с одинаковым темпом g. Покажите, что из этого условия следует, что выпуск и заработная плата квалифицированных и неквалифицированных работников будет расти с темпом $g/(\varepsilon - 1)$. [Подсказка: положите цену конечного товара в каждый период времени единицей и используйте уравнение для единицы измерения.]

(c) Покажите, что на ТСР заработная плата ученых также растет с тем же темпом, что и заработная плата квалифицированных и неквалифицированных работников.

(d) Покажите, что на ТСР выполняется следующее уравнение:

$$b_n \mu^{1-2\delta} \frac{vH}{r - (2-\varepsilon)g/(1-\varepsilon) + \mu g/(1-\mu)} = b_m \frac{wL}{r - (2-\varepsilon)g/(1-\varepsilon)},$$

где $\mu \equiv \dfrac{m}{n}$. [Подсказка: заметьте, что монополист, производящий товар с помощью неквалифицированного труда, никогда не будет вытеснен с рынка, а монополист, производящий с помощью квалифицированного труда, подвержен вытеснению с постоянным потоковым темпом, и используйте равенство $\dot{m}/(n-m) = g\mu/(1-\mu)$.]

(e) Используя функцию спроса на различные промежуточные товары (например, $y(v, t)/y(v', t) = (p(v, t)/p(v', t))^{-\varepsilon}$), опишите динамику переменной μ на ТСР. Как изменяется ее значение при росте отношения H/L? Проинтерпретируйте ваш результат.

(f) Почему в спецификации границы инновационных возможностей необходимо предположение о том, что $\delta < 1$? Коротко опишите, каким образом ваш анализ изменится, если $\delta = 1$.

***15.29.** Рассмотрите модель из параграфа 15.8.

(a) Покажите, что если рынки капитала и труда являются рынками с совершенной конкуренцией, то в общем случае в равновесии будет использоваться более одной идеи. [Подсказка:

постройте пример экономики, в которой существует три идеи $i = 1, 2, 3$ и если в ней используется только одна из них, то это идея $i = 1$, но при этом значение выпуска может быть увеличено с помощью перемещения части труда и капитала на идеи 2 или 3.]

(b) Покажите, что в этом случае результат об агрегировании из параграфа 15.8 не выполняется.

***15.30.** Предположите, что случайная величина y имеет распределение Парето с функцией распределения $G(y) = 1 - By^{-\alpha}$. Найдите дисперсию y и покажите, что она может принимать бесконечное значение.

***15.31.** Предположите, что случайная величина y имеет распределение Парето с функцией распределения $G(y) = 1 - By^{-\alpha}$ при $\alpha > 1$. Покажите, что тогда

$$\mathbb{E}[y \mid y \geq y'] = \frac{\alpha}{\alpha - 1} y'.$$

Что происходит при $\alpha < 1$?

Библиография

Бланшар О., Фишер С. (2014). *Лекции по макроэкономике.* М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС.

Бродель Ф. (2006–2007). *Материальная цивилизация, экономика и капитализм, XV–XVIII вв.* Т. 1–3. М.: Весь мир.

Вебер М. (1990). Протестантская этика и дух капитализма // Вебер М. Избранные произведения. М.: Прогресс.

Даймонд Д. (2012). *Ружья, микробы и сталь. Судьбы человеческих обществ.* М.: АСТ.

Колмогоров А., Фомин С. (1976). *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука.

Мальтус Т. (1993). Опыт о законе народонаселения // *Антология экономической классики.* М.: Эконов, Ключ.

Маршалл А. (1993). *Принципы экономической науки.* Т. 1–3. М.: Прогресс.

Мас-Колелл А., Уинстон М., Грин Д. (2016). *Микроэкономическая теория.* М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС.

Мокир Д. (2014). *Рычаг богатства. Технологическая креативность и экономический прогресс.* М.: Изд-во Института Гайдара.

Норт Д. (1997). *Институты, институциональные изменения и функционирование экономики.* М.: Фонд экономической книги «Начала».

Обстфельд М., Рогофф К. (2015). *Основы международной макроэкономики.* М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС.

Патнэм Р. (1996). *Чтобы демократия сработала: гражданские традиции в современной Италии.* М.: Ad Marginem.

Померанц К. (2017). *Великое расхождение: Китай, Европа и создание современной мировой экономики.* М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС.

Ромер Д. (2015). *Высшая макроэкономика.* М.: Издательский дом Высшей школы экономики.

Хелпман Э. (2012). *Загадка экономического роста.* М.: Издательство Института Гайдара.

Шумпетер Й. (1982). *Теория экономического развития.* М.: Прогресс.

Шумпетер Й. (1995). *Капитализм, социализм и демократия.* М.: Экономика.

Эрроу К. Дж. (2004). *Коллективный выбор и индивидуальные ценности.* М.: ГУ — ВШЭ.

Abernathy, William J. (1978) *The Productivity Dilemma: Roadblock to Innovation in the Automotive Industry*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Abraham, Kathrine G., and Jon Haltiwanger (1995) "Real Wages and the Business Cycle." *Journal of Economic Literature* 33: 1215–1264.

Abramowitz, Moses (1957) "Resources on Output Trends in the United States since 1870." *American Economic Review* 46: 5–23.

Abreu, Dilip (1988) "On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting." *Econometrica* 56: 383–396.

Acemoglu, Daron (1995) "Reward Structures and the Allocation of Talent." *European Economic Review* 39: 17–33.

—— (1996) "A Microfoundation for Social Increasing Returns in Human Capital Accumulation." *Quarterly Journal of Economics* 111: 779–804.

—— (1997a) "Training and Innovation in an Imperfect Labor Market." *Review of Economic Studies* 64(2): 445–464.

—— (1997b) "Matching, Heterogeneity and the Evolution of Income Distribution."*Journal of Economic Growth* 2(1): 61–92.

—— (1998) "Why Do New Technologies Complement Skills? Directed Technical Change and Wage Inequality." *Quarterly Journal of Economics* 113: 1055–1090.

—— (2002a) "Directed Technical Change." *Review of Economic Studies* 69: 781–809.

—— (2002b) "Technical Change, Inequality and the Labor Market." *Journal of Economic Literature* 40(1): 7–72.

—— (2003a) "Patterns of Skill Premia." *Review of Economic Studies* 70: 199–230.

—— (2003b) "Labor- and Capital-Augmenting Technical Change." *Journal of European Economic Association* 1(1): 1–37.

—— (2003c) "Why Not a Political Coase Theorem?" *Journal of Comparative Economics* 31: 620–652.

—— (2005) "Politics and Economics inWeak and Strong States."*Journal of Monetary Economics* 52: 1199–1226.

—— (2007a) "Equilibrium Bias of Technology." *Econometrica* 75(5): 1371–1410.

—— (2007b) "Modeling Inefficient Institutions." In *Advances in Economic Theory, Proceedings of World Congress 2005*, Richard Blundell, Whitney Newey, and Torsten Persson (editors). Cambridge: Cambridge University Press, pp. 341–380.

—— (2008a) "Oligarchic versus Democratic Societies." *Journal of the European Economic Association* 6: 1–44.

—— (2008b) "Innovation by Incumbents and Entrants." MIT Economics Department-Working Paper. Massachusetts Institute of Technology.

Acemoglu, Daron, and Ufuk Akcigit (2006) "State Dependent IPR Policy." NBERWorking Paper 12775. National Bureau of Economic Research.

Acemoglu, Daron, and Joshua D. Angrist (2000) "HowLarge Are Human Capital Externalities? Evidence from Compulsory Schooling Laws." *NBER Macroeconomics Annual* 2000: 9–59.

Acemoglu, Daron, and Veronica Guerrieri (2008) "Capital Deepening and Non-Balanced Economic Growth." *Journal of Political Economy* 116: 467–498.

Acemoglu, Daron, and Simon Johnson (2005) "Unbundling Institutions." *Journal of Political Economy* 113: 949–995.

—— (2007) "Disease and Development." *Journal of Political Economy* 115: 925–985.

Acemoglu, Daron, and Joshua Linn (2004) "Market Size in Innovation: Theory and Evidence from the Pharmaceutical Industry." *Quarterly Journal of Economics* 119: 1049–1090.

Acemoglu, Daron, and James A. Robinson (2000a) "Why Did the West Extend the Franchise? Democracy, Inequality and Growth in Historical Perspective." *Quarterly Journal of Economics* 115: 1167–1199.

—— (2000b) "Political Losers as a Barrier to Economic Development."*American Economic Review* 90: 126–130.

—— (2006a) *Economic Origins of Dictatorship and Democracy.* New York: Cambridge University Press.

—— (2006b) "Economic Backwardness in Political Perspective." *American Political Science Review* 100: 115–131.

—— (2008) "Persistence of Power, Elites and Institutions." NBER Working Paper 12108. National Bureau of Economics Research. Forthcoming in *American Economic Review* 98: 267–293.

Acemoglu, Daron, and Jaume Ventura (2002) "The World Income Distribution." *Quarterly Journal of Economics* 117: 659–694.

Acemoglu, Daron, and Fabrizio Zilibotti (1997) "Was Prometheus Unbound by Chance? Risk, Diversification and Growth." *Journal of Political Economy* 105: 709–751.

—— (1999) "Information Accumulation in Development." *Journal of Economic Growth* 1999(4): 5–38.

—— (2001) "Productivity Differences." *Quarterly Journal of Economics* 116: 563–606.

Acemoglu, Daron, Philippe Aghion, and Fabrizio Zilibotti (2006) "Distance to Frontier, Selection, and Economic Growth." *Journal of the European Economic Association* 4(1): 37–74.

Acemoglu, Daron, Pol Antras, and Elhanan Helpman (2007) "Contracts and Technology Adoption." *American Economic Review* 97: 916–943.

Acemoglu, Daron, Simon Johnson, and James A. Robinson (2001) "The Colonial Origins of Comparative Development: An Empirical Investigation." *American Economic Review* 91: 1369–1401.

—— (2002) "Reversal of Fortune: Geography and Institutions in the Making of the Modern World Income Distribution." *Quarterly Journal of Economics* 117: 1231–1294.

—— (2005a) "Institutions as a Fundamental Cause of Long-Run Growth." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 384–473.

—— (2005b) "The Rise of Europe: Atlantic Trade, Institutional Change and Growth." *American Economic Review* 95: 546–579.

Aczel, J. (1966) *Lectures on Functional Equations and Their Applications.* New York: Academic Press.

Aghion, Philippe, and Patrick Bolton (1997) "A Theory of Trickle-Down Growth and Development." *Review of Economic Studies* 64: 151–172.

Aghion, Philippe, and Peter Howitt (1992) "A Model of Growth through Creative Destruction." *Econometrica* 60: 323–351.

—— (1994) "Growth and Unemployment." *Review of Economic Studies* 61: 477–494.

—— (1998) *Endogenous Growth Theory.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

—— (2008) *The Economics of Growth.* Cambridge, Mass: MIT Press, forthcoming.

Aghion, Philippe, Peter Howitt, and Gianluca Violante (2004) "General Purpose Technology and Wage Inequality." *Journal of Economic Growth* 7: 315–345.

Aghion, Philippe, Christopher Harris, Peter Howitt, and John Vickers (2001) "Competition, Imitation, and Growth with Step-by-Step Innovation." *Review of Economic Studies* 68: 467–492.

Aghion, Philippe, Nick Bloom, Richard Blundell, Rachel Griffith, and Peter Howitt (2005) "Competition and Innovation: An Inverted-U Relationship." *Quarterly Journal of Economics* 120: 701–728.

Aiyagari, S. Rao (1993) "Uninsured Indiosyncratic Risk and Aggregate Saving." Federal Reserve Bank of Minneapolis Working Paper 502.

—— (1994) "Uninsured Indiosyncratic Risk and Aggregate Saving." *Quarterly Journal of Economics* 109: 659–684.

Alesina, Alberto, and Dani Rodrik (1994) "Distributive Politics and Economic Growth." *Quarterly Journal of Economics* 109: 465–490.

Alfaro, Laura, Sebnem Kalemli-Ozcan, and Vadym Volosovych (2005) "Why Doesn't Capital Flow from Rich to Poor Countries? An Empirical Investigation." University of Houston, mimeo.

Aliprantis, Charalambos, and Kim Border (1999) *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide.* New York: Springer-Verlag.

Allen, Franklin, and Douglas Gale (1991) "Arbitrage, Short Sales and Financial Innovation." *Econometrica* 59: 1041–1068.

Allen, Robert C. (2004) "Agriculture during the Industrial Revolution: 1700–1850." In *Cambridge Economic History of Modern Britain,* Roderick Floud and Paul A. Johnson (editors). Cambridge: Cambridge University Press, pp. 96–116.

Andreoni, James (1989) "Giving with Impure Altruism: Applications to Charity and Ricardian Equivalence." *Journal of Political Economy* 97: 1447–1458.

Angrist, Joshua D. (1995) "The Economic Returns to Schooling in the West Bank and Gaza Strip." *American Economic Review* 85: 1065–1087.

Angrist, Joshua D., Victor Lavy, and Analia Schlosser (2006) "NewEvidence on the Causal Link between the Quantity and Quality of Children." Massachusetts Institute of Technology, mimeo.

Antras, Pol (2005) "Incomplete Contracts and the Product Cycle." *American Economic Review* 95: 1054–1073.

Apostol, Tom M. (1975) *Mathematical Analysis*, 2nd edition. Reading, Mass: Addison-Wesley.

Araujo, A., and Jose A. Scheinkman (1983) "Maximum Principle and Transversality Condition for Concave Infinite Horizon Economic Models." *Journal of Economic Theory* 30: 1–16.

Armington, Paul S. (1969) "A Theory of Demand for Products Distinguished by Place and Production." *International Monetary Fund Staff Papers* 16: 159–178.

Arrow, Kenneth J. (1951) *Social Choice and Individual Values*. New York: Wiley.

—— (1962) "The Economic Implications of Learning by Doing." *Review of Economic Studies* 29: 155–173.

—— (1964) "The Role of Security in Optimal Allocation of Risk Bearing." *Reviewof Economic Studies* 31: 91–96.

—— (1968) "Applications of Control Theory to Economic Growth." In *Mathematics of Decision Sciences*,George B. Dantzig and Arthur F. Veinott (editors). Providence, R.I.: American Mathematical Society.

Arrow, Kenneth J., and Mordecai Kurz (1970) *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Arrow, Kenneth J., Hollis B. Chenery, Bagicha S. Minhas, and Robert Solow (1961) "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency." *Review of Economics and Statistics* 43: 225–250.

Ashton, Thomas Southcliffe (1969) *The Industrial Revolution: 1760–1830*. Oxford: Oxford University Press.

Atkeson, Andrew (1991) "International Lending with Moral Hazard and Risk of Repudiation." *Econometrica* 59: 1069–1089.

Atkeson, Andrew, and Ariel Burstein (2007) "Innovation, Firm Dynamics and International Trade." University of California, Los Angeles, mimeo.

Atkeson, Andrew, and Patrick Kehoe (2002) "Paths of Development for Early and Late Boomers in a Dynamic Heckscher-Ohlin Model." Federal Reserve Bank of Minneapolis, mimeo.

Atkinson, Anthony, and Joseph Stiglitz (1969) "A New View of Technological Change." *Economic Journal* 79: 573–578.

Aumann, Robert J., and Lloyd S. Shapley (1974) *Values of Non-Atomic Games*.Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Austen-Smith, David, and Jeffrey S. Banks (1999) *Positive Political Theory I: Collective Preference*. Ann Arbor: University of Michigan Press.

Autor, David, Lawrence Katz, and Alan Krueger (1998) "Computing Inequality: Have Computers Changed the Labor Market?" *Quarterly Journal of Economics* 113: 1169–1214.

Azariadis, Costas (1993) *Intertemporal Macroeconomics*. London: Blackwell.

Azariadis, Costas, and Allan Drazen (1990) "Threshold Externalities in Economic Development." *Quarterly Journal of Economics* 105: 501–526.

Backus, David, Patrick J. Kehoe, and Timothy J. Kehoe (1992) "In Search of Scale Effects in Trade and Growth." *Journal of Economic Theory* 58: 377–409.

Baily, Martin N., Charles Hulten, and David Campbell (1992) "The Distribution of Productivity in Manufacturing Plants." *Brookings Papers on Economic Activity: Microeconomics* 187–249.

Bairoch, Paul (1988) *Cities and Economic Development: From the Dawn of History to the Present,* translated by Christopher Braider. Chicago: University of Chicago Press.

Bairoch, Paul, Jean Batou, and Pierre Chèvre (1988) *La Population des villes Européennes de 800 a 1850: Banque de Données et Analyse Sommaire des Résultats.* Geneva: Centre d'histoire économique Internationale de l'Universite de Genève, Libraire Droz.

Banerjee, Abhijit V., and Esther Duflo (2003) "Inequality and Growth: What Can the Data Say?" *Journal of Economic Growth* 8: 267–299.

—— (2005) "Economic Growth through the Lenses of Development Economics." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 384–473.

Banerjee, Abhijit V., and Andrew Newman (1991) "Risk Bearing and the Theory of Income Distribution." *Review of Economic Studies* 58: 211–235.

—— (1993) "Occupational Choice and the Process of Development." *Journal of Political Economy* 101: 274–298.

—— (1998) "Information, the Dual Economy and Development." *Review of Economic Studies* 65: 631–653.

Banfield, Edward C. (1958) *The Moral Basis of a Backward Society.* Chicago: University of Chicago Press.

Barro, Robert J. (1974) "Are Government Bonds Net Wealth?" *Journal of Political Economy* 81: 1095–1117.

—— (1991) "Economic Growth in a Cross Section of Countries." *Quarterly Journal of Economics* 106: 407–443.

—— (1997) *Determinants of Economic Growth: A Cross Country Empirical Study.*Cambridge, Mass.: MIT Press.

—— (1999) "Determinants of Democracy." *Journal of Political Economy* 107: S158–S183.

Barro, Robert J., and Gary S. Becker (1989) "Fertility Choice in a Model of Economic Growth." *Econometrica* 57: 481–501.

Barro, Robert J., and Jong-Wha Lee (2001) "International Data on Educational Attainment: Updates and Implications." *Oxford Economic Papers* 53: 541–563.

Barro, Robert J., and Rachel McCleary (2003) "Religion and Economic Growth." NBER-Working Paper 9682. National Bureau of Economics Research.

Barro, Robert J. and Xavier Sala-i-Martin (1991) "Convergence across States and Regions." *Brookings Papers on Economic Activity* 1: 107–182.

—— (1992) "Convergence." *Journal of Political Economy* 100: 223–251.

—— (2004) *Economic Growth.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Bartelsman, Eric J., and Mark Doms (2000) "Understanding Productivity: Lessons from Longitudinal Microdata." *Journal of Economic Literature* 38: 569–594.

Basu, Susanto, and David Weil (1998) "Appropriate Technology and Growth." *Quarterly Journal of Economics* 113: 1025–1054.

Baum, R. F. (1976) "Existence Theorems for Lagrange Control Problems with Unbounded Time Domain." *Journal of Optimization Theory and Applications* 19: 89–116.

Baumol, William J. (1967) "Macroeconomics of Unbalanced Growth: The Anatomy of Urban Crisis." *American Economic Review* 57: 415–426.

—— (1986) "Productivity Growth, Convergence, and Welfare: What the Long-Run Data Show." *American Economic Review* 76: 1072–1085.

Baxter, Marianne, and Mario J. Crucini (1993) "Explaining Saving-Investment Correlations." *American Economic Review* 83: 416–436.

Becker, Gary S. (1965) "A Theory of the Allocation of Time." *Economic Journal* 75: 493–517.

—— (1981) *A Treatise on the Family.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Becker, Gary S., and Robert J. Barro (1988) "A Reformulation of the Economic Theory of Fertility." *Quarterly Journal of Economics* 103: 1–25.

Becker, Robert, and John Harvey Boyd (1997) *Capital Theory, Equilibrium Analysis and Recursive Utility.* Oxford: Blackwell.

Becker, Gary S., Kevin M. Murphy, and Robert Tamura (1990) "Human Capital, Fertility, and Economic Growth." *Journal of Political Economy* 98(part 2): S12–S37.

Bellman, Richard (1957) *Dynamic Programming.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Benabou, Roland (1996) "Heterogeneity, Stratification, and Growth: Macroeconomic Implications of Community Structure and School Finance." *American Economic Review* 86: 584–609.

—— (2000) "Unequal Societies: Income Distribution and the Social Contract." *American Economic Review* 90: 96–129.

—— (2005) "Inequality, Technology and the Social Contract" In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 1595–1638.

Bencivenga, Valerie, and Bruce Smith (1991) "Financial Intermediation and Endogenous Growth." *Review of Economic Studies* 58: 195–209.

Benhabib, Jess, and Mark M. Spiegel (1994). "The Role of Human Capital in Economic Development: Evidence from Aggregate Cross-Country Data." *Journal of Monetary Economics* 34: 143–173.

Ben-Porath, Yoram (1967) "The Production of Human Capital and the Life Cycle of Earnings." *Journal of Political Economy* 75: 352–365.

Benveniste, Lawrence M., and Jose A. Scheinkman (1979) "On the Differentiability of theValue Function in Dynamic Models of Economics." *Econometrica* 47: 727–732.

—— (1982) "Duality Theory for Dynamic Organization Models of Economics: The Continuous Time Case." *Journal of Economic Theory* 27: 1–19.

Berge, Claude (1963) *Topological Spaces.* New York: MacMillan.

Bernard, Andrew, and Bradford Jensen (2004) "Why Some Firms Export." *Review of Economics and Statistics* 86: 561–569.

Bernard, Andrew, Jonathan Eaton, Bradford Jensen, and Samuel Kortum (2003) "Plants and Productivity in International Trade." *American Economic Review* 93: 1268–1290.

Bewley, Truman F. (1977) "The Permanent Income Hypothesis: A Theoretical Formulation." *Journal of Economic Theory* 16: 252–292.

—— (1980) "The Optimum Quantity of Money." In *Models of Monetary Economies,* John H. Kareken and Neil Wallace (editors). Minneapolis, Minn., Federal Reserve Bank of Minneapolis, pp. 169–210.

—— (2007) *General Equilibrium, Overlapping Generations Models, and Optimal Growth Theory.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Billingsley, Patrick (1995) *Probability and Measure,* 3rd edition. New York: Wiley.

Bils, Mark J. (1985) "Real Wages over the Business Cycle: Evidence from Panel Data." *Journal of Political Economy* 93: 666–689.

Black, Duncan (1948) *The Theory of Committees and Elections.* London: Cambridge University Press.

Black, Sandra E., and Lisa Lynch (2005) "Measuring Organizational Capital in the New Economy." University of California, Los Angeles, mimeo.

Black, Sandra E., Paul J. Devereux, and Kjell Salvanes (2005) "The More the Merrier? The Effect of Family Size and Birth Order on Education." *Quarterly Journal of Economics* 120: 669–700.

Blackwell, David (1965) "Discounted Dynamic Programming."*Annals of Mathematical Statistics* 36: 226–235.

Blanchard, Olivier J. (1979) "Speculative Bubbles, Crashes and Rational Expectations." *Economics Letters* 3: 387–389

—— (1985) "Debt, Deficits, and Finite Horizons." *Journal of Political Economy* 93: 223–247.

—— (1997) "The Medium Run" *Brookings Papers on Economic Activity* 2: 89–158.

Blanchard, Olivier J., and Stanley Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Bloom, David E., and Jeffrey D. Sachs (1998) "Geography, Demography, and Economic Growth in Africa." *Brookings Papers on Economic Activity* 2: 207–295.

Blundell, Richard, Rachel Griffith, and Jon Van Reenen (1999) "Marketshare, Market Value, and Innovation in a Panel of British Manufacturing Firms." *Review of Economic Studies* 56: 529–554.

Boldrin, Michele, and David K. Levine (2003) "Innovation and the Size of the Market." University of Minnesota and University of California, Los Angeles, mimeo.

Boserup, Ester (1965) *The Conditions of Agricultural Progress.* Chicago: Aldine.

Bourguignon, François, and Christian Morrison (2002) "Inequality amongWorld Citizens: 1820–1992." *American Economic Review* 92: 727–744.

Bourguignon, François, and Thierry Verdier (2000) "Oligarchy, Democracy, Inequality and Growth." *Journal of Development Economics* 62: 285–313.

Boyce, William E., and Richard C. DiPrima (1977) *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 3rd edition. New York: Wiley.

Braudel, Fernand (1973). *Capitalism and Material Life: 1400–1800* translated by Miriam Kochan. New York: Harper and Row.

Broadberry, Stephen, and Bishnupriya Gupta (2006) "The Early Modern Great Divergence:Wages, Prices and Economic Development in Europe and Asia 1500–1800." CEPR Discussion Paper 4947. Centre for Economic Policy Research.

Brock, William A., and Leonard J. Mirman (1972) "Optimal Economic Growth under Uncertainty: Discounted Case." *Journal of Economic Theory* 4: 479–513.

Browning, Martin, and Thomas F. Crossley (2001) "The Lifecycle Model of Consumption and Saving." *Journal of Economic Perspectives* 15: 3–22.

Bryant, Victor (1985) *Metric Spaces, Iteration and Application.*Cambridge: Cambridge University Press.

Buera, Francisco, and Joseph Kaboski (2006) "The Rise of the Service Economy." Northwestern University, mimeo.

Bulow, Jeremy I., and Kenneth Rogoff (1989a) "A Constant Recontracting Model of Sovereign Debt." *Journal of Political Economy* 97: 155–178.

—— (1989b) "Sovereign Debt: Is to Forgive to Forget?" *American Economic Review* 79: 43–50.

Caballero, Ricardo J. (1990) "Consumption Puzzles and Precautionary Savings." *Journal of Monetary Economics* 25: 113–136.

—— (1999) "Aggregate Investment." In *Handbook of Macroeconomics,* volume 1, John B. Taylor and Michael Woodford (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 813–862.

Caballero, Ricardo J., and Mohammad Hammour (1999) "Jobless Growth: Appropriability, Factor Substitution and Unemployment." *Carnegie-Rochester Conference Proceedings* 48: 51–94.

Caputo, Michael (2005) *Foundations of Dynamic Economic Analysis: Optimal Control Theory and Applications.* Cambridge: Cambridge University Press.

Card, David (1999) "The Causal Effect of Education on Earnings." In *Handbook of Labor Economics,* volume 3A, Orley Ashenfelter and David Card (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 1801–1863.

Carter, Susan B., Scott Sigmund Gartner, Michael R. Haines, Alan L. Olmstead, Richard Sutch, and Gavin Wright, editors (2006) *Historical Statistics of the United States Earliest Times to the Present: Millennial Edition.* New York: Cambridge University Press.

Caselli, Francesco (1999) "Technological Revolutions." *American Economic Review* 87: 78–102.

—— (2005) "Accounting for Cross-Country Income Differences." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 680–743.

Caselli, Francesco, andWilbur John Coleman (2001a) "Cross-Country Technology Diffusion: The Case of Computers." *American Economic Review* 91: 328–335.

—— (2001b) "The U.S. Structural Transformation and Regional Convergence: A Reinterpretation." *Journal of Political Economy* 109: 584–616.

—— (2005) "The World Technology Frontier." *American Economic Review* 96: 499–522.

Caselli, Francesco, and James Feyrer (2007) "The Marginal Product of Capital." *Quarterly Journal of Economics* 123: 535–568.

Caselli, Francesco, and Jaume Ventura (2000) "A Representative Household Theory of Distribution." *American Economic Review* 90: 909–926.

Caselli, Francesco, Gerard Esquivel, and Fernando Lefort (1996) "Reopening the Convergence Debate: A New Look at Cross-Country Growth Empirics." *Journal of Economic Growth* 40: 363–389.

Cass, David (1965) "Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation." *Review of Economic Studies* 32: 233–240.

—— (1972) "On Capital Overaccumulation in the Aggregate Neoclassical Model of Economic Growth: A Complete Characterization." *Journal of Economic Theory* 4: 200–223.

Ceruzzi, Paul E. (2003) *A History of Modern Computing.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Cesari, Lamberto (1966) "Existence Theorems for Weak and Usual Optimal Solutions in Lagrange Problems with Unilateral Constraints. I." *Transactions of the American Mathematical Society* 124: 369–412.

Chamberlain, Gary, and Charles A. Wilson (2000) "Optimal Intertemporal Consumption under Uncertainty." *Review of Economic Dynamics* 3: 365–395.

Chamberlin, Edward (1933) *The Theory on Monopolistic Competition.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Chandler, Tertius (1987) *Four Thousand Years of Urban Growth: An Historical Census.* Lewiston, N.Y.: St. David's University Press.

Chari, V. V., and Patrick J. Kehoe (1990) "Sustainable Plans." *Journal of Political Economy* 98: 783–802.

Chari, V. V., Patrick J. Kehoe and Ellen McGrattan (1997) "The Poverty of Nations: A Quantitative Exploration." Federal Reserve Bank of Minneapolis, mimeo.

Chenery, Hollis (1960) "Patterns of Industrial Growth," *American Economic Review* 5: 624–654.

Chiang, Alpha C. (1992) *Elements of Dynamic Optimization.* New York: McGraw-Hill.

Chirinko, Robert S., and Debdulal Mallick (2007) "The Marginal Product of Capital: A Persistent International Puzzle." Camry University, mimeo.

Ciccone, Antonio, and Giovanni Peri (2006) "Identifying Human Capital Externalities: Theory with Applications." *Review of Economic Studies* 73: 381–412.

Coatsworth, John H. (1993) "Notes on the Comparative Economic History of Latin America and the United States." In *Development and Underdevelopment in America: Contrasts in Economic Growth in North and Latin America in Historical Perpsective,* Walter L. Bernecker and Hans Werner Tobler (editors). New York: Walter de Gruyter.

Collier, Ruth B. (2000) *Paths towards Democracy: The Working Class and Elites in Western Europe and South America.* New York: Cambridge University Press.

Conrad, Jon M. (1999) *Resource Economics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Conway, John B. (1990) *A Course in Functional Analysis,* 2nd edition. New York: Springer-Verlag.

Cooley, Thomas F., editor (1995) *Frontiers of Business Cycle Research.* Princeton N.J.: Princeton University Press,

Coughlin, Peter J. (1992) *Probabilistic Voting Theory.* New York: Cambridge University Press.

Cunat, Alejandro, and Marco Maffezoli (2001) "Growth and Interdependence under Complete Specialization." Universita Bocconi, mimeo.

Curtin, Philip D. (1989) *Death by Migration: Europe's Encounter with the Tropical World in the Nineteenth Century.* New York: Cambridge University Press.

—— (1998) *Disease and Empire: The Health of European Troops in the Conquest of Africa.* New York: Cambridge University Press.

Dasgupta, Partha, and Geoffrey Heal (1979) *Economic Theory and Exhaustible Resources.* Cambridge: Cambridge University Press.

Dasgupta, Partha, and Joseph Stiglitz (1980) "Uncertainty, Industrial Structure, and the Speed of R&D." *Bell Journal of Economics* 11: 1–28.

David, Paul A. (1975) *Technical Choice, Innovation and Economic Growth: Essays on American and British Experience in the Nineteenth Century.* London: Cambridge University Press.

Davis, Ralph (1973) *The Rise of the Atlantic Economies.* Ithaca, N.Y.: Cornell University Press.

Davis, Steven, and John Haltiwanger (1991) "Wage Dispersion between and within U.S. Manufacturing Plants, 1963–86." *Brookings Papers on Economic Activity: Microeconomics* 115–200.

Davis, Y. Donald, and David E. Weinstein (2001) "An Account of Global Factor Trade." *American Economic Review* 91: 1423–1453.

Deaton, Angus S. (1992) *Understanding Consumption.* New York: Oxford University Press.

—— (2005) "Measuring Poverty in a GrowingWorld (or Measuring Growth in a PoorWorld)." *Review of Economics and Statistics* 87: 1–19.

Deaton, Angus S., and John Muellbauer (1980) *Economics and Consumer Behavior.* Cambridge: Cambridge University Press.

Debreu, Gerard (1954) "Valuation Equilibrium and Pareto Optimum." *Proceedings of the National Academy of Sciences,* USA 40: 588–592.

—— (1959) *Theory of Value.* New York: Wiley.

—— (1974) "Excess Demand Functions." *Journal of Mathematical Economics* 1: 15–23.

De La Croix, David, and Philippe Michel (2002) *A Theory of Economic Growth: Dynamics and Policy in Overlapping Generations.* Cambridge, Mass.: Cambridge University Press.

Denardo, Eric V. (1967) "Contraction Mappings in the Theory Underlying Dynamic Programming." *SIAM Review* 9: 165–177.

Diamond, Jared M. (1997) *Guns, Germs and Steel: The Fate of Human Societies.* New York: W.W. Norton.

Diamond, Peter (1965) "National Debt in a Neoclassical Growth Model." *American Economic Review* 55: 1126–1150.

Dinopoulos, Elias, and Peter Thompson (1998) "Schumpterian Growth without Scale Effects." *Journal of Economic Growth* 3: 313–335.

Dixit, Avinash K., (2004) *Lawlessness and Economics: Alternative Modes of Economic Governance.* Gorman Lectures. Princeton, N.J.: Princeton University Press,

Dixit, Avinash K., and Victor Norman (1980) *Theory of International Trade:ADual, General Equilibrium Approach.* Cambridge: Cambridge University Press.

Dixit, Avinash K., and Robert S. Pindyck (1994) *Investment under Uncertainty.*Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Dixit, Avinash K., and Joseph E. Stiglitz (1977) "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity." *American Economic Review* 67: 297–308.

Doepke, Matthias (2004) "Accounting for the Fertility Decline during the Transition to Growth." *Journal of Economic Growth* 9: 347–383.

Dollar, David (1992) "Outward-Oriented Developing Economies Really Do Grow More Rapidly: Evidence from 95 LDCs, 1976–1985." *Economic Development and Cultural Change* 40: 523–544.

Domar, Evsey D. (1946) "Capital Expansion, Rate of Growth and Employment." *Econometrica* 14: 137–147.

Doms, Mark, and Timothy Dunne, and Kenneth Troske (1997) "Workers, Wages and Technology." *Quarterly Journal of Economics* 112: 253–290.

Dorfman, Robert (1969) "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory." *American Economic Review* 64: 817–831.

Downs, Anthony (1957) *An Economic Theory of Democracy.* New York: Harper & Row.

Drandakis, E., and Edmund Phelps (1965) "A Model of Induced Invention, Growth and Distribution." *Economic Journal* 76: 823–840.

Drazen, Allan (2001) *Political Economy in Macroeconomics.* Princeton N.J.: Princeton University Press.

Duflo, Esther (2004) "Medium-Run Effects of Educational Expansion: Evidence from a Large School Construction Program in Indonesia." *Journal of Development Economics* 74: 163–197.

Duranton, Gilles (2004) "Economics of Productive Systems: Segmentations and Skill Biased Change." *European Economic Review* 48: 307–336.

Durlauf, Steven N. (1996) "A Theory of Persistent Income Inequality." *Journal of Economic Growth* 1: 75–94.

Durlauf, Steven N., and Marcel Fafchamps (2005) "Empirical Studies of Social Capital: A Critical Survey." In *Handbook of Economic Growth,*Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 1639–1699.

Durlauf, Steven N., and Danny Quah (1999) "The NewEmpirics of Economic Growth." In *The Handbook of Macroeconomics,* John Taylor and Michael Woodruff (editors). Amsterdam: North-Holland and Elsevier, pp. 235–308.

Durlauf, Steven N., Paul A. Johnson, and Jonathan R. W. Temple (2005) "Growth Econometrics." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 555–678.

Echevarria, Cristina (1997) "Changes in Sectoral Composition Associated with Economic Growth." *International Economic Review* 38: 431–452.

Eggertsson, Thrainn (2005) *Imperfect Institutions: Possibilities and Limits of Reform.* Ann Arbor: University of Michigan Press.

Eggimann, Gilbert (1999) *La Population des Villes des Tiers-Mondes, 1500–1950.* Geneva: Centre d'Histoire Economique Internationale de l'Universitéde Genève, Librairie Droz.

Ekeland, Ivar, and Jose A. Scheinkman (1986) "Transversality Condition for Some Infinite Horizon Discrete Time Optimization Problems." *Mathematics of Operations Research* 11: 216–229.

Elliott, John H. (1963) *Imperial Spain 1469–1716.* New York: St. Martin Press.

Eltis, David (1995) "The Total Product of Barbados, 1664–1701."*Journal of Economic History* 55: 321–336.

Elvin, Mark (1973) *The Pattern of the Chinese Past.* Stanford, Calif.: Stanford University Press.

Engerman, Stanley L., and Kenneth Sokoloff (1997) "Factor Endowments, Institutions, and Differential Paths of Growth among New World Economics: A View from Economic Historians of the United States." In *How Latin America Fell Behind,* Stephen Haber (editor). Stanford, Calif.: Stanford University Press.

Epifani, Paolo, and Gino Gancia (2006) "The Skill Bias of World Trade." Universitat Pompano Fabra, mimeo.

Epstein, Larry G., and Stanley E. Zin (1989) "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework." *Econometrica* 57: 937–969.

Ertman, Thomas (1997) *Birth of the Leviathan: Building States and Regimes in Medieval and Early Modern Europe.* New York: Cambridge University Press.

Ethier, Stewart, and Thomas Kurtz (1986) *Markov Processes: Characterization and Convergence.* Hoboken, N.J.: Wiley.

Evans, Eric J. (1996) *The Forging of the Modern State: Early Industrial Britain: 1783–1870,* 2nd edition. New York: Longman.

Evans, Peter (1995) *Embedded Autonomy: States and Industrial Transformation.* Princeton N.J.: Princeton University Press.

Feinstein, Charles (2005) *An Economic History of South Africa.* Cambridge: Cambridge University Press.

Feldstein, Martin, and Charles Horioka (1980) "Domestic Savings and International Capital Flows." *Economic Journal* 90: 314–329.

Fernandez, Raquel, and Roger Rogerson (1996) "Income Distribution, Communities and the Quality of Public Education." *Quarterly Journal of Economics* 111: 135–164.

Fernandez-Villaverde, Jesus (2003) "Was Malthus Right? Economic Growth and Population Dynamics." University of Pennsylvania, mimeo.

Fields, Gary (1980) *Poverty, Inequality and Development.* Cambridge: Cambridge University Press.

Finkelstein, Amy (2004) "Static and Dynamic Effects of Health Policy: Evidence from the Vaccine Industry." *Quarterly Journal of Economics* 119: 527–564.

Fisher, Irving (1930) *The Theory of Interests.* New York: Macmillan.

Fleming, Wendell H., and Raymond W. Rishel (1975) *Deterministic and Stochastic Optimal Control.* New York: Springer-Verlag.

Foellmi, Reto, and Josef Zweimuller (2002) "Structural Change and the Kaldor Facts of Economic Growth." CEPR Discussion Paper 3300. Centre for Economic Policy Research.

Forbes, Kristen J. (2000) "AReassessment of the Relationship between Inequality and Growth." *American Economic Review* 90: 869–887.

Foster, Andrew, and Mark Rosenzweig (1995) "Learning by Doing and Learning from Others: Human Capital and Technical Change in Agriculture." *Journal of Political Economy* 103: 1176–1209.

Foster, Lucia, John Haltiwanger, and Cornell J. Krizan (2000) "Aggregate Productivity Growth: Lessons from Microeconomic Evidence."NBERWorking Paper 6803. National Bureau of Economic Research.

Fraŋcois, Patrick, and Joanne Roberts (2003) "Contracting Productivity Growth." *Review of Economic Studies* 70: 59–85.

Frankel, Jeffrey, and David Romer (1999) "Does Trade Cause Growth?" *American Economic Review* 89: 379–399.

Freeman, Christopher (1982) *The Economics of Industrial Innovation.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Freudenberger, Herman (1967) "State Intervention as an Obstacle to Economic Growth in the Hapsburg Monarchy." *Journal of Economic History* 27: 493–509.

Friedman, Milton (1957) *A Theory of the Consumption Function.* Princeton N.J.: Princeton University Press.

Fudenberg, Drew, and Jean Tirole (1994) *Game Theory.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Funk, Peter (2002) "Induced Innovation Revisited."*Economica* 69: 155–171.

Futia, Carl A. (1982) "Invariant Distributions and Limiting Behavioral Markovian Economic Models." *Econometrica* 50: 377–408.

Gabaix, Xavier (2000) "The Factor Content of Trade: A Rejection of the Heckscher-Ohlin-Leontief Hypothesis." Massachusetts Institute of Technology, mimeo.

Galenson, David W. (1996) "The Settlement and Growth of the Colonies: Population, Labor and Economic Development." In *The Cambridge Economic History of the United States,* Volume I, The Colonial Era, Stanley L. Engerman and Robert E. Gallman (editors). New York: Cambridge University Press.

Gallup, John Luke, and Jeffrey D. Sachs (2001) "The Economic Burden of Malaria." *American Journal of Tropical Medicine and Hygiene* 64: 85–96.

Galor, Oded (1996) "Convergence? Inference from Theoretical Models." *Economic Journal* 106: 1056–1069.

—— (2005) "From Stagnation to Growth: Unified Growth Theory." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 171–293.

Galor, Oded, and Omer Moav (2000) "Ability Biased Technology Transition, Wage Inequality and Growth." *Quarterly Journal of Economics* 115: 469–498.

—— (2002) "Natural Selection and the Origin of Economic Growth." *Quarterly Journal of Economics* 117: 1133–1192.

—— (2004) "From Physical to Human Capital Accumulation: Inequality in the Process of Development." *Review of Economic Studies* 71: 1101–1026.

Galor, Oded, and AndrewMountford (2008) "Trading Population for Productivity: Theory and Evidence." *Review of Economic Studies*, forthcoming.

Galor, Oded, and Harl E. Ryder (1989) "Existence, Uniqueness and Stability of Equilibrium in an Overlapping-Generations Model with Productive Capital." *Journal of Economic Theory* 49: 360–375.

Galor, Oded, and Daniel Tsiddon (1997) "Tecnological Progress, Mobility, and Growth." *American Economic Review* 87: 363–382.

Galor, Oded, and David N. Weil (1996) "The Gender Gap, Fertility, and Economic Growth." *American Economic Review* 86: 374–387.

—— (2000) "Population, Technology, and Growth: From Malthusian Stagnation to the Demographic Transition and Beyond." *American Economic Review* 90: 806–828.

Galor, Oded, and Joseph Zeira (1993) "Income Distribution and Macroeconomics." *Review of Economic Studies* 60: 35–52.

Galor, Oded, Omer Moav, and Dietrich Vollrath (2005) "Land Inequality and the Origin of Divergence in Overtaking in the Growth Process: Theory and Evidence." Brown University, mimeo.

Gancia, Gino (2003) "Globalization, Divergence and Stagnation." University of Pompeu Fabra, working paper.

Gancia, Gino, and Fabrizio Zilibotti (2005) "Horizontal Innovation in the Theory of Growth and Development." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 111–170.

Gans, Joshua S., and Michael Smart (1996) "Majority Voting with Single-Crossing Preferences." *Journal of Public Economics* 59: 219–237.

Geary, Robert C. (1950) "A Note on a Constant Utility Index of the Cost of Living." *Review of Economic Studies* 18: 65–66.

Geertz, Clifford (1963) *Peddlers and Princes.* Chicago: University of Chicago Press.

Gelfand I. M., and Sergei V. Fomin (2000) *Calculus of Variation,* translated by Richard A. Silverman. New York: Dover Publications.

Gerschenkron, Alexander (1962) "Economic Backwardness in Political Perspective." In *The Progress of Underdeveloped Areas,* Bert Hoselitz (editor). Chicago: University of Chicago Press.

Gikhman, I. I., and A. V. Skorohod (1974) *The Theory of Stochastic Processes,* volume I, translated by Samuel Kotz. New York: Springer-Verlag.

Gil, Richard, Casey Mulligan, and Xavier Sala-i-Martin (2004) "Do Democracies Have Different Public Policies than Nondemocracies?" *Journal of Economic Perspectives* 18: 51–74.

Gilles, Christian, and Stephen F. LeRoy (1992) "Bubbles and Charges." *International Economic Review* 33: 323–339.

Glomm, Gerhard, and B. Ravikumar (1992) "Public vs. Private Investment in Human Capital: Endogenous Growth and Income Inequality." *Journal of Political Economy* 100: 818–834.

Goldin, Claudia, and Lawrence F. Katz (1998) "The Origins of Technology-Skill Complementarity." *Quarterly Journal of Economics* 113: 693–732.

Gollin, Douglas, Stephen Parente, and Richard Rogerson (2002) "Structural Transformation and Cross-Country Income Differences." University of Illinois, Urbana-Champaign, mimeo.

Gomez-Galvarriato, Aurora (1998) "The Evolution of Prices and Real Wages in Mexico from the Porfiriato to the Revolution." In *Latin America and the World Economy since 1800,* John H. Coatsworth and Alan M. Taylor (editors). Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Goodfriend, Marvin, and John McDermott (1995) "Early Development." *American Economic Review* 85: 116–133.

Gordon, Robert J. (1990) *The Measurement of Durable Goods Prices.* Chicago: University of Chicago Press.

Gorman, W. M. (1953) "Community Preference Fields." *Econometrica* 21: 63–80.

—— (1959) "Separable Utility and Aggregation." *Econometrica* 71: 469–481.

—— (1976) "Tricks with Utility Functions." In *Essays in Economic Analysis,* Michael Artis and A. R. Nobay (editors). Cambridge: Cambridge University Press, pp. 212–243.

—— (1980) "Some Engel Curves." In *Essays in Theory and Measurement of Consumer Behavior,* Angus S. Deaton (editor). Cambridge: Cambridge University Press, pp. 7–29.

Gourinchas, Pierre-Olivier, and Olivier Jeanne (2006) "The Elusive Gains from International Financial Integration." *Review of Economic Studies* 73: 715–741.

Grandmont, Jean-Michel (1978) "Intermediate Preferences and Majority Rule." *Econometrica* 46: 317–330.

Greenwood, Jeremy, and Boyan Jovanovic (1990) "Financial Development, Growth and the Distribution of Income." *Journal of Political Economy* 98: 1076–1107.

Greenwood, Jeremy, and Mehmet Yorukoglu (1997) "1974." *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 46: 49–95.

Greenwood, Jeremy, Zvi Hercowitz, and Per Krusell (1997) "Long-Run Implications of Investment-Specific Technological Change." *American Economic Review* 87: 342–362.

Greif, Avner (1994) "Cultural Beliefs and the Organization of Society: A Historical and Theoretical Reflection on Collectivist and Individualist Societies." *Journal of Political Economy* 102: 912–950.

Griliches, Zvi (1957) "Hybrid Corn: An Exploration in the Economics of Technological Change." *Econometrica* 25: 501–522.

—— (1969) "Capital-Skill Complementarity." *Review of Economics and Statistics* 51: 465–468.

Griliches, Zvi, and Jacob Schmookler (1963) "Inventing and Maximizing." *American Economic Review* 53: 725–729.

Grossman, Gene M., and Elhanan Helpman (1991a) "Quality Ladders in the Theory of Growth." *Review of Economic Studies* 68: 43–61.

—— (1991b) *Innovation and Growth in the Global Economy*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Grossman, Herschel, and Minseong Kim (1995) "Swords or Ploughshares? A Theory of the Security of Claims to Property Rights." *Journal of Political Economy* 103: 1275–1288.

—— (1996) "Predation and Accumulation," *Journal of Economic Growth* 1: 333–350.

Guiso, Luigi, Paola Sapienza, and Luigi Zingales (2004) "Does Culture Affect Economic Outcomes?" CEPR working paper. Centre for Economic Policy Research.

Gutierrez, Hector (1986) "La Mortalite des Eveques Latino-Americains aux XVIIe et XVIII Siecles." *Annales de Demographie Historique* 53(2): 29–39.

Guvenen, Fatih, and Burhanettin Kuruscu (2006) "Understanding Wage Inequality: Ben-Porath Meets Skill Biased Technical Change." University of Texas, Austin, mimeo.

Habakkuk, H. J., (1962) *American and British Technology in the Nineteenth Century: Search for Labor-Saving Inventions*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hakenes Hendrik, and Andreas Irmen (2006) "Something Out of Nothing: Neoclassical Growth and the Trivial Steady State." University of Heidelberg, mimeo.

Halkin, Hubert (1974) "Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizons." *Econometrica* 42: 267–272.

Hall, Robert E. (1978) "Stochastic Implications of the Life-Cycle–Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence." *Journal of Political Economy* 86: 971–988. (Reprinted in Sargent, Thomas J., and Robert E. Lucas Jr., editors (1981) *Rational Expectations and Econometric Practice*. Minneapolis, Minn.: University of Minnesota Press.)

Hall, Robert E., and Charles I. Jones (1999) "Why Do Some Countries Produce So Much More Output per Worker than Others?" *Quarterly Journal of Economics* 114: 83–116.

Haltiwanger, John C., Julia I. Lane, and James R. Spletzer (1999) "Productivity Differences across Employers: The Roles of Employer Size, Age and Human Capital." *American Economic Review* 89: 94–98.

Hammermesh, Daniel (1993) *Labor Demand*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Hansen, Gary D., and Edward C. Prescott (2002) "Malthus to Solow." *American Economic Review* 92: 1205–1217.

Harris, John, and Michael Todaro (1970) "Migration, Unemployment and Development: A Two-Sector Analysis." *American Economic Review* 60: 126–142.

Harrison, Lawrence E., and Samuel P. Huntington, editors (2000) *Culture Matters: How Values Shape Human Progress*. New York: Basic Books.

Harrod, Roy (1939) "An Essay in Dynamic Theory." *Economic Journal* 49: 14–33.

Hart, Oliver D. (1979) "On Shareholder Unanimity in Large Stockmarket Economies." *Econometrica* 47: 1057–1084.

Hassler, John, Sevi Mora, Kjetil Storesletten, and Fabrizio Zilibotti (2003) "Survival of theWelfare State." *American Economic Review* 93: 87–112.

Hassler, John, Per Krusell, Kjetil Storesletten, and Fabrizio Zilibotti (2005) "The Dynamics of Government: A Positive Analysis." *Journal of Monetary Economics* 52: 1331–1358.

Hayashi, Fumia (1982) "Tobin's Marginal *q* and Average *q*: A Neoclassical Interpretation." *Econometrica* 50: 213–234.

Heckman, James, Lance Lochner, and Christopher Taber (1998) "Tax Policy and Human Capital Formation." *American Economic Review Papers and Proceedings* 88: 293–297.

Hellwig, Martin, and Andreas Irmen (2001) "Endogenous Technical Change in a Competitive Economy." *Journal of Economic Theory* 101: 1–139.

Helpman, Elhanan (2005) *Mystery of Economic Growth*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Herbst, Jeffery I. (2000) *States and Power in Africa: Comparative Lessons in Authority and Control*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Heston, Allen, Robert Summers, and Bettina Aten (2002) *Penn World Tables Version 6.1*. Downloadable Data Set. Philadelphia: Center for International Comparisons at the University of Pennsylvania.

Hicks, John (1932) *The Theory of Wages*. London: Macmillan.

Hildenbrand, Werner, and Alan Kirman (1988) *Equilibrium Analysis: Variations on Themes by Edgeworth and Walras*. Amsterdam: Elsevier.

Hirschman, Albert (1958) *The Strategy of Economic Development*. New Haven, Conn.: Yale University Press.

Hirshleifer, Jack (2001) *The Dark Side of the Force: Economic Foundations of Conflict Theory*. New York: Cambridge University Press.

Homer, Sydney, and Richard Sylla (1991) *A History of Interest Rates*. New Brunswick, N.J.: Rutgers University Press.

Hopkins, Keith (1980) "Taxes and Trade in the Roman Empire (200 b.c.–a.d. 400)." *Journal of Roman Studies* 70: 101–125.

Hotelling, Harold (1929) "Stability in Competition." *Economic Journal* 39: 41–57.

—— (1931) "The Economics of Exhaustible Resources." *Journal of Political Economy* 31: 137–175.

Houthakker, Hendrik S. (1955) "The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis."*Review of Economic Studies* 23: 27–31.

Howard, Ronald A. (1960) *Dynamic Programming and Markov Processes*.Cambridge, Mass.: MIT Press.

Howitt, Peter (1999) "Steady Endogenous Growth with Population and R&D Inputs Growing." *Journal of Political Economy* 107: 715–730.

—— (2000) "Endogeous Growth and Cross–Country Income Differences." *American Economic Review* 90: 829–846.

Hsieh, Chang-Tai (2002) "What Explains the Industrial Revolution in East Asia? Evidence from the Factor Markets." *American Economic Review* 92: 502–526.

Hsieh, Chang-Tai, and Peter J. Klenow (2006) "Relative Prices and Relative Prosperity." *American Economic Review* 97: 562–585.

Imbs, Jean, and Romain Wacziarg (2003) "Stages of Diversification." *American Economic Review* 93: 63–86.

Inada, Ken-Ichi (1963) "On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization." *Review of Economic Studies* 30: 119–127.

Jacobs, Jane (1970) *The Economy of Cities.* New York: Vintage Books.

James, John A., and Jonathan S. Skinner (1985) "The Resolution of the Labor-Scarcity Paradox." *Journal of Economic History* 45: 513–540.

Jayaratne, Jay, and Philip Strahan (1996) "The Finance-Growth Nexus: Evidence from Bank Branch Deregulation." *Quarterly Journal of Economics* 111: 639–670.

Jones, Benjamin F., and Benjamin A. Olken (2005) "Do Leaders Matter? National Leadership and Growth since World War II." *Quarterly Journal of Economics* 120: 835–864.

Jones, Charles I. (1995) "R&D-Based Models of Economic Growth." *Journal of Political Economics* 103: 759–784.

—— (1997) "On the Evolution of theWorld Income Distribution." *Journal of Economic Perspectives* 11: 19–36.

—— (1998) *Introduction to Economic Growth.* New York: W. W. Norton.

—— (1999) "Growth: With or without Scale Effects." *American Economic Review* 89: 139–144.

—— (2005) "The Shape of Production Functions and the Direction of Technical Change." *Quarterly Journal of Economics* 2: 517–549.

Jones, Charles I., and Dean Scrimgeour (2006) "The Steady-State Growth Theorem: Understanding Uzawa (1961)." University of California, Berkeley, mimeo.

Jones, Eric (1988) *Growth Recurring.* Oxford: Oxford University Press.

Jones, Larry, and Rodolfo Manuelli (1990) "A Convex Model of Equilibrium Growth: Theory and Policy Indications." *Journal of Political Economy* 98: 1008–1038.

Jorgensen, Dale (2005) "Accounting for Growth in the Information Age." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 744–815.

Jorgensen, Dale, F. M. Gollop, and Barbara Fraumeni (1987) *Productivity and U.S. Economic Growth.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Judd, Kenneth (1985) "On the Performance of Patents." *Econometrica* 53: 567–585.

—— (1998) *Numerical Methods in Economics.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Kaldor, Nicholas (1957) "Alternative Theories of Distribution." *Review of Economic Studies* 23: 83–100.

—— (1963) "Capital Accumulation and Economic Growth." In *Proceedings of a Conference Held by the International Economics Association,* Friedrich A. Lutz and Douglas C. Hague (editors). London: Macmillan.

Kalemli-Ozcan, Sebnem (2002) "Does Mortality Decline Promote Economic Growth?" *Journal of Economic Growth* 7: 411–439.

Kamien, Morton, and Nancy Schwartz (1981) *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management.* Amsterdam: Elsevier.

Kamihigashi, Takashi (2001) "Necessity of Transversality Conditions for Infinite Horizon Problems." *Econometrica* 69: 995–1012.

—— (2003) "Necessity of Transversality Conditions for Stochastic Problems." *Journal of Economic Theory* 109: 140–149.

Karlin, Samuel (1955) "The Structure of Dynamic Programming Models." *Naval Research Logistics Quarterly* 2: 285–294.

Katz, Lawrence, and David Autor (2000) "Changes in theWage Structure and Earnings Inequality." In *The Handbook of Labor Economics,* volume III, Orley Ashenfelter and David Card (editors). Amsterdam: North-Holland.

Katz, Lawrence F., and Kevin M. Murphy (1992), "Changes in RelativeWages, 1963–1987: Supply and Demand Factors." *Quarterly Journal of Economics* 107: 35–78.

Kehoe, Patrick J., and Fabrizio Perri (2002) "International Business Cycles with Endogenous Incomplete Markets." *Econometrica* 70: 907–928.

Kelley, John (1955) *General Topology.* New York: Van Nostrand.

Kennedy, Charles (1964) "Induced Bias in Innovation and the Theory of Distribution." *Economic Journal* 74: 541–547.

Keyssar, Alexander (2000) *The Right to Vote: The Contested History of Democracy in the United States.* New York: Basic Books.

Kiley, Michael (1999 "The Supply of Skilled Labor and Skill-Biased Technological Progress." *Economics Journal* 109: 708–724.

King, Robert G., and Ross Levine (1993) "Finance, Entrepreneurship, and Growth: Theory and Evidence." *Journal of Monetary Economics* 32: 513–542.

King, Robert G. and Sergio Rebelo (1999) "Resuscitating Real Business Cycles." In *Handbook of Macroeconomics,* volume 1, John B. Taylor and Michael Woodford (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 927–1007.

Kiyotaki, Nobuhiro (1988) "Multiple Expectational Equilibria under Monopolistic Competition." *Quarterly Journal of Economics* 103: 695–713.

Klenow, Peter J., and Andres Rodriguez (1997) "The Neoclassical Revival in Growth Economics: Has It Gone Too Far?"*NBER Macroeconomics Annual* 1997: 73–103.

Klepper, Steven (1996) "Entry, Exit, Growth and Innovation over the Product Life Cycle." *American Economic Review* 86: 562–583.

Klette, Tor Jacob, and Samuel Kortum (2004) "Innovating Firms and Aggregate Innovation."*Journal of Political Economy* 112: 986–1018.

Knack, Stephen, and PhilipKeefer (1995) "Insititutions and Economic Performance: Cross-Country Tests Using Alternative Institutional Measures." *Economics and Politics* 7: 207–228.

—— (1997) "Does Social Capital Have an Economic Impact? A Cross-Country Investigation." *Quarterly Journal of Economics* 112: 1252–1288.

Kolmogorov, Andrei, and Sergei V. Fomin (1970) *Introductory Reak Analysis.* New York: Dover Press.

Kongsamut, Piyabha, Sergio Rebelo, and Danyang Xie (2001) "Beyond Balanced Growth." *Review of Economic Studies* 48: 869–882.

Koopmans, Tjalling C. (1965) "On the Concept of Optimal Economic Growth." In *The Econometric Approach to Development Planning,* Amsterdam: North-Holland, pp. 225–295.

Koren, Miklos, and Silvana Tenreyro (2007) "Volatility and Growth." *Quarterly Journal of Economics* 122: 243–287.

Kortum, Samuel (1997) "Research, Patenting and Technological Change." *Econometrica* 55: 1389–1431.

Kraay, Aart, and Jaume Ventura (2007) "Comparative Advantage and the Cross-Section of the Business Cycle." *Journal of the European Economic Association* 6: 1300–1333.

Kremer, Michael (1993) "Population Growth and Technological Change: One Million b.c. to 1990." *Quarterly Journal of Economics* 108: 681–716.

Kreps, David (1988) *Notes on the Theory of Choice.* Boulder, Colo.: Westview Press.

Kreyszig, Erwin (1978) *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: Wiley.

Krueger, Alan, and Mikael Lindahl (2001) "Education for Growth: Why and for Whom?" *Journal of Economic Literature* 39: 1101–1136.

Krugman, Paul (1979) "A Model of Innovation, Technology Transfer, and the World Distribution of Income." *Journal of Political Economy* 87: 253–266.

—— (1991) "History versus Expectations." *Quarterly Journal of Economics* 106: 651–667.

Krusell, Per and José-Víctor Ríos-Rull (1996) "Vested Interests in a Theory of Stagnation and Growth." *Review of Economic Studies* 63: 301–330.

—— (1999) "On the Size of Government: Political Economy in the Neoclassical Growth Model." *American Economic Review* 89: 1156–1181.

Krusell, Per, and Anthony Smith (1998) "Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy." *Journal of Political Economy* 106: 867–896.

—— (2005) "Income and Wealth Heterogeneity, Portfolio Choice and Equilibrium Asset Returns." *Macroeconomic Dynamics* 1: 387–422.

Krusell, Per, Lee Ohanian, Victor Rios-Rull, and Giovanni Violante (1999) "Capital-Skill Complementarity and Inequality." *Econometrica* 58: 1029–1053.

Kupperman, Karen O. (1993) *Providence Island: 1630–1641: The Other Puritan Colony.* New York: Cambridge University Press.

Kuznets, Simon (1957) "Quantitative Aspects of the Economic Growth of Nations: II. Industrial Distribution of National Product and Labour Force." *Economic Development and Cultural Change* 5 (supplement): 1–111.

—— (1966) *Modern Economic Growth.* New Haven, Conn.: Yale University Press.

—— (1973) "Modern Economic Growth: Findings and Reflections." *American Economic Review* 53: 829–846.

Kydland, Finn E., and Edward C. Prescott (1982) "Time to Build and Aggregate Fluctuations." *Econometrica* 50: 1345–1370.

Lagos, Ricardo (2001) "A Model of TFP." New York University, working paper.

Laitner, John (2000) "Structural Change and Economic Growth." *Review of Economic Studies* 57: 545–561.

Landes, David S. (1998) *The Wealth and Poverty of Nations: Why Some Are So Rich and Some So Poor.* New York: W. W. Norton.

Lang, Sean (1999) *Parliamentary Reform: 1785–1928.* New York: Routledge.

Leamer, Edward (1998) "Does Natural Resource Abundance Increase Latin American Income Inequality?" *Journal of Development Economics* 59: 3–42.

Leonard, Daniel, and Ngo Van Long (1992) *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Levchenko, Andrei (2007) "Institutional Quality and International Trade." *Review of Economic Studies* 74: 791–819.

Levine, Ross (2005) "Finance and Growth," In *The Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland.

Lewis,William Arthur (1954) "Economic Development with Unlimited Supplies of Labor." *Manchester School of Economics and Social Studies* 22: 139–191.

Lindbeck, Assar, and JörgenWeibull (1987) "Balanced-Budget Redistribution as the Outcome of Political Competition." *Public Choice* 12: 272–297.

Lindert, Peter H. (2000) "Three Centuries of Inequality in Britain and America." In *Handbook of Income Distribution,* Anthony B. Atkinson and Fraŋcois Bourguignon (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 167–216.

—— (2004) *Growing Public: Social Spending and Economics Growth since the Eighteenth Century.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lindert, Peter H., and JeffreyWilliamson (1976) "Three Centuries of American Inequality." *Research in Economic History* 1: 69–123.

Livi-Bacci, Massimo (1997) *A Concise History of World Population.* Oxford: Blackwell.

Ljungqvist, Lars, and Thomas J. Sargent (2005) *Recursive Macroeconomic Theory.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Long, John B., and Charles I. Plosser (1983) "Real Business Cycles." *Journal of Political Economy* 91: 39–69.

López-Alonso, Moramay, and Rául Porras Condey (2004) "The Ups and Downs of Mexican Economic Growth: The Biological Standard of Living in Inequality: 1870–1950." *Economics and Human Biology* 1: 169–186.

Loury, Glenn (1981) "Intergenerational Transfers and the Distribution of Earnings." *Econometrica* 49: 834–867.

Lucas, Robert E. (1978) "Asset Prices in an Exchange Economy." *Econometrica* 46: 1426–1445.

Lucas, Robert E. (1988) "On the Mechanics of Economic Development." *Journal of Monetary Economics* 22: 3–42.

—— (1990) "Why Doesn't Capital Flow from Rich to Poor Countries?" *American Economic Review* 80: 92–96.

Lucas, Robert E., and Edward C. Prescott (1971) "Investment under Uncertainty." *Econometrica* 39: 659–681.

Luenberger, David (1969) *Optimization by Vector Space Methods*. New York: Wiley.

—— (1979) *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications*. New York: Wiley.

Maddison, Angus (1991) *Dynamic Forces in Capitalist Development: A Long-Run Comparative View*. New York: Oxford University Press.

—— (2001) *The World Economy: A Millennial Perspective*. Paris: Development Centre.

—— (2003) *The World Economy: Historical Statistics*. CD-ROM. Paris: Organisation for Economic Co-operation and Development.

Magill, Michael J. P. (1981) "Infinite Horizon Programs." *Econometrica* 49: 679–712.

Makowski, Louis (1980)"Perfect Competition, the Profit Criterion and the Organization of Economic Activity."*Journal of Economic Theory* 22: 222–242.

Malthus, Thomas R. (1798) *An Essay on the Principle of Population*. London: W. Pickering.

Mangasarian, O.O. (1966) "Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems." *SIAM Journal of Control* 4: 139–152.

Mankiw, N. Gregory, David Romer, and David N. Weil (1992) "A Contribution to the Empirics of Economic Growth." *Quarterly Journal of Economics* 107: 407–437.

Mann, Charles C. (2004) *1491: New Revelations of the Americas before Columbus*. New York: Vintage Books.

Mantel, Rolf R. (1976) "Homothetic Preferences and Community Excess Demand Function." *Journal of Economic Theory* 12: 197–201.

Manuelli, Rodolfo, and Anant Seshadri (2006) "Human Capital and the Wealth of Nations." University of Wisconsin, mimeo.

Marris, Robin (1982) "How Much of the Slowdown Was Catch-Up?" In *Slower Growth in the Western World*, Ruth C. O. Matthews (editor). London: Heinemann.

Marshall, Alfred [1890] (1949) *Principles of Economics*. London: Macmillan.

Martimort, David, and Thierry Verdier (2004) "Agency Costs of Internal Collusion and Schumpeterian Growth." *Review of Economic Studies* 71: 1119–1141.

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green (1995) *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press.

Matsuyama, Kiminori (1991) "Increasing Returns, Industrialization, and the Indeterminacy of Equilibrium." *Quarterly Journal of Economics* 106: 617–650.

—— (1992) "Agricultural Productivity, Comparative Advantage and Economic Growth." *Journal of Economic Theory* 58: 317–334.

—— (1995) "Complementarities and Cumulative Processes in Models of Monopolistic Competition." *Journal of Economic Literature* 33: 701–729.

—— (1999) "Growing through Cycles." *Econometrica* 67: 335–348.

—— (2002) "The Rise of Mass Consumption Societies." *Journal of Political Economy* 110: 1035–1070.

—— (2004) "Financial Market Globalization, Symmetry-Breaking and Endogenous Inequality of Nations." *Econometrica* 72: 853–882.

Mauro, Paolo (1995) "Corruption and Growth." *Quarterly Journal of Economics* 110: 681–712.

McCall, John (1970) "Economics of Information and Job Search." *Quarterly Journal of Economics* 84: 113–126.

McCandless, George T., and Neil Wallace (1991) *Introduction to Dynamic Macroeconomic Theory: An Overlapping Generations Approach.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

McEvedy, Colin, and Richard Jones (1978) *Atlas of World Population History.* New York: Facts on File.

Melitz, Mark (2003) "The Impact of Trade on Intra-Industry Reallocations and Aggregate Industry Productivity." *Econometrica* 71: 1695–1725.

Meltzer, Allan H., and Scott Richard (1981) "A Rational Theory of the Size of Government." *Journal of Political Economy* 89: 914–927.

Michel, Philippe (1982) "On the Transversality Condition in Infinite Horizon Optimal Problems." *Econometrica* 50: 975–985.

Migdal, Joel (1988) *Strong Societies and Weak States: State-Society Relations and State Capabilities in the Third World.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Mincer, Jacob (1974) *Schooling, Experience, and Earnings.* New York: National Bureau of Economic Research.

Minier, Jenny A. (1998) "Democracy and Growth: Alternative Approaches." *Journal of Economic Growth* 3: 241–266.

Mirman, Leonard J., and Itzak Zilcha (1975) "On Optimal Growth under Uncertainty." *Journal of Economic Theory* 11: 329–339.

Mitch, David (1983) "The Role of Human Capital in the First Industrial Revolution." In *The British Industrial Revolution: An Economic Perspective,* Joel Mokyr (editor). San Francisco:Westview Press.

Mokyr, Joel (1990) *The Lever of Riches: Technological Creativity and Economic Progress.* New York: Oxford University Press.

—— (1993) "Introduction." In *The British Industrial Revolution,* Joel Mokyr (editor). Boulder, Colo.: Westview Press, pp. 1–129.

Montesquieu, Charles de Secondat [1748] (1989) *The Spirit of the Laws.* NewYork: Cambridge University Press.

Moretti, Enrico (2004) "Estimating the External Return to Education: Evidence from Repeated Cross-Sectional and Longitudinal Data." *Journal of Econometrics* 121: 175–212.

Morris, Ian (2004) "Economic Growth in Ancient Greece." *Journal of Institutional and Theoretical Economics* 160: 709–742.

Mosse, W. E. (1992) *An Economic History of Russia, 1856–1914.* London: I. B. Taurus Press.

Mundlak, Yair (2000) *Agriculture and Economic Growth: Theory and Measurement.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Murphy, Kevin M., Andrei Shleifer, and Robert W. Vishny (1989) "Industrialization and the Big Push." *Quarterly Journal of Economics* 106: 503–530.

Myerson, Rogerson (1991) *Game Theory*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Myrdal, Gunnar (1968) *Asian Drama: An Inquiry into the Poverty of Nations,* 3 volumes. New York: Twentieth Century Fund.

Nelson, Richard R., and Edmund S. Phelps (1966) "Investment in Humans, Technological Diffusion, and Economic Growth." *American Economic Review* 56: 69–75.

Newell, Richard, Adam Jaffee, and Robert Stavins (1999) "The Induced Innovation Hypothesis and Energy-Saving Technological Change." *Quarterly Journal of Economics* 114: 907–940.

Ngai, Rachel, and Christopher Pissarides (2006) "Structural Change in a Multi-Sector Model of Growth." London School of Economics, mimeo.

Nickell, Stephen (1996) "Competition and Corporate Performance." *Journal of Political Economy* 104: 724–746.

North, Douglass C. (1990) *Institutions, Institutional Change, and Economic Performance.* New York: Cambridge University Press.

North, Douglass C., and Robert Thomas (1973) *The Rise of the Western World: A New Economic History*. Cambridge: Cambridge University Press.

North, Douglass C., William Summerhill, and Barry R. Weingast (2000) "Order, Disorder, and Economic Change: Latin America versus North America." In *Governing for Prosperity,* Bruce Bueno de Mesquita and Hilton L. Root (editors). New Haven, Conn.: Yale University Press, pp. 17–58.

Nunn, Nathan (2006) "Relationship-Specificity, Incomplete Contracts and the Pattern of Trade." *Quarterly Journal of Economics* 123: 569–600.

Nurske, Ragnar (1958) *Problems of Capital Formation in Underdeveloped Countries.* New York: Oxford University Press.

Obstfeld, Maurice (1994) "Risk-Taking, Global Diversification, and Growth." *American Economic Review* 84: 1310–1329.

Obstfeld, Maurice, and Kenneth Rogoff (1996) *Foundations of International Macroeconomics*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Obstfeld, Maurice, and Alan M. Taylor (2002) "Globalization and Capital Markets." NBER Working Paper 8846. National Bureau of Economic Research.

Ok, Efe (2007) *Real Analysis with Economic Applications*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Osborne, Martin, and Ariel Rubinstein (1994) *A Course in Game Theory.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Overton, Mark (1996) *Agricultural Revolution in England: The Transformation of the Agrarian Economy, 1500–1850.* New York: Cambridge University Press.

Pamuk, Sevket (2004) "Institutional Change and the Longevity of the Ottoman Empire: 1500–1800." *Journal of Interdisciplinary History* 35: 225–247.

Parente, Stephen L., and Edward C. Prescott (1994) "Barriers to Technology Adoption and Development." *Journal of Political Economy* 102: 298–321.

Pavcnik, Nina (2002) "Trade Liberalization, Exit, and Productivity Improvements: Evidence from Chilean Plants." *Review of Economic Studies* 69: 245–276.

Perko, Lawrence (2001) *Differential Equations and Dynamical System,* 3rd edition. New York: Springer Verlag.

Persson, Torsten, and Guido Tabellini (1994) "Is Inequality Harmful for Growth? Theory and Evidence." *American Economic Review* 84: 600–621.

—— (2000) *Political Economics: Explaining Economic Policy.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Phelps, Edmund S. (1966) *Golden Rules of Economic Growth.* New York: W. W. Norton.

Piketty, Thomas (1997) "The Dynamics of Wealth Distribution and the Interest Rate with Credit Rationing." *Review of Economic Studies* 64: 173–190.

Piketty, Thomas, and Emmanuel Saez (2003) "Income Inequality in the United States, 1913–1998." *Quarterly Journal of Economics* 118: 1–39.

Pirenne, Henri (1937) *Economic and Social History of Medieval Europe.* New York: Routledge.

Pissarides, Christopher (2000) *Equilibrium Unemployment Theory,* 2nd edition. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Pollak, Richard (1971) "Additive Utility Functions and Linear Engel Curves." *Review of Economic Studies* 38: 401–413.

Pomeranz, Kenneth (2000) *The Great Divergence: China, Europe and the Making of the Modern World Economy.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Pontryagin, Lev S., Vladimir Boltyanskii, Kevac Giamkelidze, and Eugene Mischenko (1962) *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* New York: Interscience.

Popp, David (2002) "Induced Innovation and Energy Prices." *American Economic Review* 92: 160–180.

Postan, M. M. (1966) "Medieval Agrarian Society in its Prime: England." In *The Cambridge Economic History of Europe,* M. M. Postan (editor). London: Cambridge University Press, pp. 168–300.

Prescott, Edward C. (1986) "Theory Ahead of Business Cycle Measurement." *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review* 10: 1–22.

Pritchett, Lant (1997) "Divergence, Big Time."*Journal of Economic Perspectives* 11: 3–18.

Przeworski, Adam, and Fernando Limongi (1993) "Political Regimes and Economic Growth." *Journal of Economic Perspectives* 7: 51–69.

Puterman, Martin L. (1994) *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming.* New York: Wiley.

Putnam, Robert, with Robert Leonardi, and Raffaella Y. Nanetti (1993) *Making Democracy Work: Civic Traditions in Modern Italy.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Qian, Nancy (2007) "Quantity-Quality: The Positive Effect of Family Size on School Enrollment in China." Brown University, mimeo.

Quah, Danny (1993) "Galton's Fallacy and Tests of the Convergence Hypothesis." *Scandinavian Journal of Economics* 95: 427–443.

—— (1997) "Empirics for Growth and Distribution: Stratification, Polarization and Convergence Clubs." *Journal of Economic Growth* 2: 27–60.

Ragot, Xavier (2003) "Technical Change and the Dynamics of the Division of Labor." DELTA Working Papers 2003–09. DELTA.

Rajan, Raghuram, and Luigi Zingales (1998) "Financial Dependence and Growth." *American Economic Review* 88: 559–586.

Ramey, Garey, and Valerie Ramey (1995) "Cross-Country Evidence of the Link between Volatility and Growth." *American Economic Review* 88: 1138–1151.

Ramsey, Frank (1928) "A Mathematical Theory of Saving." *Economic Journal* 38: 543–559.

Rauch, James E. (1993), "Productivity Gains from Geographic Concentration of Human Capital: Evidence from the Cities." *Journal of Urban Economics* 34: 380–400.

Rebelo, Sergio (1991) "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth." *Journal of Political Economy* 99: 500–521.

Reinganum, Jennifer (1981) "Dynamic Games of Innovation." *Journal of Economic Theory* 25: 21–24.

—— (1985) "Innovation and Industry Evolution." *Quarterly Journal of Economics* 100: 81–100.

Ringer, Fritz (1979) *Education and Society in Modern Europe.*Bloomington: University of Indiana Press.

Rivera-Batiz, Luis A., and Paul M. Romer (1991) "Economic Integration and Endogenous Growth." *Quarterly Journal of Economics* 106: 531–555.

Roberts, Kevin W. S. (1977) "Voting over Income Tax Schedules."*Journal of Public Economics* 8: 329–340.

Robinson, James, and Jeffrey Nugent (2001) "Are Endowments Fate?" University of California, Berkeley, mimeo.

Rockefeller, Tyrell R. (1971) "Existence in Duality Theorems for Convex Problems of Bolza." *Transactions of the American Mathematical Society* 159: 1–40.

Rodriguez, Francisco, and Dani Rodrik (2000) "Trade Policy and Economic Growth: A Skeptic's Guide to the Cross-National Evidence." *NBER Macroeconomics Annual* 2000: 261–325.

Rodrik, Dani (1999) "Democracies Pay HigherWages." *Quarterly Journal of Economics* 114: 707–738.

Rogerson, Richard, Robert Shimer, and Randall Wright (2004) "Search-Theoretic Models of the Labor Market: A Survey." *Journal of Economic Literature* 43: 959–988.

Romer, David (2006) *Advanced Macroeconomics.* New York: McGraw-Hill.

Romer, Paul M. (1986a) "Increasing Returns and Long-Run Growth." *Journal of Political Economy* 94: 1002–1037.

—— (1986b) "Cake Eating, Chattering, and Jumps: Existence Results for Variational Problems." *Econometrica* 54: 897–908.

—— (1987) "Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization." *American Economic Review* 77: 56–62.

—— (1990) "Endogenous Technological Change." *Journal of Political Economy* 98(part I): S71–S102.

—— (1993) "Idea Gaps and Object Gaps in Economic Development." *Journal of Monetary Economics* 32: 543–573.

Romer, Thomas (1975) "Individual Welfare, Majority Voting and the Properties of a Linear Income Tax." *Journal of Public Economics* 7: 163–168.

Rosenberg, Nathan (1976) *Perspectives on Technology.* Cambridge: Cambridge University Press.

Rosenstein-Rodan, Paul (1943) "Problems of Industrialization of Eastern and Southeastern Europe." *Economic Journal* 53: 202–211.

Rostow, Walt Whitman (1960) *The Stages of Economic Growth: A Non-Communist Manifetso.* Cambridge, Mass.: Cambridge University Press.

Royden, Halsey (1994) *Real Analysis.* New York: Macmillan.

Rudin, Walter (1976) *Introduction to Mathematical Analysis.* New York: McGraw-Hill.

Sachs, Jeffrey (2001) "Tropical Underdevelopment." NBER Working Paper 8119. National Bureau of Economic Research.

Sachs, Jeffrey, and Andrew Warner (1995) "Economic Reform in the Process of Global Integration." *Brookings Papers on Economic Activity* 1: 1–118.

Saint-Paul, Gilles, and Thierry Verdier (1993) "Education, Democracy, and Growth." *Journal of Development Economics* 42: 399–407.

Sala-i-Martin, Xavier (2005) "World Distribution of Income: Falling Poverty and . . . Convergence, Period." *Quarterly Journal of Economics* 121: 351–398.

Salop, Steven (1979) "Monopolistic Competition with Outside Goods." *Bell Journal of Economics* 10: 141–156.

Salter, W.E.G. (1960) *Productivity and Technical Change,* 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press.

Samuelson, Paul A. (1958) "An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money." *Journal of Political Economy* 66: 467–482.

—— (1965) "A Theory of Induced Innovation along Kennedy-Weisäcker Lines." *Review of Economics and Statistics* 47: 343–356.

—— (1975) "Optimum Social Security in a Life–Cycle Growth Model." *International Economic Review* 16: 539–544.

Scherer, Frederick M. (1984) *Innovation and Growth: Schumpeterian Perspectives.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Schlicht, Ekkehart (2006) "A Variant of Uzawa's Theorem." *Economics Bulletin* 6: 1–5.

Schmookler, Jacob (1966) *Invention and Economic Growth.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Schultz, Theodore (1964) *Transforming Traditional Agriculture.* New Haven, Conn.: Yale University Press.

—— (1975) "The Value of the Ability to Deal with Disequilibria." *Journal of Economic Literature* 8: 827–846.

Schumpeter, Joseph A. (1934) *The Theory of Economic Development.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

—— (1942) *Capitalism, Socialism and Democracy.* London: Harper & Brothers.

Scotchmer, Suzanne (2005) *Innovations and Incentives.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Segerstrom, Paul S. (1998) "Endogenous Growth without Scale Effects." *American Economic Review* 88: 1290–1310.

Segerstrom, Paul S., T. C. A. Anant, and Elias Dinopoulos (1990) "A Schumpterian Model of the Product Life Cycle." *American Economic Review* 80: 1077–1091.

Seierstad, Atle, and Knut Sydsaeter (1977) "Sufficient Conditions in Optimal Control Theory." *International Economic Review* 18: 367–391.

—— (1987) *Optimal Control Theory with Economic Applications.* Amsterdam: Elsevier.

Shapley, Lloyd (1953) "A Value for *n*-Person Games." In *Contributions to the Theory of Games,* Kuhn, H. and A. Tucker, (editors). Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Shell, Karl (1971) "Notes on the Economics of Infinity." *Journal of Political Economy* 79: 1002–1011.

Simon, Carl, and Lawrence Blume (1994) *Mathematics for Economists.* New York: W. W. Norton.

Simon, Julian (1977) *The Economics of Population Growth.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Skaperdas, Stergios (1992) "Cooperation, Conflict, and Power in the Absence of Property Rights," *American Economic Review* 82: 720–739.

Solon, Gary, Robert Barsky, and Jonathan A. Parker (1994) "Measuring the Cyclicality of Real Wages: How Important Is Composition Bias?" *Quarterly Journal of Economics* 109:1–25.

Solow, Robert M. (1956) "A Contribution to the Theory of Economic Growth." *Quarterly Journal of Economics* 70: 65–94.

—— (1957) "Technical Change and the Aggregate Production Function." *Review of Economics and Statistics* 39: 312–320.

—— (1970) *Growth Theory: An Exposition.* Oxford: Clarendon Press.

Sonin, Konstantin (2003) "Why the Rich May Favor Poor Protection of Property Rights." *Journal of Comparative Economics* 31: 715–731.

Sonnenschein, Hugo (1972) "Market Excess Demand Functions." *Econometrica* 40: 549–563.

Spence, Michael (1976) "Product Selection, Fixed Costs, and Monopolistic Competition." *Review of Economic Studies* 43: 217–235.

Stewart, Frances (1977). *Technology and Underdevelopment.* London: Macmillan Press.

Stiglitz, Joseph E. (1969) "Distribution of Income and Wealth among Individuals." *Econometrica* 37: 382–397.

—— (1971) "Factor Price Equalization in a Dynamic Economy." *Journal of Political Economy* 78: 456–488.

Stokey, Nancy (1988) "Learning by Doing and the Introduction of New Goods." *Journal of Political Economy* 96: 701–717.

Stokey, Nancy, and Robert E. Lucas, with Edward C. Prescott (1989) *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Stone, Richard (1954) "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand." *Economic Journal* 64: 511–527.

Summers, Lawrence H. (1986) "Some Skeptical Observations on the Real Business Cycle Theory." *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review* 10: 23–27.

Summers, Robert, and Alan Heston (1991). "The Penn World Table (Mark 5): An Expanded Set of International Comparisons, 1950–1988." *Quarterly Journal of Economics* 106: 327–368.

Summers, Robert, Alan Heston, and Bettina Aten (2006) "Penn World Table Version 6.2." Center for International Comparisons of Production, Income and Prices, University of Pennsylvania.

Sundaram, Rangarajan (1996) *A First Course in Optimization Theory.*Cambridge: Cambridge University Press.

Swan, TrevorW. (1956) "Economic Growth and Capital Accumulation." *Economic Record* 32: 334–361.

Tabellini, Guido (2007) "Culture and Institutions: Economic Development in the Regions of Europe." University of Bocconi, mimeo.

Tamura, Robert (1991) "Income Convergence in an Endogeous Growth Model." *Journal of Political Economy* 99: 522–540.

Taylor, Alan M. (1994) "Domestic Savings and International Capital Flows." NBER-Working Paper 4892. National Bureau of Economic Research.

Thoenig, Matthias, and Thierry Verdier (2003) "Trade-Induced Technical Bias andWage Inequalities: A Theory of Defensive Innovations." *American Economic Review* 93: 709–728.

Tirole, Jean (1982) "On the Possibility of Speculation on the Rational Expectations." *Econometrica* 50: 1163–1181.

—— (1985) "Asset Bubbles and Overlapping Generations." *Econometrica* 53: 1499–1528.

—— (1988) *The Theory of Industrial Organization.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Tobin, James (1969) "A General Equilibrium Approach to Monetary Theory." *Journal of Money, Credit, and Banking* 1: 15–29.

Tornell, Aaron, and Andés Velasco (1992) "Why Does Capital Flow from Poor to Rich Countries? The Tragedy of the Commons and Economic Growth." *Journal of Political Economy* 100: 1208–1231.

Townsend, Robert (1979) "Optimal Contracts and Competitive Markets with Costly State Verification." *Journal of Economic Theory* 21: 265–293.

Trefler, Daniel (1993) "International Factor Price Differences: Leontief Was Right!" *Journal of Political Economy* 101: 961–987.

Uhlig, Harald (1996) "A Law of Large Numbers for Large Economies." *Economic Theory* 8: 41–50.

Uzawa, Hirofumi (1961) "Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium!" *Review of Economic Studies* 28: 117–124.

—— (1964) "Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Accumulation." *Review of Economic Studies* 31: 1–24.

Véliz, Claudio (1994) *The New World of the Gothic Fox: Culture and Economy in English and Spanish America.* Berkeley: University of California Press.

Ventura, Jaume (1997) "Growth and Independence." *Quarterly Journal of Economics* 112: 57–84.

—— (2002) "Bubbles and Capital Flows." NBER Working Paper 9304. National Bureau of Economic Research.

—— (2005) "A Global View of Economic Growth." In *Handbook of Economic Growth,* Philippe Aghion and Steven N. Durlauf (editors). Amsterdam: North-Holland, pp. 1419–1498.

Vernon, Raymond (1966) "International Investment and International Trade in Product-Cycle." *Quarterly Journal of Economics* 80: 190–207.

Vogel, Ezra (2006) *Four Little Dragons: The Spread of Industrialization in East Asia.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Von Neumann, John (1945) "A Model of General Equilibrium." *Review of Economic Studies* 13: 1–9.

Wade, Robert (1990) *Governing the Market: Economic Theory and the Role of Government in East Asian Industrialization.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Wallace, Neil (1980) "The Overlapping Generations Model of Fiat Money." In *Models of Monetary Economics,* John Karaken and Neil Wallace (editors). Minneapolis, Minn.: Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Walter, Wolfgang (1991) *Ordinary Differential Equations.* New York: Springer-Verlag.

Wan, Henry, Jr. (1971) *Economic Growth.* New York: Harbrace.

Weber, Max (1930) *The Protestant Ethic and the Spirit of Capitalism.* London: Allen and Unwin.

—— (1958) *The Religion of India.* Glencoe: Free Press.

Webster, David L. (2002) *The Fall of the Ancient Maya: Solving the Mystery of the Maya Collapse.* New York: Thames & Hudson.

Weil, David N. (2005) *Economic Growth.* Boston: Addison-Wesley.

—— (2007) "Accounting for the Effect of Health on Growth." *Quarterly Journal of Economics* 122: 1265–1306.

Weil, Philippe (1987) "Confidence and the Real Value of Money in Overlapping Generation Models." *Quarterly Journal of Economics* 102: 1–22.

—— (1989) "Overlapping Families of Infinitely-Lived Agents." *Journal of Public Economics* 38: 183–198.

Weitzman, Martin L. (2003) *Income, Wealth, and the Maximum Principle.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

White, Lynn T. (1964) *Medieval Technology and Social Change.* New York: Oxford University Press.

Wiarda, Howard J. (2001) *The Soul of Latin America: The Cultural and Political Tradition.* New Haven, Conn.: Yale University Press.

Williams, David (1991) *Probability with Martingales.* Cambridge: Cambridge University Press.

Wilson, Francis (1972) *Labour in the South African Gold Mines, 1911–1969.* Cambridge: Cambridge University Press.

Wong, R. Bin (1997) *China Transformed: Historical Change and the Limits of European Experience.* Ithaca, N.Y.: Cornell University Press.

Wooldridge, Jeffery M. (2002) *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data.*Cambridge, Mass.: MIT Press.

Xu, Bin (2001) "Endogenous Technology Bias, International Trade and Relative Wages." University of Florida, mimeo.

Yaari, Menahem E. (1965) "Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer." *Review of Economic Studies* 32: 137–150.

Young, Alwyn (1991) "Learning by Doing and the Dynamic Effects of International Trade." *Quarterly Journal of Economics* 106: 369–405.

—— (1992) "A Tale of Two Cities: Factor Accumulation and Technical Change in Hong Kong and Singapore." In *NBER Macroeconomics Annual* 1992: 13–54.

—— (1995) "The Tyranny of Numbers." *Quarterly Journal of Economics* 110: 641–680.

—— (1998) "Growth without Scale Effects." *Journal of Political Economy* 106: 41–63.

—— (2005) "The Gift of the Dying: The Tragedy of AIDS and the Welfare of Future African Generations." *Quarterly Journal of Economics* 120: 423–466.

Zeldes, Stephen P. (1989) "Consumption and Liquidity Constraints: An Empirical Investigation." *Journal of Political Economy* 97: 305–346.

Zilcha, Itzak (1978) "Transversality Condition in a Multisector Economy under Uncertainty." *Econometrica* 46: 515–525.

Zuleta, Hernando, and Andrew Young (2006) "Labor's Shares–Aggregate and Industry: Accounting for Both in a Model with Induced Innovation." University of Mississippi, mimeo.

Предметный указатель*

* Номера страниц для понятий, встречающихся в рисунках, отмечены символом *p*, в примечаниях — символом *n*, в таблицах — символом *m*.

Е

З

И

К

Л

М

Н

P

С

Т

Х

Ц

Ч

Ш

Я

Учебное издание

Серия «Академический учебник»

Дарон Асемоглу

Введение в теорию современного экономического роста

Книга 1

Главный редактор *В. В. Анашвили*
Заведующая редакцией *Ю. В. Бандурина*
Выпускающий редактор *Е. В. Попова*
Редактор *О. В. Черкасова*
Художник *Е. Н. Спасская*
Оригинал-макет *О. З. Элоев*
Верстка *А. И. Попов*
Корректор *Л. В. Чернова*

Подписано в печать 14.02.2018. Формат 70x108 1/16
Гарнитура Newton. Усл. печ. л. 81,2.
Тираж 1000 экз. Изд № 1370. Заказ № 4053.

Издательский дом «Дело» РАНХиГС
119571, Москва, пр-т Вернадского, 82

Отпечатано в АО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д.1
Сайт: www.chpd.ru, E-mail: sales@chpd.ru, тел. 8(499)270-73-59

Коммерческий центр — тел. (495) 433-2510, (495) 433-2502
www.ranepa.ru
delo@ranepa.ru

ISBN 978-5-7749-1262-9

9 785774 912629